This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

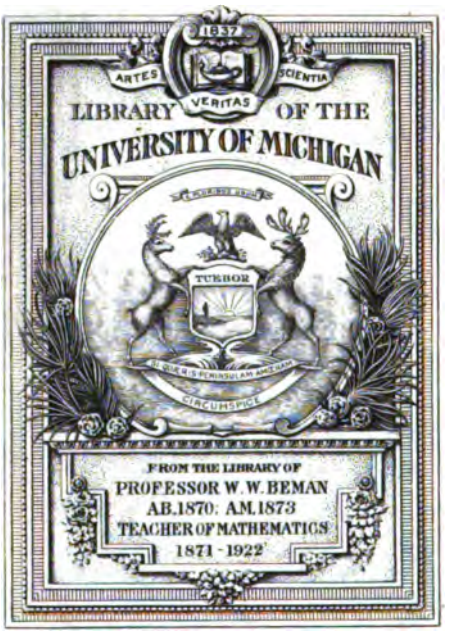
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A 580955 DUPL

Digitized by Google



Digitized by Google

MATHEMATICS
MATHEMATICS
QA
5
.H711

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHEMATISCHES

WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN
WEILAND BAUMEISTER IN BERLIN.

VI. BAND

R. S.

VON **L. NATANI.**

BERLIN
VERLAG VON WIEGANDT UND HEMPEL
1867.

Digitized by Google

W. W. Beman
5-25-1923

Digitized by Google

R.

Rabatt (Praktisches Rechnen).

Rabatt ist im Allgemeinen eine Vergütigung oder ein Nachlass, welcher dem Zahlenden bei gewissen Arten der Zahlung vom Empfänger zu gewähren ist. Die Umstände, unter welchen Rabatt gewährt wird, sind verschiedener Art. Ein Fall ist der, wenn die Zahlung in einer bessern als der gewöhnlichen Geldsorte geleistet wird, z. B. wenn Silber statt minder guten Papiergeldes gegeben wird. Der Rabatt ist hier eben nur als die Differenz des Werthes beider Geldsorten zu betrachten. Steht ein Papier z. B. 6 Procent schlechter als Silber, d. h. sind 100 Thaler Papiergeld gleich 94 Thaler Silbergeld, so wird umgekehrt einer Zahlung, die auf 100 Thaler Papiergeld berechnet ist, mit 94 Thalern Silbergeld genügt werden, und der Zahlende kann daher 6 Procent abziehen, er wird von 500 Thalern z. B. 30 in Abzug bringen. Man nennt dies: „Rabatt vom Hundert." Ist aber die bessere Sorte Geld die ungewöhnlichere, so wird in der Regel ihr Werth in Procenten der schlechteren gegeben sein, so dass man z. B. sagt: die erstere stände 12 Procent besser, als die letztere, wenn 100 Thaler Silber den Werth von 112 Thalern in Papiergeld haben. Es sind dann nicht von 100, sondern von 112 Thalern immer 12 abzuziehen. Z. B. auf 800 Thaler ergibt sich gemäss des Ansatzes:

112 geben 12, was geben 800?

$$\frac{12 \cdot 800}{112} = \frac{6 \cdot 100}{7} = \frac{600}{7} = 85\tfrac{5}{7} \text{ Thaler.}$$

Diese letztere Art Rabatt heisst: „Rabatt auf Hundert". Die Berechnung desselben ist unbequemer, als die des Rabatts vom Hundert, und daher der letztere beliebter. Handelt es sich blos um Coursdifferenzen wie hier, so kann leicht der Rabatt auf's Hundert in Rabatt vom Hundert verwandelt werden, indem man eben berechnet, welcher Abzug auf je 100 Thaler fällt. Z. B. in unserm Beispiel, wo 112 Thaler 12 Thaler geben, werden 100 Thaler

$$\frac{100 \cdot 12}{112} = \frac{25 \cdot 3}{7} = \frac{75}{7},$$

also $10\frac{5}{7}$ Thaler geben; es wird also $10\frac{5}{7}$ Procent vom Hundert zu gewähren sein. — Es ist hieraus auch leicht ersichtlich, dass bei einem gleichen Procentsatze, der dem Namen nach stattfindet, der Käufer beim Rabatt vom Hundert sich besser steht, als beim Rabatt auf Hundert, z. B. wenn bei 800 Thalern Zahlung 12 Procent Rabatt vom Hundert gewährt werden, sind 96 Thaler abzuziehen, während beim Rabatt auf Hundert der Erlass nur $85\frac{5}{7}$ Thaler betrug. — Dieser Art Rabatt gehört unter Andern der sogenannte Messrabatt an, der z. B. auf der Leipziger Messe gegeben wurde, wenn in Conventionsgeld, statt in der gewöhnlichen Münze (sogenannter Messzahlung), gezahlt wurde.

Eine ganz andere Art des Rabattes ist, wenn eine später zu leistende Zahlung gleich geleistet wird. Hier ist die Zinsvergütigung für die Zeit, in welcher eigentlich die Summe noch in den Händen des Zahlenden zu verbleiben hat, die Ursache des Rabattes. Im Geschäftsleben wird auch dieser Rabatt vom Hundert gerechnet. Z. B. eine Schuld von 840 Thalern wird in 3 Monaten fällig. Beide Parteien einigen sich, dass die Zahlung gleich erfolge. Was ist zu zahlen, wenn 5 Procent in Abzug kommen? Der Ansatz ist: 100 Thaler geben in 12 Monaten 5, wieviel geben 840 in 3 Monaten. In einem Monat sind $\frac{1}{12}$ Thaler, in 3 Monaten $\frac{5 \cdot 3}{12}$ für Hundert, also:

$\frac{840 \cdot 5 \cdot 3}{12 \cdot 100}$ für 840 zu leisten. Dies gibt

$\frac{210 \cdot 5}{100} = \frac{21}{2}$, also $10\frac{1}{2}$ Thaler Rabatt.

Digitized by Google

125807

Die allgemeine Formel ist, wenn p die Anzahl der Procente, C die ausstehende Summe, n die Zeit, in welcher dieselbe fällig, r der Rabatt ist:

$$r=\frac{Cp\,.\,n}{100},\text{ wenn }n\text{ in Jahren,}$$

$$r=\frac{Cp\,.\,n}{1200},\text{ wenn }n\text{ in Monaten,}$$

$$r=\frac{Cp\,.\,n}{36000},\text{ wenn }n\text{ in Tagen}$$

gegeben ist, das Jahr, wie im kaufmännischen Leben üblich, zu 360 Tagen gerechnet.

Man überzeugt sich aber leicht, dass diese Art der Berechnung des Rabattes für dieses Verhältniss nicht als richtig zu betrachten ist. Denn ersetze man in unserm Beispiele die 3 Monate durch eine längere Zeit, also z. B. durch 20 Jahre; bei 5 Procent Rabatt würden dann $5\,.\,20=100$ Procent, d. h. die ganze Summe in Wegfall kommen.

Die richtige Art, wie hier verfahren werden muss, ergibt sich aus folgenden Betrachtungen. Wenn eine in 20 Jahren fällige Forderung, etwa 5000 Thaler, jetzt bezahlt wird, so ist dem Empfänger so viel zu geben, dass die empfangene Summe mit den 20jährigen Zinsen der Forderung gleich wird. Denn mit dieser Summe ist er immer im Stande, sich in das frühere Verhältniss zurückzuversetzen, also durch Aufhäufung der Zinsen nach 20 Jahren zu seinen 5000 Thalern zu gelangen. Die Frage ist also die folgende:

Welche Summe wächst mit den 20jährigen Zinsen zu 5 Procent auf 5000 Thaler an?

Ansatz: 100 Thaler geben mit den 20jährigen Zinsen 200 Thaler, welche Summe gibt 5000 Thaler?

$$100:200=x:5000,$$

$$x=\frac{100\,.\,5000}{200},$$

$$x=2500\text{ Thaler.}$$

Es ist also hier die Hälfte zu erlassen. — Sucht man blos den Rabatt, d. h. den zu erlassenden Theil einer Summe, so ist, wie leicht ersichtlich, der Rabatt auf Hundert zu nehmen. Z. B.:

Wie viel Rabatt ist auf 1000 Thaler in 9 Monaten zu gewähren, wenn 5 Procent jährlich gerechnet werden.

100 Thaler geben mit den Zinsen $100+\frac{5\,.\,9}{12}=103\frac{1}{4}$, also von $103\frac{1}{4}$ kommen $3\frac{1}{4}$ in Abzug, wie viel kommen von 1000 in Abzug. Man erhält:

$$\frac{1000\,.\,3\frac{1}{4}}{105\frac{1}{4}}$$

oder

$$\frac{1000\,.\,15}{415}=\frac{3000}{83}=36\tfrac{12}{83}\text{ Thaler.}$$

Die Rechnung ist also in der That wie beim Rabatt auf Hundert, jedoch ist bei der Bildung der Zinsen natürlich die Zeit zu berücksichtigen.

Sucht man eine allgemeine Formel, und behalten die früher gebrauchten Buchstaben $Cpr\,n$ ihre Bedeutung, so ist, wenn wir für n Jahre denken, $100+np$ die Summe, welche jetzt den Werth von 100 hat, also

$$r=\frac{Cpn}{100+np};$$

wäre n in Monaten oder Tagen gegeben, so hätte man bezüglich:

$$r=\frac{Cpn}{1200+np},\text{ wenn }n\text{ Monate sind,}$$

$$r=\frac{Cpn}{36500+np},\text{ wenn }n\text{ Tage sind,}$$

indem wir hier das Jahr zu 365 Tagen rechnen. Nehmen wir das frühere Beispiel, dass 840 Thaler, die in 3 Monat fällig sind, gleich bezahlt und 5 Procent Rabatt berechnet werden, so ergibt sich:

$$r=\frac{840\,.\,5\,.\,3}{1215}=\frac{840}{81}=\frac{280}{27}=10\tfrac{10}{27}\text{ Thlr.}$$

Man sieht also, dass der Unterschied von dem Werthe, welcher sich nach der gebräuchlichen Geschäftsmethode ergab, nur sehr klein ist. Der letztere war nämlich $10\frac{1}{4}$. Uebrigens wird derselbe immer zum Vortheile des Zahlenden ausfallen, wenn man den Rabatt von Hundert statt dessen auf 100 nimmt.

Um den Fehler, welcher beim ersten Verfahren begangen wird, zu finden, wollen wir den richtigen Rabatt mit R, den gebräuchlichen mit r bezeichnen und unter n Jahre verstehen. Dividirt man dann die bezüglichen Werthe von r und R, so erhält man:

$$\frac{r}{R}=\frac{100+np}{100},$$

$$r=R\left(1+\frac{np}{100}\right).$$

Dem Zahlenden erwächst also ein Vortheil von $R\frac{np}{100}$, welcher gleich ist dem Zinssatze, welchen der richtige Rabatt R in der fraglichen Zeit bringen

würde. Wo es sich nur um kürzere Fristen und kleinere Summen handelt, ist derselbe also ohne grossen Nachtheil zu vernachlässigen. — Die meisten Geschäfte, wo es sich um dies Verhältniss handelt, sind in der That derart, dass dies geschehen kann. Das gewöhnlichste ist das sogenannte Discontiren der Wechsel. Es soll ein erst in einigen Monaten fälliger Wechsel verkauft oder in Zahlung gegeben werden. Der Rabatt ist also auf diese Zeit zu gewähren, und dies geschieht immer vom Hundert. Bei grösseren Zeiträumen darf aber nur die letztere Methode angewandt werden. Ein auch in den Gesetzbüchern vorgesehenes Verhältniss, wo es sich hierum handelt, ist folgendes.

Ein Erblasser hinterlässt etwa einem 6jährigen Knaben 1000 Thaler unter der Bedingung, dass ihm dieselben von einer andern Person nach zurückgelegtem 24. Lebensjahre zu zahlen sind, während welcher Zeit die letztere Person den Nicssbrauch der Summe haben soll. Die Vormünder des Kindes aber wollen, mit Einstimmung der andern Partei, die ererbte Summe zur Erziehung des Knaben verwenden. Rechnen wir 4 Procent Zinsen, so giebt unsere Formel:

$$r = \frac{1000.4.18}{100+4.18} = \frac{1000.4.18}{172} = \frac{1000.18}{43}$$

$$= 409\tfrac{4}{43} \text{ Thaler.}$$

Es sind also statt 1000 nur zu zahlen $591\frac{39}{43}$ Thaler.

Es könnte sogar die Frage entstehen, ob beim Rabatt in diesem Falle nicht auch Zinszinsen in Anwendung kommen. In diesem Falle wäre die Frage die:

„Welche Summe ist jetzt zu geben, wenn dieselbe in n Jahren mit den Zinszinsen zu p Procent C Thaler bringen soll?“ Sei K die fragliche Summe, so ist:

$$K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = C,$$

also:

$$K = \frac{C}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n},$$

der Rabatt aber:

$$r = C - K.$$

Indess kann nur an solchen Orten nach dieser Formel gerechnet werden, wo Zinszinsen gesetzlich und gebräuchlich sind, da es sich darum handelt, ob der Empfänger wirklich im Stande ist, sein Geld in der Weise zu verwenden, dass er in der angegebenen Zeit desselben Vortheils als des ihm ursprünglich bestimmten theilhaftig wird. Bei der Anwendung von Zinszinsen würde gegen die frühere Methode der Zahlende im Vortheil sein. Wenn Kaufleute ihre Forderungen und Auslagen, die sie gegenseitig haben, sich gegenseitig rabattiren und den Rabatt von Hundert rechnen, so kann man annehmen, dass der hierbei gemachte Fehler sich ungefähr wieder ausgleicht, da in der Regel ja zwei Geschäftsfreunde einander ungefähr denselben Credit gewähren werden. Wenn dagegen Personen bei Wechslern und andern Kaufleuten Papiere discontiren und ihnen das Disconto von Hundert angerechnet wird, so ist dies als eine Prämie zu betrachten, welche ausser den Zinsen für die Zahlung geleistet wird, und welche mit der Frist wächst, welche das Papier noch zu laufen hat. Der Gebrauch des Discontirens von Hundert ist also mit dem Verlust zu vergleichen, den man bei der Cession von Hypotheken erleiden muss, und den sich derjenige gefallen lassen muss, dem es auf schnellen Besitz von baarem Gelde ankommt.

Auf die beiden Arten des Rabatt für früher erfolgende Zahlung als der Zahlende verpflichtet ist, oder für bessere Valuta, lässt sich wohl jede andere Art zurückführen. Dergleichen sind z. B.: Rabatt gewährt für gleich baare Zahlung bei Geschäften, wo Zahlung in kürzer oder länger laufenden Wechseln gebräuchlich ist. Offenbar ist hier der Rabatt abzurechnen für die Zeit, auf welche die Wechsel gewöhnlich laufen.

Derjenige Rabatt, welcher bei grösseren Einkäufen gewährt wird, ist auch desselben Ursprungs. Der Verkäufer muss nämlich darauf rechnen, dass seine Waare eine gewisse Zeit liegen bleibt, während welcher er keinen Zinsgenuss von der aufgewandten Geldsumme hat. Wird ihm nun eine grössere Waarenmenge gleich abgenommen, so ist dies so aufzufassen, als würde er in den Besitz einer später zu erwarteten Summe jetzt gleich gesetzt, und kann daher für den muthmasslichen Gewinn an Zeit Rabatt gewähren. Ja derselbe wird wachsen, wenn die abgenommene Waarenmenge sich vergrössert, z. B. wenn bei der Abnahme von 100 Thalern Waare 10 Procent gewährt werden, sind bei der Abnahme zum Werthe von 1000 Thalern vielleicht 20 Procent Rabatt zu haben. Die billigeren Preise, die Wiederverkäufern gewährt werden, stammen aus dieser Quelle.

Digitized by Google

Aber auch festen Kunden giebt man Rabatt, und mit Recht; denn da diese ungefähr zu bestimmten Zeiträumen wiederkehrend Waaren verlangen, so kann sich der Verkäufer derart einrichten, dass er gerade zu dieser Zeit seine Waare vorräthig hat, und spart also die Verluste, welche ihm durch das Lagern derselben erwachsen. Am gebräuchlichsten ist der Buchhändlerrabatt, und wenn dieser ziemlich hohe Beträge, 25 bis 30 Procent erreicht, so ist dies dadurch zu erklären, dass viele Bücher sehr an Werth verlieren, wenn sie lange lagern, da sie eben nur für eine gewisse Zeit und ein gewisses dem Wechsel ausgesetztes Publikum berechnet sind. — Gleichbedeutend mit den Ausdrücken Rabatt und Disconto ist auch Sconto und zuweilen Decort.

Rad. (Maschinenlehre.)

1) Allgemeines.

Rad ist ein fester Körper in der Form eines Rotationscylinders, seltener in der eines abgestumpften Rotationskegels, von in der Regel geringer Höhendimension, der um seine Axe drehbar ist.

Räder und Zusammenstellungen von Rädern, d. h. Räderwerke, bilden die wichtigsten Zwischenmaschinen und dienen im Allgemeinen zur Aufnahme einer rotirenden Bewegung und zur weiteren Fortpflanzung, zugleich zur nöthigen Modification derselben, so wie auch zur Verwandlung einer rotirenden Bewegung in eine hin und her gehende oder fortlaufende gradlinige und umgekehrt.

Die Räder einer Uhr oder einer Mühle z. B. vermitteln die Verlangsamung der rotirenden Bewegung, so wie die Versetzung derselben nach andern Punkten hin. Das Schwungrad einer Dampfmaschine dient, um die auf- und abgehende Bewegung des Kolbens in eine rotirende zu verwandeln; ein Zahnrad mit einer Zahnstange verbunden kann letztere in eine auf- und absteigende Bewegung versetzen, und die Räder einer Locomotive vermitteln die Verwandlung der rotirenden Bewegung, die von der Maschine ausgeht, in eine fortschreitende gradlinige, durch das Anhaften an den Schienen, welches sie vermöge der Reibung erleiden.

Eine etwas complicirtere Thätigkeit haben die Räder eines gewöhnlichen Wagens oder Karrens. Da letzterer in fortschreitender Bewegung ist und das Rad am Boden vermöge der Reibung zugleich in Rotation versetzt ist, so dienen sie dazu, die Reibung zu verringern, indem sie die fortschreitende Bewegung zunächst in eine rotirende, die letztere dann wieder in eine fortschreitende verwandeln.

Selten sind Räder voll gearbeitet, sondern die Peripherie des Rades, Kranz genannt, ist durch strahlenförmige Radarme oder Speichen (stangenförmige Körper) mit der Hülse oder Nabe verbunden, welche sich im Centrum des Rades befindet und ein hohler Cylinder ist, welcher die Radaxe umgibt, so dass eine Drehung um dieselbe erfolgen kann. Letztere fällt zuweilen, namentlich bei hölzernen Maschinenrädern, ganz aus, wenn die Axe selbst in rotirender Bewegung ist, die sich dann unmittelbar dem Rade mittheilt. Ausserdem treten bei Zahnrädern noch die Zähne, bei Schaufelrädern die Schaufeln hinzu. Räder werden von Eisen oder Holz angefertigt. Gewöhnliche Wagenräder sind bekanntlich von Holz, der Radkranz ist dann aus bogenförmigen Holzstücken, sogenannten Radfelgen, zusammengesetzt, bei Wagenrädern mit einem schmiedeeisernen Reifen oder Bande umgeben.

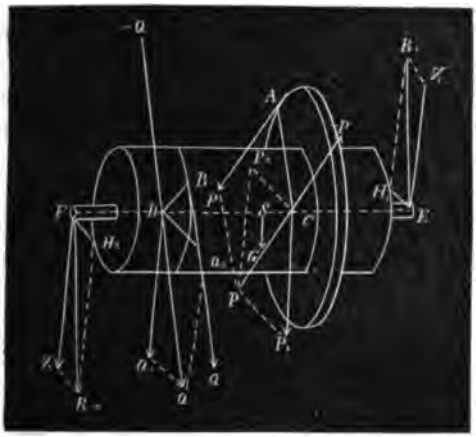
Die Speichen sind bei Holzrädern in Nabe und Kranz eingezapft. Bei Eisenrädern kann das ganze Rad in einem Stück gegossen werden, oder auch, was bei grösseren Rädern wegen der Gefahr des Zerspringens vorgezogen wird, werden Arme und Kranz besonders gegossen und durch Schrauben verbunden. Zuweilen sind eiserne Räder mit Holzzähnen verbunden, und müssen letztere dann auf den Kranz aufgesetzt werden, welches durch eiserne Stifte oder durch einen Keil erfolgt, den man am innern Radumfange zwischen je zwei Zahnstielen einklemmt.

Der Construction der Zähne ist besondere Rücksicht zu widmen.

2) Das Rad an der Welle oder die Radwelle.

Die einfachste Vorrichtung, auf welche sich die meisten Anwendungen der Räder bei Maschinen zurückführen lassen, ist die Radwelle oder das Rad an der Welle *(roue sur l'arbre, wheel and axle)*. 2 Räder sind um eine gemeinschaftliche Axe drehbar und mit einander fest verbunden. Dasjenige, welches den kleineren Durchmesser hat, heisst Welle, das mit grösserem Durchmesser versehene Rad. Die Enden *EF* (Fig. 1), mit welchen die Axe auf einer stützenden Vorrichtung ruht, heissen Zapfen. Nehmen wir an, die Axe sei horizontal. Um Welle und Rad sollen Seile geschwungen sein, von denen das erstere der Last *Q*, das

Fig. 1.



letztere der Kraft P als Angriff dient. — Möge Gleichgewicht herrschen. — Es ist zu bestimmen, 1) wie sich P und Q zu einander verhalten, und 2) welchen Druck die Zapfenlager bei E und F erleiden. Da sowohl P als Q tangential gegen die Begrenzung von Rad und Welle wirken, so kann man die statischen Momente beider Kräfte finden, wenn man von der Axe aus Lothe CA und DB nach den Angriffspunkten zieht, und diese Lothe sind offenbar die Halbmesser von Rad und Welle. Sei a der erstere, also gleich CA, $b = DB$ der letztere, so sind die Momente Pa und Qb. Also, damit Gleichgewicht herrsche, muss sein

$$Pa = Qb$$

oder

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a},$$

d. h. „das Product aus Kraft und Radarm ist gleich dem Product aus Last und Wellenarm." Es ist hierbei berücksichtigt, dass Kraft und Last nach unten ziehen, aber in einander entgegengesetzter Richtung drehen.

Wir denken uns jetzt in Zapfen E und F Druckkräfte angebracht, welche das Herabsinken der Vorrichtung verhindern. Den in E angebrachten Druck zerlegen wir in V_1 vertical und in H_1 horizontal, ebenso den in F angebrachten in V_2 und H_2. Ausser diesen Drucken wirkt noch Kraft P, welche mit dem Horizonte den Winkel α machen soll, also zerfällt in:

$$P_1 = P \sin \alpha \text{ vertical}$$

und

$$P_2 = P \cos \alpha \text{ horizontal};$$

ebenso hat man, wenn Q mit dem Horizonte den Winkel β macht,

$$Q_1 = Q \sin \beta \text{ vertical}$$

und

$$Q_2 = Q \cos \beta \text{ horizontal.}$$

Dann wirkt im Schwerpunkte das Gewicht der Maschine G vertical. Da alle diese Kräfte nach irgend einem Punkte der Axe verlegt sich in Gleichgewicht halten, da die Axe fest ist, so hat man:

$$V_1 + V_2 = P_1 + Q_1 + G,$$
$$H_1 + H_2 = P_2 + Q_2,$$

mit Berücksichtigung der Richtung der Kräfte.

Betrachtet man nun E als Stützpunkt eines Hebels, auf welchen alle diese die Axe angreifenden Kräfte wirken, ist ferner $l = EF$ die Axenlänge, $\partial = CE$ der Abstand desjenigen Durchschnittes des Rades, in welchem P angreift, $e = DE$ der desjenigen Durchschnitts der Welle, wo Q angreift, $c = SE$ der Abstand des Schwerpunktes von E, so hat man, wenn man die Summe der statischen Momente der Null gleich setzt, für den Verticaldruck:

$$V_2 l = P_1 \partial + Q_1 e + Gc$$

und für den Horizontaldruck:

$$H_2 l = P_2 \partial - Q_2 e,$$

also:

$$H_2 = \frac{P_2 \partial - Q_2 e}{l},$$

$$V_2 = \frac{P_1 \partial + Q_1 e + Gc}{l}.$$

Betrachtet man dagegen F als Stützpunkt

Digitized by Google

des Hebels, so ist:

$$V_1 l = P_1(l-\partial) + Q_1(l-e) + G(l-c),$$
$$H_1 l = P_2(l-\partial) - Q_2(l-e),$$

also:

$$V_1 = \frac{P_1(l-\partial) + Q_1(l-e) + G_1(l-c)}{l},$$

$$H_1 = \frac{P_2(l-\partial) - Q_2(l-e)}{l}.$$

Ist der Gesammtdruck auf $E = R_1$, auf $F = R_2$, δ_1 und δ_2 bezüglich die Winkel mit dem Horizont, so hat man:

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{V_1}{H_1}, \quad \operatorname{tg}\delta_2 = \frac{V_2}{H_2},$$

$$R_1 = \sqrt{(V_1^2 + H_1^2)}, \quad R_2 = \sqrt{(V_2^2 + H_2^2)}.$$

Es finde jetzt Bewegung an der Vorrichtung statt. Ist P grösser als Q, so wird diese in dem Sinne erfolgen, in welchem die Kraft dreht, und das Moment der Beschleunigung wird sein

$$Pa = Qb.$$

Sei diejenige Grösse, um welche die Winkelgeschwindigkeit der Vorrichtung nach je einer Secunde zunimmt, r die Entfernung irgend eines Punktes derselben von der Axe, μ die Masse dieses Punktes, so ist das Moment der beschleunigten Bewegung dieses Punktes $\mu r^2 \vartheta$, da $r\vartheta$ die wahre Geschwindigkeit des Punktes ist. Für alle Punkte des ganzen Systems ist also die Momentensumme $\vartheta \Sigma \mu r^2$.

Der Ausdruck $\Sigma \mu r^2$ heisst bekanntlich Trägheitsmoment. Die Integralrechnung gibt einfache Mittel, ihn zu bestimmen. In diesem Falle könnte es auch auf elementarem Wege geschehen. Wir bezeichnen hier das Trägheitsmoment der Radwelle mit W. Es ist dann ϑW das statische Moment, welches aus der Bewegung der Radwelle sich ergibt. Mit demselben ist das sich aus den Gewichten ergebende zu verbinden.

Nimmt man, wie es einmal, vielleicht nicht ganz zweckmässig, eingeführt ist, eine Masse, deren Gewicht gleich g ist, als Masseneinheit an, so sind $\frac{P}{g}$, $\frac{Q}{g}$ die Massen von Kraft und Last, und da dieselben bezüglich in den Entfernungen a und b von der Axe wirken:

$$\vartheta\left(\frac{Pa^2}{g} + \frac{Qb^2}{g}\right)$$

die Summe der ihnen entsprechenden statischen Momente. Man hat also, wenn man der Symmetrie wegen noch setzt:

$$W = \frac{Gk^2}{g},$$

$$(Pa - Qb)g = \vartheta(Pa^2 + Qb^2 + Gk^2),$$

$$\vartheta = \frac{(Pa - Qb)g}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}.$$

Die Beschleunigungen, mit denen die Last steigt, die Kraft sinkt, werden bezüglich sein ϑa und ϑb, so dass, wenn q die erstere, p die letztere ist, man hat:

$$p = \frac{(Pa - Qb)ga}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2},$$

$$q = \frac{(Pa - Qb)gb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}.$$

Ist α die Beschleunigung einer Bewegung, die durch eine gleichförmig beschleunigende Kraft wie die Schwere bewirkt wird, so ist bekanntlich αt die Geschwindigkeit nach t Secunden, $\frac{1}{2}\alpha t^2$ der zurückgelegte Raum; wenn man also hier α nach einander durch ϑ, p und q ersetzt, so erhält man:

Winkelgeschwindigkeit nach t Secunden	$= \vartheta t$,
Geschwindigkeit der Last in t Secunden	$= qt$,
Geschwindigkeit der Kraft in t Secunden	$= pt$,
Rotationswinkel	$= \frac{1}{2}\vartheta t^2$,
Hebung des Lastgewichtes	$= \frac{1}{2}qt^2$,
Sinken des Kraftgewichtes	$= \frac{1}{2}pt^2$.

Am Kraftseile wirken einander entgegen das Gewicht P nach unten und die Beschleunigung der Bewegung p, welche auf Masse $\frac{P}{g}$ wirkt, also einen Zug $\frac{Pp}{g}$ nach oben bewirkt; es ist also die Spannung des Seiles, an welchem die Kraft angebracht ist:

$$S = P - \frac{Pp}{g} = P\left(1 - \frac{p}{g}\right).$$

Am Lastseile wirken zusammen Gewicht Q und Druck $\frac{Qq}{g}$, welcher, da die Bewegung nach oben geht, als nach unten ziehend zu betrachten ist. Die Spannung des Lastseiles ist also:

$$S_1 = Q + \frac{Qq}{g} = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right).$$

Diese beiden Druckkräfte vereinen sich

Google

zum Zapfendrucke:

$$S+S_1 = P+Q-\frac{Pp-Qq}{g}$$
$$= P+Q-\frac{(Pa-Qb)^2}{Pa^2+Qb^2+Gk^2}.$$

Wirken noch andere Kräfte oder Widerstände, wie z. B. Steifigkeit der Seile, Zapfenreibung, so sind die Momente derselben dem Kraftmomente einfach hinzuzufügen.

Ist die Welle nicht horizontal, so ist die Schwere demgemäss zu modificiren oder durch die an ihrer Stelle wirkenden Kräfte zu ersetzen.

3) Von den Räderwerken im Allgemeinen.

Räderwerke *(rouages, wheel-works)* werden namentlich angewandt, wenn die Geschwindigkeit und die Axe einer rotirenden Bewegung geändert werden soll. Sie bestehen aus einer Anzahl ineinandergreifender Radwellen — Einfache Räderwerke bestehen aus 2 Radwellen, deren eine in die andere greift und die von ihr ausgehende Bewegung der letzteren mittheilt. Diese Mittheilung kann erfolgen I. durch unmittelbares Eingreifen des einen Rades in das andere, wenn die Bewegung nach geringen Entfernungen fortgepflanzt werden soll. II. Mittels einer umschlungenen Schnur bei grösseren Entfernungen beider Radwellen. Diese letzteren heissen Schnur- oder Riemenräderwerke *(rouages à courroies, straped wheel-works)*, bei den ersteren Räderwerken kann zwar bei sehr kleiner Kraft die Bewegung durch unmittelbare Berührung und dadurch erfolgende Reibung übertragen werden, in jedem andern Falle müssen die ineinander greifenden Räder Zähne haben, die durch Druck ihre Bewegung mittheilen. Man hat dann ein Zahnräderwerk *(engrenages, geerings* oder *toothed wheel-works)*. Das Rad, von dem die Bewegung ausgeht, heisst Triebrad *(roue conductrice, driver)*, das in Bewegung gesetzte Getriebe *(roue conduite, follower)*. Es ist leicht zu sehen, dass man je nach der Art, wie der Riemen umgeschlungen ist, das Getriebe in derselben oder in entgegengesetzter Richtung als das Triebrad bewegen kann; ersteres erfolgt, wenn die Richtungen, in welche der Riemen die Räder berührt, auf derselben Seite beider Axen sich schneiden, letzteres, wenn sie zwischen den Axen sich schneiden. Bei Zahnrädern erfolgt entgegengesetzte Richtung, wenn die Räder sich von aussen, gleiche, wenn sie sich von innen berühren.

Die Richtung der zu einem Räderwerk gehörigen Axen kann sein: 1) parallel, 2) nicht parallel aber in einer Ebene liegend, 3) nicht in einer Ebene liegend. Wir sprechen zunächst von Räderwerken der ersten Art. — Wird vollkommene Mittheilung der Bewegung vorausgesetzt, so muss die Geschwindigkeit von Triebrad und Getriebe im Umfange dieselbe sein. Da nun die wahre Geschwindigkeit eines rotirenden Punktes, dessen Entfernung von der Rotationsaxe r und dessen Winkelgeschwindigkeit ϑ ist, gegeben ist durch die Formel: $v=2\pi r\vartheta$, so hat man, wenn unter v, r, ϑ diese Grössen in Bezug aufs Triebrad, v_1, r_1, ϑ_1 in Bezug auf Getriebe verstanden werden:

$$v=v_1, \quad r\vartheta = r_1\vartheta_1,$$
$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1}=\frac{r_1}{r}.$$

„Die Winkelgeschwindigkeiten beider Räder verhalten sich umgekehrt wie ihre Halbmesser."

Hat das eine Rad also den $n$fachen Radius des andern, so macht das letztere $n$mal so viel Umdrehungen als das erstere.

Seien jetzt a, b bezüglich die Radien des Rades und der Welle an einer, a_1, b_1 an der andern Radwelle, wirke die Kraft P am Rade mit Radius a, die Last Q an der Welle mit Radius b_1, greife das Rad mit Radius a_1 in die Welle mit Radius b, so wird zwischen beiden ein gegenseitiger Verticaldruck M stattfinden. Es wird also nach vorigem Abschnitt einerseits sein:

$$Pa = Mb,$$

anderseits:

$$Ma_1 = Qb_1,$$

falls gleichmässige Bewegung stattfindet, die beschleunigenden Kräfte also Gleichgewicht halten; also wenn man M eliminirt:

$$Paa_1 = Qbb_1$$

oder

$$\frac{P}{Q}=\frac{bb_1}{aa_1},$$

d. h. „Kraft und Last verhalten sich wie die Producte der Wellen- und Radarme."

Sind wieder ϑ, ϑ_1 die Winkelgeschwindigkeiten, so ist $\frac{\vartheta}{\vartheta_1}=\frac{a_1}{b}$, also

$$\frac{P}{Q}=\frac{\vartheta_1 b_1}{a\vartheta}.$$

Digitized by Google

Der Ausdruck $\frac{\vartheta_1}{\vartheta}$ wird auch Umsetzungszahl genannt.

Findet gleichmässige Bewegung statt, so ist aber auch, wenn man v, v_1 die Geschwindigkeiten der Kraft und Last nennt:

$$v = a\vartheta, \quad v_1 = b_1\vartheta_1,$$

da jede Radwelle constante Winkelgeschwindigkeit hat. Also:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{b_1\vartheta_1}{a\vartheta} = \frac{b_1\psi}{a} = \frac{bb_1}{aa_1} = \frac{P}{Q},$$

wo unter ψ die Umsetzungszahl verstanden ist. Hieraus ergiebt sich auch:

$$Pv = Qv_1.$$

Diese Producte Pv und Qv_1 werden bekanntlich „Arbeit" genannt, also „Kraft und Last haben gleiche Arbeit"; oder wenn man bedenkt, dass beide in entgegengesetzter Richtung wirken, also P oder Q negativ zu denken ist, „die Arbeit ist gleich Null" Bekanntlich ist letzteres immer der Fall, wenn, wie hier, die lebendige Kraft nicht geändert wird.

Seien jetzt mehrere Radwellen vorhanden, und a, a_1, $a_2 \ldots a_n$ die Radien der Räder, b, b_1, $b_2 \ldots b_n$ die der Wellen; greife die Kraft P das Rad mit Radius a, die Last Q die Welle mit Radius b_n an, so findet man, wenn $M, M_1, M_2 \ldots M_{n-1}$ die Druckkräfte sind, welche eine Radwelle auf die andere ausübt:

$$Pa = Mb, \; Ma_1 = M_1b_1, \; M_1a_2 = M_2b_2 \ldots M_{n-1}a_n = Qb_n,$$

also durch Multiplication aller dieser Gleichungen:

$$Pa\,a_1a_2 \ldots a_n = Qb\,b_1b_2 \ldots b_n.$$

Sind ferner

$$\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2 \ldots \vartheta_n$$

die Winkelgeschwindigkeiten, so hat man:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = \frac{a_1}{b}, \; \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{a_2}{b_1} \ldots \frac{\vartheta_{n-1}}{\vartheta_n} = \frac{a_n}{b_{n-1}},$$

oder wenn man alle diese Gleichungen multiplicirt:

$$\frac{\vartheta_n}{\vartheta} = \frac{bb_1 \ldots b_{n-1}}{aa_1 \ldots a_n} = \frac{Pa}{Qb_n}.$$

Sind ferner $\psi, \psi_1 \ldots \psi_{n-1}$ die Umsetzungs-Geschwindigkeiten einer Radwelle, in Bezug zur vorhergehenden, so ist:

$$\psi = \frac{b}{a_1}, \; \psi_1 = \frac{b_1}{a_2} \ldots \psi_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{a_n}$$

und:

$$\psi\,\psi_1 \ldots \psi_{n-1} = \frac{Pa}{Qb_n} = \frac{\vartheta_n}{\vartheta}.$$

Sind endlich v, v_1 die Geschwindigkeiten von Kraft und Last, so ist:

$$v = a\vartheta, \quad v_1 = b_n\vartheta_n,$$

also:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{b_n\vartheta_n}{a\vartheta},$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{P}{Q}, \text{ d. h. } Pv = Qv_1$$

oder auch:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{b_n}{a}\,\psi\,\psi_1\,\psi_2 \ldots \psi_{n-1},$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{\vartheta_n b_n}{\vartheta a}.$$

Das Product

$$\psi\,\psi_1\,\psi_2 \ldots \psi_{n-1} = \frac{\vartheta_n}{\vartheta}$$

heisst hier Umsetzungszahl; es drückt das Verhältniss der Anzahl der Umdrehungen der letzten Radwelle zu der der erstern in irgend einer Zeit aus. Aus diesen Formeln folgt:

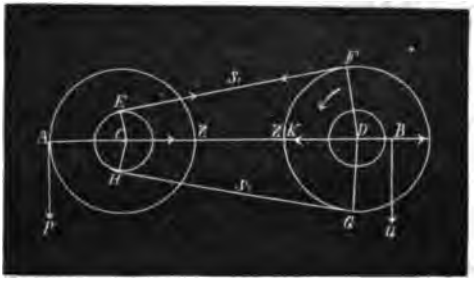
I) Die Umsetzungszahl des ganzen Räderwerkes ist gleich dem Producte aus den Umsetzungszahlen je zweier Radwellen, oder gleich dem Producte der Radien der Treibräder, dividirt durch das Product der Radien der Getriebe.

II) Die Kraft verhält sich zur Last umgekehrt wie die Geschwindigkeit der entsprechenden Gewichte, und gleich dem Verhältniss des Lastarmes zum Kraftarme, multiplicirt mit der Umsetzungszahl des Räderwerkes.

4) **Riemenräderwerk.**

Während bei Zahnräderwerken die Umdrehungskraft unmittelbar übertragen wird, geschieht dies bei den Riemenräderwerken vermittelst der Riemenspannung. Da (Fig. 2) die das Getriebe D angreifenden Riementheile FE und GH in entgegengesetzter Richtung drehen, so wird, wenn S_1 und S_2 ihre Spannungen sind, die Reaction, die Rad C auf D

Fig. 2.



ausübt und die wir (Abschnitt 2) mit M bezeichnet haben;

$$M = S_1 - S_2,$$

nämlich:

$$Q b_1 = (S_1 - S_2) a_1 = M a_1,$$

also:

$$M = S_1 - S_2.$$

Kann man annehmen, dass beide Riementheile beinahe parallel sind, so wird dagegen auf die Radaxe eine Zugkraft ausgeübt, die

$$N = S_1 + S_2$$

ist, da beide Riementheile in derselben Richtung ziehen. Bei Zahnrädern würde die Wirkung auf die Axe dagegen immer gleich M sein, da sie unmittelbar übertragen wird, und daher die Reaction auf die Axe sich bei beiden Arten von Räderwerken verhalten, wie

$$S_1 - S_2 : S_1 + S_2.$$

Sie ist also bei Zahnrädern geringer, und in dieser Beziehung sind sie also den Riemenräderwerken vorzuziehen. Bei Zahnrädern wirken ferner alle Kräfte vertical, nimmt man also auf die Gewichte der Räder keine Rücksicht, so ist bei ihnen der Axendruck der ersteren Radwelle:

$$R = P + M = \left(1 + \frac{a}{b}\right) P$$

und der der zweiten

$$R_1 = Q - M = \left(1 - \frac{b_1}{a_1}\right) Q.$$

Bei Riemenräderwerken sind dagegen der Druck der Gewichte P und Q einerseits und die Spannung der Riemen N andererseits senkrecht aufeinander, sie setzen sich also nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen in:

$$R = \sqrt{P^2 + N^2} = \sqrt{P^2 + (S_1 + S_2)^2},$$

$$R_1 = \sqrt{Q^2 + N^2} = \sqrt{Q^2 + (S_1 + S_2)^2}.$$

Die Axenreibungen (bekanntlich dem Druck proportional, s. den Artikel Reibung) sind

$$\varphi R \text{ und } \varphi R_1,$$

wenn φ der Reibungscoefficient ist. — Was die Zapfenreibung anbetrifft, so sei ϱ der Zapfenradius des Triebrades, ϱ_1 der des Getriebes, F und F_1 die entsprechenden Reibungen also:

$$F a = \varphi \varrho R, \quad F_1 b_1 = \varphi \varrho_1 R_1$$

oder:

$$F = \frac{\varphi \varrho R}{a}, \qquad F_1 = \frac{\varphi \varrho_1 R_1}{b_1}$$

Soll in der Beziehung zwischen Kraft und Last die Reibung berücksichtigt werden, so ist zu ersetzen:

P durch $P - F$, Q durch $Q + F_1$.

Man hatte:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\vartheta_1 b_1}{a \vartheta},$$

also jetzt:

$$(P - F) a \vartheta = (Q + F_1) \vartheta_1 b_1$$

oder wenn man die Umsetzungszahl $\frac{\vartheta_1}{\vartheta}$ durch λ bezeichnet:

$$P a = F a + Q b_1 \lambda + F_1 b_1 \lambda$$

oder wenn man für F und F_1 ihre Werthe setzt:

$$P a = Q b_1 \lambda + \varphi (R \varrho + R_1 \varrho_1 \lambda).$$

Die Riemenspannung ist von 3 Ursachen abhängig, von der Kraft, welche durch den Riemen übertragen wird, M, von dem Theile und dem Umfange der Räder, welchen der Riemen überdeckt, und von dem Reibungscoefficienten φ.

Ist S_2 die Spannung des Seiles, welches über einem festen Cylinder liegt, an einem Ende, so übt dies Seil eine Zugkraft aus, welche ist:

$$S_1 = e^{\varphi \alpha} S_2 = (2,71828\ldots)^{\varphi \alpha} S_2$$

Digitized by Google

wo α derjenige Bogen ist, den das Seil bedeckt, (in Theilen von π ausgedrückt). Es wird daher die Reibung des Seiles sein: $S_1 - S_2 = (e^{\eta\alpha} - 1) S_2$. Diese Reibung muss der nöthigen Umdrehungskraft M gleich sein, damit in der That Umdrehung erfolge, und man hat daher zu setzen:

$$M = (e^{\eta\alpha} - 1) S_2$$

$$S_2 = \frac{M}{e^{\eta\alpha} - 1}.$$

Die Spannung des Riemens, welcher sich auf das Treibrad aufwickelt:

$$S_1 = \frac{e^{\eta\alpha} M}{e^{\eta\alpha} - 1},$$

endlich die mittlere Spannung, welche der Riemen vor der Bewegung haben muss:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{M}{2} \frac{e^{\eta\alpha} + 1}{e^{\eta\alpha} - 1},$$

wo überall zu setzen ist:

$$M = \frac{Pa}{b} = \frac{Qb_1}{a_1}.$$

Ist noch A das Arbeitsquantum des Räderwerks in der Secunde, v die Geschwindigkeit am Radumfange, so ist offenbar

$$Mv = A;$$

aber da

$$v = \frac{2\pi a u}{60} = \frac{2\pi b_1 u_1}{60}$$

ist,

wenn u und u_1 die Anzahl der Umdrehungen der Räder in der Minute bezeichnet, wo dann

$$\vartheta = \frac{u}{60}, \quad \vartheta_1 = \frac{u_1}{60}$$

sein muss, so hat man auch:

$$M = \frac{30A}{\pi a u} = \frac{30A}{\pi b_1 u_1} = \frac{9{,}549A}{au} = \frac{9{,}549A}{a_1 u_1}$$

Beispiel. Sei das Arbeitsquantum A gleich 2 Pferdekräften, besitze das Seil eine Geschwindigkeit von 6 Fuss, und möge dasselbe (wie es bei sehr grossen Entfernungen anzunehmen ist) den halben Umfang der Räder bedecken, sei ferner $\eta = \frac{1}{3}$. Man hat dann:

$$e^{\eta\alpha} = 2{,}71828^{1{,}5708} = 4{,}81$$

$$S_2 = \frac{2 \cdot 510}{6(4{,}81 - 1)} = \frac{170}{3{,}81} = 44{,}6 \text{ Pfund.}$$

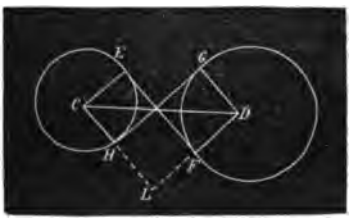
$$S_1 = e^{\eta\alpha} S_2 = 214{,}6 \text{ Pfund.}$$

Die mittlere Spannung ist:

$$\frac{214{,}6 + 44{,}6}{2} = 129{,}6 \text{ Pfund.}$$

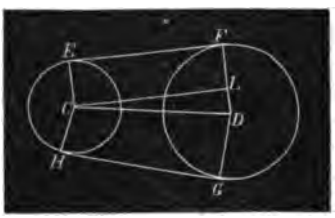
Die Länge der Bögen, welche die Riemen decken, ist gegeben, wenn man den Halbmesser b und a_1 und die Entfernung ∂ beider Radaxen kennt, ausserdem muss man wissen, ob die Riemen gekreuzt sind

Fig. 3.



oder nicht gekreuzt

Fig. 4.



Offenbar ist im ersteren Falle Winkel $FDG = ECH = \alpha$ gegeben durch die Formel:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{DL}{CD} = \frac{a_1 + b}{\partial}$$

und im letzteren durch die Formel:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{DL}{CD} = \frac{a_1 - b}{\partial}$$

Im ersteren Falle gibt α denjenigen Bogen an, dessen Ergänzung zu 2π also $2\pi - \alpha$ in beiden Rädern durch den Riemen gedeckt wird, im letzteren Falle ist am kleineren Rade Bogen α, am grösseren $2\pi - \alpha$ gedeckt. Was die Länge des ganzen Riemens anbetrifft, so beträgt sie im ersten Fall:

$$l = EF + GH + (b + a_1)(2\pi - \alpha)$$

wenn man α in Bogenmaass ausdrückt, also mit Rücksicht auf die Werthe von

$$EF = GH = CL = \partial \sin\frac{\alpha}{2}$$

Digitized by Google

$$l = 2\partial \sin\frac{\alpha}{2} + (b + a_1)(2\pi - \alpha);$$

wogegen sich im 2ten Falle ergibt:

$$l = 2\partial \sin\frac{\alpha}{2} + b\alpha + a_1(2\pi - \alpha).$$

Ist der Riemen sehr lang, so kann man $\alpha = \pi$ oder gleich 180° nehmen, und es ist also $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$, $\sin\frac{\alpha}{2} = 1$, also in beiden Fällen:

$$l = 2\partial + (b + a_1)\pi.$$

Die Werthe von φ sind je nach der Beschaffenheit der Riemen und der Räder verschieden; aus ihnen berechnen sich die Werthe von $e^{\varphi\alpha}$.

Wir entnehmen das folgende Täfelchen für diese Grössen Weissbach's Ingenieur- und Maschinenmechanik.

$e^{\varphi\alpha}$

$\frac{\alpha}{2\pi}$	$\varphi = 0{,}50$ gilt für neue Riemen auf Holzrädern.	$\varphi = 0{,}47$ gilt für gewöhnliche Riemen auf Holzrädern.	$\varphi = 0{,}28$ gilt für gewöhnliche Riemen auf Eisenrädern.	$\varphi = 0{,}38$ für feuchte Riemen auf Eisenrädern.	$\varphi = 0{,}50$ für Schnüre auf Holzrädern rauh.	$\varphi = 0{,}33$ für Schnüre auf Holzrädern polirt.
0,2	1,87	1,80	1,42	1,61	1,87	1,51
0,3	2,57	2,43	1,69	2,05	2,57	1,86
0,4	3,51	3,26	2,02	2,60	3,51	2,29
0,5	4,81	4,38	2,41	3,30	4,81	2,82
0,6	6,59	5,88	2,87	4,19	6,58	3,47
0,7	9,02	7,90	3,43	5,32	9,01	4,27
0,8	12,34	10,62	4,09	6,75	12,34	5,25
0,9	16,90	14,27	4,87	8,57	16,90	6,46
1,0	23,14	19,16	5,81	10,89	23,14	7,95

Was die Sicherheit der Riemen anbetrifft, so soll gutes Rindsleder (Kernleder) 250 Pfund Sicherheitsmodul haben, während der Elasticitätsmodul etwa 10,000 Pfund beträgt. Es würde sich sonach ein Ausdehnungsverhältniss von

$$\frac{250}{10000} = \frac{1}{40}$$

ergeben. Beträgt die Riemendicke $\frac{1}{6}$ Zoll und ist die Riemenbreite gleich b, so darf die Spannung nicht überschreiten die Grösse:

$$S_1 = \frac{250b}{6} \text{ ungefähr gleich } 40b;$$

und die Riemenbreite muss bei gegebener Spannung S_1 sein:

$$b = \frac{S_1}{40} \text{ Zoll.}$$

Es war nun

$$S_1 = \frac{e^{\varphi\alpha} M}{e^{\varphi\alpha} - 1}.$$

Nimmt man

$$\varphi = 0{,}28 \text{ und } \frac{\alpha}{2\pi} = 0{,}4 \text{ bis } 0{,}5,$$

so dass der Riemen ungefähr die Hälfte des Rades deckt, so ist S_1 ungefähr gleich $2M$ und man kann dann setzen:

$$b = \frac{M}{20} = \frac{1}{20}\frac{L}{V}$$

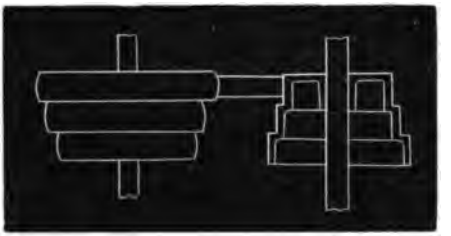
wo L die Arbeit, V die Geschwindigkeit an der Peripherie der durch den Riemen verbundenen Räder, also $MV = L$ ist. D.h. „Die Riemenbreite verhält sich direct wie die zu übertragende Arbeitsgrösse L, und umgekehrt, wie die Geschwindigkeit am Umfange."

Daraus folgt, dass sich Riemenräder namentlich für grosse Geschwindigkeiten und geringe Arbeiten eignen. — Für Guttapercha stellen sich übrigens die Verhältnisse ziemlich ähnlich wie bei Lederriemen.

Es kommt öfter vor, dass die Umdrehungszahl des Getriebes nicht immer dieselbe sein soll. Man bewirkt dies indem man auf beide Wellen mehrere Radsysteme aufsetzt (Fig. 5.), wobei dem abnehmenden Radius der Treibwelle der zunehmende des Getriebes entspricht. Es muss dies Zu- und Abnehmen aber der Art geschehen, dass hierbei die Riemenlänge nicht geändert zu werden braucht.

Digitized by Google

Fig. 5.



Dies geschieht folgendermaassen bei gekreusten Riemen wo, wenn man $2\tau - \alpha$ für α setzt, also den wirklich umspannten Winkel nimmt:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{a_1+b}{\delta}$$

$$l = 2\delta\sin\frac{\alpha}{2} + \alpha(a_1+b).$$

Es muss also wenn die Riemenlänge sich nicht ändern soll, a_1+b constant bleiben, d. h. der Halbmesser des Getriebrades um so viel abnehmen, als der der Treibwelle zunimmt. Bei nicht gekreusten Riemen findet indess ein so einfaches Verhältniss keinesweges statt. Es war in diesem Falle:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a_1-b}{\delta}$$

$$l = 2\delta\sin\frac{\alpha}{2} + \alpha b + (2\pi-\alpha)a_1$$

Nun ist aber:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

also angenähert:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\frac{(a_1-b)^2}{\delta^2}$$

$$\alpha = \pi - (\pi - \alpha)$$

und angenähert:

$$\pi - \alpha = 2\sin\frac{\pi-\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2(a_1-b)}{\delta},$$

also:

$$\alpha = \pi - \frac{2(a_1-b)}{\delta}.$$

Sonach ergibt sich:

$$l = 2\delta - \frac{(a_1-b)^2}{\delta} + \left(\pi - \frac{2(a_1-b)}{\delta}\right)b + \left(\pi + \frac{2(a_1-b)}{\delta}\right)a_1,$$

d. h.

$$l = 2\delta + \pi(a_1+b) + \frac{(a_1-b)^2}{\delta}.$$

Sei noch λ das Umsetzungsverhältniss, also:

$$\lambda = \frac{V_1}{V} = \frac{b}{a_1},$$

so kommt:

$$b = \lambda a_1$$

also:

$$l = 2\delta + \pi(\lambda+1)a_1 + \frac{(1-\lambda)^2 a_1^2}{\delta},$$

eine quadratische Gleichung, aus der a_1 leicht zu bestimmen ist.

Wäre der Abstand der Radaxen δ im Verhältniss zu dem Radhalbmesser a_1

sehr gross, so könnte das letzte Glied vernachlässigt werden, und man hätte näherungsweise:

$$a_1 = \frac{l - 2\partial}{\pi(\lambda+1)}.$$

Sollte eine bessere Näherung gefunden werden, so kann dieser Ausdruck in das letzte Glied eingesetzt werden, und man hat:

$$l = 2\partial + \pi(\lambda+1)a_1 + \frac{(1-\lambda)^2}{\partial}\frac{(l-2\partial)^2}{\pi^2(\lambda+1)^2}$$

also:

$$a_1 = \frac{l-2\partial}{\pi(\lambda+1)}\left(1 - \frac{(1-\lambda)^2}{(\lambda+1)^2}\,\frac{l-2\partial}{\pi^2\partial}\right).$$

Ein Ausdruck, der schon eine gute Näherung giebt, wenn der Axenabstand 6mal grösser ist als der Halbmesser des grössten Rades. — Statt solcher Radsysteme kann man aber auch konische Trommeln

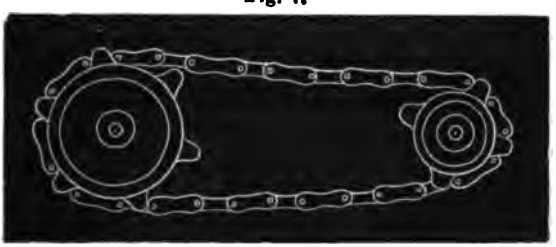
Fig. 6.

anwenden, wo dann die Umsetzungszahl continuirlich geändert werden kann. Jedoch bewirkt der ungleiche Durchmesser der Trommel eine ungleiche Spannung des Riemens und die Anwendung geschieht daher hauptsächlich nur für schmale Riemen. — In diesem Falle und überhaupt, wenn die Arbeit nicht gross ist, kann man die Riemen auch durch Schnüre von Hanf und Guttapercha oder durch Darmsaiten ersetzen, und werden zu dem Ende die Räder mit vertieften Spuren oder Rinnen versehen.

Bei geringerer Geschwindigkeit und grossen Lasten dagegen reicht selbst die Festigkeit der Riemen nicht hin, und diese werden, falls beide Axen einen grösseren Abstand haben, also Zahnräder nicht anzuwenden sind, durch Ketten ersetzt (Fig. 7.). Jedes der Räder hat eine Anzahl Zähne, welche in die Glieder der Ketten eingreifen, was die Uebertragung erleichtert.

Soll bloss die Bewegung nach einer

Fig. 7.

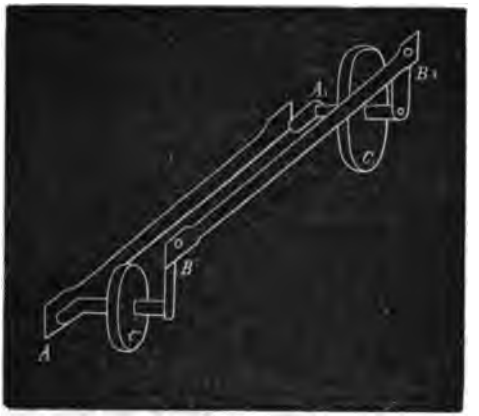


entfernteren Axe übertragen, die Winkelgeschwindigkeit aber nicht geändert werden, so kann man auch Stangen anwenden (Fig. 8.). Beide parallel liegenden Wellen C und C_1 sind mit je zwei Kurbeln versehen, die mit einander einen rechten Winkel machen AB und A_1B_1. Diese werden durch die Stangen AA_1 und BB_1 verbunden, und eine vollständige Uebertragung der Bewegung erzielt. Sind die Räder sehr entfernt, so reichen jedoch 2 Stangen nicht aus, weil dieselben sich biegen und daher die Uebertragung durch Schub unthunlich wird. Es sind dann die Krummzapfen doppelt zu nehmen, und 4 Stangen anzuwenden, von denen je 2 immer ziehend wirken, während die andern zurückgehn, also keine Arbeit übertragen. Diese Vorrichtung bildet ein sogenanntes Stangenvorgelege.

5) Von Zahnrädern im Allgemeinen.

Bei Zahnrädern muss womöglich nur ein Rollen des einen Rades auf dem andern und kein Gleiten stattfinden. Es müssen daher die Räder in einer geraden Linie mit einander zusammenhängen. Haben die Punkte beider Räder, welche auf dieser Linie liegen, gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit, so ist in der

Fig. 8.



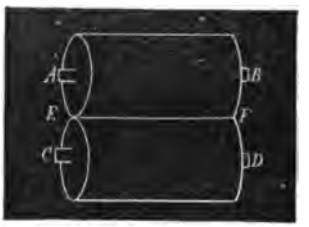
That jedes Gleiten ausgeschlossen; jedoch ist dies, wie wir bald sehen werden, nur dann möglich, wenn die Axen beider in einander greifenden Räder in einer Ebene liegen. Ist dies nicht der Fall, so kann sich nur die Bewegung des einen Rades derart dem andern mittheilen, dass die Punkte der Coincidenzlinie auf derselben gleiten. Es sind also die Bewegungen der Räder in 2 Componenten zu zerlegen, die eine auf der Coincidenzlinie senkrecht, die andere in derselben Linie. Wenn die erstere bei beiden Rädern gleich ist, so wird die Mittheilung der Bewegung am vollständigsten erfolgen, und die andern Componenten sind unabhängig von einander.

Wir unterscheiden demnach 3 Fälle der Bewegungsübertragung.

I. Die Radaxen sind parallel,
II. die Radaxen schneiden sich,
III. die Radaxen liegen nicht in derselben Ebene.

Fall I. Sind (Fig. 9) ***AB*** und ***CD***

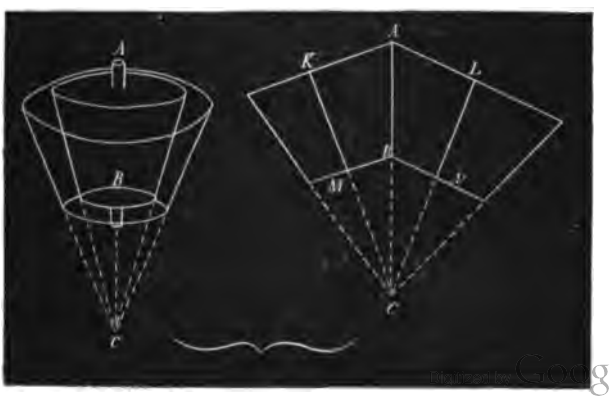
Fig. 9.



die Radaxen, ***EF*** die Coincidenslinie, so muss, damit blosses Rollen stattfinde, die Geschwindigkeit der Punkte ***E*** und ***F*** sich einerseits wie die Radien ***AE*** und ***BF*** und andrerseits wie die Radien ***CE*** und ***DF*** verhalten, so dass man hat $\frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FD}$.

Da die Räder aber auf den Axen senkrecht stehen, so bilden ***AC*** und ***BD*** ge-

Fig. 10.



Digitized by Google

rade Linien, und es ist $AC = BD$. Aus unserer Gleichung aber folgt: $\frac{AC}{EC} = \frac{BD}{FD}$, also: $EC = FD$, $AE = BF$. „Beide Räder sind Rotations-Cylinder, die Berührungslinie ist beiden Axen parallel. Solche Räder heissen Cylindrische oder Stirnräder, (*roues cylindriques, cylindrical wheels*)."

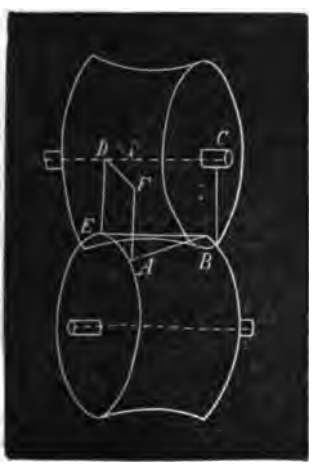
Fall II. Mögen jetzt beide Axen nach einem Punkte C hin convergiren, und seien (Fig. 10) AB die Berührungslinie, KM, LN die Axen, so verhalten sich die Geschwindigkeiten der Punkte A und B, einerseits wie AK und BM, andererseits wie AL und BN, also: $\frac{AK}{BM} = \frac{AL}{BN}$, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AKL und BMN, hat man auch: $\frac{LK}{MN} = \frac{AK}{BM}$ und da auch $\triangle LKC \infty MNC$ ist,

$$\frac{LK}{MN} = \frac{KC}{MC}$$

woraus dann folgt, dass auch die Berührungslinie AB durch den Punkt C geht. Die Räder sind Kegel mit gemeinschaftlicher Spitze, sie heissen Conische oder Winkelräder (*roues coniques, conical wheels*)

Fall III. Liegen endlich die Axen nicht in einer Ebene, so lässt sich das Gleiten nicht mehr vermeiden, da die Proportion $\frac{AK}{BM} = \frac{AZ}{BN}$ nicht mehr erfüllt werden kann. Welche Form dem Rade dann zu geben sei, zeigen die folgenden Betrachtungen. Sei (Fig. 11) CD die Axe

Fig. 11.



AB die Coincidenzlinie der Räder. Beide sollen in verschiedenen Ebenen liegen, und haben daher ein gemeinschaftliches Loth $BC = a$, welches zugleich ihre kürzeste Entfernung ist. Zieht man Linie $BE \parallel CD$, so ist Ebene ABE senkrecht auf Ebene BCD, und BC steht auf BE und AB, also auf Ebene ABE senkrecht und liegt in Ebene BCD. Wir ziehen nun $AE = u$ senkrecht auf EB, und $ED = a$ senkrecht auf DC und setzen den Winkel ABE, welchen Axe und Coincidenzlinie machen $= \delta$. Man kann sich nun das Rad entstanden denken, indem man Linie AB um die nicht mit ihr in einer Ebene befindliche Linie CD gedreht denkt. Ist noch $DC = BC = x$ so wird

$$u = x \operatorname{tg} \delta.$$

Es ist hierbei C als Anfangspunkt der Coordinaten, DC als Axe der x angenommen. Die Ebene der xy denkt man sich beliebig durch DC gelegt, und auf dieselbe Loth $AF = s$ gefällt, dann ist $FD = y$ auf DC senkrecht. Ist noch $AD = R$, so ergiebt sich, da AE auf ED senkrecht steht,

$$R^2 = y^2 + s^2 = a^2 + x^2 \operatorname{tg} \delta^2.$$

Und da bei der ganzen Drehung die Länge von R sich nicht ändert, so ist dies die Gleichung derjenigen Oberfläche, welche das Rad bilden muss. Es ist eine Gleichung zweiten Grades. Giebt man s einen beliebigen Werth, so erhält man:

$$\frac{y^2}{a^2 - s^2} - \frac{x^2 \operatorname{tg} \delta^2}{a^2 - s^2} = 1,$$

d. h.: „Alle der Ebene der xy parallelen Durchschnitte sind Hyperbeln. Die Fläche ist ein Rotationshyperboloid. Die auf der Axe der x senkrechten Schnitte stellen offenbar Kreise mit Radius

$$R = \sqrt{a^2 + x^2 \operatorname{tg} \delta^2}$$

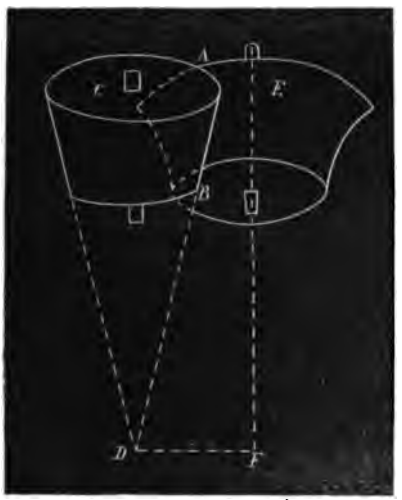
vor. Denkt man sich $R = Y$, so stellt die Gleichung $Y^2 = a^2 + x^2 \operatorname{tg} \delta^2$ oder:

$$\frac{Y^2}{a^2} - \frac{x^2 \operatorname{tg} \delta^2}{a^2} = 1$$

offenbar Schnitte vor, welche durch die Rotationsaxe CD gehen, und dies sind ebenfalls Hyperbeln, „Die Räder heissen hyperbolische oder hyperboloidische, (*roues hyperboloiques, hyperbolical wheels*). Die Halbmesser derselben sind wie bei den conischen Rädern ungleich. Doch gibt es bei den ersteren immer einen kürzesten Halbmesser $BC = a$; derselbe heisst Hals- oder Kehlhalbmesser. Von 2 Zahnrädern, die in einander greifen, braucht nur das eine ein hyperbolisches

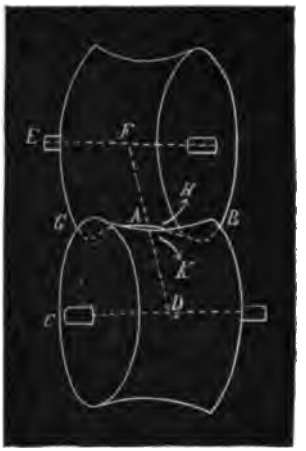
zu sein, das andere kann ein cylindrisches sein, wenn man die Coincidenzlinie der Axe parallel annimmt, oder ein conisches, wenn dieselbe die Axe in einem beliebigen Winkel schneidet. Indess findet dann im Allgemeinen in der Coincidenzlinie keine Berührung statt, was bei Zahnrädern auch nicht absolut nöthig ist, da die Coincidenzlinie hier nur eine gedachte ist. In jedem Fall aber nimmt man die Coincidenzlinie derart, dass die kürzeste Entfernung beider Räder durch dieselbe geht. — Sind also (Fig. 12) *CD*

Fig. 12.



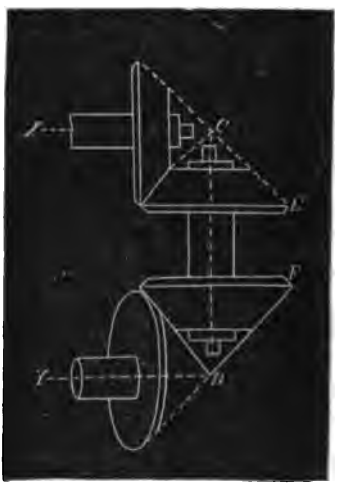
und *EF* die Radaxen, *DF* ihre kürzeste Entfernung, so muss im Falle, dass das zu *CD* gehörige Rad conisch sein soll, die Coincidenzlinie *AB* durch *D* gehen. und auf *FD* senkrecht stehen. Im Falle ein cylindrisches Rad gefordert sein sollte, kann die Berührungslinie durch einen beliebigen Punkt *A* von *DF* gehn, muss aber parallel *DC* sein. Nur im Falle, dass beide Räder hyperbolisch (Fig. 13) sind, ist sowohl der Durchschnittspunkt *A* der Berührungslinie mit *DF* an sich beliebig, und ausserdem kann erstere jede auf *DF* senkrechte Richtung haben. In jedem der 3 Fälle wird erreicht, dass die Umfangbewegung der Punkte beider Räder, welche in den zu den Halshalbmessern *FA* und *AD* gehörigen Peripherien liegen in einer durch die Coincidenzlinie *AB* gehenden Ebene erfolgt, denn da diese Umfangsbewegungen *AH* und *AK* bezüglich auf den Halbmessern *AF* und *AD* also auf *FD* senkrecht sind, ebenso wie *HA*, so

Fig. 13.



müssen diese 3 Linien in einer Ebene liegen. Nach dem oben Gesagten lassen sich dann diese Bewegungen in eine gemeinschaftliche auf *GA* senkrechte Componente, und in eine parallel mit *GA* zerlegen. Man kann aber die Form und Länge der Hyperboloidräder vollständig bestimmen durch die Bedingung, dass in der Coincidenzlinie Berührung stattfinde. Solche Räder können auch ersetzt werden, durch 2 kleinere conische Räder. Sind (Fig. 14) *CX* und *DY* die Axen

Fig. 14.



zweier conischer Räder, so kann man dieselben durch eine sonst beliebige Linie *DC* verbinden, welche man zur Umdrehungsaxe zweier andern conischen Räder

Digitized by Google

macht, deren eins in das zu DY gehörige, das andere in das zu CX gehörige greift.

6) Berechnung der cylindrischen, conischen und hyperboloidischen Räder.

Seien bei 2 cylindrischen Rädern bezüglich r und r_1 die Radhalbmesser, ϑ und ϑ_1 die Winkelgeschwindigkeiten, $\lambda = \frac{\vartheta_1}{\vartheta}$ die Umsetzungszahl, so ist wie bei den Riemenrädern:

$$v = r\vartheta = r_1\vartheta_1$$

die wahre Geschwindigkeit am Umfange des Rades,

$$\lambda = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{r}{r_1}$$

die Umsetzungszahl. Sei noch e der Abstand beider Axen, so ist

$$e = r + r_1,$$

also, wenn e und λ gegeben sind, lassen sich die Radien bestimmen, nämlich:

$$r = \frac{e\lambda}{1+\lambda}, \quad r_1 = \frac{e}{1+\lambda}.$$

Seien jetzt beide Räder conisch. Mögen e, λ, r, r_1, v ihre frühere Bedeutung behalten, so ist noch immer

$$v = r\vartheta = r_1\vartheta_1$$

$$\lambda = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{r}{r_1}.$$

Seien jetzt (Fig. 15) ε und ε_1 die

Fig. 15.

Winkel ACK und ACL, welche die Axen mit der Berührungslinie machen, so ist offenbar:

$$AK = r = AC \sin \varepsilon$$

$$AL = r_1 = AC \sin \varepsilon_1,$$

also:

$$\frac{r}{r_1} = \lambda = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_1}$$

oder:

„Die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der Winkel, welche Axe und Berührungslinie machen."

Es ist noch

$$\delta = \varepsilon + \varepsilon_1,$$

wenn δ der Winkel zwischen beiden Axen ist, also:

$$\lambda \sin(\delta - \varepsilon) = \sin \varepsilon,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\lambda \sin \delta}{1 + \lambda \cos \delta},$$

und

$$\lambda \sin \varepsilon_1 = \sin(\delta - \varepsilon_1),$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \delta}{\lambda + \cos \delta}.$$

Diese Formeln lehren ε und ε_1 finden, wenn λ und δ gegeben ist.

Ist dagegen der Abstand $CA = l$ des Berührungspunktes vom Schnittpunkte der Räder gegeben, so ist:

$$r = l \sin \varepsilon, \quad r_1 = l \sin \varepsilon_1.$$

Seien noch

$$CK = h, \quad CL = h_1,$$

also die Höhen der Kegel gegeben, so hat man:

$$h = l \cot \varepsilon = r \cot \varepsilon = \frac{1 + \lambda \cos \delta}{\lambda \sin \delta} r$$

$$= \frac{r_1 + r \cos \delta}{\sin \delta}$$

$$h_1 = l \cos \varepsilon_1 = r_1 \cot \varepsilon_1 = \frac{\lambda + \cos \delta}{\sin \delta} r_1$$

$$= \frac{r + r_1 \cos \delta}{\sin \delta}.$$

Sei jetzt ein cylindrisches Rad mit einem hyperbolischen verbunden. Bezeichnen wir mit r den Halbmesser des ersteren, mit r_1 den des letzteren, so hat man:

$$R^2 = r_1^2 + x^2 \operatorname{tg} \delta^2,$$

wo δ der Winkel zwischen der Axe des hyperbolischen Rades und der Coincidenslinie, also auch der Winkel beider Axen ist, R ein beliebiger Halbmesser des hyperbolischen Rades, x das zwischen r_1 und R liegende Stück der Axe. Diese

Digitized by Google

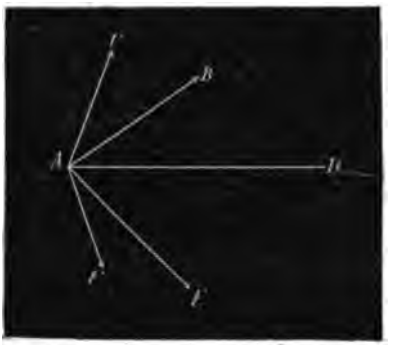
Formel reicht dann hin, jeden beliebigen Halbmesser R zu finden.

Die Umfangsgeschwindigkeit beider Räder ist nicht gleich; seien v u. v_1 diese Geschwindigkeiten bezüglich des cylindrischen Rades und des zum Halshalbmesser gehörigen Punktes des hyperbolischen, so ist

$$v = r\vartheta, \quad v_1 = r_1\vartheta_1.$$

Zerlegt man nun $AB = v_1$ (Fig. 16) in

Fig. 16



eine auf der Coincidenzlinie AD senkrechte und eine derselben parallele Componente, so ist die erstere $BC = v_1 \cos\delta$; denn sei AE der Radaxe parallel, so ist

$$EAB = 90° \text{ und } EAD = \delta,$$

also: $$BC = AB\cos\delta = v_1\cos\delta.$$

Dagegen steht die Umfangsgeschwindigkeit $AF = v$ des cylindrischen Rades auf AD selbst senkrecht, und man hat also:

$$v = v_1\cos\delta,$$

mithin auch:

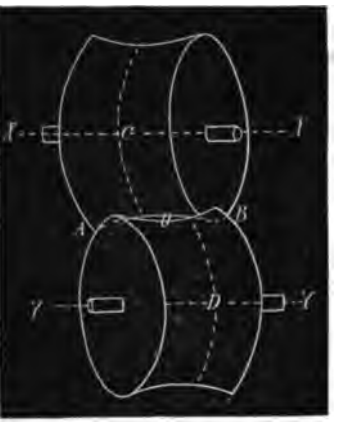
$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \lambda = \frac{v_1 r}{v r_1} = \frac{r}{r_1\cos\delta}.$$

Ist noch die kürzeste Entfernung e bei der Axen gegeben, also $e = r + r_1$, so hat man:

$$r = \frac{\lambda e\cos\delta}{1+\lambda\cos\delta}, \quad r_1 = \frac{e}{1+\lambda\cos\delta}.$$

Wenn beide Räder hyberbolisch sein, aber nicht sich berühren sollen, so lässt sich dies auf verschiedene Art bewerkstelligen. Man kann z. B. annehmen, dass beide mit demselben (gedachten) cylindrischen Rade und unter sich gemeinschaftlich Coincidenzlinien haben. Sei in diesem Falle (Fig. 17) $AO = l$ die Länge der Berührungslinie vom Halshalbmesser bis zu einer der äusseren Grundflächen des Rades, ε u. ε_1 die Winkel der Axen (oder der ihnen parallel durch

Fig. 17.



A gelegten Linien) mit l, sind ferner z und z_1 die Projectionen von l auf die äussere Radgrundfläche, so ist:

$$z = l\sin\varepsilon, \quad z_1 = l\sin\varepsilon_1,$$

da die Grundflächen auf den Axen senkrecht stehen. Sind noch d und d_1 die Raddicken, und nimmt man an, dass die Räder nach beiden Seiten vom Halse aus gleiche Dicke haben, so ist

$$d = 2l\cos\varepsilon, \quad d_1 = 2l\cos\varepsilon_1.$$

Endlich sind die äussern Radhalbmesser, wenn man R und R_1 für dieselben, und in der Formel: $R^2 = a^2 + x^2\,\mathrm{tg}\,\delta^2$, bezüglich ε u. ε_1 für δ, $\frac{d}{2}, \frac{d_1}{2}$ für x u. r, r_1 für a setzt,

$$R^2 = r^2 + z^2, \quad R_1^2 = r_1^2 + z_1^2.$$

Was die Geschwindigkeiten der Räder anbetrifft, so ergibt sich ganz wie im Falle eines hyperbolischen und eines cylindrischen Rades, für diejenige Componente von v_1, welche auf AB senkrecht steht, $v_1\cos\varepsilon_1$, aber jetzt auch für die entsprechende Componente von v: $v\cos\varepsilon$; es ist also:

$$v\cos\varepsilon = v_1\cos\varepsilon_1$$

und da im Uebrigen

$$v = r\vartheta, \quad v_1 = r_1\vartheta_1$$

ist:

$$r\vartheta\cos\varepsilon = r_1\vartheta_1\cos\varepsilon_1,$$

woraus sich dann ergibt:

$$\lambda = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{r\cos\varepsilon}{r_1\cos\varepsilon_1}$$

und wenn der kürzeste Abstand $e = r + r_1$ der beiden Räder gegeben ist:

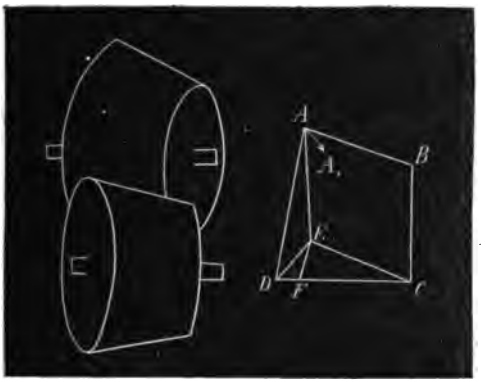
$$r = \frac{\lambda e\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon + \lambda\cos\varepsilon_1}, \quad r_1 = \frac{e\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon + \lambda\cos\varepsilon_1}.$$

Digitized by Google

Es ist aber oft nöthig, zu den hyperbolischen Rädern Hyperboloidstücke zu nehmen, welche den Halshalbmesser nicht in sich schliessen. In diesem Falle wählt man sie so, dass in der Coincidenzlinie zugleich eine Berührung also eine gemeinschaftliche Normale überall stattfindet. Dass dies immer geschehen kann, zeigen leicht die folgenden Betrachtungen.

Sei (Fig. 18) AB wieder die Berührungslinie, CD die Axe des einen Rades,

Fig. 18.



CB der Kehlhalbmesser. Zieht man noch CE parallel mit AB, und AE senkrecht auf EC, so ist $AE = BC = r$, und beide Linien stehen auf Ebene ECD senkrecht. Zieht man nun in A eine Senkrechte AD auf AB, welche zugleich CD schneidet, so ist leicht zu zeigen, dass dieselbe die Normale an die Radfläche sei. Denn sei AF der Radhalbmesser, AA_1 ein Theil der Peripherie des Radumfanges, welcher durch Punkt A geht, so ist AA_1 senkrecht auf AF und FC mithin auch auf der durch beide Linien gelegten Ebene, und folglich auch auf AD; da nun AD auf 2 in der Berührungsebene liegenden Linien AA_1 und AB senkrecht steht, so ist es die Normale. Ferner ist AE senkrecht auf EC und DC also auf Ebene DEC, und mithin Winkel EAD derjenige Winkel φ, welchen die Berührungsebene in A und Ebene DEC machen. Es ist also:

$$DE = AE \operatorname{tg} \varphi = r \operatorname{tg} \varphi.$$

Ferner hat man, wenn $ECD = \varepsilon$ der Winkel zwischen Axe und Berührungslinie, $EC = l$ die Länge der letztern zwischen Kehlhalbmesser r und dem beliebigen durch A gehenden Halbmesser R ist: $DE = l \operatorname{tg} \varepsilon$, also:

$$l \operatorname{tg} \varepsilon = r \operatorname{tg} \varphi.$$

Sollen nun beide Radflächen in jedem Punkte der Berührungslinie gleiche Normalen haben, so ist die Bedingung ausreichend, dass φ für dieselben identisch sei, und man hat daher, wenn wir r_1 gleich dem Kehlhalbmesser des zweiten Rades, ε_1 für den Winkel zwischen seiner Axe und der Berührungsline setzen:

$$\frac{r}{\operatorname{tg} \varepsilon} = \frac{r_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{l}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so haben die Radflächen in jedem Punkte A der Berührungslinie gemeinschaftliche Normale. — Wir müssen jetzt die Umsetzungszahl für diesen Fall ermitteln. Sei AA_1 sehr klein, so ist diese als grade zu betrachtende Linie der Umfangsgeschwindigkeit v des Rades proportional. Zerlegt man dieselbe nach AB und senkrecht darauf innerhalb der Ebene AA_1B, so wird die letztere Componente gleich der entsprechenden von v_1 sein; da diese beiden aber auch in dieselbe Richtung fallen, so muss auch ihre Projection auf irgend eine auf AB senkrechte Linie, welche mit der Projection von AA_1 auf diese Linie zusammenfällt, für beide Räder identisch werden. Eine solche Linie ist AE, und die Projection von AA_1 auf dieselbe ist gleich $AA_1 \cos A_1AE$. Nun ist Winkel $FAA_1 = 90°$, also auch diese Projection gleich

$$AA_1 \sin FAE = AA_1 \cdot \frac{EF}{AF}.$$

Für AA_1 ist die Geschwindigkeit des Punktes A also v_1 zu setzen, die Projection derselben auf AE bezeichnen wir mit w, und haben, da $AF = R$ ist:

Digitized by Google

$$w = \frac{v \cdot EF}{R}.$$

Aber aus $\triangle EFC$, welches bei F rechtwinklig ist, ergibt sich:

$$EF = l \sin \varepsilon,$$

also:

$$w = \frac{v\, l \sin \varepsilon}{R},$$

und da w und l beiden Rädern gemeinsam sind:

$$\frac{v \sin \varepsilon}{R} = \frac{v_1 \sin \varepsilon_1}{R_1}.$$

Es ist ferner:

$$v = R\vartheta, \quad v_1 = R_1 \vartheta_1,$$

also:

$$\vartheta \sin \varepsilon = \vartheta_1 \sin \varepsilon_1$$

und

$$\lambda = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon_1};$$

dieser Ausdruck für die Umsetzungszahl ist derselbe wie bei conischen Rädern. Sei noch δ der Winkel zwischen beiden Axen, so hat man:

$$\delta = \varepsilon + \varepsilon_1$$

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{\sin \varepsilon - \sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon + \sin \varepsilon} = \frac{\sin \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} \sin \frac{\delta}{2}},$$

also:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \operatorname{tg} \frac{\delta}{2},$$

und aus diesen Gleichungen kann man augenblicklich ε und ε_1 berechnen. Ist noch der kürzeste Abstand $e = r + r_1$ der Axen gegeben, so ergibt sich:

$$r = \frac{e \operatorname{tg} \varepsilon'}{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varepsilon_1}, \quad r_1 = \frac{e \operatorname{tg} \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \varepsilon + \operatorname{tg} \varepsilon_1};$$

und wenn noch die Länge l der Berührungslinie bekannt ist, so hat man, da x die Axenlänge ist:

$$l \cos \varepsilon = x,$$

also auch:

$$R^2 = r^2 + l^2 \sin \varepsilon^2, \quad R_1^2 = r_1^2 + l^2 \sin \varepsilon_1^2,$$

da

$$R^2 = r^2 + x^2 \operatorname{tg} \varepsilon^2$$

war.

Wegen der grösseren Zahn- und Axenreibung, die bei hyperbolischen Rädern stattfindet, gibt man dem vorhin beschriebenen Systeme von conischen Rädern oft vor ihnen den Vorzug.

7) Frictionsräder.

Durch blosse Berührung der Radumfänge kann dann Mittheilung der Bewegung erfolgen, wenn die Kraft nur gering, die Reibung wie der Druck aber bedeutend ist. Sei μ der Reibungscoefficient, K die zu übertragende Kraft, ϱ der nöthige Druck, womit die Räder gegen einander zu pressen sind, so muss sein

$$\mu \varrho = K.$$

Damit der Druck nun nicht zu gross sei, kommt es darauf an, durch Rauhheit der Berührungsflächen, und durch Auswahl des Stoffes aus dem die Räder bestehen, μ möglich gross zu machen. Entweder macht man ein Rad von Holz und das andere von Gusseisen, oder beide von

Holz, auch kann man ein Rad mit rauhem Leder belegen. Ist z. B. $\mu = \frac{1}{4}$, so muss also der Druck doppelt so gross als die zu übertragende Kraft sein. In den meisten Fällen sind Riemenräder den Frictionsräder vorzuziehen, da das Verhältniss des Druckes zur Kraft hierbei ein geringeres ist. Auch darf bei Frictionsrädern das eine Rad keine feste Lagerung haben, da der Druck ρ durch ein Axenlager auf das Rad übertragen werden muss.

In der Figur (Fig. 19) stellt *ACB* das

Fig. 19.

Triebrad mit festem Lager, *EDF* das Getriebe vor.

Die Zapfenlager der letzteren sitzen in dem um *M* drehbaren gegabelten Hebel *KDM*, der durch eine in *K* angreifende Kraft *G* auf- und niedergedrückt werden kann. Frictionsräder kommen jetzt nur noch selten vor.

8) Von den Zähnen.

Zahnräder sind den Frictionsrädern weit vorzuziehen. Die Zähne sind hierbei so einzurichten, dass die Geschwindigkeit der Radumfänge, oder der Theil derselben, welcher auf der Berührungslinie senkrecht steht, bei beiden in einander greifenden Rädern derselbe sein kann, wie dies gefordert wird. — Zunächst müssen die Zähne daher einen gleichen Abstand von einander haben. Dieser Abstand wird Theilung (*pas, pitch*) genannt. Die Theilung wird auf diejenigen Kreise, Theilkreise oder Theilrisse (*cercles primitifs, pitch circles*) aufgetragen, die man sich in Berührung denkt, denn da die Zähne in einander greifen, sind die Berührungskreise in der That nur gedachte. In der Regel legt man die Theilkreise in die Mitte der Entfernung der Radumfänge. Den Zähnen der Stirnräder ist prismatische Form zu geben, derart, dass die Erzeugungslinie des Prisma der Axe parallel ist, den conischen und hyperbolischen Rädern gibt man Zähne von der Form abgestumpfter Pyramiden deren Erzeugungslinie nach dem Berührungspunkte der Kehlkreise gerichtet sind. Die End- oder Stirnflächen der Zähne liegen rechtwinklig gegen die Seitenflächen. Bei den Stirnrädern bilden sie also eine Ebene senkrecht auf der Axe, bei den conischen und hyperbolischen Rädern einen Kegelmantel. Jeder Zahn ist noch einzutheilen in den Kopftheil über dem Theilkreise, und in den Fusstheil unter demselben. Die Seitenflächen des erstern bilden die Zahnwölbung, die des letztern die Seiten oder Flanken des Zahns. Die Dimensionen des Zahnes zählt man in folgender Weise:

Die Breite (*largeur, breath*) in der Richtung der (gedachten) Coincidenzlinie *MN*.

Die Dicke (*épaisseur, thicknes*) im Umfange des Theilkreises.

Die Höhe (*longueur, length*) rechtwinklig zur Berührungslinie.

Die Verzahnung ist eine äussere, (*engrenage extérieur, spur wheels*) wenn die Zähne auf dem äussern Radumfange sitzen, wie dies in der Regel geschieht, eine innere (*eng. intérieur, annular wheels*) wenn sie im innern Umfange sitzen, — Es gibt aber auch Räder mit Verzahnung an den Seitenflächen die man Kron- oder Kammräder nennt, (*roues à chan ou à couronne, crown wheels*). Man nennt die Zähne Kämme, (*aluchons, cogs*) wenn sie in den Radkranz eingesetzt sind, im Gegensatz zu den eigentlichen Zähnen (*dents, theeths*), die mit dem Radkranze ein Ganzes ausmachen.

Sind die Zähne sehr lang, so werden sie mit 2 parallelen Scheiben verbunden.

Fig. 20.

Ein solches Rad heisst Drilling (*lanterne, lantern*). Die Zähne eines solchen werden cylindrisch oder konisch geformt und Triebstöcke (*fuseaux, staves*) ge-

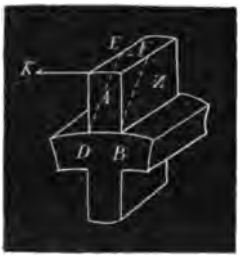
Digitized by Google

nannt. Soll eine gradlinige auf- und absteigende Bewegung hervorgebracht werden, so tritt eine Zahnstange (*crémaillère, rack*) an die Stelle des einen Rades; soll eine kreisförmige aber hin- und herschwingende Bewegung hervorgebracht werden, so wird ein Radsector statt des vollen Rades angewandt.

9) Dimensionen der Zähne.

Ist der Eckpunkt A Angriffspunkt der zu übertragenden Umdrehungskraft K,

Fig. 21.



so muss die Stärke des Zahnes so genommen werden, dass das Abbrechen der Ecke in der Fläche $BDEF$ verhindert wird. Zieht man AN senkrecht auf die angenommene Bruchfläche $ABEF$, so ist dies der Hebelarm der Kraft. Möge die Bruchfläche mit der Stirnfläche ABD den Winkel φ machen, so ist

$$AN = AB \sin \varphi,$$

und die Breite der Bruchfläche

$$BF = \frac{AB}{\cos \varphi}.$$

Ist $BD = b$ die Zahndicke, K_1 der Festigkeitsmodul, so hat man bekanntlich:

$$AN \cdot K = BF \cdot BD^2 \frac{K_1}{6}$$

oder:

$$AB \cdot K \sin \varphi = \frac{AB}{\cos \varphi} \frac{b^2 K_1}{6},$$

d. h.

$$K = \frac{b^2 K_1}{3 \sin 2\varphi}.$$

Für φ ist derjenige Werth zu nehmen, welcher K zum Minimum, also $\sin 2\varphi$ zum Maximum macht, also $\varphi = 45°$, wo dann $\sin 2\varphi = 1$ ist, also:

$$K = \frac{b^2 K_1}{3};$$

es ist also dem Zahne die Dicke oder Stärke:

$$b = \sqrt{\frac{3K}{K_1}}$$

zu geben. Für Gusseisen, wo

$$K_1 = 6000 \text{ Pfund}$$

angenommen wird, ist zu setzen:

$$b = 0{,}0223 \sqrt{K}$$

also ungefähr:

$$b = 0{,}03 \sqrt{K}.$$

Die Kraft K bestimmt sich aus dem zu übertragenden Arbeitsquantum L und der Umfangsgeschwindigkeit v mittelst der Formel

$$K = \frac{510\,L}{v},$$

wo L in Pferdekräften, v in Fussen gegeben ist. Man erhält:

$$b = 0{,}607 \sqrt{\frac{L}{v}} \text{ Fuss}$$

oder, wenn die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute mit n, der Radius in Zollen mit r bezeichnet wird, wo sich dann: $v = 2\pi r n \cdot 12$ ergibt, wenn man b in Zollen ausdrückt:

$$b = 7{,}26 \sqrt{\frac{L}{nr}} \text{ Zoll.}$$

Wenn hölzerne Zähne dieselbe Festigkeit als eiserne haben sollen, so ist ihnen die doppelte Dicke zu geben. Oft macht man sie aber nur um die Hälfte stärker, da sie leicht durch neue ersetzt werden können. Man hat demnach:

$$b = 10{,}89 \sqrt{\frac{L}{nr}} \text{ Zoll.}$$

Messingzähne erhalten ein Drittel mehr Stärke als gusseiserne.

Die Breite der Zähne wird bei langsamer Umdrehung 4 bis 5mal so stark als die Dicke, bei schnellerer Umdrehung 6 bis 7mal so stark genommen.

Die Höhe ist von der Zahnform abhängig.

In der Regel setzt man sie

$$h = 1{,}2\,b \text{ bis } 1{,}5\,b.$$

Wenn die Seitenflächen der Zähne eben wären, so müsste h mindestens gleich der Summe der beiden Bogenhöhen $AD + DB$ (Fig. 22) sein. Sei s die Hälfte der Sehne EF, welche Anfangs- und Endpunkt des Eingriffes verbindet, und

$$r = CE, \quad r_1 = ME$$

die Radhalbmesser, so ist:

$$AD(2r - AD) = s^2,$$

Digitized by Google

Fig. 22.

oder, wenn man AD gegen $2r$ vernachlässigt:

$$AD = \frac{s^2}{2r}, \quad BD = \frac{s^2}{2r_1},$$

annähernd also:

$$h = \frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

Wenn, wie hier angenommen, immer 2 Paar Zähne in einander greifen, ist s der Theilung gleichzusetzen, für welche man somit auch die doppelte Zahndicke $2b$ oder vielmehr die Dicke eines Zahnes oder einer Lücke nehmen kann, und während für r und r_1 annähernd die Theilkreishalbmesser zu setzen sind.

Die Zahnlücke wird wegen der Gefahr des Einklemmens um ein Zehntel grösser als die Zahndicke genommen, (bei sehr genau ausgeführten Rädern nur $\frac{1}{15}$ grösser, bei wenig genauen Rädern $\frac{1}{7}$). Im ersten Falle erhält man also:

$$s = b + 1{,}1\,b = 2{,}1\,b.$$

Hat, wie oft geschieht, ein Rad hölzerne, das andere eiserne Zähne, und ist b die Stärke der letztern, b_1 der erstern, so ist:

$$s = b + 1{,}1\,b_1.$$

10) Zahl der Zähne.

Ist s die Theilung, so ist offenbar die Anzahl der Zähne n gegeben durch die Formel

$$n = \frac{2\pi r}{s}.$$

Es muss jedoch natürlich die nächst kleinere ganze Zahl genommen werden.

Ist die Theilungssehne s_1 gegeben, so hat man:

$$s_1 = 2r \sin \frac{s}{2r},$$

wo $\frac{s}{2r}$ den in Theilen von π gegebenen Bogen anzeigt, oder in Winkelmass:

$$s = 2r \sin \frac{90s^\circ}{\pi r} = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Die Anzahl der Zähne darf nicht zu klein sein, damit die Zahnreibung nicht zu gross wird. Bei Drillingen reichen 6 Zähne im Treibrade, 10 im Getriebe aus, sonst sind 8 und 12, bei sanftem Gange nicht unter 20 nöthig. Auch soll das grössere Rad höchstens 6 mal so viel Zähne haben als das kleinere, damit nicht zu ungleichmässige Abnutzung erfolgt. Ist also die Umsetzungszahl eine sehr grosse, so bedient man sich lieber mehrfacher Räderwerke.

Endlich ist es gut, dass die Anzahlen der Zähne beider in einander greifender Räder relative Primzahlen sind, denn offenbar kommt nur in diesem Falle jeder Zahn des einen Rades mit jedem des Andern in Berührung, wodurch gleichmässige Abnutzung erfolgt.

Die Theilungen zweier in einander greifender Räder muss offenbar dieselbe sein, so dass man hat, wenn n und n_1 die Zahnanzahlen sind,

$$n = \frac{2\pi r}{s}, \quad n_1 = \frac{2\pi r_1}{s},$$

$$\frac{n}{n_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \lambda.$$

Letztere Formel gilt indess nicht mehr für hyperbolische Räder. Sie zeigt, „dass sich die Zahnanzahlen verhalten wie die Theilungshalbmesser, und umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten.“ Sind noch a, b die Hebelarme, an denen bezüglich die Kraft P und die Last Q arbeiten, so war:

$$Pa = Kr, \quad Kr_1 = Qb,$$

also:

$$\frac{P}{Q} = \frac{rb}{ar_1} = \frac{nb}{an_1} = \frac{w_1}{w},$$

wenn w und w_1 bezüglich die Geschwindigkeiten der Kraft und Last sind.

Bei mehrfachen Räderwerken, deren Zahnzahlen bezüglich n, n_1, n_2, n_3 ... sind, hat man:

$$\frac{P}{Q} = \frac{n\,n_2 \ldots b}{n_1 n_3 \ldots a}.$$

Digitized by Google

11) **Reibung der Zähne bei Stirnrädern.**

Setzt man annähernd die Kraft, mit der die Räder gegen einander drücken, der Kraft K im Berührungspunkte der Theilkreise gleich, und ist μ der Reibungscoefficient, setzt man ferner die Seitenflächen ebenfalls für annähernde Bestimmung als eben voraus, so ist die der Zahnfläche AB parallel wirkende Reibung:

$$F = \mu K.$$

Schreitet die Bewegung vom ersten Eingriffe E eines Räderpaares vor bis zur Centrallinie CM, so haben die Zähne selbst den Weg ED und die Ecke eines Zahnes die Seitenfläche des andern zurückgelegt; bei dem Wege DF legt dagegen die Ecke des andern Zahnes die Seitenfläche des erstern zurück, und der Weg der Reibung ist also gleich AB, während die Kraft K den Weg $DE = \sigma$ macht.

Nun war

$$AB = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right).$$

Also die auf den Theilkreis reducirte Reibung ist gegeben durch die Formel:

$$f = \frac{AB}{\sigma} F = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\mu K.$$

Wenn nur 2 Zähne gleichzeitig eingreifen, so stellt σ offenbar die Theilung vor, und man hat dann:

$$\sigma = \frac{2\pi r}{n} \quad \frac{\sigma}{2r} = \frac{\pi}{n}, \quad \frac{\sigma}{2r_1} = \frac{\pi}{n_1}$$

also:

$$f = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\pi\mu K.$$

Sind ν Zähne im Eingriffe, so ist

$$\sigma = \frac{\nu}{2} s,$$

wenn s die Theilung ist, also:

$$f = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\frac{\nu\pi}{2}\mu K.$$

Hat man statt des Zahnrades eine Zahnstange, so ist zu setzen $n_1 = \infty$ also:

$$f = \frac{\nu\pi}{2n}\mu K,$$

und wenn nur 2 Zähne in einandergreifen:

$$f = \frac{\pi}{n}\mu K.$$

Der Faktor $\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}$ zeigt offenbar, dass die Reibung abnimmt, wenn die Anzahl der Zähne vermehrt wird.

Nehmen wir immer an, dass 2 Zähne in einander greifen, so wird die Kraft im Theilkreise K durch die Reibung um f vermehrt, d. h. sie ist:

$$1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\pi\mu$$

mal so gross als ohne Berücksichtigung der Reibung.

Bei einem einfachen Räderwerke hat man aber:

$$P = (K + f)\frac{r}{a}, \quad Q = \frac{Kr_1}{b},$$

also:

$$\frac{P}{Q} = \left[1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\pi\mu\right]\frac{r}{r_1}\frac{b}{a} = \left[1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\pi\mu\right]\frac{nb}{n_1 a},$$

und bei einem doppelten Räderwerke:

$$\frac{P}{Q} = \left[1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\pi\mu\right]\left[1 + \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_2}\right)\pi\mu\right]\frac{nn_2}{n_1 n_2}$$

d. h. angenähert:

$$\frac{P}{Q} = \left[1 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)\pi\mu\right]\frac{nn_2}{n_1 n_3}$$

12) **Reibung der Zähne bei conischen Rädern.**

Bei conischen Räderwerken wird die Umfangsgeschwindigkeit AA_1, welche bei Räder gemeinsam haben (Fig. 23) auf der Coincidenzlinie AC senkrecht stehen. Daher kann man sich auch die unendlich kleinen Bogen AA_1, welche sich berühren als Theile zweier Räder denken, deren Ebenen senkrecht auf AC stehen, deren Axen BF und HG parallel AC sind, und deren Radien AB und AH dieselben Winkel ε, ε_1 mit den Radien r und r_1 bilden, welche die Axen der wirklichen Räder mit der Berührungslinie machen. Es wird also die Reibungsarbeit durch die eben entwickelte Formel noch gegeben sein, wenn man darin r und r_1 bezüglich

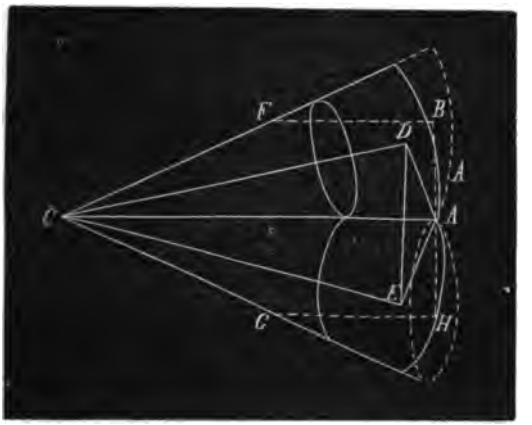
$$AB = r\cos\varepsilon \text{ und } AD = r_1\cos\varepsilon_1$$

setzt, so dass man hat:

$$f = \frac{s}{2}\left(\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{\cos\varepsilon_1}{r_1}\right)\mu K.$$

Digitized by Google

Fig. 23.



s ist hier offenbar die Theilung der wirklichen Räder. Ist noch δ der Winkel, welchen beide Axen mit einander machen, so hat man in Dreieck EAD,

$$< EAD = 180 - \delta,$$

also:

$$ED^2 = r^2 + r_1^2 + 2r r_1 \cos \delta.$$

Da ferner Figur $CEAD$ mit den beiden rechten Winkeln bei E und D ein Kreisviereck bildet, so ist $< EDA = ECA = \varepsilon$, also:

$$\frac{ED}{\sin \delta} = \frac{r}{\sin \varepsilon} = \frac{r_1}{\sin \varepsilon_1},$$

und folglich:

$$\sin \varepsilon = \frac{r \sin \delta}{\sqrt{r^2 + r_1^2 + 2r r_1 \cos \delta}},$$

also:

$$\frac{\cos \varepsilon}{r} = \sqrt{\frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \frac{2r_1}{r} \cos \varepsilon + \cos \delta^2}{r^2 + r_1^2 + 2r r_1 \cos \delta}} = \left(\frac{r_1}{r} + \cos \delta\right) : \sqrt{r^2 + r_1^2 + 2r r_1 \cos \delta}$$

also auch:

$$\frac{\cos \varepsilon_1}{r_1} = \left(\frac{r}{r_1} + \cos \delta\right) : \sqrt{r^2 + r_1^2 + 2r r_1 \cos \delta}$$

daher:

$$\frac{\cos \varepsilon}{r} + \frac{\cos \varepsilon_1}{r_1} = \frac{\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r} + 2 \cos \delta}{\sqrt{r^2 + r_1^2 + 2r r_1 \cos \delta}} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r r_1} \cos \delta}$$

also:

$$f = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r r_1} \cos \delta}\, \mu K;$$

und da man hat:

$$s = \frac{2\pi r}{n} = \frac{2\pi r_1}{n_1},$$

so ist auch:

$$f = \sqrt{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n_1^2} + \frac{2}{n n_1} \cos \delta\right)} \cdot \pi \mu K.$$

Digitized by Google

Ist wieder P die Kraft, Q die Last, a und b die entsprechenden Arme, so folgt:

$$\frac{P}{Q} = \left[1 + \pi\mu\sqrt{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n_1^2} + \frac{2}{nn_1}\cos\delta\right)}\right]\frac{n}{n_1}\,\frac{b}{a},$$

Aus diesen Formeln ergibt sich für den Fall, wo die Axen auf einander winkelrecht stehen:

$$f = \sqrt{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n_1^2}\right)}\,\pi\,\mu\,K.$$

Für den Fall, wo die Axen parallel sind, hat man wieder cylindrische Räder. Jedoch ist der Fall, wo die Verzahnung nach aussen stattfindet, und wo $\delta = 0$, von der innern Verzahnung, wo $\delta = 180°$ ist, zu unterscheiden. Man erhält in beiden Fällen:

$$f = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\pi\,\mu\,K,$$

$$f = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n_1}\right)\pi\,\mu\,K.$$

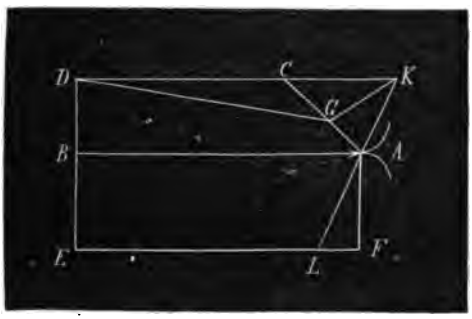
„Bei nach innen verzahnten Stirnrädern ist also die Reibung am kleinsten, bei nach aussen verzahnten am grössten."

13) Reibung der Zähne bei hyperbolischen Rädern.

Bei den hyperbolischen Rädern lässt sich der Weg der Reibung aus einem Wege senkrecht auf der Berührungslinie, der, wie bei den conischen berechnet werden kann, und aus einem Wege längs der Berührungslinie oder in der Zahnbreite zusammensetzen.

Wir können wieder imaginäre Axen substituiren, welche der Berührungslinie AB parallel sind, (Fig. 24) und durch die Punkte K und L gehen, in welchen die Umdrehungsaxen der hyperboloidischen Räder von der durch A

Fig. 24.



gehenden auf AB senkrechten Ebene von der Normale in Punkt A geschnitten werden. Seien M und M_1 die Längen von AK und AL. Zieht man noch AG senkrecht auf die durch DC gehende und BA parallele Ebene, so ist $AG = r$ der Kehlhalbmesser, $< GAK = \varphi$ (Abschn. 6.) also:

$$AK = \frac{AG}{\cos\varphi} = r\sqrt{1 + \operatorname{tg}\varphi^2},$$

oder, da $r\operatorname{tg}\varphi = l\operatorname{tg}\varepsilon$ ist (Abschnitt 6),

$$AK^2 = r^2 + l^2\operatorname{tg}\varepsilon^2,$$

und ebenso:

$$AL^2 = r_1^2 + l^2\operatorname{tg}\varepsilon_1^2,$$

wo l wieder das Stück der Berührungslinie BA vom Kehlkreise bis zum Berührungspunkt A ist.

Sei noch:

$$s = \sqrt{r^2 + l^2\operatorname{tg}\varepsilon^2},\quad s_1 = \sqrt{r_1^2 + l^2\operatorname{tg}\varepsilon_1^2},$$

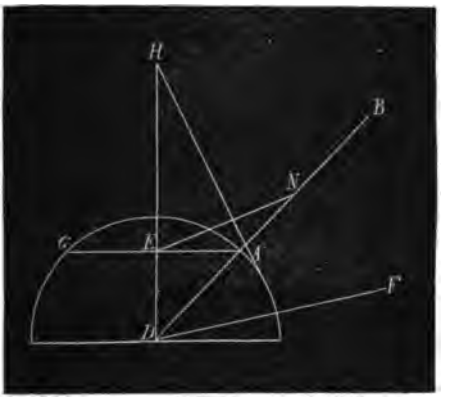
so ergibt sich der auf der Berührungslinie senkrechte Reibungsweg:

$$M = \frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1}\right)$$

ganz wie oben.

Die Theilung s bestimmt hier die auf der Berührungslinie senkrechte Bewegungscomponente, welche zwischen dem Eingreifen eines Zahnes und des nächsten zurückgelegt wird. Was die Vertheilung längs der Berührungslinie anbetrifft, so ist zunächst der Winkel ν zu ermitteln, den die Berührungslinie AB mit der Tangente der Radumfänge im Berührungspunkte macht. Ist (Fig. 25) AG der Durchschnitt der durch AB mit Axe DF parallel gelegten Ebene mit der Grenzfläche des Rades, so ist DE senkrecht auf $AG = r$ der Kehlhalbmesser. Sei AH die Tangente an A, AN die Projection von AH auf die Berührungs-

Fig. 25.



linie, also, wenn ν der Winkel zwischen AH und AN, ist $AN = AH \cos \nu$. Aber: $< ENA = 90°$; denn da sowohl HN als HE auf AN senkrecht stehen, so muss jede in Ebene HNE liegende Linie also auch AN diese Eigenschaft haben, woraus sich ergibt:

$$AN = EA \sin \varepsilon,$$

denn die Linien EA und EN schliessen den Winkel ε ein. Ferner ist:

$$\frac{AH}{AE} = \frac{DA}{DE} = \frac{R}{r},$$

$$u = v \cos \nu \qquad s = v \sin \nu,$$

aber

$$\cot \nu = \frac{\cos \nu}{\sqrt{1 - \cos \nu^2}} = \frac{r \sin \varepsilon}{\sqrt{R^2 - r^2 \sin \varepsilon^2}},$$

oder wegen $R^2 = r^2 + l^2 \sin \varepsilon^2$:

$$\cot \nu = \frac{r \sin \varepsilon}{\sqrt{r^2 \cos \varepsilon^2 + l^2 \sin \varepsilon^2}} = \frac{r \operatorname{tg} \varepsilon}{s},$$

mithin:

$$u = \frac{rs \operatorname{tg} \varepsilon}{s}$$

und ebenso ist fürs andre Rad:

$$u_1 = \frac{r_1 s \operatorname{tg} \varepsilon_1}{s_1}.$$

Also die ganze Breiteverschiebung:

$$u + u_1 = s \left(\frac{r}{z} \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{r_1}{s_1} \operatorname{tg} \varepsilon_1 \right),$$

somit also, da u oder u_1 und M auf einander senkrecht stehen, für den ganzen Reibungsweg:

$$\sigma = \sqrt{(u + u_1)^2 + M^2},$$

also:

$$\sigma = s \sqrt{\frac{s^2}{4} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} \right)^2 + \left(\frac{r}{s} \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{r_1}{s_1} \operatorname{tg} \varepsilon_1 \right)^2},$$

Digitized by Google

und die Zahnreibung selbst reducirt auf den Theilkreis mit den gedachten der Berührungslinie parallelen Axen:

$$f=\frac{\mu K\sigma}{s}=\mu K\sqrt{\frac{s^2}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z_1}\right)^2+\left(\frac{r\operatorname{tg}\varepsilon}{s}+\frac{r_1\operatorname{tg}\varepsilon_1}{z_1}\right)^2}.$$

Wie schon erwähnt, ist s hier die Theilung auf den imaginären Radumfängen genommen.

Die Theilungen t, t_1 auf den Hyperboloidrädern haben offenbar s zur Projection, und zwar wird sein

$$s=t\sin\nu \text{ und } s=t_1\sin\nu_1$$

wo ν die obige Bedeutung hat, ν_1 den entsprechenden Winkel für das andere Rad anzeigt. Nun ist:

$$\sin\nu=\frac{\sqrt{R^2-r^2\sin\varepsilon^2}}{R}=\frac{z\cos\varepsilon}{R},$$

also:

$$\sin\nu_1=\frac{z_1\cos\varepsilon_1}{R_1},$$

also:

$$t=\frac{sR}{z\cos\varepsilon}=\frac{\sqrt{r^2+l^2\sin\varepsilon^2}}{\sqrt{l^2\sin\varepsilon^2+r^2\cos\varepsilon^2}}$$

und

$$t_1=\frac{sR_1}{z_1\cos\varepsilon_1}=\frac{\sqrt{r_1{}^2+l^2\sin\varepsilon_1{}^2}}{\sqrt{l^2\sin\varepsilon_1{}^2+r_1{}^2\cos\varepsilon_1{}^2}},$$

wo für R und R_1 die Werthe:

$$R=\sqrt{r^2+l^2\sin\varepsilon^2},\quad R_1=\sqrt{r_1{}^2+l^2\sin\varepsilon_1{}^2}$$

zu setzen sind. Die Theilungen sind also hier keineswegs für beide Räder gleich.

Die Anzahl der Zähne ist gegeben durch die Formeln:

$$n=\frac{2\pi R}{t},\quad n_1=\frac{2\pi R_1}{t},$$

d. h.

$$n=\frac{2\pi z\cos\varepsilon}{s},\quad n_1=\frac{2\pi z_1\cos\varepsilon_1}{s}.$$

Seien jetzt wieder P und Q bezüglich Kraft und Last, a und b die Arme, an denen sie angreifen. Während K den Weg s, und die Reibung μK den Weg σ durchläuft, wird P den Weg $\frac{2\pi a}{n}$ zurücklegen und ebenso Q den Weg $\frac{2\pi b}{n_1}$, also hat man, wenn die Zahnreibung nicht berücksichtigt wird:

$$Ks=\frac{2\pi a}{n}P=\frac{2\pi b}{n_1}Q$$

und

$$f\sigma=\mu K\sigma=\mu\frac{2\pi a}{n}\frac{\sigma}{s}P=\mu\frac{2\pi b}{n_1}\frac{\sigma}{s}Q.$$

Also mit Rücksicht auf die Reibung:

$$\frac{2\pi a}{n}P=\frac{2\pi b}{n_1}Q+f\sigma=\frac{2\pi b}{n_1}Q+\frac{2\pi b}{n_1}\frac{\sigma}{s}\mu Q=\frac{2\pi b}{n_1}Q\left(1+\mu\frac{\sigma}{s}\right)$$

$$\frac{P}{Q}=\left(1+\frac{\sigma}{s}\mu\right)\frac{n}{n_1}\frac{b}{a}=\left[1+\mu\sqrt{\frac{s^2}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z_1}\right)^2+\left(\frac{r\operatorname{tg}\varepsilon}{s}+\frac{r_1\operatorname{tg}\varepsilon_1}{s_1}\right)^2}\right]\frac{n}{n_1}\frac{b}{a}$$

und wegen der Werthe von s und n:

$$\frac{s}{n}=\frac{s}{2\pi\cos\varepsilon},\quad \frac{s_1}{n_1}=\frac{s}{2\pi\cos\varepsilon_1},$$

also:

Digitized by Google

$$\frac{P}{Q} = \left[1 + \pi\mu\sqrt{\left(\frac{\cos\varepsilon}{n} + \frac{\cos\varepsilon_1}{n_1}\right)^2 + \frac{4}{s^2}\left(\frac{r\sin\varepsilon}{n} + \frac{r_1\sin\varepsilon_1}{n_1}\right)^2}\right]\frac{n}{n_1}\frac{b}{a}.$$

Da man aber hat:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon_1}, \quad \varepsilon + \varepsilon_1 = \vartheta,$$

also:

$$\sin\varepsilon = \frac{n\sin\vartheta}{\sqrt{n^2 + n_1^2 + 2nn_1\cos\vartheta}}$$

$$\sin\varepsilon_1 = \frac{n_1\sin\vartheta}{\sqrt{n^2 + n_1^2 + 2nn_1\cos\vartheta}}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{n\cos\vartheta + n_1}{\sqrt{n^2 + n_1^2 + 2nn_1\cos\vartheta}}$$

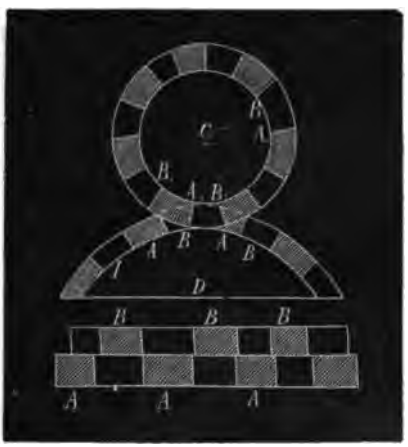
$$\cos\varepsilon_1 = \frac{n_1\cos\vartheta + n}{\sqrt{n^2 + n_1^2 + 2nn_1\cos\vartheta}},$$

also, wenn man noch $r + r_1 = e$ setzt:

$$\frac{P}{Q} = \left[1 + \pi\mu\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n_1^2} + \frac{2}{nn_1}\cos\vartheta + \frac{4e^2\sin\vartheta^2}{s^2(n^2 + n_1^2 + 2nn_1\cos\vartheta)}}\right]\frac{n}{n_1}\frac{b}{a}.$$

Anmerkung. Um die Zahl der Zähne vermehren zu können, stellt man öfters dieselben in 2 oder mehreren Kreisen hintereinander. Solche Räder heissen Stufenräder oder Hooksche. (Fig. 26) Die vorderen und hinteren Zahnringe bei-

Fig. 26.



der Räder greifen hier bezüglich in einander. In beiden zusammen sind also 2 Zähnepaare im Eingriffe, und der Reibungsweg ist also so gross, als wenn immer 2 in einer Reihe nebeneinander stehender Zähne eingriffen. Man hat also:

$$f = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\frac{\mu\pi K}{2},$$

also halb so gross wie bei einem Räderwerke mit einfachen Zahnringen. Sind m Zahnreihen vorhanden, so findet man ebenso:

$$f = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\frac{\mu\pi K}{m}.$$

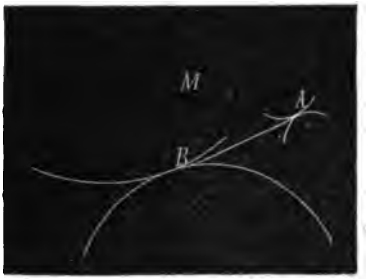
14) Form der Zähne bei Stirnrädern.

Die Form der Zähne muss so beschaffen sein, dass die Bewegung sich ohne alle Störung übertragen lässt. Man kann sich dies am einfachsten in folgender Art vorstellen.

Digitized by Google

Betrachtet man nur die relative Bewegung des einen Rades M (Fig. 27) in

Fig. 27.



Bezug auf das andere, so kann man sich das letztere als ruhend vorstellen. Insofern nun die Räder bei Stirnrädern und auch bei conischen nur auf einander rollen, so wird die relative Bewegung des ersteren Rades lediglich in einer unendlich kleinen Drehung um die Berührungslinie beider Räder als Axe bestehen, so dass also diese Axe von von Moment zu Moment immer wechselt.

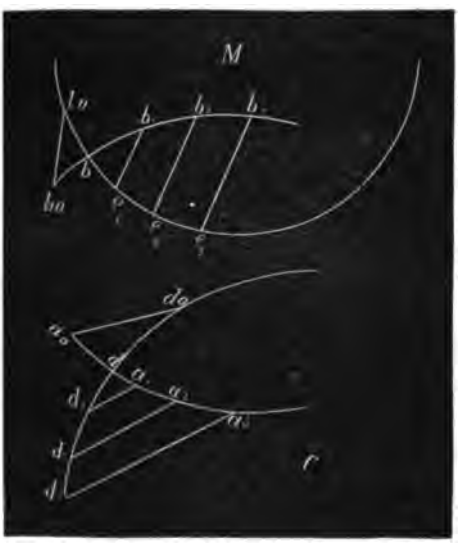
Zieht man also auf die Bewegungsrichtung irgend eines Punktes A des Rades M eine senkrechte AB nach der Berührungslinie, so ist diese der Radius des Bogens, welchen zur Zeit Punkt A beschreibt, und daher auch auf der Berührungslinie senkrecht. Wenn aber A der Punkt ist, in welchem sich zwei Zähne berühren, so muss diese Bewegung des Punktes A ganz auf dem Zahne des als ruhend gedachten Rades erfolgen, weil sonst die Bewegung gehemmt wäre. Es ist also die Linie AB zugleich gemeinschaftlich Normale der beiden Zahnflächen in Punkt A, und man hat somit die Regel.

„Bei jeder Stellung muss die gemeinschaftliche Normale im Berührungspunkte beider Zähne durch den Berührungspunkt der Räder, der jedenfalls im Theilkreise liegt, gehen."

Mit dieser Regel ist die Form der Zähne des einen Rades für cylindrische und auch für conische Räder völlig bestimmt, wenn die Form der Zähne des andern Rades gegeben ist.

Seien (Figur 28) $e_0e_1e_2$ und $d_0d_1d_2$ die Theilkreise, $b_0bb_1b_2b_3$ eingegebener, $a_0a_1a_2a_3$ der zugehörige gesuchte Zahn.

Fig. 28.



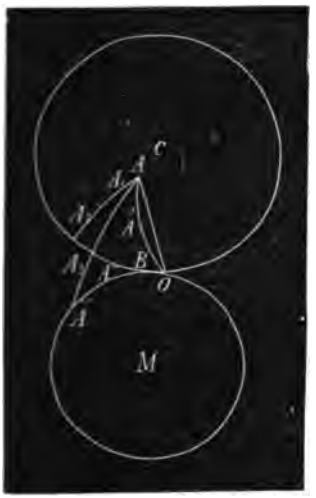
Wir nehmen an, dass im Anfang der Bewegung die Punkte d_0 und b_0 der Theilkreise in Berührung sind. Man mache die Stücke d_0d_1, d_1d_2, d_2d_3 ... bezüglich gleich den willkürlich also z. B. gleich angenommenen l_0e_1, e_1e_2, e_2e_3. Ziehe lothrecht gegen die gegebene Zahnfläche l_0b_1, e_1b_1, e_2b_2, e_3b_3, und ihnen gleich die Linien d_0a_0, d_1a_1, d_2a_2, d_3a_3 derart, dass die Winkel dd_0a_0, dd_1a_1 ... bezüglich gleich bl_0b_0, be_1b_1 ... sind, wenn die Räder sich von innen, oder gleich ihrem Supplemente, wenn sie sich von aussen berühren, so

Digitized by Google

sind $d_3 d_1 d_0 d_2$ die $b_0 b_1 b_2 b_3$ entsprechenden Punkte des andern Zahns.

Die Entstehung der in einandergreifenden Zähne kann man ganz allgemein auf folgende Betrachtungen zurückführen. Sei C der Mittelpunkt des einen Theilkreises (Fig. 29 und 30), ABO eine beliebige Curve, welche denselben berührt. Man denkt sich dieselbe um Kreis

Fig. 29.



C derart gerollt, dass sie immer mit demselben in Berührung bleibt, so wird Punkt A dabei einen Weg $AA_1A_2A_3$ beschreiben.

Denkt man sich nun die Curve ABO auf dem andern Theilkreise M oder innerhalb desselben, je nachdem sich die Räder von aussen oder von innen berühren, gerollt, so entsteht die Curve $AA'A''$, und zwar derart, dass die Curven immer in einem Punkte A in Berührung sind, wenn sich, wie dies doch der Fall ist, die Theilkreise immer in O berühren, denn der Weg, den Punkt A beschreibt, ist bei beiden Bewegungen ein kleiner Kreisbogen, mit Radius OA; es ist also OA auch gemeinschaftliche Normale von AA_1 und AA' und diese geht also durch den Berührungspunkt der Theilkreise. Daraus folgt denn, dass $AA_1A_2A_3$ und $AA'A''$ zusammengehörige Zahnformen sind. D. h.:

„Um zwei zusammengehörige Zahnformen zu finden, lässt man eine beliebige Curve die Theilkreise in ihrem momentanen Berührungspunkt O gleichzeitig berühren, und dieselbe auf oder in beiden Theilkreisen (je nach ihrer anfänglichen Lage) rollen, ein beliebiger Punkt A derselben beschreibt dann die zusammengehörigen Zahncurven."

Der nächstliegende Fall ist der, wo die Curve ABO selbst ein Kreis mit be-

Fig. 30.

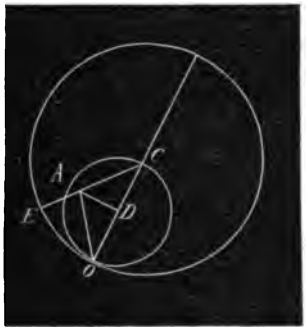
liebigen Radius ist. Ein Kreis, der auf einem andern rollt, während er ihn von aussen berührt, beschreibt bekanntlich eine Epicycloide, wenn er ihn von innen berührt, eine Hypocycloide. In letzterem Falle ist ausdrücklich zu bemerken, dass der Radius des rollenden oder Erzeugungskreises auch grösser als der des ruhenden sein kann.

Bei zwei Rädern, die sich von aussen berühren, sind also eine Hypocycloide und eine Epicycloide, bei solchen die sich von innen berühren, zwei Hypocycloiden passende Zahnformen.

Besonders zu merken ist der Fall, wenn der Halbmesser des Erzeugungskreises halb so gross ist, als der des einen Theilkreises C. Sei D (Fig. 31) Mittelpunkt des Erzeugungskreises, A der Punkt, welcher die Hypocycloide beschreibt, F der Punkt, wo im Anfang die Berührung stattfand, so dass Bogen EA gleich OA ist. Es lässt sich dann zeigen, dass immer die Verlängerung der Linie EA durch Punkt C geht; denn zieht man Linie CA, die die Peripherie von Kreis C in E schneidet, so ist Bogen $AO = EO$. (Sei nämlich $CO = r$,

Digitized by Google

Fig. 31.



$< EDO = \alpha$, so hat man $EO = \frac{\pi r \alpha}{180} = AO$).

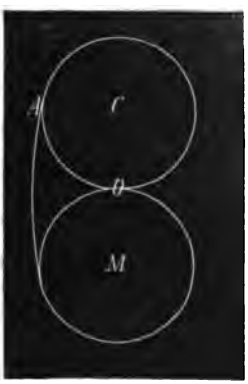
Es wird sich also während der Bewegung Punkt *A* stets im Durchmesser *EC* befinden, d. h.:

„Wenn der in einem andern rollende Kreis einen Halbmesser hat, der die Hälfte des Halbmessers des letztern beträgt, so verwandelt sich die Epicycloide in eine grade Linie die radial gegen den festen Kreis gerichtet ist."

In unserm Falle sieht man also, dass wenn die Zähne des einen Rades gradlinig und radial gegen das Rad gerichtet sind, das andere Rad epicycloidische bezüglich hypocycloidische Zähne haben muss, welche durch Rollen eines Kreises entstanden sind, der zum Radius die Hälfte des Radius des ersten Rades hat.

Denkt man sich (Fig. 32) den Zahn des einen Rades als einen Punkt *A* in

Fig. 32.



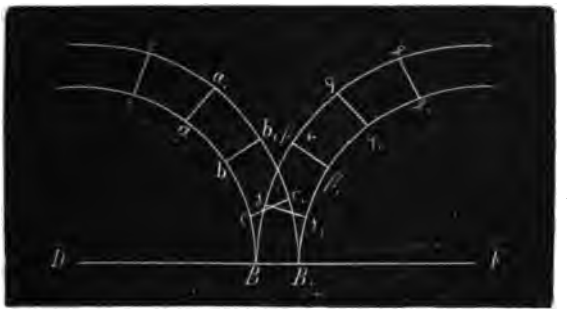
der Peripherie des Theilkreises *C*, so wird dieser Punkt *A*, wenn man den Kreis *C* in oder auf dem andern Theilkreise rollen lässt. diejenige Cycloide erzeugen, welche die Zähne des andern Rades bestimmt. Also „sind die Zähne des einen Rades Punkte, so sind die des andern Cycloiden, welche durch Rollen des betreffenden Theilkreises auf oder in dem andern entstanden sind."

Setzen wir den Radius des einen Theilkreises unendlich gross, so verwandelt sich das betreffende Zahnrad in eine Zahnstage, wie sie in Verbindung mit dem Rade, für auf- und absteigende Bewegungen anzuwenden ist. In diesem Falle rollt der Erzeugungskreis auf einer graden und bildet so eine Cycloide, welche die Zähne der Zahnstange gibt, während die Zähne des Rades Epicycloiden bleiben.

Endlich kann der Radius des Erzeugungskreises unendlich gross werden, dieser ist also dann eine grade Linie, und man kann annehmen, dass sie Kreis *M* von innen oder aussen berühre; indem sich diese Grade auf der Peripherie eines Kreises *C* oder *M* wälzt, beschreibt einer ihrer Punkte *A* eine Kreisevolvente. Die entsprechenden Zahncurven sind also hier 2 Kreisevolventen *AB* und *AD*, die man sich entstanden denken kann, wenn man die Bogen *OB* nnd *OD* der beiden Kreise abwickelt, wobei sie schliesslich die Lage *OA* annehmen, also in die unserer Graden kommt, welche stets Normale beider Zahncurven bleibt, und auch immer durch den Berührungspunkt *A* der Theilkreise geht, wie dies verlangt ist.

Diese Constructionen lassen sich noch in folgender Weise verallgemeinern. Seien (Fig 33) *BB* und *BC* die cycloidischen Zahncurven. Unter dieser Gestalt als der allgemeinsten lassen sich nämlich, wie wir eben gesehen, auch die Gestalten der graden Linie und der Kreisevolvente bringen, *B* ihr Berührungspunkt, *D* die gemeinschaftliche Normale. Denkt man sich nun durch alle Punkte von *EB*, Normalen ER_1, aa_1, bb_1, cc_1, BB_1 von gleicher Länge gelegt, so entsteht, wenn man die Endpunkte E_1, a_1, b_1, c_1, B_1 derselben verbindet, eine zweite *EB* parallele Curve; zieht man nun auch zu *BC* Normalen BB_1, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, CC_1 von gleicher Länge als die vorigen aber in entgegengesetzter Richtung, und verbindet auch ihre Endpunkte, so haben die Curven B_1C_1 und E_1B_1 mit den früheren *BC* und *EB* immer gleich gerichtete Normalen, und da sie den letztern parallel sind, so werden sie sich immer gleichzeitig mit denselben berühren. Die Curven EB_1 und B_1C_1 sind also auch passende Zahnformen. Sie lassen sich leicht finden, wenn man die cycloidischen hat, am bequemsten so, dass man

Fig. 32.



aus möglichst viel Punkten $a, b, c \ldots$ als Mittelpunkten mit gleichen Halbmessern aa_1 Kreise schlägt, und die Schnittpunkte derselben, die mit $a_1, b_1 \ldots$ zusammenfallen verbindet. Was die Art dieser Curven anbetrifft, so bemerke man, dass sie aus dem Grunde, dass sie mit sB und Be gleich gerichtete Normalen haben, offenbar dieselbe Evolute als sB und Be bezüglich haben müssen. Nun sind letztere Curven Cycloiden (im allgemeineren Sinne des Wortes) und bekanntlich haben diese Curven ähnliche Cycloiden zu Evoluten. Die Curven s_1B_1 und B_1e_1 sind also Cycloidenevolventen.

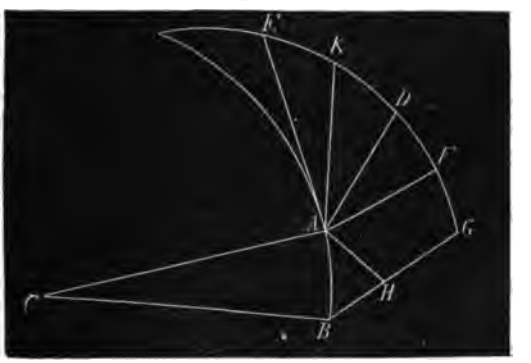
Für den Fall, wo eine Cycloide sB ein Punkt wird, ist s_1B_1 also ein Kreis.

Ist sB eine grade Linie, so ist s_1B_1 eine derselben parallele grade Linie.

15) Allgemeinere Untersuchungen über zusammengehörige Zahnformen.

Die Frage nach der Form der in einander greifenden Zähne findet ihre allgemeine Erledigung in den folgenden Betrachtungen. — Denkt man sich das eine Rad ruhend, so ist im vorigen Abschnitte bereits gezeigt worden, dass der Berührungspunkt des Zahnes des bewegt gedachten Rades einen unendlich kleinen Bogen beschreibt, dessen Radius durch den Berührungspunkt der Theilkreise geht, und Normale beider ineinandergreifenden Zähne ist. Sei sonach (Fig. 33) $r = CA$ der Radius des einen Theilkreises, α der Winkel den ein Punkt desselben bei der Drehung um seine Axe zurückgelegt hat, so ist $BCA = d\alpha$ der in einer

Fig. 33.



unendlich kleinen Zeit zurückgelegte Drehungswinkel. Sei ferner $p = AD$ die gemeinschaftliche Normale beider Zähne, welche nach dem momentanen Berührungspunkte A der Theilkreise gerichtet ist. Sei $DAE = \gamma$ der Winkel dieser Normale mit der Tangente AE an den Theilkreis. Sei s die Bogenlänge des Radzahnes bis zum Berührungspunkte, l der Winkel, welchen die gemeinschaftliche Tangente an den Berührungspunkt der Zähne mit einer anfänglichen Richtung, z. B. mit der Tangente des anfänglichen Berührungspunktes macht; mögen ferner den Ausdrücken r, α, s, l in Bezug auf das andre Rad die Ausdrücke $\varrho, \alpha, \sigma, \lambda$ entsprechen, derart, dass man sich die Räder innerlich berührend denkt, so dass ϱ, α, λ mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden, wenn die

Digitized by Google

Berührung von aussen erfolgt. Da zunächst die Punkte in der Peripherie beider Räder bei der Drehung um ihre Axen gleiche Bogen zurücklegten, so hat man:

$$r\alpha = \varrho\alpha, \quad r d\alpha = \varrho d\alpha.$$

Sei BG die Normale, welche den Punkt B des Theilkreises trifft, welcher im nächsten Momente in die Centrallinie tritt, so ist:

$$BG = p + dp, \quad DG = ds.$$

Sei noch AF parallel BG, und AH auf BG senkrecht, so wird sein:

$$< ABH = \gamma + d\gamma, \quad AB = r d\alpha$$

also $$BH = r \cos \gamma d\alpha,$$

aber auch, da

$$p = HG = AG = AD$$

ist:

$$BH = dp$$

(der Unterschied zwischen AD und DF verschwindet nämlich gegen dp), also:

$$dp = r d\alpha \cos \gamma$$

$$AH = r d\alpha \sin \gamma.$$

Es ist aber auch:

$$AH = FG = DG - DF,$$

und da man hat

$$DG = ds, \quad DF = p dl,$$

denn dl ist der Winkel, den 2 nächste Tangenten, also auch 2 nächste Normalen DA und BG parallel AF machen, also:

$$ds - p dl = r d\alpha \sin \gamma.$$

Es ist ferner:

$$< EAF = \gamma + dl,$$

aber auch, wenn BC die Tangente in B ist:

$$< EAF = EAK + KBG = d\alpha + \gamma + d\gamma,$$

also:

$$d\gamma = dl - d\alpha.$$

Wenn man diese Formeln mit den entsprechenden für das andere Rad in Verbindung bringt, so erhält man hieraus:

$$r\alpha = \varrho\alpha, \quad r d\alpha \cos \gamma = \varrho d\alpha \cos \gamma = dp$$

$$r d\alpha \sin \gamma = \varrho d\alpha \sin \gamma = ds - p dl = d\sigma - p d\lambda,$$

$$d\gamma = dl - d\alpha = d\lambda - d\alpha.$$

Die Zeichen von α, λ, ϱ sind umzukehren, wenn eine äussere Berührung stattfindet.

Was die Anfangswerthe anbetrifft, so nehmen wir an, dass man im Anfang der Bewegung habe:

$$\alpha = \alpha = l = \lambda = p = s = \sigma = 0,$$

d. h., dass man die Bogen der Zähne s und σ, so wie ihre Tangentenwinkel l und λ von dem Punkte und der Richtung an zählt, wo sie den Theilungskreis treffen, und dass man die Drehung der Räder von dem Punkte an zählt, wo sich (wegen $p = 0$) die Zähne in der Centrallinie berühren. Sei noch im Anfange der Bewegung $\gamma = c$, so erhält man aus unsern Gleichungen:

1) $r\alpha = \varrho\alpha$; 2) $\gamma = l - \alpha + c = \lambda - \alpha + c$; 3) $dp = r d\alpha \cos \gamma$; 4) $ds - p dl = d\sigma - p d\lambda = r d\alpha \sin \gamma$.

Den Tangentenwinkel l und den Bogen s kann man als Coordinaten einer Curve betrachten, und ist durch dieselben ihre Gestalt völlig gegeben, wenn man eine Gleichung zwischen s und l hat. (Vergleiche den Artikel: Trajectorie.) Will man dann die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten haben, so kann man dies bewerkstelligen mittelst der Gleichungen:

$$\frac{dx}{ds} = \cos l, \quad \frac{dy}{ds} = \sin l$$

indem man l eliminirt. Die Aufgabe aus den Gleichungen der Zähne des einen Rades, die der Zähne des andern Rades zu finden, kommt also darauf heraus, wenn eine Gleichung zwischen s und l gegeben ist, eine solche zwischen σ und λ zu finden. Die Lösung führt zunächst zu einer Differenzialgleichung der zweiten Ordnung. Man hat nämlich wegen Gleichung 4):

$$\frac{ds}{dl} - r \sin \gamma \frac{d\alpha}{dl} = p,$$

also:

$$\frac{dp}{dl} = \frac{d}{dl}\left(\frac{ds}{dl} - r \sin \gamma \frac{d\alpha}{dl}\right),$$

und wenn man den Werth von $\frac{dp}{dl}$ aus Gleichung 3), den von α aus Gleichung 2) einsetzt, woraus sich ergibt:

$$\alpha = l - \gamma + c, \quad d\alpha = dl - d\gamma,$$

$$r \cos \gamma \left(1 - \frac{d\gamma}{dl}\right) = \frac{d}{dl}\left[\frac{ds}{dl} - r \sin \gamma \left(1 - \frac{d\gamma}{dl}\right)\right],$$

oder:

$$r \cos \gamma = \frac{d}{dl}\left(\frac{ds}{dl} + r \sin \gamma \frac{d\gamma}{dl}\right)$$

oder, wenn man

Digitized by Google

$$r\cos\gamma = u$$

setzt:

$$u = \frac{d^2 s}{dl^2} - \frac{d^2 u}{dl^2}.$$

Wenn man hierin setzt:

$$u = A\sin l + B\cos l,$$

so ergibt sich:

$$\frac{du}{dl} = A\cos l - B\sin l + \sin l\frac{dA}{dl} + \cos l\frac{dB}{dl},$$

und wenn man noch zur Bestimmung von A oder B setzt:

$$\sin l\frac{dA}{dl} + \cos l\frac{dB}{dl} = 0,$$

also:

$$\frac{dB}{dl} = -\operatorname{tg} l\frac{dA}{dl}$$

$$\frac{du}{dl} = A\cos l - B\sin l$$

$$\frac{d^2 u}{dl^2} = -A\sin l - B\cos l + \cos l\frac{dA}{dl} - \sin l\frac{dB}{dl};$$

also, wenn man in die Differenzialgleichung einsetzt:

$$\cos l\frac{dA}{dl} - \sin l\frac{dB}{dl} = \frac{d^2 s}{dl^2},$$

oder:

$$\frac{dA}{dl} = \cos l\frac{d^2 s}{dl^2}$$

$$A = \int \cos l\frac{d^2 s}{dl}$$

$$B = -\int \sin l\frac{d^2 s}{dl},$$

so ergibt sich dann:

$$u = \sin l\int_0^l \cos l\frac{d^2 s}{dl} - \cos l\int_0^l \sin l\frac{d^2 s}{dl} + \alpha\sin l + \beta\cos l,$$

wo α und β die Integrationsconstanten sind. Uebrigens ergibt sich durch theilweises Integriren:

$$\sin l\int \cos l\frac{d^2 s}{dl} = \sin l\cos l\frac{ds}{dl} + \sin l\int \sin l\frac{ds}{dl}\,dl$$

$$\cos l\int \sin l\frac{d^2 s}{dl} = \sin l\cos l\frac{ds}{dl} - \cos l\int \cos l\frac{ds}{dl}\,de$$

also:

$$u = \sin l\int_0^l \sin l\,ds + \cos l\int_0^l \cos l\,ds + \alpha\sin l + \beta\cos l$$

oder wenn man für u seinen Werth setzt und bemerkt, dass für $l=0$, $\gamma=c$ ist:

$$r\cos c = \beta.$$

Aus der Gleichung 4 aber folgt:

$$\frac{ds}{dl} - p = r\sin\gamma\left(1-\frac{d\gamma}{dl}\right),$$

und wenn man den Werth von u differenziirt:

Digitized by Google

$$-r\sin\gamma\frac{d\gamma}{dl}=\frac{ds}{dl}+\cos l\int_0^l\sin l\,ds-\sin l\int_0^l\cos l\,ds+\alpha\cos l-\beta\sin l$$

also durch Vereinigung beider Gleichungen:

$$\cos l\int_0^l\sin l\,ds-\sin l\int_0^l\cos l\,ds+\alpha\cos l-\beta\sin l+p+r\sin\gamma=0,$$

also, wenn man $l=0$, $\gamma=c$, $p=0$ setzt:

$$\alpha=-r\sin c.$$

Somit ist.

$$\text{I.}\quad r\cos\gamma=r\cos(l+c)+\sin l\int_0^l\sin l\,ds+\cos l\int_0^l\cos l\,ds$$

und

$$\text{II.}\quad p=\sin l\int_0^l\cos l\,ds-\cos l\int_0^l\sin l\,ds+r\sin(l+c)-r\sin\gamma,$$

oder auch IIa.

$$p=\frac{ds}{dl}-r\sin\gamma\left(1-\frac{d\gamma}{dl}\right).$$

Nun geben die Gleichungen 1) und 2)

$$\gamma=\lambda-\frac{r\alpha}{\varrho}+c=\lambda-\frac{r}{\varrho}(l-\gamma+c)+c,\text{ also}$$

$$\text{III.}\quad \lambda=\frac{rl}{\varrho}+\frac{\varrho-r}{\varrho}(\gamma-c),$$

und aus Gleichung 4) erhält man:

$$\text{IV.}\quad d\sigma-ds=p\,(d\lambda-dl),$$

wofür man auch schreiben kann, wenn man $d\lambda$ aus III bestimmt:

$$\text{IVa.}\quad d\sigma-ds=\frac{r-\varrho}{\varrho}p\,(dl-d\gamma).$$

Aus den Gleichungen I und II kann nun p und γ gefunden und in IVa eingesetzt werden. Es lässt sich dann durch Quadratur σ als Function von l finden, schliesslich eliminirt man dann aus I, II und dem Integrale von IVa l und γ, so dass man σ als Function von λ hat.

In jedem Falle also lässt sich das Problem durch Quadraturen lösen.

Tritt an die Stelle des Rades mit Radius ϱ eine Zahnstange, so ist $\varrho=\infty$ zu setzen.

Die Gleichungen I und II bleiben hierbei unveränderlich, während an die Stelle von III und IVa. treten:

$$\text{V.}\quad \lambda=\gamma-c$$

$$\text{VI.}\quad d\sigma-ds=-p\,(dl-d\gamma).$$

Beispiele. Es sei gegeben die Gleichung:

$$s=A\sin(ml+n)+Bl+El^2+F,$$

von deren geometrischer Bedeutung sogleich die Rede sein soll.

Es ist dann:

$$\int_0^l\sin l\,ds=\frac{Am}{2}\int_0^l(\sin[(1+m)l+n]+\sin[(1+m)l-n])\,dl+B\int_0^l\sin l\,dl$$

$$+2E\int_0^l l\sin l\,dl=-\frac{Am}{2}\left(\frac{\cos[(1+m)l+n]}{1+m}+\frac{\cos[(1-m)l-n]}{1-m}\right)+\frac{Am\cos n}{1-m^2}$$

$$-B\cos l+B-2El\cos l+2E\sin l,$$

Digitized by Google

$$\int_0^l \cos l\,ds = \frac{Am}{2}\int_0^l (\cos[(1+m)l+n] + \cos[(1-m)l-n])\,dl + B\int_0^l \cos l\,dl$$

$$+ 2E\int_0^l l\cos l\,dl = \frac{Am}{2}\left(\frac{\sin[(1+m)l+n]}{1+m} + \frac{\sin[(1-m)l-n]}{1-m}\right) + \frac{Am^2\sin n}{1-m^2}$$

$$+ B\sin l + 2E\cos l - 2E + 2El\sin l.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen I ein, so ergibt sich:

$$r\cos\gamma = r\cos(l+c) + \frac{Am}{2(1+m)}\sin(ml+n) - \frac{Am}{2(1-m)}\sin(ml+n)$$

$$+ \frac{Am}{1-m^2}\sin l\cos n + \frac{Am^2}{1-m^2}\cos l\sin n + B\sin l + 2E - 2E\cos l$$

$$= -\frac{Am^2}{1-m^2}\sin(ml+n) + r\cos(l+c) + \frac{Am}{1-m^2}\sin l\cos n$$

$$+ \frac{Am^2}{1-m^2}\cos l\sin n + B\sin l + 2E - 2E\cos l.$$

Um den Ausdruck zu vereinfachen, setzen wir:

$$E = 0$$

und

$$r\cos(l+c) + \frac{Am}{1-m^2}\sin l\cos n + \frac{Am^2}{1-m^2}\cos l\sin n + B\sin l = 0,$$

d. h. wenn man die mit $\cos l$ und $\sin l$ multiplicirten Theile einzeln gleich Null setzt:

$$r\cos c + \frac{Am^2}{1-m^2}\sin n = 0,$$

$$-r\sin c + \frac{Am}{1-m^2}\cos n + B = 0.$$

Aus diesen Gleichungen kann man von den vier Grössen A, m, B, n zwei bestimmen, und man hat dann:

$$r\cos\gamma = -\frac{Am^2}{1-m^2}\sin(ml+n).$$

Setzt man also noch:

$$\frac{Am^2}{1-m^2} = r,$$

so sind drei dieser Grössen A, m, n, B bestimmt, und man hat dann:

$$\gamma = ml + n + \frac{\pi}{2};$$

da für $l = 0$, $\gamma = c$ ist, so folgt hieraus auch:

$$c = n + \frac{\pi}{2};$$

während man hat:

$$\cos c + \sin n = 0$$

eine Gleichung, welche mit der vorletzten übereinstimmt, und

$$-mr\sin c + r\sin c + mB = 0,$$

also:

$$B = \frac{r\sin c\,(m-1)}{m},$$

$$s = -\frac{r(1-m^2)}{m^2}\cos(ml+c) + \frac{r\sin c\,(m-1)}{m}\cdot l + F,$$

$$\gamma = ml + c,$$

$$\lambda = \frac{r}{\varrho}l + \frac{\varrho - r}{\varrho}ml = \left(m + \frac{r}{\varrho}(1-m)\right)l.$$

Digitized by Google

Gleichung IIa gibt:

$$p = \frac{r(1-m^2)}{m} \sin(ml+c) + r \sin c \frac{(m-1)}{m} - r \sin(ml+c)(1-m),$$

d. h.

$$p = r\frac{(1-m)}{m}[\sin(ml+c) - \sin c].$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung IV ein, so ergibt sich:

$$d\sigma = ds + \frac{r(1-m)^2}{m}[\sin(ml+c) - \sin c]\frac{r-\varrho}{\varrho}\,dl,$$

d. h. wenn man integrirt, und für s seinen Werth setzt:

$$\sigma = -\frac{r(1-m^2)}{m^2}\cos(ml+c) + r\sin c\frac{(m-1)}{m}\,.\,l + F$$
$$-\frac{r(1-m)^2}{m^2}\,\frac{r-\varrho}{\varrho}\cos(ml+c) - \frac{r(1-m)^2}{m}\sin c\,\frac{r-\varrho}{\varrho}\,l + G,$$

wo G die Integrationsconstante ist. Zur Bestimmung derselben und der von F setzen wir $l=0$, wo dann $s=\sigma=0$ wird, und die Gleichungen für s und σ geben dann:

$$F = \frac{r(1-m^2)}{m^2}\cos c$$
$$G = \frac{r(1-m)^2}{m^2}\,\frac{r-\varrho}{\varrho}\cos c,$$

woraus sich ergibt:

$$\sigma = -\frac{r(1-m)}{m^2}\left(2m + \frac{r}{\varrho}(1-m)\right)\cos(ml+c)$$
$$+\frac{r(m-1)\sin c}{m}\left(m + (1-m)\frac{r}{\varrho}\right)l + \frac{r(1-m)}{m^2}\cos c\left(2m + (1-m)\frac{r}{\varrho}\right).$$

Um σ als Function von λ zu haben, ist noch einzusetzen: $l = \dfrac{\lambda}{m + \frac{r}{\varrho}(1-m)}$,

und man sieht, dass wenn die Gleichung der einen Zahncurve ist:

$$s = -\frac{r(1-m^2)}{m^2}\cos(ml+c) + r\sin c\frac{(m-1)}{m}\,l + \frac{r(1-m^2)}{m^2}\cos c$$

die der entsprechenden des andern Rades sein muss:

$$\sigma = -\frac{r(1-m)}{m^2}\left[2m + \frac{r}{\varrho}(1-m)\right]\cos\left(\frac{m\lambda}{m + \frac{r}{\varrho}(1-m)} + o\right)$$
$$+\frac{r(m-1)\sin c}{m}\lambda + \frac{r(1-m)}{m^2}\cos c\left(2m + (1-m)\frac{r}{\varrho}\right).$$

Offenbar hat diese Gleichung eine ganz ähnliche Gestalt als die, welche s als Function von l giebt. In diesen Gleichungen ist eine willkürliche Constante m enthalten.

Wir wollen jetzt in dem ursprünglichen Werth von s auch $A=0$ setzen, so erhält man:

$$s = Bl + El^2.$$

Es verschwindet nämlich dann auch F, weil für $l=0$, $s=0$ ist.

Es ergibt sich dann:

$$r\cos\gamma = r\cos(l+c) + B\sin l + 2E - 2E\cos l,$$

hierin setzen wir, um B und E zu bestimmen, noch:

$$r\cos(l+c) + B\sin l - 2E\cos l = 0,$$

oder:

Digitized by Google

$$r\cos c - 2E = 0,$$
$$-r\sin c + B = 0,$$

d. h.

$$E = \frac{r}{2}\cos c, \quad B = r\sin c,$$

so dass man hat:

$$r\cos\gamma = r\cos c,$$

d. h.

$$\gamma = c.$$

In diesem Falle ist also γ immer constant; ausserdem ergibt sich:

$$s = r\sin c \cdot l + \frac{r}{2}\cos c l^2$$

und aus IIa:

$$p = r\sin c + r\,l\cos c - r\sin c = r\,l\cos c,$$

endlich aus IVa:

$$d\sigma = ds + \frac{r-\varrho}{\varrho} r\,l\cos c\,dl,$$

oder integrirt:

$$\sigma = rl\sin c + \frac{r}{2}\cos c l^2 + \frac{r-\varrho}{2\varrho} rl^2\cos c + G,$$

wo G die Integrationsconstante ist. Dieselbe wird indess Null, da für $l=0$ auch σ verschwindet. Die Gleichung III giebt noch:

$$\lambda = \frac{r}{\varrho} l,$$

und wenn man mittels derselben l aus dem Werthe von σ eliminirt:

$$\sigma = \varrho\lambda\sin c + \frac{\varrho^2}{2r}\cos c\lambda^2 + \frac{r-\varrho}{2\varrho}\frac{\varrho^2}{r}\lambda^2\cos c,$$

d. h.

$$\sigma = \varrho\lambda\sin c + \frac{\varrho}{2}\cos c\lambda^2.$$

Was die geometrische Bedeutung der eben gefundenen zwei Paare von Zahncurven anbetrifft, so haben die ersteren die Form:

$$s = A\cos(al + c) + Bl + E$$
$$\sigma = A_1\cos(a_1\lambda + c) + B_1\lambda + E_1.$$

und diese Gleichungen stellen die Evolventen von Cycloiden (im allgemeineren Sinne, also Epicycloiden und Hypocycloiden eingeschlossen) vor. (Vergleiche den Artikel: Evolvente oder Trajectorie.)

Die Gleichung einer beliebigen Cycloide, ausgedrückt in einer Beziehung zwischen Bogenlänge S und Tangentenwinkel L ist nämlich:

$$S = \pm\frac{4k}{R}(R+k)\cos\left(\frac{R}{R+2k}L + C\right),$$

wo R der Radius des festen, k der des Erzeugungskreises ist. Haben R und k gleiche Vorzeichen, so hat man eine Epicycloide; sind die Vorzeichen ungleich eine Hypocycloide. Für die gemeine Cycloide ist zu setzen $R = \infty$, und man hat daher für dieselben:

$$S = \pm 4k\cos(L + c).$$

Aus der allgemeinen Gleichung ergibt sich auch:

$$(R+2k)\operatorname{arc}\cos\frac{RS}{4k(R+k)} = RL + c(R+2k),$$

und im Falle:

$$k = -\frac{R}{2}$$

ist.

$$L = 0$$

Digitized by Google

eine Gleichung, welche eine grade Linie vorstellt. Dies stimmt mit dem im vorigen Abschnitt bewiesenen Satze überein, dass diejenige Hypocycloide eine grade Linie ist, welche entsteht, wenn der Erzeugungskreis zum Radius den halben Radius des festen Kreises hat.

Ist der Evolventenbogen einer Curve S', so ist deren Gleichung gegeben durch die Integration der folgenden:

$$\frac{dS'}{dL} = S + e,$$

wo e eine willkürliche Constante ist, durch deren Bestimmung man die unendlich vielen Evolventen einer gegebenen Curve erhält, und S der Evolutenbogen. Wenden wir dies auf die obige Gleichung an, so erhalten wir:

$$\frac{dS'}{dL} = \pm\frac{4k}{R}(R+k)\cos\left(\frac{R}{R+2k}L + c\right) + e,$$

$$S' = \pm\frac{4k}{R^2}(R+k)(R+2k)\sin\left(\frac{R}{R+2k}L + c\right) + el$$

oder:

$$S' = \pm\frac{4k}{R^2}(R+k)(R+2k)\cos\left(\frac{R}{R+2k}L + c'\right) + el,$$

wenn

$$c' = c - \frac{\pi}{2}$$

gesetzt wird. Diese Gleichung aber stimmt mit den Werthen von s und σ, die wir zuerst fanden, in der Form überein.

Untersuchen wir jetzt, welchen Radius der Erzeugungskreis und der ruhende Kreis hat, aus welchen diejenigen Cycloiden entstehen, von welchen die mit s und σ bezeichneten Bogen die Evolventen sind.

Für die erstere Curve ist:

$$\frac{r(1-m^2)}{m^2} = \frac{4k}{R^2}(R+k)(R+2k)$$

$$m = \frac{R}{R+2k},$$

und für die letztere, wenn man mit R', k' die R und k entsprechenden Radien bezeichnet:

$$\frac{r(1-m)}{m^2}\left(2m + \frac{r}{\varrho}(1-m)\right) = \frac{4k'}{R'^2}(R'+k')(R'+2k')$$

$$\frac{m}{m + \frac{r}{\varrho}(1-m)} = \frac{R'}{R'+2k'}.$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

$$\frac{k}{R} = \tfrac{1}{2}\frac{(1-m)}{m},$$

und indem man dies in die erste setzt:

$$\frac{r(1-m^2)}{m^2} = \frac{2k(1+m)}{m^2},$$

woraus sich dann ergibt:

$$k = \frac{r}{2}(1-m)$$

$$R = rm.$$

Aus der vierten Gleichung erhält man:

$$\frac{k'}{R'} = \frac{r(1-m)}{2m\varrho}$$

und indem man dies in die dritte Gleichung setzt:

Digitized by Google

$$\frac{r(1-m)}{m^2}\left(2m+\frac{r}{\varrho}(1-m)\right)=2k'\frac{\left(2m+\frac{r}{\varrho}(1-m)\right)\left(m+\frac{r}{\varrho}(1-m)\right)}{m^2},$$

d. h.

$$r(1-m)=2k'\left(m+\frac{r}{\varrho}(1-m)\right)$$

oder:

$$k'=\frac{r(1-m)}{2\left(m+\frac{r}{\varrho}(1-m)\right)}$$

$$R'=\frac{m\varrho}{m+\frac{r}{\varrho}(1-m)}.$$

Hiermit sind die Curven völlig bestimmt. In einem bestimmten Falle werden aus den Cycloidenevolventen Cycloiden. In der That ist eine Evolvente einer Cycloide immer wieder eine ähnliche Curve und dieser Fall entspricht demjenigen wo

$$c=0$$

ist, oder:

$$\frac{(m-1)\sin c}{m}=0.$$

Diese Gleichung wäre zu erfüllen für $m=1$, indess würde sich dann

$$k=k'=0$$

ergeben, und es muss somit

$$c=0$$

gesetzt werden.

Diese Bedingung drückt aus, dass der Zahn in dem Punkte, wo er den Theilkreis schneidet, radial gegen denselben gekrümmt ist. Um die Radien derjenigen Kreise zu finden, aus welchen die beiden Cycloiden, deren Bogen s und σ sind, entstehen, muss man diese Ausdrücke mit:

$$S=\frac{4k}{R}(R+k)\cos\left(\frac{R}{R+2k}L+c\right)$$

vergleichen.

Wir erhalten:

$$\frac{4k}{R}(R+k)=\frac{r(1-m^2)}{m^2}$$

$$m=\frac{R}{R+2k}$$

$$\frac{4k'}{R'}(R'+k')=\frac{r(1-m)}{m^2}\left(2m+\frac{r}{\varrho}(1-m)\right).$$

Aus der zweiten und vierten Gleichung ergibt sich wie oben:

$$\frac{k}{R}=\frac{1}{2}\frac{1-m}{m},\quad \frac{k'}{R'}=\frac{r(1-m)}{2m\varrho},$$

und wenn man diese Werthe bezüglich in die erste und dritte Gleichung setzt:

$$\frac{2k(1+m)}{m}=\frac{r(1-m^2)}{m^2},$$

d. h.

$$k=\frac{r(1-m)}{2m},$$

$$R=r$$

und

$$\frac{2k'}{m}\left(2m+\frac{r}{\varrho}(1-m)\right)=\frac{r(1-m)}{m^2}\left(2m+\frac{r}{\varrho}(1-m)\right),$$

also:

$$k'=\frac{r(1-m)}{2m}$$

$$R'=\varrho,$$

also die Erzeugungskreise haben gleiche Radien, und die festen Keise sind die Theilkreise selbst, wie dies schon im vorigen Abschnitte bewiesen wurde. Namentlich sind die Fälle zu merken, wo

$$m=-1$$

ist. In diesem Falle hat man

$$k=-r;$$

es ist dann der eine Theilkreis selbst Erzeugungskreis, in welchem Falle die eine Cycloide, welche den Bogen s hat in einen Punkt übergeht, da in diesem Falle $s=0$ wird.

Ebenso ist, wenn

$$k=-\frac{r}{2},$$

ein Fall, welcher $m=\infty$ entspricht, die eine Cycloide eine grade Linie; diese Fälle sind bereits erörtert. — Setzt man in den allgemeinen Formeln für die Cycloiden-Evolventen $m=-1$, so wird:

$$s=2r\sin\frac{c}{2}.$$

Digitized by Google

Es ist dies die Gleichung eines Kreises mit Radius $2r \sin c$, ein Ausdruck, welcher jeden Werth annehmen kann, der kleiner als der Durchmesser des entsprechenden Theilkreises ist. Zähne von dieser Gestalt kommen namentlich bei Drillingen vor. Einem solchen Kreiszahn entspricht dann eine Cycloidenevolvente mit der Gleichung:

$$\sigma = 4r\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)\cos\left(\frac{\lambda}{1-\frac{2r}{\varrho}}+c\right) + 2r\sin c\cdot\lambda - 4r\left(1-\frac{r}{\varrho}\right)\cos c.$$

In diesem Falle hat man auch:

$$k' = \frac{r}{\frac{2r}{\varrho}-1}, \quad R' = \frac{\varrho}{1-\frac{2r}{\varrho}}$$

Was die Gleichungen:

$$s = r\sin c\cdot l + \tfrac{1}{2}r\cos c l^2$$

$$\sigma = \varrho\sin c\cdot\lambda + \frac{\varrho}{2}\cos c\lambda^2$$

anbetrifft, so stellen diese offenbar Kreisevolventen vor. Die Gleichung eines Kreises mit Radius R ist nämlich

$$S = RL$$

und also, wenn S' der Evolentenbogen ist

$$\frac{dS'}{dL} = S + e = RL + e,$$

d. h.

$$S' = \tfrac{1}{2}RL^2 + eL.$$

Für den Fall, wo $c = \frac{\pi}{2}$ ist, also die Zahncurven in Berührung mit den Theilkreisen gedacht werden, hat man:

$$s = rl, \quad \sigma = \varrho\lambda$$

also die Theilkreise selbst, ein Fall, welcher den Frictionsrädern entspricht.

Im Falle, dass man das eine Rad durch eine Zahnstange ersetzt, ist $\varrho = \infty$ zu nehmen.

Die Gleichung für s bleibt unverändert, während die für σ wird:

$$\sigma = -\frac{2r(1-m)}{m}\cos(\lambda+c) + \frac{r(m-1)\sin c\lambda}{m} + \frac{2r(1-m)}{m}\cos c.$$

Es ist diese Gleichung die der Evolventen einer gemeinen Cycloide, welche sich für $c=0$ in eine solche Cycloide selbst verwandelt. Im allgemeinern Falle hat man $k' = \frac{r(1-m)}{2m}$, wodurch der Radius des Erzeugungskreises gegeben ist, und stimmt derselbe mit dem Werthe von k', welcher sich im Falle, wo $c=0$ ist, ergibt, überein. Für $m=-1$ hat man wieder einen Kreis an der Stelle der Cycloiden-Evolventen mit Bogen s, und diesem entspricht als Zahncurve der Stange:

$$\sigma = 4r\cos(\lambda+c) + 2r\sin c\lambda - 4r\cos c.$$

Was die Zähne in der Form von Kreisevolventen anbetrifft, so hat man für die dem Radius ϱ entsprechende Curve:

$$\lambda\sin c + \frac{\lambda^2}{2}\cos c = \frac{\sigma}{\varrho},$$

also wenn ϱ in σ unendlich wächst:

$$\lambda\sin c + \frac{\lambda^2}{2}\cos c = 0.$$

Es ist dies die Gleichung einer graden Linie, da λ constant, und zwar:

$$\lambda = -2\operatorname{tg} c$$

ist.

„Wenn die Zähne des Rades Kreisevolventen sind, werden die der Stange also gradlinig sein."

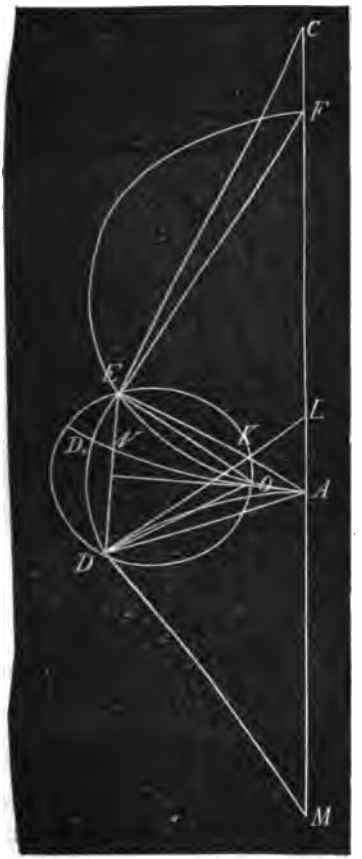
16) Construction der Zahncurven durch Kreisbogen.

Da man es bei Zahncurven nur mit kurzen Bogen zu thun hat, so ist es oft ausreichend, dieselben durch Kreisbogen zu ersetzen, welche den Krümmungskreisen der Zahncurven entsprechen.

Es soll dies zunächst für epicycloidische Bogen auseinander gesetzt werden.

Es sollen (Fig. 35) AD und AD_1 die Bogen der Theilkreise um M und C sein, AEF derjenige Kreis, welcher durch Rollen in den beiden Theilkreisen die entsprechenden Cycloiden anzeigt, seien ferner ED und ED_1 die Zahncurven. MD und FE werden dann Tangenten an die letzteren sein, somit sind DL und EA Normalen, die sich in K schneiden. Wäre K gleich weit von D und E entfernt, so könnte man K als Mittelpunkt eines Kreisbogens erachten, der mit den Cycloidenbogen fast zusammenfällt. Da dies aber nicht stattfindet, so sucht man einen Kreis, dessen Richtungen in D und E gleichviel von den Cycloidenbogen abweichen. Wird durch DEK ein Kreis gelegt, und in der Mitte N von DE ein Loth auf DE errichtet, welches den Kreis DEK in O schneidet, so ist O Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Denn $< KDO = KEO$, so dass die Halbmesser OD und OE um gleiche Winkel von den Normalen des Epicycloidenbogens abweichen. Um den Halbmesser $OD = \varrho$, zu haben, setzten wir Sehne $DE = e$,

Fig. 35.



$< DKE = DOE = \alpha$, wo sich dann ergibt:

$$a = \frac{e}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

und es sind noch e und α zu bestimmen.

Sei der Halbmesser $\frac{AF}{2}$ des Erzeugungskreises $= \varrho$,

$< AMD = \beta$, $< AFE = \gamma$,

welche die zusammengehörigen Winkel des Theilungskreises und des Erzeugungskreises sind, so hat man:

$$AD = 2r \sin \frac{\beta}{2}, \quad AE = 2\varrho \sin \gamma$$

oder annähernd:

$$AD = AE = r, \quad r\beta = 2\varrho\gamma$$

$$< DAE = 180 - DAM - EAF$$

$$= 180 - \left(90 - \frac{\beta}{2}\right) - (90 - \gamma) = \frac{\beta}{2} + \gamma,$$

also:

$$DE = 2AD \sin \frac{DAE}{2} = r\beta\left(\frac{\beta}{2} + \gamma\right)$$

d. h.

$$d = r\beta^2\left(\tfrac{1}{2} + \frac{\gamma}{\beta}\right) = \frac{(r+\varrho)r\beta^2}{2\varrho},$$

$$DOE = DKE = 180 - DLM - EAF$$

$$= 180 - (90 - \beta) - (90 - \gamma) = \beta + \gamma = \alpha,$$

also:

$$a = \frac{e}{2 \sin \frac{\beta+\gamma}{2}},$$

wofür auch annähernd gesetzt werden kann:

$$a = \frac{e}{\beta+\gamma} = \frac{(r+\varrho)r\beta^2}{2\varrho(\beta+\gamma)} = \frac{(r+\varrho)r\beta}{2\varrho+r},$$

oder, da $r\beta$ gleich der Theilung s ist:

$$a = \frac{r+\varrho}{r+2\varrho} s.$$

Um den Halbmesser a_1 des Bogens D_1E zu finden, ist r mit r_1 zu vertauschen, dagegen der Halbmesser ϱ des Erzeugungskreises negativ zu nehmen, also:

$$a_1 = \frac{r_1 - \varrho}{r_1 - 2\varrho} s.$$

Ist:

$$\varrho = \tfrac{1}{2} r_1,$$

welcher Fall, wie wir gesehen haben, für die zweite Zahncurve eine grade Linie gibt, so ist:

$$a = \frac{2r + r_1}{r + r_1} \frac{s}{2}.$$

Ist $r = r_1$, so ergibt sich für die zweite Zahncurve ein Punkt und

$$a_1 = \frac{r + r_1}{r + 2r_1} s = \frac{\lambda+1}{\lambda+2} s.$$

Für eine Zahnstange ist zu setzen $r_1 = \infty$, also:

$$a_1 = s$$

während der Werth von a bleibt.

Eine andere Zahnconstruction ist die folgende:

Wenn sich zwei kreisförmige Zähne berühren, so hat während des Eingreifens ihre Centrallinie KO immer dieselbe Grösse, nämlich die der beiden Halbmesser $OD + KD$ (Fig. 36 und 37). Die Mittelpunkte O und K dieser Kreise aber beschreiben kleine Kreisbogen OO_1 und KK_1 bezüglich um M und C. Schneiden sich nun MO und KC in N, so kann man sich N als den Mittelpunkt einer Drehung der Punkte O und K,

Fig. 36.

Fig. 37.

also der ganzen Linie OK denken*). Die Linie OK geht aber in allen Stellungen durch Punkt A, denn dies war die Bedingung für alle Zahncurven; es wird sich also A nur innerhalb der Linie OK bewegen können, also OK Tangente des Bogens sein, welchen A beschreibt, während O Bogen OO_1 und K Bogen KK_1 zurücklegt. Somit liegt N in der Normale, welche in A auf Linie OK errichtet wird.

Um also O und K zu finden, kann man durch A eine beliebige Linie GH ziehen, auf dieser ein Loth AN errichten, und von einem beliebigen Punkte N desselben nach M und C Linien ziehen, deren Durchschnittspunkte O und K mit GH die Mittelpunkte der Zahnkreise

---

*) Es folgt dies aus dem Satze: „Wenn eine feste Linie OK irgend eine sehr kleine Bewegung macht, so ist diese immer aufzufassen als eine Drehung um den Punkt N, in welchem sich die auf den Bewegungsrichtungen zweier Punkte OO_1 und KK_1 Senkrechten NO und NK schneiden.“ Denn sei Winkel $O_1OA=\vartheta$, $K_1KA=\vartheta_1$, denkt man sich ferner aus Mittelpunkt A kleine Bogen mit Halbmesser O_1A und K_1A gelegt, so erhält man:

$$OA = O_1A + OO_1 \cos\vartheta, \quad KA = K_1A - KK_1 \cos\vartheta_1,$$

also durch Addition: $OA+KA=O_1A+K_1A+OO_1\cos\vartheta-KK_1\cos\vartheta_2$, aber da:

$$OA+KA = O_1A + K_1A = OK$$

ist:

$$OO_1 \cos\vartheta = KK_1 \cos\vartheta_1.$$

Ferner ist im Dreieck NOK:

$$NO \cos\vartheta = NK \cos\vartheta_1,$$

also:

$$\frac{OO_1}{NO} = \frac{KK_1}{NK},$$

und die Bewegungen stehen also einerseits auf NO und NK senkrecht, andrerseits sind sie den Entfernungen der bewegten Punkte von N proportional, sind also einer Drehung um N gleich zu setzen.

Digitized by Google

sind. Nimmt man noch D willkürlich auf OK an, so sind OD, KD deren Halbmesser.

Wird AN auf die andere Seite von GH gelegt, so ist einer der Zahnbogen DE concav, während der andere convex ist. — Bestimmen wir jetzt die Lage von O und K. Sei $< CAK = \vartheta$ der Winkel, um welchen die gemeinschaftliche Normale der Zähne von der Centrallinie abweicht, $AN = K$, $AO = x$, $AK = x_1$, so sind die Lothe von den Mittelpunkten der Theilkreise auf die Normale der Zähne:

$$MG = r \sin \vartheta, \quad CH = r_1 \sin \vartheta$$

und die Abschnitte: $AG = r \cos \vartheta$, $AH = r_1 \cos \vartheta$ also

$GO = r \cos \vartheta - x$, $KH = \vartheta x_1 - r_1 \cos \vartheta$.

Aus den ähnlichen Dreiecken ONA und OMG ergibt sich:

$$\frac{AO}{AN} = \frac{GO}{GM},$$

also:

$$\frac{x}{k} = \frac{r \cos \vartheta - x}{r \sin \vartheta},$$

woraus dann folgt:

$$x = \frac{kr \cos \vartheta}{k + r \sin \vartheta}$$

und ebenso:

$$\frac{AK}{AN} = \frac{HK}{CH},$$

also:

$$\frac{x_1}{k} = \frac{x_1 - r_1 \cos \vartheta}{r_1 \sin \vartheta},$$

mithin:

$$x_1 = \frac{kr_1 \cos \vartheta}{k - r_1 \sin \vartheta}.$$

Ist die eine Zahnfläche DE concav, so ergibt sich:

$$x = \frac{kr \cos \vartheta}{r \sin \vartheta - k}, \quad x_1 = \frac{kr_1 \cos \vartheta}{r_1 \sin \vartheta + k}.$$

Setzt man hier $k = r \sin \vartheta$, so geht der Bogen DE in eine grade Linie über. Sind k und ϑ gegeben, so ist für diesen Fall der Radius r, den wir hier mit ϱ bezeichnen $\varrho = \frac{k}{\sin \vartheta}$, und die Halbmesser aller Räder mit concaver Zahnfläche also stets grösser als $\frac{k}{\sin \vartheta}$. Setzt man den kleinsten Werth $\varrho = \frac{k}{\sin \vartheta}$ für k in unsre Formeln ein, so ergibt sich:

$$x = \frac{r\varrho \cos \vartheta}{r - \varrho}, \quad x_1 = \frac{r_1 \varrho \cos \vartheta}{r_1 + \varrho}.$$

Sind s die Theilung, ν, n, n_1 die Zähnenzahlen bei Halbmesser ϱ, r, r_1, so kommt:

$$\nu = \frac{2\pi\varrho}{s}, \quad n = \frac{2\pi r}{s}, \quad n_1 = \frac{2\pi r_1}{s},$$

also:

$$x = \frac{\nu n}{n - \nu} \frac{s}{2\pi} \cos \vartheta, \quad x_1 = \frac{\nu n_1}{n_1 + \nu} \frac{s}{2\pi} \cos \vartheta.$$

Setzt man also $\vartheta = 72°$, und die kleinste Anzahl der Zähne $\nu = 12$, so ergibt sich:

$$x = 0{,}4943 \frac{ns}{n - 12}, \quad x_1 = 0{,}4943 \frac{n_1 s}{n_1 + 12}.$$

Diese letztere Construction rührt von Willis her.

Fig. 38.

Digitized by Google

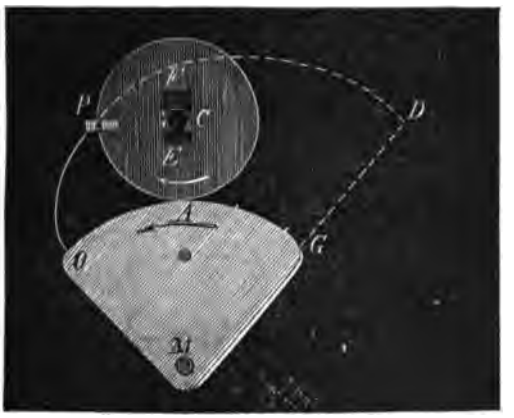
Um die Mittelpunkte *K* und *O* zu ermitteln, kann man sich eines Winkelhakens (Fig. 38) bedienen. Derselbe ist mit *STR* bezeichnet. Sein einer Schenkel *AR* wird so an die Centrallinie gelegt, dass der Nullpunkt des andern Schenkels *ST* im Berührungspunkte *A* liegt. Die nach den eben gegebenen Formeln berechneten Werthe von x und x_1 liest man dann auf der Eintheilung von *ST* ab.

17) Construction der Zahncurven durch Odontographe.

Odontographe sind Apparate, die den Zweck haben, die zu den Zahncurven nöthigen Cycloiden oder Evolventen mechanisch zu construiren.

Um eine Epicycloide zu construiren dient folgender Apparat (Fig. 39). *AM* ist eine um Axe *M* drehbare, *ACP* eine um *C* drehbare Scheibe. Das Lager *EF*

Fig. 39.



der Axe *C* wird durch eine Spiralfeder in Richtung *CM* gedrückt, dadurch entsteht eine Reibung an hen Radumfängen, welche bewirkt, dass Scheibe *C* der Scheibe *M* bei deren Drehung mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit folgt. Axe *M* sitzt auf einer ebenen Tafel fest, in welcher sich ein Spalt zur Aufnahme der Feder und des Zapfenlagers *EF* befindet. An der untern Fläche von *OMG* wird ein Blatt Papier geklebt, und an dem Umfang von *C* ein Stift *P* befestigt. Dreht man nun Scheibe *M* mit dem

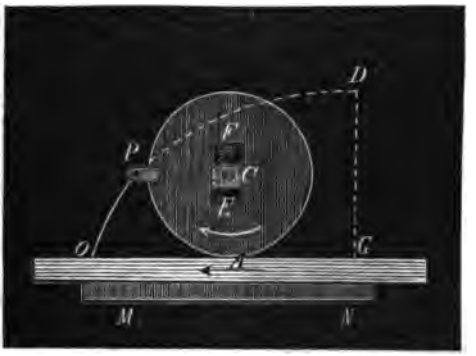
Fig. 40.

Fig. 41.

Blatte um Punkt *M*, so wird der Epicycloidenbogen *OP* abgezeichnet. — Ganz in ähnlicher Weise sind die Odontographe für Hypocycloiden construirt (Fig. 40 und 41).

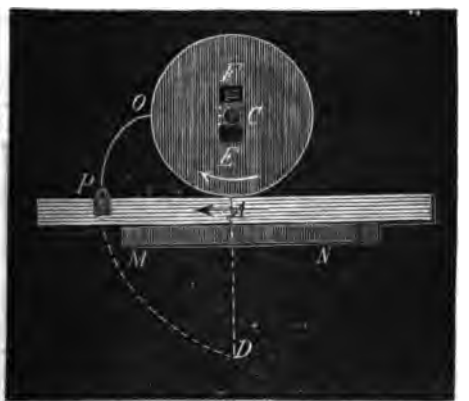
Es sind hier verschiedene Apparate für die beiden Fälle gegeben, wo der grössere und wo der kleinere Kreis der rollende ist. Eine gemeine Cycloide (Fig. 42) wird durch einen ähnlichen Ap-

Fig. 42.



parat gebildet, wenn man die eine Scheibe *MOG* durch ein Lineal *OG* ersetzt, an welchen ein Papier befestigt ist, und welches in der Führung *MN* tangential an die Scheibe *AC* geschoben wird, an welcher sich Stift *P* befindet. Ein fast gleicher Apparat (Fig. 43), wo aber der Stift *P* an dem Lineal und das Blatt

Fig. 43.

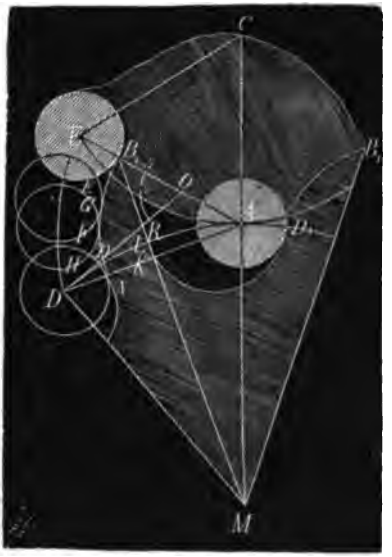


Papier an der Scheibe befestigt ist, gibt dagegen offenbar eine Kreisevolvente.

18) Zahnconstruction der Drillinge.

Wir haben oben gesehen, dass die Zähne des einen Rades durch Punkte oder vielmehr durch Linien, welche der Umdrehungsaxe parallel sind, ersetzt werden können. Bei einem Drillinge treten an die Stelle dieser graden Linie cylindrische Triebstücke, also der obigen Annahme wird man um sehr näher kommen, je dünner dieselben sind. In jedem Falle weicht der Berührungspunkt von dem oben angenommnen um die halbe Dicke *BB'* (Fig. 44) des Cylinders ab, und um eben so viel müssen auch die Vorderflächen der Zähne B_1D_1 sich von den Epicycloidenbogen *BD*, welche den Punkten entsprechen, entfernen. Die Curve B_1D_1 wird oft Aequidistante der Epicycloide genannt. Sie entsteht, wenn man mit Halbmesser BB_1 aus sämmtlichen Punkten der Epicycloiden sich Kreise geschlagen denkt, und die Einhüllungscurve derselben bestimmt. Offenbar haben die Cycloiden und ihre Aequi-

Fig. 44.



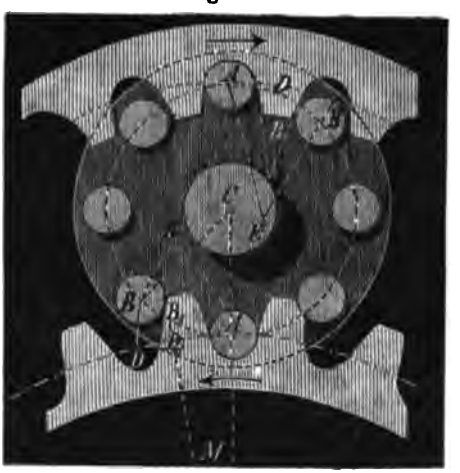
distante eine gemeinschaftliche Evolute, und da letztere wieder eine Cycloide ist, ergibt sich eine Cycloiden-Evolute, wie dies schon in Abschnitt 13 gezeigt worden ist.

Man lässt fast immer den Drilling von dem Zahnrade in Bewegung setzen. Der Grund ist folgender. In diesem Falle erfolgt der Eingriff in D_1, wenn die Axe A des Triebstockes in der Centrale CM beider Räder sich befindet, der Austritt in B_1, wenn sich die Axe des Triebstockes um die Theilung AB von der Centrale entfernt hat. In dem Falle, wo der Drilling das Zahnrad in Bewegung setzen würde, würde in B_1 der Eintritt, in D_1 der Austritt erfolgen. Da beide Räder aber in A gleiche Bewegungsrichtung haben, so ist der Eingriff im ersteren Falle ein vollkommenerer. Es folgen hier Abbildungen von Drillingswerken (Fig. 45 und 46). Die erste Figur zeigt einen Drilling, der ein Rad von aussen und eins von innen berührt. Die Zähne des Rades sind im ersten Falle Epicycloiden-Evolventen, im letztern Falle Hypocycloiden-Evolventen. Die zweite Figur zeigt einen Drilling, in den ein kleineres Rad von Innen eingreift. Berechnen wir jetzt die Dimensionen eines Drillingswerkes.

Seien (Fig. 44) $r = MA$, $r_1 = CA$ die Halbmesser der Theilkreise, $\beta = MD$, $\beta_1 = ACB$ die Theilwinkel, b die Dicke eines Zahnes, b_2 die eines Triebstockes, welche beide der halben Theilung nach gleich sind, also wenn $s = AB = AD$ die Theilung ist:

$$s = \frac{b}{2} = \frac{b_1}{2}.$$

Fig. 45.



Ist die Theilungssehne $AD = \sigma$, so hat man: $2AM \sin \frac{1}{2}(AMD) = \sigma_1$, also:

$$\sigma = 2r \sin \frac{\beta}{2}$$

und wenn

$$AB = \sigma_1$$

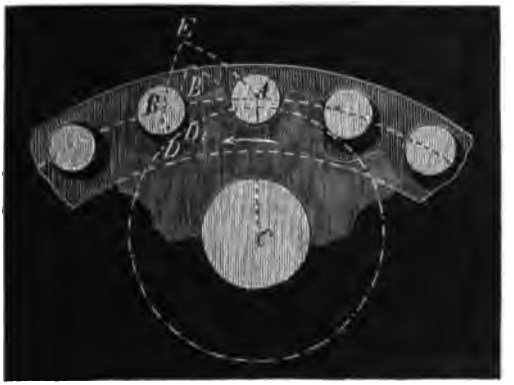
ist,

$$\sigma_1 = 2r_1 \sin \frac{\beta_1}{2},$$

ferner in dem Dreieck AB_1K:

Google

Fig. 46.



$AB_1 = AB - BB_1 = 2r_1 \sin\frac{\beta_1}{2} - \frac{1}{2}b_1$

und Winkel

$$B_1AK = \frac{\beta+\beta_1}{2},$$

also:

$$B_1K = \left(2r_1 \sin\frac{\beta_1}{2} - \frac{1}{2}b_1\right)\sin\frac{\beta+\beta_1}{2}.$$

Es stellt B_1K aber die Erhebung des Zahnes über die Sehne AD vor. Zieht man davon ab die Bogenhöhe

$$KZ = r\left(1-\cos\frac{\beta}{2}\right) = 2r\sin\frac{\beta^2}{4},$$

so hat man für die Höhe des Zahnobertheils:

$$BZ_1 = h = KB_1 - KL,$$

also:

$$h = \left(2r_1 \sin\frac{\beta_1}{2} - \frac{1}{2}b_1\right)\sin\frac{\beta+\beta_1}{2} - 2r\sin\frac{\beta^2}{4},$$

oder wenn man annähernd setzt:

$$\frac{s}{4} = \frac{1}{2}b_1, \quad 2r_1\sin\frac{\beta_1}{2} = s,$$

$$\sin\frac{\beta+\beta_1}{2} = \frac{\beta+\beta_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{r}+\frac{s}{r_1}\right),$$

$$\sin\frac{\beta^2}{4} = \frac{\beta^2}{16} = \frac{1}{16}\left(\frac{s}{r}\right)^2,$$

also:

$$h = \frac{1}{8}s^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right) - \frac{1}{8}\frac{s^2}{r} = \left(\frac{2}{r}+\frac{3}{r_1}\right)\frac{s^2}{8},$$

oder wenn man die Zähnezahlen einführt:

$$n = \frac{2\pi r}{s}, \quad n_1 = \frac{2\pi r_1}{s},$$

so ergibt sich:

$$h = \left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n_1}\right)\frac{\pi s}{4}.$$

In der Regel wendet man symmetrische Zähne an, d. h. an das Zahnvordertheil B_1KN wird ein congruentes Hintertheil angefügt. Dann ist die Zahndicke mindestens $b = 2NK = 2(AD - DN - AK)$ also:

$$b = 2\left[2r\sin\frac{\beta}{2} - \frac{b_1}{2} - \left(2r_1\sin\frac{\beta_1}{2} - \frac{1}{2}b_1\right)\cos\frac{\beta+\beta_1}{2}\right]$$

oder, da man näherungsweise hat:

Digitized by Google

$$\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\beta}{2}-\frac{\beta^3}{48},\quad \sin\frac{\beta_1}{2}=\frac{\beta_1}{2}-\frac{\beta^3}{48},$$
$$\cos\frac{\beta+\beta_1}{2}=1-\frac{(\beta+\beta_1)^2}{8}$$

und da übrigens

$$s=r\beta=r_1\beta_1$$

ist:

$$b=2\left[rb-\frac{r\beta^2}{24}-\frac{b_1}{2}-\left(r_1\beta_1-\frac{r_1\beta_1^2}{24}-\frac{b_1}{2}\right)\left(1-\frac{(\beta+\beta_1)^2}{8}\right)\right]$$
$$=2\left[-\frac{r\beta^2}{24}+\frac{r_1\beta_1^2}{24}+\left(r_1\beta_1-\frac{b_1}{2}\right)\frac{(\beta+\beta_1)^2}{8}\right]$$

und da

$$b_1=\frac{s}{2},$$

so hat man:

$$b=\frac{s}{4}\left(-\frac{\beta^2}{3}+\frac{\beta_1^2}{3}+\tfrac{1}{4}(\beta+\beta_1)^2\right)=(5\beta^2+18\beta\beta_1+13\beta_1^2)\frac{s}{48}$$

und wenn man noch setzt:

$$\beta=\frac{2\pi}{n},\quad \beta_1=\frac{2\pi}{n_1},$$

schliesslich:

$$b=\left(\frac{5}{n^2}+\frac{18}{nn_1}+\frac{13}{n_1^2}\right)\frac{\pi^2 s}{12}$$

b ist im Maximum gleich $\frac{s}{2}$, also die kleinsten Zähnezahlen müssen die Bedingung erfüllen:

$$\frac{5}{n^2}+\frac{18}{nn_1}+\frac{13}{n_1^2}=\frac{12}{2\pi^2}=0{,}608.$$

Setzt man hierin $n=n_1$, so ergiebt sich:

$$\frac{36}{n^2}=0{,}608,\qquad n=n_1=\sqrt{\frac{36}{0{,}608}}=7{,}7.$$

Es sind also mindestens 8 Zähne nöthig. Die Bedingung

$$n=\infty$$

entspricht einer mit einem Drilling verbundenen Zahnstange. In diesem Falle hat man:

$$n_1=\sqrt{\frac{13}{0{,}608}}=4{,}6.$$

Der Drilling muss also wenigstens fünf Zähne haben. Ist $n_1=\infty$, so hat man Triebstöcke an der Zahnstange, und dieselbe ist mit einem Rade verbunden. Es ergibt sich dann:

$$n_1=\sqrt{\frac{5}{0{,}608}}=2{,}9$$

also wenigstens 3 Zähne.

Bei einer innern Verzahnung ist β negativ zu nehmen, und es wird dann:

$$b=\left(\frac{3}{n_1}-\frac{2}{n}\right)\frac{\pi s}{4}$$
$$b=\left(\frac{5}{n^2}-\frac{18}{nn_1}+\frac{13}{n_2^2}\right)\frac{\pi^2 s}{12},$$

so dass die Bedingung für die kleinste Zähnezahl wird:

$$\frac{5}{n^2}-\frac{18}{nn_1}+\frac{13}{n_1^2}=0{,}608.$$

17) Verzahnung der Kumpfe.

Wir haben gesehen, dass die Zähne des einen Rades gradlinig sein können, während die des andern cycloidisch gekrümmt sind. Die gradlinigen Zähne gehören gewöhnlich dem kleineren Rade an, welches in diesem Falle „Kumpfe“ genannt wird. Diese Zähne sind radial gerichtet (Fig. 47), während die des andern Epicycloidenbogen bilden, welche

Fig. 47.

entstehen, wenn der Theilkreis des Kumpfes auf dem des andern Rades rollt.

Es ist aus demselben Grunde wie bei den Drillingsgetrieben vorzuziehen, dass der Kumpf getrieben wird. — Setzen wir wieder, $CA = r_1$, $< ACE = \beta_1$, so erhalten wir für die die Höhe des Zahnobertheils:

$$EG = h_1 = CG - CE = r_1 - r_1 \cos\beta_1$$

also:

$$h_1 = r_1 (1 - \cos\beta_1) = 2r_1 \sin\frac{\beta_1}{2}^2$$

und bei annähernder Bestimmung:

$$h_1 = \tfrac{1}{2} r_1 \beta_1^2 = \frac{ns}{n_1},$$

unter s wieder die Theilung verstanden.

Die Höhe der Zähne des andern Rades M ergibt sich durch die Formel:

$$EF = h = ME - MF = \sqrt{MA^2 + AE^2 - 2MA \cdot AE \cdot \cos MAE} - MA$$
$$= \sqrt{r^2 + r_1^2 - r_1^2 \sin\beta_1^2 + 2rr_1 \sin\beta_1^2} - r_1,$$

oder:

$$h = \sqrt{r^2 + r_1 (r_1 + 2r) \sin\beta_1^2} - r_1,$$

d. h. annähernd:

$$h = \frac{r_1 (r_1 + 2r)}{2r} (\sin\beta_1)^2 = r_1 \frac{r_1 (r_1 + 2r)}{2r} \beta_1^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n_1}\right) \pi s.$$

Die Dicke b des Zahnes beträgt im Minimum $2DF$. $2DF$ ist aber gleich $2(AD - AF)$ also:

$$b = 4r \sin\frac{\beta}{2} - 2EA \cos EAF,$$

oder:

$$b = 4r \sin\frac{\beta}{2} - 2r_1 \sin\beta_1 \cos\left(\frac{\beta}{2} + \beta_1\right)$$

oder annähernd:

$$b = 2r\beta - \frac{r\beta^3}{12} - (2r_1\beta_1 - \tfrac{1}{2} r_1 \beta_1^3)\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2} + 2\beta_1\right)^2\right] = \left(\frac{\beta^2}{12} + \frac{\beta_1^2}{3} + \frac{(\beta + 2\beta_1)^2}{4}\right) s$$
$$= \left(\tfrac{1}{6}\beta^2 + \beta(\beta_1 + \tfrac{1}{6}\beta_1^2)\, s\right) = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{6}{nn_1} + \frac{8}{n_1^2}\right) \frac{2\pi^2 s}{3}.$$

Nimmt man

$$b = \tfrac{1}{2} s$$

an, so erhält man:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{6}{nn_1} + \frac{8}{n_1^2} = \frac{3}{4\pi^2} = 0{,}076.$$

Ist noch

$$n = n_1$$

so hat man:

$$n = \sqrt{\frac{15}{0{,}076}} = 14.$$

Ist

$$n = \infty,$$

also tritt eine Zahnstange an die Stelle des Rades, so wird:

$$n_1 = \sqrt{\frac{8}{0{,}076}} = 10{,}25.$$

Ist dagegen

$$n_1 = \infty,$$

also der Kumpf in eine Stange verwandelt:

$$n = \sqrt{\frac{1}{0{,}076}} = 3{,}6.$$

Dem ersteren Falle entsprechen also wenigstens 11), dem letztern wenigstens 4 Zähne.

Für die Zahnreibung fanden wir bereits, wenn wir, wie dies bei annähernder Bestimmung geschehen darf, ebene Zahnflächen voraussetzten:

Digitized by Google

$$f=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_1}\right)\pi\mu K.$$

Setzt man nämlich bei einer kleinen Theilung den Reibungsbogen DE seiner Höhe FE gleich, so ist der relative Reibungsweg, während der Zahn von A nach F rückt:

$$\sigma = DE - GE = h - h_1$$
$$= \left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n_1}\right)\pi s - \frac{\pi s}{n_1} = \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_1}\right)\pi s.$$

und wenn K der Druck ist, die Arbeit der Reibung

$$L = \sigma\mu K = \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_1}\right)\pi\mu K s.$$

Diese giebt, auf den Theilkreis reducirt wie oben:

$$f=\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_1}\right)\pi\mu K.$$

18) Zusammengesetzte Zahnflächen.

Zuweilen soll der Eingriff eben so weit vor der Centrallinie beginnen, als hinter derselben aufhören. Jeder Zahn besteht dann zur Hälfte aus einem Epicycloidenstück, zur andern Hälfte aus einer graden Linie (Fig. 48). Die Erzeugungskreise der Epicycloiden HAF und EAK haben den halben Radius der bezüglichen Theilkreise. Es ist $AE = AF$

Fig. 48.

die Theilung s. Die Epicycloidenbogen DE und FG entstehen durch Rollen von AE und AF auf dem Theilkreise. Die Flanken DH und GK, welche radial gerichtet sind ergänzen dann die Zähne. Die Hinterflächen sind den Vorderflächen ganz symmetrisch zu formen. Vor dem Eintritt in die Centrallinie rückt HD auf der Wölbung FG fort, nach dem Eintritt rückt DE über die grade Linie GH fort. Wenn eins der Räder sehr klein ist und der Druck sehr stark, so würden die Zahnenden zu spitz ausfallen. Der Eingriff von 2 Zähnenpaaren muss dann wegfallen, und man macht $AE = AF$ etwa nur $= \frac{1}{4}s$ oder $= \frac{s}{2}$. — Bei dieser Construction hat man gegen die im vorigen Abschnitte abgehandelte den Vortheil, dass unter gleichen Umständen hier doppelt so viel Zähne arbeiten als dort, der Druck zwischen je zwei Zähnen also nur die Hälfte des obigen beträgt.

Sollte aber das eine Rad so klein sein, dass wie eben gezeigt wurde, nur weniger Zähne arbeiten dürfen, so wird bei dieser Construction doch erreicht, dass die Abstände der arbeitenden Zähne von der Centrallinie möglichst klein sind, daher die Krümmung und der Seitendruck bei Anfang und Ende des Eingreifens vermindert wird.

Sollen statt der cycloidischen Bogen Kreisbogen genommen werden, so pflegt man auch wohl so zu verfahren: Man zieht aus der Mitte M der Sehne DE, welche zu dem gekrümmten Theil des Zahnes gehört, ein Loth, welches man bis zum Durchschnitte J mit dem Theilkreise AD verlängert (Fig. 49). Auch setzt man den Halbmesser JD wohl gleich $\frac{1}{4}s$ oder

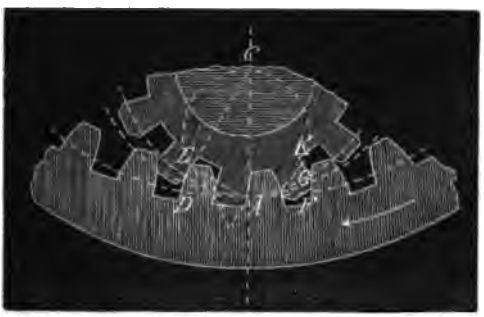
Fig. 49.

gleich s, was jedoch zu sehr abweichende Wölbungen giebt, wenn die Radhalbmesser sehr ungleich sind.

19) Innere Verzahnung.

Auf ähnliche Weise zusammengesetzte Zähne dienen auch zu inneren Verzahnungen. Möge A der Berührungspunkt zweier sich innerlich berührender Theilkreise sein (Fig. 50), C der Mittelpunkt des Getriebes. Wenn man Bogen $AE = s$ auf dem Theilkreise des Rades rollt, so beschreibt E die Zahnwölbung ED, und wenn $AF = s$ auf dem Theilkreise des

Fig. 50.



Getriebes gerollt wird, so wird F die Zahnwölbung FG beschreiben. Vor der Berührung in der Centrale wird also Punkt D der Zahncurve DE an FG hingleiten, nach der Berührung in der Centrale rückt Zahnfläche DE längs der graden Linie GK weiter. — Zuweilen aber, um die fortwährende Berührung des Anfangspunktes D der Zahnwölbung mit der Fläche FG, wodurch an dieser Stelle eine grosse Abnutzung erfolgt, zu vermeiden, gibt man den Getrieben nur ebene Zähne, wodurch freilich die Zähne erst mit dem Eintritt in die Centrale anfangen zu arbeiten. — Haben r, r_1, β, β_1, n, n_1 ihre frühere Bedeutung, so ist die Zahnhöhe des Getriebes $EG = h_1$ gegeben durch die Formel:

$$h_1 = r_1 (1 - \cos \beta_1) = 2 r_1 \sin \frac{\beta_1^2}{2},$$

oder annäherungsweise:

$$\tfrac{1}{2} r_1 \beta_1^2 = \frac{s^2}{2 r_1} = \frac{\pi s}{n_1}.$$

Für die Zahnhöhe $EF = h$ des Treibrades hat man dagegen:

$$EF = \sqrt{AM^2 + AE^2 - 2AM \cdot AE \cos EAM} - AM$$

oder:

$$h = \sqrt{r^2 + r_1^2 \sin \beta_1^2 - 2 r r_1 \sin \beta_1^2} - r$$
$$= \sqrt{r^2 - r_1 (2r - r_1) \sin \beta_1^2} - r,$$

d. h. näherungsweise:

$$h = \frac{(2r - r_1) r_1}{2r} \sin \beta_1^2 = \frac{(2r - r_1) r_1 \beta_1^2}{2r} = \frac{(2r - r_1) s^2}{2 r r_1} = \left(\frac{2}{n_1} - \frac{1}{n}\right) \pi s.$$

Die Zahnbreite b ist im Minimum $2DF$ und

Digitized by Google

$$2DF = 2(AD - AF) = 4r \sin\frac{\beta}{2} - 2AE\cos EAF,$$

daher:

$$b = 4r\sin\frac{\beta}{2} - 2r_1\sin\beta_1\cos(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta)$$

und näherungsweise:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{48},$$

$$\sin\beta_1 = \beta_1 - \frac{\beta_1^3}{6},$$

$$\cos(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta) = 1 - \tfrac{1}{2}(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta)^2,$$

also:

$$b = 2r\left(\beta - \frac{\beta^3}{24}\right) - 2r_1\left(\beta_1 - \frac{\beta_1^3}{6}\right)(1 - \tfrac{1}{2}(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta)^2)$$

$$= -\frac{r\beta^3}{12} + \frac{r_1\beta_1^3}{3} + r_1\beta_1(\beta_1 - \tfrac{1}{2}\beta)^2,$$

aber:

$$r\beta = r_1\beta_1 = s$$

also:

$$b = (\tfrac{1}{3}\beta^2 - \beta\beta_1 + \tfrac{1}{3}\beta_1^2)s,$$

ausserdem:

$$\beta = \frac{2\pi}{n}, \qquad \beta_1 = \frac{2\pi}{n_1}$$

und somit noch:

$$b = \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{nn_1} + \frac{4}{3n_1^2}\right)4\pi^2 s$$

$$= \left(\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{nn_1} + \frac{4}{3n_1^2}\right)39{,}478\, s.$$

Wird $b = \frac{1}{4}s$ gesetzt, so hat man:

$$\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{nn_1} + \frac{4}{3n_1^2} = 0{,}0127 = \frac{1}{79}.$$

Für

$$n = \infty$$

ergibt sich hieraus:

$$n_1 = \sqrt{105} = 10{,}25,$$

also 11 Zähne wenigstens. Für

$$n_1 = \tfrac{1}{2}n$$

hat man:

$$n_1 = \sqrt{69} = 8{,}3.$$

also 9 Zähne mindestens.

Bei dem Durchlaufen der Theilung $AD = AE = s$ hat man:

$$L = fs = (DE - GE)\mu K,$$

also näherungsweise:

$$fs = (h - h_1)\mu K = \left[\left(\frac{2}{n_1} - \frac{1}{n}\right)ns - \frac{ns}{n_1}\right]\mu K$$

$$= \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n}\right)n\mu K s,$$

also die Zahnreibung ist ganz wie oben:

$$f = \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n}\right)\pi\mu K.$$

20) Evolventen-Verzahnung.

Um Evolventenzähne zu construiren, errichte man im Berührungspunkte A der Theilkreise Loth AB auf der Centrale, und mache dieses je nach Bedürfniss der Theilung oder $\frac{1}{2}$ derselben gleich. Von B aus zieht man nach der Axe C des kleineren Rades eine Grade (Fig. 51) und fällt Loth AD auf BC. Verlängert man nun AD nach der andern Seite hin, und fällt von M ein Loth auf dieselbe, (oder zieht ML parallel DC), beschreibt von C und M durch D und L Kreisbogen, macht ferner $AF = DA$ und wickelt Linie DF auf Bogen DG und LD auf Bogen LE auf, so sind FG und DE Evolventenbogen, welche der gesuchten Zahnform entsprechen. Dann ist auch DF gleich Bogen DG, AD gleich Bogen DH. Man hat also für die Theilung:

$$s = \frac{CA}{CD}DH = \frac{CA}{CD}\cdot AD.$$

Und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke BAD und ACD hat man $\frac{AB}{AD} = \frac{CA}{CD}$, also:

$$AB = s,$$

Digitized by Google

Fig. 51.

womit die Richtigkeit der Construction erwiesen ist.

Sei wieder $h_1 = MF$ die Hebung des Getriebzahnes über die Theilung, so ist:

$$MF = CF - CA = \sqrt{CA^2 - AD^2 + FD^2} - CA$$
$$= \sqrt{CA^2 + 3AD^2} - CA,$$

also:

$$h_1 = \sqrt{r_1^2 + 3\sigma^2} - r_1,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{AF \cdot \sin FAM}{CA + AF \cos FAM} = \frac{\sigma \sin CAD}{r_1 + \sigma \cos CAD} = \frac{\sigma \sin ABD}{r_1 + \sigma \frac{\sigma}{r_1}} = \frac{\sigma^2 r_1}{s(r_1^2 + \sigma^2)}$$

$$= \frac{r_1}{s\left(\frac{r_1^2}{\sigma^2} + 1\right)} = \frac{r_1}{s\left(\frac{r_1^2 + s^2}{s^2} + 1\right)} = \frac{r_1 s}{r_1^2 + 2s^2}$$

und annähernd:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{s}{r_1}\left(1 - \frac{2s^2}{r_1^2}\right).$$

Nun hat man bekanntlich:

$$\varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \varphi_1^3 + \ldots,$$

also in unserm Falle annähernd:

$$\varphi_1 = \frac{s}{r_1} - \frac{2s^3}{r_1^3} - \tfrac{1}{3}\frac{s^3}{r_1^3} = \frac{s}{r_1} - \frac{7s^3}{3r_1^3},$$

also:

$$b = \sqrt[4]{\frac{s^3}{r_1^2}} = \sqrt[4]{\frac{4\pi^{-2}}{n_1^2}}\, s = 184{,}23 \frac{s}{n_1^2}.$$

wo $AD = AF = \sigma$ gesetzt ist, woraus sich dann annäherungsweise ergibt:

$$h_1 = \frac{3\sigma^2}{2r_1} = \frac{3s^2}{2r_1} = \frac{3\pi s}{n_1}.$$

Die Zahnbreite b_1 ist mindestens $= 2ON$, $2ON = 2(AO - AN) = 2(s - r_1\varphi_1)$ wenn $< ACF = \varphi_1$ ist. Aber:

Digitized by Google

Für die Höhe $h = DR$ des grösseren Zahnes ist:

$$DR = MD - MA = \sqrt{ML^2 + LD^2} - MA = \sqrt{MA^2 - AL^2 + LD^2} - MA,$$

also:

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{r_1}\sigma\right)^2 + \left(\frac{r}{r_1}\sigma + \sigma\right)^2} - r = \sqrt{r^2 - \left(\frac{2r}{r_1} + 1\right)\sigma^2} - r.$$

Man hat nämlich:

$$AL = \frac{AD \cdot MA}{CA} = \frac{rs}{r_1}.$$

Näherungsweise ergibt sich:

$$h = \left(\frac{2r}{r_1} + 1\right)\frac{\sigma^2}{2r} = \left(\frac{2}{r_1} + \frac{1}{r}\right)\frac{s^2}{2} = \left(\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n}\right)\pi s.$$

Die kleinste Zahnbreite ergibt sich:

$$2RS = 2(AS - AR)$$

d. h.

$$b = 2(s - r\varphi).$$

Ist $\varphi = AMD$, so kommt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AD \cdot \sin CAD}{MA + AD\cos CAD} = \frac{rs}{r^2 + 2s^2},$$

oder:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{s}{r}\left(1 - \frac{2s^2}{r^2}\right),$$

oder näherungsweise:

$$\varphi = \frac{s}{r} - \frac{1}{3}\frac{s^3}{r^3}$$

$$b = \frac{1}{3}\frac{s^3}{r^2} = \frac{1}{3}\frac{4\pi^3}{n^3}s = 184{,}23\frac{s}{n^2}.$$

Setzen wir noch

$$s = b + b_1,$$

so erhält man die Bedingungsgleichung für die kleinste Zähnezahl:

$$1 = 184{,}23\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n_1^2}\right),$$

d. h.

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{184}.$$

Ist $n = n_1$, so kommt:

$$n = \sqrt{368} = 19;$$

ist $n = \infty$:

$$n_1 = \sqrt{184} = 13{,}5.$$

Die Evolventenzähne sind also höher und breiter als die Epicycloidenzähne, und deshalb bei den ersteren die kleinste Zähneanzahl grösser. Dies ist jedoch kein grosser Nachtheil, da eine grössere Anzahl Zähne besondere Vortheile mit sich führt. Im Uebrigen sind die Evolventenzähne die vortheilhaftesten, und zwar namentlich aus dem Grunde, dass ein Rad mit Evolventenzähnen mit verschiedenen andern Rädern arbeiten kann, da die Form der Zähne der Evolventen-Räder nur von dem Radius des eigenen Theilkreises abhängt, während bei Cycloidischen auch der Radius der Theilkreise des andern Rades einwirkt. Man kann also, wenn sich die Umsetzungszahl ändert, eins der Räder beibehalten, und es mit einem andern von angemessenem Radius aber derselben Theilung verbinden. Was die Arbeit der Reibung anbetrifft, so ist vor dem Eintritt die Centrale:

$$L_1 = \mu K_1 (FO - AU)$$
$$= \mu K_1 (FG - OG - AV + UV),$$

wo K_1 den Normaldruck zwischen den Zähnen bezeichnet. Für die Länge der

Digitized by Google

Evolventen hat man (siehe den Artikel: Rectification)

$$FG = \frac{FD^2}{2CD}, \quad OG = AH = \frac{AD^2}{2CD},$$

$$AV = \frac{AL^2}{2ML}, \quad UV = FT = \frac{FL^2}{2ML},$$

woraus sich ergibt:

$$L_1 = \frac{\mu K_1}{2}\left(\frac{FD^2 - AD^2}{CD} - \frac{AL^2 - FL^2}{ML}\right) = \frac{\mu K_1}{2}\left(\frac{4\sigma^2 - \sigma^2}{CD} - \frac{\left(\frac{r}{r_1}\sigma\right)^2 - \left(\frac{r\sigma}{r_1} - \sigma\right)^2}{ML}\right)$$

$$= \frac{\mu K_1}{2}\left(\frac{3\sigma^2}{CD} - \frac{(2r - r_1)\sigma^2}{MLr_1}\right) = \frac{\mu K_1 \sigma^2}{2}\left(\frac{3}{CD} - \frac{2r - r_1}{MLr_1}\right).$$

Die der Normalkraft K_1 entsprechende Tangentialkraft ist:

$$K = \frac{\sigma}{s} K_1,$$

also, wenn man näherungsweise setzt:

$$CD = CA = r_1$$

$$ML = MA = r,$$

so kommt:

$$L = \frac{\mu K s \sigma}{2}\left(\frac{3}{r_1} - \frac{2r - r_1}{rr_1}\right) = \frac{\mu K s \sigma}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right),$$

also die auf den Theilkreis reducirte Reibung:

$$f = \frac{L}{s} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)\frac{\mu K s}{2},$$

oder, da

$$2\pi r = n\sigma, \quad 2\pi r_1 = n_1\sigma$$

ist:

$$f = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)\pi\mu K,$$

also auch hier gilt die obige Formel. Bei dem Eingriffe hinter der Centrallinie ist die Reibung ganz eben so gross.

21) Verzahnung nach der Willis'schen Construction.

Soll die in Abschnitt 14) gegebene Construction durch Kreisbogen nach Willis angewendet werden, so ist folgendermaassen zu verfahren. Durch den Berührungspunkt A der Theilkreise (Fig. 52) wird eine Grade OO_1 gezogen, welche mit der Centrale OM den Winkel:

$$CAO = MAO_1 = 75°$$

macht; hierauf ein Loth errichtet, und von demselben von beiden Seiten von A, $AN = AN_1$ beide kleiner als CL abgeschnitten, wo C die Axe des kleineren Rades ist. Man zieht nun die Graden: MNO, CKN, MK_1N_1 und CN_1O_1, so sind die Durchschnitte O, K, K_1, O_1 Mittelpunkte der Kreisbogen BD, FG, D_1E_1, GH_1, von welchen je zwei eine Zahncurve $BDE = B_1D_1E_1$ und $FGH = F_1G_1H_1$ bilden. Sollen 2 Zähnepaare in Arbeit sein, so ist die halbe Theilung:

$$AD = AD_1 = \frac{s}{2} = AG = AG_1$$

auf die Theilkreise zu tragen, aus O Bogen DB zu beschreiben, aus K Bogen GF, aus K_1 Bogen D_1E_1, und aus O_1 Bogen G_1H_1. Ebenso kann man aus K_2 und O_2 die Bogen DE und GH abtragen, um zusammenhängende Zahnformen sogleich zu erhalten. Auch kann man die Mittelpunkte O, K u. s. w. durch Auftragen der Abscissen $AO = x$, $AK = x_1$ u. s. w. bestimmen, nachdem diese Grössen durch die in Abschnitt 14) mitgetheilten Formeln berechnet sind. Hierbei ist der oben beschriebene Odontograph anzuwenden. — Soll innere Verzahnung stattfinden, so gelten dieselben Regeln. C und M liegen dann auf einer Seite von A und es ist AO kleiner als AK_1. Das Fussstück BD geht in das Kopfstück über und umgekehrt, Kopfstück DE in das Fussstück.

Bei einer Zahnstange ist NK parallel N_1K_1 parallel CA zu nehmen. — Hier

Digitized by Google

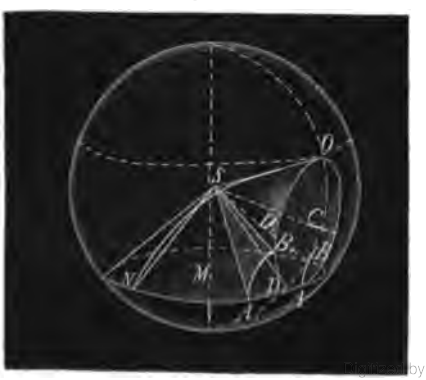
Fig. 52.

wie bei den Evolventenzähnen hängt die Zahnform des einen Rades nur von dem Radius desselben, nicht von dem des eingreifenden ab.

22) Zahnconstruction der conischen Räder.

Wenn ein Rotationskegel *ASO* (Fig. 53) auf einem andern *ASN* rollt, so beschreibt jeder Punkt *B* der Oberfläche des ersteren eine Curve, die man sphärische Epicycloide nennt. Da der Punkt *O* bei der ganzen Bewegung denselben Abstand von *S* hat, so wird *B* sich immer auf der mit Radius *BS* beschriebenen Kugeloberfläche befinden. — Es wird dies noch immer der Fall sein, wenn der rollende Kegel kein Rotationskegel, son-

Fig. 53.



Digitized by Google

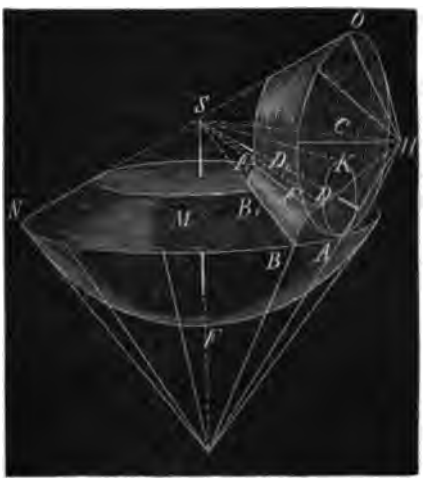
dern einer mit beliebiger Basis ist. Nun ist ganz wie bei den Stirnrädern zu zeigen, dass immer, wenn Kegel *ASO* auf den beiden Kegeln, welche die in einandergreifenden conischen Räder bilden, rollt, der Punkt *B*, die zusammengehörigen Zahncurven, und die Linien *SB*, die zusammengehörigen Zahnflächen beschreibt.

Nimmt man hierbei an, dass *ASO* ebenfalls ein Rotationskegel ist, so hat man also sphärische Epicycloiden als Zahnformen. Dabei sind dieselben Fälle zu unterscheiden, wie bei den Stirnrädern. Ist namentlich *ASO* congruent dem einen Radkegel, so wird dem Zahne dieses Rades der Punkt *O* entsprechen, während das andere Rad Zähne von der Form sphärischer Epicycloiden erhält, die entstehen, wenn man *AOS* auf dem zweiten Rade rollt. Natürlich tritt aber hier an die Stelle des Punktes die grade Linie *OS*, und an die Stelle der sphärischen Epicycloide A_1B_1 die Fläche A_1SB_1, wenn man statt der Zahncurven die Zahnflächen bestimmen will.

Ist ein Zahnrad mit einem conischen Drilling zu verbinden, dessen Zahn-Triebstöcke die Form von Rotationskegeln haben, so sind *DS*, D_1S u. s. w. die Axen der Triebstöcke, und an die Stelle von A_1B_1S tritt eine andere, deren Leitlinie aequidistant zu A_1B_1 ist, so dass beide Flächen gemeinschaftliche Evolutenflächen haben.

Es giebt aber noch eine sehr einfache Constructionsregel für die Zähne conischer Räder überhaupt. — Wenn durch den Berührungspunkt *A* die grade Linie *GH* (Fig. 54) rechtwinklig auf *AS* gezogen wird, so dass sie beide Radaxen

Fig. 54.



SM und *SC* mit einander verbindet, so kann man mit *AG* und *AH* um diese Axe zwei neue Kegelflächen *AGN* und *AHO* derart beschreiben, dass sie in *A* die den Kalotten *AFN* und *AKO* entsprechenden Kugelflächen berühren. Es wird dann *A* das benachbarte Bogen-Element *DB* in der Kegelfläche *AGN*, und Element *DE* in der Kegelfläche *HEO* sich befinden. Hieraus folgt folgender Satz:

„Wenn man die Kegelflächen *AGN* und *AHO* in die Ebene abwickelt, wie die folgende Figur anzeigt (Fig 55), und die so erhaltenen Kreissectoren AGN_1 und AHO_1 verzahnt, wie dies bei Stirnrädern geschieht, und die so entstandene Figur wieder als Kegelmantel aufwickelt, so werden die Zähne Leitlinien der Zahnflächen beider Räder. Legt man durch jeden Punkt derselben eine nach *S* gerichtete Linie, so hat man die Zahnflächen."

Diese Regel ist praktisch zu verwehrten, wenn man die Sectoren aus dünnem Blech, auch wohl Leder anfertigt.

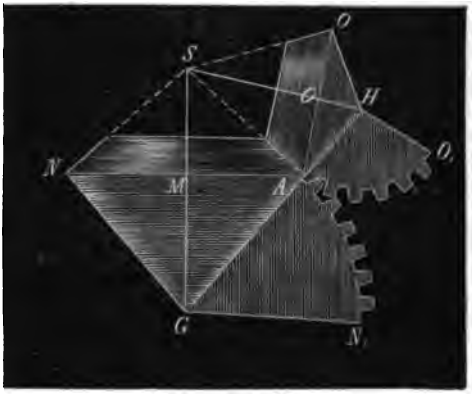
Was die Halbmesser $AG=\varrho$, $AH=\varrho_1$ der Kreissectoren anbetrifft, so seien wieder r, r_1 die äusseren Radhalbmesser, also $MA=r$, $CA=r_1$, $SA=a$ der Halbmesser der Kugel, $\sphericalangle ASM=\varepsilon$, $ASC=\varepsilon_1$, und man hat dann:

$$\varrho = a \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{r}{\cos \varepsilon}$$

$$\varrho_1 = a \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{r_1}{\cos \varepsilon_1}$$

Digitized by Google

Fig. 55.



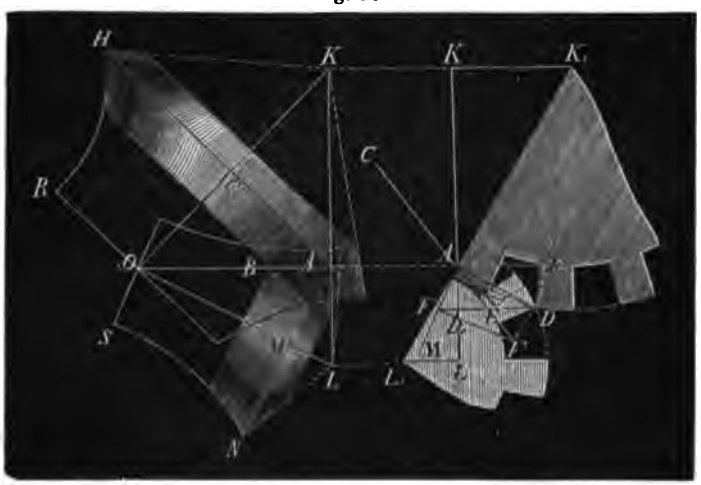
(Abschnitt 10). Diese Werthe sind statt r und r_1 in die Formeln von Abschnitt 14) einzuführen. Noch hat man:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{\lambda + \cos \vartheta}{1 + \lambda \cos \vartheta} \lambda.$$

23) Verzahnung der hyperbolischen Räder.

Für die hyperbolischen Räder gilt die eben angeführte Regel noch immer. Die Stirnflächen der Zähne denkt man sich in den Kegelflächen *AHK* und *ALN*

Fig. 56.



(Fig. 56) liegend, wickelt dieselben ab, und verzahnt sie. Setzt man $AK_1 = s$, $AL_1 = s_1$, so ergibt sich aus Abschnitt 11): $s^2 = r^2 + l^2 \operatorname{tg} \varepsilon^2$, $s_1^2 = r_1^2 + l^2 \operatorname{tg} \varepsilon_1^2$ und wie bei den conischen Rädern:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{\lambda + \cos \vartheta}{1 + \lambda \cos \vartheta} \lambda.$$

Bei dieser Zahnconstruction findet auch die Kreisevolvente ihre Anwendung. Es wird (Fig. 57) die Grade *BD*, in welcher sich beide Radebenen *AMB* und *ACD* schneiden, auf beide Kreise *MFG* und *CEH* gewickelt, welche bezüglich *M* und *C* zu Mittelpunkten haben, und diese Grade *BD* berühren. Die Evolventenbogen *EF* und *GH* sind dann die Zahnformen.

24) Geschichtliches und Literatur.

Die Zahnconstructionen sind von Olaus Römer zuerst angegeben, später haben sich Lahire, Depacieux und namentlich Euler damit beschäftigt.

Google

Fig. 57.

Die Theorie der Zahnräder ist enthalten in Eitelweins Statik, *Hachette Traité élémentaire des machines*, *Willis Principles of Mechanism*, *Olivier* geometrische Theorie der Zahnräder. Diesem Artikel ist namentlich zu Grunde gelegt. „Weisbachs Lehrbuch der Ingenieur, und Maschinen-Mechanik."

Rad. Vergleiche die Artikel: Wasserrad, Wagen.

Rad an der Welle, Radwelle (siehe Rad).

Radicand, der Ausdruck, aus dem eine Wurzel gezogen wird.

Radius, Halbmesser, ist im Kreise diejenige Grade, welche vom Mittelpunkt bis zur Peripherie sich erstreckt.

Bei den Kegelschnitten, welche einen Mittelpunkt haben, also bei Ellipsen und Hyperbeln, heisst Radius ebenfalls die Grade, welche von demselben bis zur Curve gezogen ist. Während die Radien eines Kreises gleich sind, ist dies bei denen der Kegelschnitte nicht der Fall. Dagegen sind diejenigen beiden Radien, welche in eine grade Linie fallen, auch bei den Kegelschnitten unter einander gleich; d. h. jede Grade, die von einem Punkte der Peripherie zum andern und durch den Mittelpunkt geht, wird in dem letzteren halbirt. Die Parabeln haben keinen Radius, oder vielmehr derselbe ist unendlich gross, da der Mittelpunkt einer Parabel in die Unendlichkeit rückt.

Auch die Kugeln und überhaupt die Flächen zweiter Ordnung haben Radien, und wird darunter die grade Linie verstanden, welche einen Punkt der Oberfläche mit dem Mittelpunkte verbindet. Auch hier sind die zwei eine Grade bildenden Radien gleich. Bei denjenigen Flächen zweiter Ordnung, wo der Mittelpunkt ins Unendliche rückt, ist ebenfalls der Radius unendlich gross zu denken, und ist dies namentlich bei den Paraboloiden der Fall.

Radius Vector, auch wohl gradezu Radius im allgemeineren Sinne genannt, ist diejenige grade Linie, welche sich von einem beliebigen als fest zu betrachtenden Punkte, dem Pole, nach irgend einem Punkte einer Curve oder Fläche erstreckt. Der Radius vector und der Centriwinkel oder das Argument bilden die Polarcoordinaten in der Ebene, der Radius vector in Verbindung mit zwei Winkeln die Polarcoordinaten im Raume (siehe hierüber den Artikel: Analytische Geometrie).

Radius der Krümmung, Krümmungsradius ist der Radius eines Kreises, welcher eine einfach oder doppelt gekrümmte Curve in einem gegebenen Punkte so innig als möglich berührt. Derselbe kann auch definirt werden als der Radius eines Kreises, welcher durch drei einander unendlich nahe Punkte einer Curve geht. Je grösser der Krümmungsradius ist, desto geringer ist die Krümmung der Curve. Bei einer geraden Linie ist in jedem Punkte der Krümmungs-Radius unendlich gross. Man betrachtet daher den umgekehrten Werth des Krümmungsradius als das Maass der Krümmung. Wird unter ds das Element der Bogenlänge der Curve, unter dl der unendlich kleine Winkel verstanden, den zwei nächste Tangenten mit einander bilden, und ist r der Krümmungsradius, so hat man:

$$r = \frac{ds}{dl}$$

und es ist folglich:

$$K = \frac{dl}{ds},$$

das Maass der Krümmung.

Radix siehe: Wurzel.

Radlinie gleichbedeutend mit Cycloide.

1) Gemeine Cycloide.

Es wird unter Cycloide im engeren Sinne diejenige Curve verstanden, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, der sich auf einer graden Linie wälzt oder rollt, d. h. der sich auf der graden Linie so bewegt, dass er dieselbe stets berührt, und um den momentanen Berührungspunkt eine unendlich kleine Drehung macht. Das abgerollte Stück des Kreises und der Theil der Graden, den er zurücklegt, werden also

immer gleich sein. — Diese Curve hat verschiedene merkwürdige Eigenschaften, und ist in mehreren Theilen der angewandten Mathematik von Wichtigkeit. Zuerst sollen sich nach Wallis Angabe mit ihr der Cardinal Cusa und ein gewisser Bovillus beschäftigt haben. Ersterer schon um das Jahr 1481, letsterer etwa um 1500.

Die geometrischen Haupteigenschaften der Cycloide sind, dass ihre Evolute eine congruente Curve ist, eine Entdeckung, welche von Huyghens herrührt (Ende des 17. Jahrhunderts). Schon viel früher hat Roberval gezeigt, dass sich gewisse von der Cycloide begränzte Flächenräume geometrisch quadriren lassen (1634). Das Tangentenproblem in Bezug auf diese Curve ist von Descartes und Fermat gelöst worden. Huyghens, Leibnitz und Johann Bernoulli bestimmten andere Flächenräume der Cycloide, welche quadrirt werden können. Eben so merkwürdig sind die mechanischen Eigenschaften der Cycloide. Jakob Bernoulli fand 1697, dass sie die Linien des kürzesten Falles (Brachystochrone) ist, d. h. diejenige Curve, auf welcher sich ein schwerer Körper bewegen muss, wenn er unter dem Einflusse der Schwerkraft allein in möglichst kurzer Zeit von einem zu einem andern gegebenen Punkte gelangen soll. Schon früher war festgestellt, dass ein Punkt, welcher auf einer Cycloide Pendelschwingungen macht, grössere und kleinere Schwingungsbogen in gleicher Zeit beschreibt. Die Cycloide ist also auch Tautochrone, welche Eigenschaft Huyghens auf Uhrpendel anwenden wollte, um der Uhr einen ganz gleichmässigen Gang zu geben, jedoch haben die cycloidischen Pendel andrerseits zu grosse Nachtheile, auch nähert sich der Gang eines Kreispendels, wenn er auch nicht vollständig tautochron ist, dieser Eigenschaft doch in dem Maasse, dass ein solches für Uhren völlig ausreicht.

Um die Gleichung der Cycloide (Fig. 58) in rechtwinkligen Coordinaten zu entwikkeln, sei die Grade, auf welcher der Kreis C rollt, OX zugleich Axe der X. Im Anfange der Bewegung möge sich der Punkt A der Peripherie, welcher die Cycloide beschreibt, im Anfangspunkte O der Coordinaten befinden. Ist M der momentane Berührungspunkt, so ist also:

$$OM = \text{Bogen } AM.$$

Sei $< ACM = \vartheta$, $r = CA$ der Radius des Kreises, $AN = y$, $ON = x$, zieht man noch CP parallel MN, so ist:

$$< ACP = \vartheta - \frac{\pi}{2},$$

Fig. 58.

$$AP = r \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = -r\cos\vartheta,$$

$$CP = r\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = r\sin\vartheta,$$

$$y = AN = AP + PN = AP + CM,$$

$x = ON = OM - NM =$ Bogen $AM - CP$ und Bogen

$$AM = r\vartheta,$$

also:

1) $$y = r(1 - \cos\vartheta),$$

2) $$x = r(\vartheta - \sin\vartheta).$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann ϑ eliminirt werden, und man hat dann die Gleichung der Cycloide in entwickelter Form, nämlich:

$$\cos\vartheta = \frac{r-y}{r},$$

$$\sin\vartheta = \sqrt{1 - \left(\frac{r-y}{r}\right)^2},$$

3) $$x = r\left(\text{arc}\cos\frac{r-y}{r} - \frac{\sqrt{y(2r-y)}}{r}\right).$$

Bequemer ist es jedoch in den meisten Rechnungen sich der Formeln 1) und 2) zu bedienen, ohne ϑ zu eliminiren.

Die Cycloide ist eine transcendente Curve. Aus ihren Gleichungen sowohl, als auch aus der Entstehungsart derselben lässt sich leicht ihre Gestalt ableiten. — Gehen wir hierbei von den Gleichungen 1) und 2) aus, und setzen zunächst:

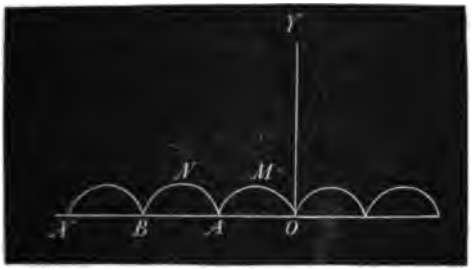
$$\vartheta' = 2\pi + \vartheta, \quad x' = x + 2\pi r,$$

so ergibt sich daraus:

$$y = r(1 - \cos\vartheta'), \quad x' = r(\vartheta' - \sin\vartheta').$$

Diese Gleichungen haben ganz die Form von 1) und 2) und es folgt daraus, dass die Cycloide in congruente Stücke zerfällt, OMA, ANB u. s. w. (Fig. 59), der-

Fig. 59.



art, dass die Abscissenunterschiede der Punkte O und A, A und B u. s. w. gleich der Peripherie des Erzeugungskreises sind.

Die Anzahl dieser Stücke ist unendlich gross, sie erstrecken sich nach beiden Seiten der X-Axe hin, da für jedes reelle ϑ reelles x und y sich ergibt. Y ist immer positiv, also die Curve liegt stets über der Abscissenaxe. Setzt man noch:

$$\vartheta_1 = 2\pi - \vartheta, \quad x_1 = 2\pi r - x,$$

so kommt:

$y = r(1 - \cos\vartheta_1)$, $x_1 = r(\vartheta_1 - \sin\vartheta_1)$, Gleichungen, die wieder die Form 1) und 2) haben, und zerfällt daher jeder Theil OMA wieder in zwei symmetrische Congruente OM und MA. Es ergiebt sich:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = r(1 - \cos\vartheta),$$

ein immer positiver Ausdruck; mit zunehmenden ϑ wird also x immer wachsen. Ferner ist:

$$\frac{dy}{d\vartheta} = r\sin\vartheta,$$

ein Ausdruck, der von $\vartheta = O$ bis $\vartheta = \pi$, also von O bis M positiv, wo $\vartheta = \pi$ bis $\vartheta = 2\pi$ negativ ist, es findet also in M ein Maximum statt. Für $\vartheta = o$ ist $y = o$, also in Punkt O, folglich in A u. s. w. trifft die Curve die Abscissenaxe, ohne sie jedoch zu schneiden.

Der Winkel l der Berührungslinie an die Curve mit der Axe der x ist gegeben durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} l = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta} = \cot\frac{\vartheta}{2},$$

also:

$$l = \frac{\pi - \vartheta}{2},$$

der Winkel der Berührungslinie mit der Abscissenaxe ist also gleich dem Complement des halben Winkels um den der Erzeugungskreis fortgerollt ist. Dies giebt offenbar eine geometrische Construction der Tangenten. Für $\vartheta = 0$, ist $l = \frac{\pi}{2}$; also die Curve steht in den Punkten O, A u. s. w. auf der Abscissenaxe senkrecht, und da dies von den beiden Zweigen OMA und ANB gilt, die sich z. B. in A treffen, so werden dieselben sich in A berühren, und also in den Punkten O, A u. s. w. eine Spitze bilden.

Was die Quadratur der Cycloide anbetrifft, so betrachten wir den Flächeninhalt eines Stückes OLK, wo wir $OK = x$, $LK = y$ setzten. Es ist dann:

$$F = \int_0^x y\,dx,$$

der gesuchte Flächeninhalt also auch:

$$F = \int_o^{\vartheta} y\frac{dx}{d\vartheta}\,d\vartheta = r^2\int_o^{\vartheta}(1 - \cos\vartheta)^2\,d\vartheta = r^2\int_o^{\vartheta}(1 - 2\cos\vartheta + \cos\vartheta^2)\,d\vartheta,$$

d. h.

$$F = r^2\int_0^{\vartheta}\left(\frac{3}{2} - 2\cdot\cos\vartheta + \frac{1}{2}\cos 2\vartheta\right)d\vartheta = r^2\left(\frac{3\vartheta}{2} - 2\sin\vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right).$$

Will man den Flächeninhalt des Stückes OMA haben, so ist $\vartheta = 2\pi$ zu setzen, und man hat:

$$F = 3\pi r^2.$$

„Der Flächeninhalt des von einem Zweige der Cycloide und der Abscissenaxe eingeschlossenen Stückes ist gleich dem dreifachen Flächeninhalte des Erzeugungskreises."

Digitized by Google

Soll die Länge S des Bogens OL gefunden werden, so hat man

$$S = \int_0^{\vartheta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = r\int_0^{\vartheta} \sqrt{\sin\vartheta^2 + (1-\cos\vartheta)^2}\, d\vartheta = 2r\int_0^{\vartheta} \sin\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta,$$

d. h.

$$S = 4r\left(1 - \cos\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Wird der halbe Zweig OM gesucht, so hat man $\vartheta = \pi$, also:

$$S = 4r$$

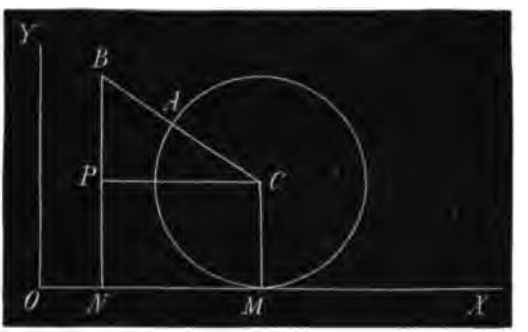
und für den ganzen Zweig OMA:

$$S = 8r.$$

2) Verlängerte und verkürzte Cycloide.

Denkt man sich statt des Punktes A in der Peripherie des Erzeugungskreises einen beliebigen mit diesem Kreise festverbundenen Punkt B, so wird letzterer, während der Kreis auf der graden Linie OX rollt, eine Curve beschreiben, welche man verkürzte Cycloide nennt, wenn B ausserhalb des Erzeugungskreises liegt; verlängerte Cycloide, wenn B innerhalb desselben liegt. — Wir gehen, um die Gleichungen dieser Curven zu bestimmen, vom ersteren Falle aus. Sei wieder C Mittelpunkt des Erzeugungskreises, r sein Radius, ziehen wir BC, welche Grade den Kreis in A schneidet. Die Linie, auf welcher der Kreis rollt, OX sei wieder Abscissenaxe (Fig. 60), Anfangspunkt

Fig. 60.



der Coordinaten derjenige Punkt O, in welchem Punkt A die Axe der X berührt, und der abgerollte Winkel $ACM = \vartheta$, es ist dann $BN = y$, $ON = x$. Setzen wir noch $BA = a$, und ziehen PC parallel OX, so ist: $ON = OM - MN = OM - PC$,

$$BN = BP + PN = BP + CM.$$

Aber:

$$OM = r\vartheta,$$

$$PC = (r+a)\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = (r+a)\sin\vartheta,$$

$$CM = r,$$

$$BP = (r+a)\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) = -(r+a)\cos\vartheta,$$

d. h.

$$x = r\vartheta - (r+a)\sin\vartheta$$

$$y = r - (r+a)\cos\vartheta.$$

Dies sind die Gleichungen der verkürzten Cycloide. Für die verlängerte ist eben a nur negativ zu nehmen. Die Gleichungen werden etwas einfacher, wenn man eine Axe der x annimmt, welche der ersteren parallel, aber um die Entfernung a von ihr absteht.

Es ist dann

$$y_1 = y + a$$

zu setzen, also:

1) $x = r(\vartheta - \sin\vartheta) - a\sin\vartheta$,

2) $y_1 = (r+a)(1-\cos\vartheta)$.

Gehen wir von diesen Gleichungen aus, so lässt sich ganz wie im vorigen Abschnitte zeigen, dass die Curve aus congruenten Abschnitten OMA, ANB u. s. w. besteht, die wieder in zwei symmetrische Theile OM und MA zerfallen.

Hier ist jedoch für die verlängerte und die verkürzte Cycloide ein wesentlicher Unterschied zu machen. Es ist nämlich für die erstere

$$\frac{dx}{d\vartheta} = r - (r-a)\cos\vartheta$$

Digitized by Google

und für die letztere:

$$\frac{dx}{d\vartheta} = r - (r+a)\cos\vartheta.$$

Der erstere Ausdruck ist immer positiv. Die Abscisse der verlängerten Cycloide wird also, wenn ϑ zunimmt, auch immer zunehmen; diese Curve wird sich also nie selbst schneiden. Uebrigens wird sie in den Endpunkten $O, A \ldots$ der Zweige nicht wie die gewöhnliche Cycloide eine Spitze haben, denn es ist:

$$\frac{dy_1}{d\vartheta} = (r-a)\sin\vartheta$$

$$\operatorname{tg} l = \frac{dy_1}{dx} = \frac{(r-a)\sin\vartheta}{r-(r-a)\cos\vartheta}$$

und für $\vartheta = 0$ auch $l = 0$; es findet also in den Endpunkten der Zweige Berührung statt. Bei der verkürzten Cycloide, ist $\frac{dx}{d\vartheta}$ negativ (Fig. 61) wenn:

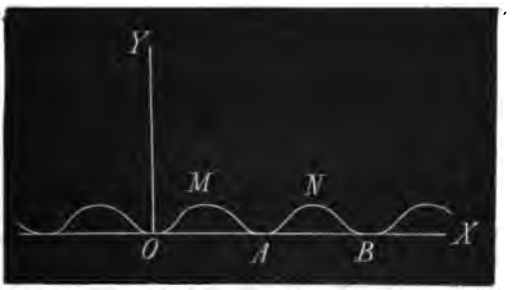
$$r < (r+a)\cos\vartheta.$$

also:

$$\cos\vartheta > \frac{r}{r+a}$$

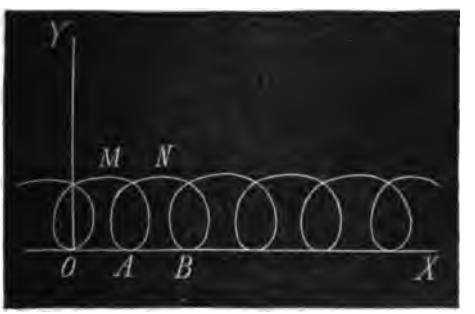
ist; dies ist für $\vartheta = 0$, also in den Punk-

Fig. 61.



ten O, A u. s. w. und in ihrer Umgebung sicher der Fall, und es wird daher um diese Punkte herum ein Abnehmen der Abscisse mit zunehmendem ϑ statt-finden, woraus dann folgt, dass sich je zwei auf einander folgende Zweige schneiden (Fig. 62) und eine Schleife bilden. Uebrigens wird auch hier die

Fig. 62.



Curve die Axe der x, wo sie dieselbe trifft, berühren.

Was den Schnittpunkt je zwei auf einander folgender Zweige anbetrifft, so müssen hier zwei Werthe von x und y, die ungleichen ϑ entsprechen, einander gleich werden. Setzen wir, um diesen Punkt zu finden:

$$r(\vartheta - \sin\vartheta) - a\sin\vartheta = r(\vartheta_1 - \sin\vartheta_1) - a\sin\vartheta_1$$

und:

$$(r+a)(1-\cos\vartheta) = (r+a)(1-\cos\vartheta_1)$$

so ergibt sich aus der letzteren Gleichung:

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_1$$

$$\vartheta_1 = 2\pi + \vartheta \text{ oder } = 2\pi - \vartheta \text{ oder } = 4\pi - \vartheta;$$

andere Werthe können nicht stattfinden, wenn ϑ_1 und ϑ zwei auf einander folgenden Zweigen entsprechen.

Digitized by Google

Die beiden ersten Werthe in die erste Gleichung setzend, erhalten wir:

$$r(\vartheta - \sin\vartheta) - a\sin\vartheta = 2\pi r \pm r(\vartheta - \sin\vartheta) \mp a\sin\vartheta.$$

Der erste Werth gibt kein Resultat; aus dem letzteren erhalten wir:

$$r\vartheta - (r+a)\sin\vartheta = \pi r$$

$$\vartheta - \pi = \left(1 + \frac{a}{r}\right)\sin\vartheta,$$

was ebenfalls unmöglich ist, da $\vartheta - \pi$ und $\sin\vartheta$ ungleiche Vorzeichen haben. Es ist also $\vartheta_1 = 4\pi - \vartheta$ zu nehmen. Die zweite Gleichung gibt dann:

$$\vartheta - 2\pi = \left(1 + \frac{a}{r}\right)\sin\vartheta;$$

damit $\vartheta - 2\pi$ und $\sin\vartheta$ gleiche Vorzeichen haben, muss ϑ zwischen 2π und 3π liegen.

Es ist diese Gleichung immer zu erfüllen, denn der Differentialquotient der rechten Seite $\left(1 + \frac{a}{r}\right)\cos\vartheta$ ist im Anfange für $\vartheta = 2\pi$ grösser als der der linken Seite 1) die rechte Seite wird also anfänglich auch schneller wachsen, da sie aber für $\vartheta = 3\pi$ ein Maximum $1 + \frac{a}{r}$ erreicht, und $\vartheta - \pi$ von 0 bis π wächst, so müssen beide Seiten einmal gleich werden, und der entsprechende Punkt ist der Schnittpunkt. Gleichung:

$$\operatorname{tg} l = \frac{(r+a)\sin\vartheta}{r - (r+a)\cos\vartheta}$$

gibt auch ein Mittel zur geometrischen Construction der Berührungslinie.

Was die Quadratur anbetrifft, so ist:

$$F = \int_0^{\vartheta} y_1 \frac{dx}{d\vartheta}\, d\vartheta = (r+a)\int_0^{\vartheta} (1-\cos\vartheta)\,(r - (r+a)\cos\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= (r+a)\int_0^{\vartheta} \left(\frac{3r+a}{2} - (2r+a)\cos\vartheta + \frac{r+a}{2}\cos 2\vartheta\right) d\vartheta.$$

also:

$$F = \frac{(r+a)(3r+a)}{2}\vartheta - (r+a)(2r+a)\sin\vartheta + \frac{(r+a)^2}{4}\sin 2\vartheta.$$

Also wenn man den vom ganzen Zweige eingeschlossenen Raum berechnen will, wo dann $\vartheta = 2\pi$ zu nehmen ist:

$$F = (r+a)(3r+a)\pi.$$

3) Epicycloide und Hypocycloide.

Nimmt man statt der graden Linie, auf welcher der Erzeugungskreis rollt, einen andern festen Kreis, so beschreibt ein Punkt der Peripherie des Erzeugungskreises eine Curve, die man im allgemeineren Sinne auch als Cycloide bezeichnet, und die Epicycloide oder Hypocycloide genannt wird, je nachdem beide Kreise sich von aussen oder von innen berühren. Auch beschreibt ein Punkt, der nicht in der Peripherie des Erzeugungskreises liegt, aber mit ihm fest verbunden ist, eine verkürzte oder verlängerte Epicycloide bezüglich Hypocycloide, je nachdem dieser Punkt ausserhalb oder innerhalb des Erzeugungskreises liegt. Um die Gleichungen dieser Curven zu entwickeln, gehen wir von der verkürzten Epicycloide aus. — Sei O (Fig. 68) der feste Kreis, C der Erzeugungskreis, B der Punkt, welcher die Curve beschreibt. Wir ziehen die Graden BC und CO, die erstere möge Kreis C in A schneiden, die letztere geht durch den momentanen Berührungspunkt M der Kreise.

Sei F derjenige Punkt des festen Kreises, welcher mit A in Berührung kommt, und sei XO Axe der x, also:

$$DO = x, \quad BD = y,$$

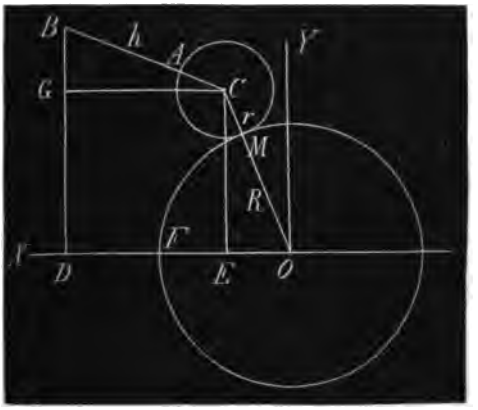
setzen wir ferner $BA = h$, $AC = r$, $MO = R$, Bogen $FM = AM = s$, so ist:

$$GD = CE = (R+r)\sin\frac{s}{R},$$

$$EO = (R+r)\cos\frac{s}{R}$$

Digitized by Google

Fig. 63.



Winkel $BCG = BCO - GCE - ECO = \frac{s}{r} - \pi + \frac{s}{R}$

$$BG = BC \sin BCG = -(r+h) \sin\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)s$$

$$CG = DE = BC \cos BCG = -(r+h) \cos\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)s.$$

Also: $BD = BG + GD$, $DO = DE + EO$, d. h.

1) $$y = (R+r) \sin\frac{s}{R} - (r+h) \sin\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)s$$

2) $$x = (R+r) \cos\frac{s}{R} - (r+h) \cos\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)s.$$

Aus diesen Gleichungen wäre s zu eliminiren, um die Gleichung der Curve zwischen x und y zu erhalten. Besser aber lässt man die Gleichungen in der obigen Gestalt. Für die verkürzte Hypocycloide ist r negativ zu nehmen. Sucht man die verlängerten Cycloiden, so ist h negativ zu nehmen. Für die eigentliche Epicycloide und Hypocycloide ist $h = 0$ zu setzen, so dass man hat für die Epicycloide:

3) $$y = (R+r) \sin\frac{s}{R} - r \sin\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)s$$

4) $$x = (R+r) \cos\frac{s}{R} - r \cos\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)s,$$

und für die Hypocycloide:

5) $$y = (R-r) \sin\frac{s}{R} + r \sin\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)s$$

6) $$x = (R-r) \cos\frac{s}{R} + r \cos\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)s.$$

Ist $R = \infty$, so hat man, wie leicht zu sehen, die gemeine Cycloide, doch ist in diesem Falle eine Coordinaten-Transformation nöthig, da O in die Unendlichkeit rückt. Ist $r = \infty$, so verwandelt sich der Erzeugungskreis in eine Grade, die Curve wird eine Kreisevolvente. Die Gleichungen derselben ergeben sich dann leicht z. B. aus 3) und 4). Es ist nämlich in diesem Falle:

$$r \sin\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)s = r \sin\frac{1}{R}s \cos\frac{1}{r}s + r \cos\frac{1}{R}s \sin\frac{1}{R}s = r \sin\frac{s}{R} + s \cos\frac{s}{R}.$$

$$r \cos\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)s = r \cos\frac{s}{R}\cos\frac{s}{r} - r \sin\frac{s}{R}\sin\frac{s}{r} = r \cos\frac{s}{R} - s \sin\frac{s}{R},$$

Digitized by Google

also:

$$y = R \sin \frac{s}{R} - s \cos \frac{s}{R},$$

$$x = R \cos \frac{s}{R} + s \sin \frac{s}{R}.$$

Die Gestalt der Cycloiden ist leicht aus der Erzeugungsweise darzustellen.

Es sind hier die gemeine Hypocycloide (Fig. 64) und die Epicycloide (Fig. 65) dargestellt. Die verlängerten und verkürzten Curven haben ähnliche Verschlin-

Fig. 64.

Fig. 65.

gungen bezüglich Ausschweifungen, wie dies bei der verlängerten und verkürzten Cycloide stattfand (Fig. 66 und 67). Es ist auch leicht zu sehen, dass im Allgemeinen alle diese Curven aus unendlich viel Zweigen bestehen, dass dies aber nicht stattfindet, wenn die Radien r und R ein rationales Verhältniss haben. In diesem letzteren Falle werden auch die Gleichungen der Curven algebraisch. Denn setzt man $R = nr$, $\left(\frac{s}{nr} = \alpha\right)$, wo n eine Rationalzahl ist, so wird:

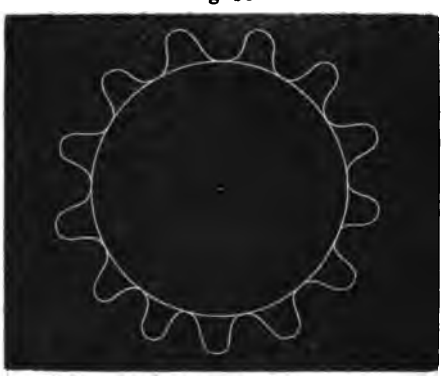
$$\cos \frac{s}{R} = \cos \alpha, \quad \sin \frac{s}{R} = \sin \alpha$$

$$\cos \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) s = \cos (n+1)\,\alpha,$$

$$\sin \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) s = \sin (n+1)\,\alpha$$

und die Grössen $\cos \alpha$, $\cos (n+1)\,\alpha$, $\sin \alpha$, $\sin (n+1)\,\alpha$ stehen immer in einem algebraischen Zusammenhang. Bei vielen Untersuchungen in der reinen und

Fig. 66.

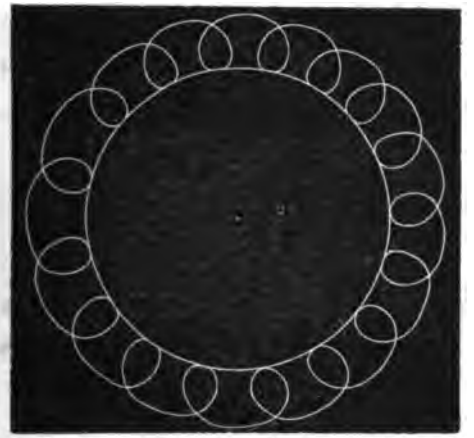


angewandten Mathematik stellen sich in der That algebraische Curven von verschiedenen Graden ein, die in die Reihe der Cycloiden gehören. Der einfachste Fall wäre der wo r negativ und $n = -1$ ist; dann haben die Gleichungen 1) und 2) die Gestalt:

$$y = 0, \quad x = r - h.$$

Digitized by Google

Fig. 67.



Die Curve wird ein Punkt. Setzen wir dagegen $n = 1$, so haben wir:

$$y = 2r \sin \alpha - (r + h) \sin 2\alpha$$
$$x = 2r \cos \alpha - (r + h) \cos 2\alpha.$$

Beide Gleichungen ins Quadrat erhoben und addirt geben:

$$x^2 + y^2 = 4r^2 + (r+h)^2 - 4r(r+h)\cos \alpha,$$

während die letzten der beiden ursprünglichen Gleichungen die Form annimmt:

$$2r \cos \alpha - 2(r + h)\cos \alpha^2 + r + h = x;$$

eliminirt man α, so erhält man eine Gleichung vierten Grades.

Ist noch h gleich Null, also die Curve eine gemeine Epicycloide, so ergibt die letzte Gleichung:

$$\cos \alpha^2 - \cos \alpha = \frac{r-x}{2r}$$

$$\cos \alpha = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \frac{r-x}{2r}} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \frac{x}{2r}},$$

und aus der vorletzten:

$$x^2 + y^2 = 5r^2 - 4r^2\left(\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \frac{x}{2r}}\right),$$

welches die Gleichung der betreffenden Cycloide ist. Sei noch r negativ und $n = -2$, so kommt:

$$y = r \sin \alpha - (r - h) \sin \alpha$$
$$x = r \cos \alpha + (r - h) \cos \alpha.$$

Ist $h = 0$, die Curve also eine gemeine Hypocycloide, so wird $y = 0$.

„Die Hypocycloide, welche aus einem Erzeugungskreise entsteht, dessen Radius halb so gross als der des festen Kreises ist, wird eine grade Linie."

Im allgemeinen Falle hat man:

$$y = h \sin \alpha, \quad x = (2r - h) \cos \alpha,$$

also:

$$\frac{y^2}{h^2} + \frac{x^2}{(2r-h)^2} = 1.$$

„Die verlängerte oder verkürzte Cycloide ist also in diesem Falle ein Kegelschnitt."

Für $r = h$ verwandelt sich derselbe in einen Kreis.

Im Falle, dass $h = 0$ ist, lässt sich die Rectification immer bewerkstelligen.

Man hat für den Bogen:

$$S = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds,$$

und aus 3) und 4) ergibt sich:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{R+r}{R} \cos \frac{s}{R} - \frac{R+r}{R} \cos\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)s$$
$$\frac{dy}{ds} = -\frac{R+r}{R} \sin \frac{s}{R} + \frac{R+r}{R} \sin\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)s$$
$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 2\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 \left(1 - \cos \frac{s}{r}\right) = 4\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 \left(\sin \frac{s}{2r}\right)^2,$$

d. h.

Digitized by Google

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}=2\left(1+\frac{r}{R}\right)\sin\frac{s}{2r}$$

$$S=\int_0^s 2\left(1+\frac{r}{R}\right)\sin\frac{s}{r}\,ds=4\left(1+\frac{r}{R}\right)r\left(1-\cos\frac{s}{2r}\right).$$

Für den halben Zweig der Cycloide ist zu setzen $s=\pi r$, also:

$$S=4r\left(1+\frac{r}{R}\right),$$

und für den ganzen:

$$S=8r\left(1+\frac{r}{R}\right).$$

In allen diesen Formeln ist für die Hypocycloide r negativ zu nehmen. Wenn die Werthe von S negativ werden, so hat dies Zeichen natürlich keinen Einfluss, da es nur auf den absoluten Werth von S ankommt.

Die Gestalt der Formeln 1) und 2) zeigt schon, dass sich die Quadratur der von Cycloiden begrenzten Flächenstücke für jeden Werth von k ausführen lasse. Setzen wir nämlich wieder:

$$\frac{s}{nr}=\alpha,\quad R=nr$$

wo jedoch n ganz beliebig ist, so haben wir:

$$y=r(1+n)\sin\alpha-\varrho\sin(n+1)\alpha$$
$$x=r(1+n)\cos\alpha-\varrho\cos(n+1)\alpha.$$

So ist ein von der Abscissenaxe der Curve und einer Ordinate begrenztes Flächenstück gegeben durch die Formel:

$$F=\int_0^\alpha y\frac{dx}{d\alpha}\,d\alpha$$

$$\frac{dx}{d\alpha}=-r(n+1)\sin\alpha+\varrho(n+1)\sin(n+1)\alpha,$$

also:

$$F=\int_0^\alpha\left(r\varrho(n+1)(n+2)\sin\alpha\sin(n+1)\alpha-r^2(n+1)^2\sin\alpha^2-\varrho^2(n+1)\sin(n+1)\alpha^2\right)d\alpha$$

$$=\int_0^\alpha\Bigg(\frac{r\varrho(n+1)(n+2)}{2}\left[\cos n\alpha-\cos(n+2)\alpha\right]-\frac{r^2(n+1)^2}{2}(1-\cos 2\alpha)$$
$$-\frac{\varrho^2(n+1)}{2}\left[1-\cos 2(n+1)\alpha\right]\Bigg)d\alpha=\frac{r\varrho}{2}(n+1)(n+2)\left(\frac{\sin n\alpha}{n}-\frac{\sin(n+2)\alpha}{n+2}\right)$$
$$-\frac{r^2(n+1)^2}{2}\left(\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)-\frac{\varrho^2(n+1)}{2}\left(\alpha-\frac{\sin 2(n+1)\alpha}{2(n+1)}\right).$$

Für

$$s=\pi r,\quad \alpha=\frac{\pi}{n}$$

d. h. für den halben Zweig der Cycloide ergibt sich hieraus:

$$F=\frac{r\varrho}{2}\sin\frac{2\pi}{n}-\frac{r^2(n+1)^2}{2}\left(\frac{\pi}{n}-\tfrac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)-\frac{\varrho^2(n+1)}{2}\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2(n+1)}\right),$$

d. h.

$$F=\sin\frac{2\pi}{n}\left(\frac{r\varrho}{2}+\frac{r^2(n+1)^2}{4}+\frac{\varrho^2}{4}\right)-\frac{n+1}{2n}\pi\left[r^2(n+1)+\varrho^2\right].$$

Und im Falle, dass $\varrho=r$ ist, also bei der gewöhnlichen Epicycloide oder Hypocycloide:

Digitized by Google

$$F = \frac{r^2}{4}[3+(n+1)^2]\sin\frac{2\pi}{n} - \frac{r^2(n+1)(n+2)}{2n}.$$

Eben so leicht ist das Tangentenproblem zu lösen. Wir haben:

$$\frac{dy}{d\alpha} = r(1+n)\cos\alpha - \varrho(n+1)\cos(n+1)\alpha.$$

Also wenn l der Winkel der Tangente mit der Axe der x ist:

$$\operatorname{tg} l = \frac{dy}{dx} = \frac{r\cos\alpha - \varrho\cos(n+1)\alpha}{-r\sin\alpha + \varrho\sin(n+1)\alpha};$$

und für den Fall, wo $\varrho = r$ ist:

$$\operatorname{tg} l = \frac{\cos\alpha - \cos(n+1)\alpha}{-\sin\alpha + \sin(n+1)\alpha} = \frac{\sin(n+2)\frac{\alpha}{2}}{\cos(n+2)\frac{\alpha}{2}}$$

$$l = (n+2)\frac{\alpha}{2} = \frac{(n+2)s}{2nr} = \frac{s}{2r} + \frac{s}{R}.$$

Da wir hatten

$$S = 4\left(1+\frac{r}{R}\right)r\left(1-\cos\frac{s}{2r}\right),$$

so lässt sich leicht eine Formel finden, welche die Bogenlänge S als Function des Tangentenwinkels l giebt. Dergleichen Formeln sind für die Ableitung der Eigenschaften der Curven oft sehr wichtig. (Vergleiche den Artikel: Trajectorie.) In unserem Falle ist:

$$l = \frac{(R+2r)}{2rR}s, \qquad \frac{s}{2r} = \frac{Rl}{R+2r},$$

also:

$$S = \frac{4r}{R}(R+r)\left(1-\cos\frac{Rl}{R+2r}\right).$$

Oder wenn man die Bogenlängen in entgegengesetzter Richtung zählt, und mit dem Punkte beginnt, wo $S = \frac{4r(R+r)}{R}$ ist, d. h. mit dem Punkte, wo sich die Curve am höchsten über den festen Kreis erhebt:

$$S = \frac{4r(R+r)}{R}\cos\frac{Rl}{R+2r}.$$

Im Falle der gemeinen Cycloide, wo

$$R = \infty$$

ist, verwandelt sich diese Formel in:

$$S = 4r\cos l.$$

Im Falle der Kreisevolvente, wo

$$r = \infty$$

ist, hat man, wenn man von der ursprünglichen Formel ausgeht:

$$S = \frac{4r^2}{R}\frac{R^2l^2}{8r^2},$$

d. h.

$$S = \frac{Rl^2}{2}.$$

Diesen Formeln kann man jedoch einen allgemeinern Standpunkt abgewinnen.

4) Ueber das Abrollen von Curven auf andern Curven.

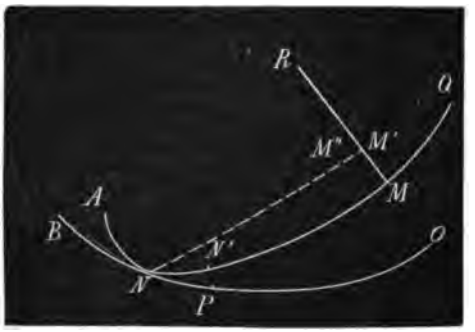
Als Cycloide im allgemeinsten Sinne kann man diejenige Curve bezeichnen, welche entsteht, wenn eine beliebige Curve A, die wir Erzeugungslinie nennen, auf einer andern B, die fest gedacht wird, sich rollend bewegt; ein Punkt M der Curve A beschreibt dann die allgemeine Cycloide. Wir wollen die Gleichungen für die Lösung dieses nicht unwichtigen Problems aufstellen, welches z. B. bei der Theorie der Zahnräder seine Anwendung findet (vergleiche den Artikel: Rad), uns aber darauf beschränken, eine Beziehung zwischen Bogenlänge s und Tangentenwinkel l zu finden, aus der sich dann die Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten leicht durch die Formeln:

Digitized by Google

$dx = \cos l\, ds, \quad dy = \sin l\, ds$

ergeben. Zu dem Ende seien σ die Bogenlänge der Curve A, d. h. die Länge des Bogens von irgend einem näher zu bestimmenden Punkt gezählt, λ der Winkel der Tangente mit einer festen ebenfalls zu bestimmenden Graden, seien S, L dieselben Grössen in Bezug auf Curve B, und s, l diese Grössen in Bezug auf die gesuchte, vom Punkte M beschriebene Curve. Punkt O (Fig. 68) sei derjenige Punkt in Curve B, in welchem dieselbe

Fig. 68.



mit Curve A in Punkt M zur Berührung kommt, sei der Bogen $MN = \sigma$ $ON = S$, so ist offenbar $\sigma = S$. Ist NN_1 das Bogen-Element der Curve A, NP das der Curve B so lässt sich leicht der unendlich kleine Winkel N_1NP finden. Derselbe ist nämlich offenbar die Differenz oder Summe der Winkel, welche zwei unendlich nahe Tangenten der Curve A und zwei der Curve B mit einander machen, da in N Berührung stattfindet, je nachdem diese Berührung (wie hier) von innen oder von aussen stattfindet. Mat hat also:

$$\text{Winkel } N_1NP = d\lambda \mp dL.$$

Es ist aber, wenn M_1 ein M unendlich naher Punkt der von M beschriebenen Curve ist, offenbar

$$\text{Winkel } MNM_1 = N_1NP,$$

denn bei dem Rollen dreht sich jeder Punkt der Curve A und mithin auch M um einen unendlich kleinen Winkel um Punkt N, wenn in N Berührung stattfindet. Es ist also:

$$MM_1 = MN\,(d\lambda \mp dL)$$

oder, wenn wir $MN = u$ setzen:

$$ds = u\,(d\lambda \mp dL).$$

Sei jetzt MQ die in M an Curve A gezogene Tangente, und Winkel $QMN = \vartheta$. Zur Zeit, wo die Curven A und B sich in N_1 und P berühren, wird die Linie MN die Lage M_1N annehmen, während

$$M_1N_1 = u + du$$

ist. Es ist also NM_1N_1 derjenige Winkel, welchen die Linien u und $u + du$ mit einander machen, also gleich $d\vartheta$. M_1R soll die Verlängerung von MM_1 sein, M_1M_2 das nächste Element der gesuchten Curve, dann ist

$$RM_1M_2 = l, \quad NM_1M_2 = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$NM_1R = \frac{\pi}{2} + dl + d\vartheta.$$

Da aber

$$NMM_1 = \frac{\pi}{2}, \quad MNM_1 = d\lambda \mp dL,$$

$$NM_1R = NMM_1 + MNM_1$$

ist, so hat man:

$$dl + d\vartheta = d\lambda \mp dL.$$

Die feste Linie, mit welcher die Tangente der Curve A den Winkel L macht, soll jetzt die Linie MQ sein; dann sind die Projectionen von $NN_1 = dS$ auf MQ und senkrecht darauf offenbar bezüglich:

$$d\sigma \cos\lambda \text{ und } d\sigma \sin\lambda,$$

die Projectionen von MN auf dieselben Richtungen:

$$u\cos\vartheta, \quad u\sin\vartheta$$

und die von M_1N_1 also:

$u\cos\vartheta + d(u\cos\vartheta)$, $u\sin\vartheta + d(u\sin\vartheta)$.

Und da die Differenz der Projectionen von M_1N_1 und MN gleich der von NN_1 ist, so hat man:

1) $\quad d(u\cos\vartheta) = d\sigma\cos\lambda$

2) $\quad d(u\sin\vartheta) = d\sigma\sin\lambda.$

Mit diesen Gleichungen verbinden wir:

3) $\quad ds = u\,(d\lambda \mp dL).$

Noch war

$$dl + d\vartheta = d\lambda \mp dL,$$

also:

$$l + \vartheta = \lambda \mp L + C.$$

Zur Bestimmung der Constante C bemerken wir, dass, wenn wir den Bogen von A in M zu zählen anfangen, für $s = 0$ auch $L = 0$ und $\vartheta = 0$ ist.

Den Winkel λ wollten wir so bestim-

Digitized by Google

men, dass derselbe für $C = 0$, also in O ebenfalls gleich Null sei, d. h. dass λ der Winkel einer beliebigen Tangente an B mit der Tangente in Punkt O an dieselbe Curve ist, und ebenfalls für $s = 0$ auch $l = 0$ setzen, dann ist $C = 0$, also:

$$4) \quad l = \lambda - \vartheta \mp L.$$

Mit diesen vier Gleichungen, sind diejenigen beiden zu verbinden, welche S als Function von L und σ als Function von λ geben, und die aus der Natur der beiden Curven folgen. Seien dieselben:

$$f(\sigma, \lambda) = 0, \quad \varphi(S, L) = 0,$$

so hat man da $S = \sigma$ ist:

$$5) \; f(\sigma, \lambda) = 0 \qquad 6) \; \varphi(\sigma, L) = 0.$$

Die Gleichungen 1) bis 6) lösen unser Problem völlig Da nämlich wegen 5) σ eine Function von λ ist, so geben 1) und 2) u und ϑ durch blosse Quadraturen als Functionen von λ. Die Gleichungen 5) und 6) geben dann L auch als Function von λ und 4) giebt dann auch l als Function von λ allein. Durch Elimination lassen sich dann u, λ und L auch als Functionen von l ausdrücken, und die Gleichung gibt dann die gesuchte Beziehung zwischen s und l_1.

„Diese Gleichung ist also immer durch blosse Quadraturen und Eliminationen zu finden."

Beispiele. Das erste Beispiel sei der in der Theorie der Zahnräder wichtige Fall, wo die Curve B ein Kreis ist. Wir wollen den Radius desselben gleich r setzen, dann ist: $S = rL$ also auch $\sigma = rL$. Die Gleichungen 3) 4) und 5) werden also:

$$ds = u\left(d\lambda \mp \frac{d\sigma}{r}\right),$$

$$l = \lambda - \vartheta \mp \frac{\sigma}{r},$$

$$f(r, L, \lambda) = 0,$$

während die Gleichungen 1) und 2) durch Einsetzen dieser Werthe die Gestalt annehmen:

$$\int d\sigma \cos\lambda = \frac{ds}{d\lambda \mp \frac{d\sigma}{r}} \cos\left(\lambda - l \mp \frac{\sigma}{r}\right)$$

$$\int d\sigma \sin\lambda = \frac{ds}{d\lambda \mp \frac{d\sigma}{r}} \sin\left(\lambda - l \mp \frac{\sigma}{r}\right).$$

Da σ als Function von λ gegeben sein muss, so enthalten diese Gleichungen nur λ, l und s geben also nach der Elimination von λ die Gleichung zwischen l und S.

Als zweites Beispiel wollen wir und den Fall nehmen, wo die Curve B beliebig, und die Curve A ein Kreis ist. Wir hätten also den Fall eines Kreises, der auf einer beliebigen Curve rollt. Es ist dann $\sigma = \varrho\lambda$, wenn ϱ der Radius von A ist. In diesem Falle geben die Gleichungen 1) und 2):

$$u\cos\vartheta = \int_0^\lambda \varrho\cos\lambda d\lambda = \varrho\sin\lambda$$

$$u\sin\vartheta = \int_0^\lambda \varrho\sin\lambda d\lambda = \varrho(1 - \cos\lambda),$$

da für $\lambda = 0$ auch $u = 0$ ist.

Dividirt man die erstere Gleichung durch die letztere, so kommt:

$$\frac{\sin\lambda}{1 - \cos\lambda} = \cot\vartheta,$$

oder:

$$\cot\frac{\lambda}{2} = \cot\vartheta,$$

d. h.

$$\lambda = 2\vartheta,$$

woraus dann folgt:

$$u\sin\frac{\lambda}{2} = \varrho(1 - \cos\lambda) = 2\varrho\sin\frac{\lambda}{2},$$

oder:

$$u = 2\varrho\sin\frac{\lambda}{2}.$$

Vermöge dieser Gleichung und des Werthes von

$$\vartheta = \frac{\lambda}{2}$$

geben die Gleichungen 3) und 4)

$$ds = 2\varrho\sin\frac{\lambda}{2}(d\lambda \mp dL),$$

$$l = \frac{\lambda}{2} \mp L,$$

wozu dann noch wegen 6) kommt:

$$\varphi(\varrho, \lambda, L) = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen reichen hin, um aus der ersten L und λ zu eliminiren. Ist auch die Curve B ein Kreis mit Radius r, findet also der Fall der Epicycloide oder Hypocycloide statt, so tritt an die Stelle der letzten Gleichung:

$$\varrho\lambda = rL$$

und man hat:

$$l = \frac{\lambda}{2} \mp \frac{\varrho\lambda}{r},$$

also:

$$\lambda = \frac{2rl}{r \mp 2\varrho}$$

Digitized by Google

$$L = \frac{2\varrho l}{r \mp 2\varrho},$$

$$ds = \mp 4\varrho \sin \frac{rl}{r \mp 2\varrho} \frac{r \mp \varrho}{r \mp 2\varrho} dl$$

$$s = \pm \frac{4\varrho}{r}(r \mp \varrho) \cos \frac{rl}{r \mp 2\varrho},$$

eine Gleichung, die mit der im vorigen Abschnitte entwickelten übereinstimmt.

Wenn statt der Curve B eine grade Linie gegeben ist, ein Fall, welcher dann die gemeine Cycloide giebt, wenn die Curve A ein Kreis wird, so ist L constant.

Es wird dann Gleichung 3) die Form annehmen:

$$ds = u d\lambda.$$

Die übrigen Gleichungen bleiben unverändert.

Ist die Curve A ein Kreis, so gilt die vorletzte Form wieder, in der $r = \infty$ zu nehmen ist, so dass man hat:

$$s = \pm 4\varrho \cos l,$$

wie im vorigen Abschnitte. Das Vorzeichen kann, wie bei allen Formeln die s als Function von l geben + oder − genommen werden, da man die positiven Bogen soviel nach der einen als nach der andern Richtung vom Anfangspunkte aus zählen kann. — Nehmen wir hier das positive Zeichen, und suchen wir die Gleichung derjenigen Curve, welche ein Punkt der Cycloide beschreibt, wenn letztere auf einer graden Linie rollt. Es ist also hier zu setzen:

$$\sigma = 4\varrho \cos \lambda,$$

$$u \cos \vartheta = -4\varrho \int_0^\lambda \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda = \varrho(\cos 2\lambda - 1),$$

$$u \sin \vartheta = -4\varrho \int_0^\lambda \sin \lambda^2 d\lambda = \varrho(\sin 2\lambda - 2\lambda),$$

also, wenn man beide Gleichungen ins Quadrat erhebt und addirt:

$$u^2 = \varrho^2 (1 + 4\lambda^2 - 4\lambda \sin 2\lambda - 2\cos 2\lambda),$$

$$ds = u d\lambda = \varrho \int_0^\lambda \sqrt{1 + 4\lambda^2 - 4\lambda \sin 2\lambda - 2\cos 2\lambda}\, d\lambda;$$

dividirt man den Ausdruck für $u \sin \vartheta$ durch den für $u \cos \vartheta$, so kommt:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin 2\lambda - 2\lambda}{\cos 2\lambda - 1}.$$

Die beiden letzten Gleichungen in Verbindung mit

$$l = \lambda - \vartheta \mp L$$

lösen dann das Problem.

Ist die Curve A eine Grade, so hat man die Aufgabe, die Curve zu bestimmen, welche ein Punkt einer Graden beschreibt, welcher sich rollend auf einer gegebenen Curve bewegt, oder die Curve zu finden, welche erzeugt wird, wenn man eine Grade von einer gegebenen Curve abwickelt. Bekanntlich heisst die Curve, welche durch diese Abwickelung entsteht, Evolvente der gegebenen, und die letztere Evolute der so entstandenen Curve. S und L sind also Bogenlänge und Tangentenwinkel der Evolute, s und l die der Evolvente, während λ constant zu setzen ist.

Die Gleichungen 1) und 2) geben nun:

$$u \cos \vartheta = (\sigma - \sigma_0) \cos \lambda,$$
$$u \sin \vartheta = (\sigma - \sigma_0) \sin \lambda,$$

also:

$$\sigma - \sigma_0 = u, \quad \vartheta = \lambda, \quad l = \pm L.$$

Die Gleichung 3) nimmt also die Form an:

$$ds = \mp u dL = (\sigma - \sigma_0)\, dl,$$

d. h.

$$s = \int_0^l \sigma dl - l\sigma_0.$$

Es ist hier angenommen, dass für $u = 0$ $\sigma = \sigma_0$ sei. Es ist hier offenbar σ_0 die Entfernung desjenigen Punktes der Graden, welcher die Evolvente beschreibt, vom anfänglichen Berührungspunkte. σ_0 kann also jede beliebige Grösse haben, und es werden also zu jeder Curve unendlich viel Evolventen gehören. Setzen wir lieber $\sigma_0 = -a$, und mit Benutzung der immer gültigen Gleichung $\sigma = S$ werden wir haben:

$$s = \int_0^l S dl + al;$$

die Tangentenwinkel l und L können hier als identisch betrachtet werden.

5) Eigenschaften der Epicycloiden und Hypocycloiden, die sich aus den Beziehungen zwischen Bogenlänge und Tangentenwinkel ergeben. —

Die Gleichung:

$$s = A \cos \alpha l$$

stellt immer eine der Cycloiden vor; da $\cos \alpha l = \cos(-\alpha l)$, und das Vorzeichen von A beliebig genommen werden kann, so kann man sich A und α immer positiv denken. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem oben gefundenen

$$s = \pm \frac{4\varrho}{r}(r \mp \varrho) \cos \frac{r}{r \mp 2\varrho} l,$$

so ist immer, wenn die unteren Zeichen gelten, also für alle Epicycloiden:

$$A = \frac{4\varrho}{r}(\alpha + \varrho), \quad \alpha = \frac{r}{r + 2\varrho},$$

woraus sich ergibt:

$$r = \frac{2\varrho\alpha}{1-\alpha}, \quad A = \frac{2\varrho}{\alpha}(1+\alpha),$$

d. h.

$$\varrho = \frac{A\alpha}{2(1+\alpha)}, \qquad r = \frac{A\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Da r und ϱ positiv sein sollen, so ist also die Bedingung dafür, dass die Curve eine Epicycloide sei, die, dass α kleiner als l sein muss. — Was die Hypocycloiden anbetrifft, so unterscheiden wir je nach der Grösse von ϱ 3 Fälle und nehmen als ersten Fall den, wo r grösser als 2ϱ ist, d. h. der Radius des Erzeugungskreises weniger als die Hälfte von dem des festen Kreises beträgt. In diesem Falle ist:

$$A = \frac{4\varrho}{r}(r - \varrho), \quad \alpha = \frac{r}{r - 2\varrho},$$

also:

$$r = \frac{2\varrho\alpha}{\alpha - 1}, \quad A = \frac{2\varrho}{\alpha}(\alpha + 1),$$

d. h.

$$\varrho = \frac{A\alpha}{2(1+\alpha)}, \qquad r = \frac{A\alpha^2}{\alpha^2 - 1}.$$

Es muss also, damit r und ϱ positiv seien, α grösser als l sein.

Ist diese Bedingung erfüllt, so hat man $2\varrho = r\frac{\alpha-1}{\alpha}$, und da $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ jedenfalls ein echter Bruch ist, $2\varrho < r$, wie dies verlangt war.

Der zweite Fall der Hypocycloide ist der, wo r grösser als ϱ, aber kleiner als 2ϱ ist. In diesem Falle ist zu setzen:

$$A = \frac{4\varrho}{r}(r - \varrho), \quad \alpha = \frac{r}{2\varrho - r},$$

also:

$$r = \frac{2\varrho\alpha}{1+\alpha}, \qquad A = \frac{2\varrho(\alpha-1)}{\alpha},$$

d. h.

$$\varrho = \frac{A\alpha}{2(\alpha-1)}, \quad r = \frac{A\alpha^2}{\alpha^2 - 1}.$$

Auch hier ist die Bedingung, dass α grösser als Eins sei, hinreichend. Man sieht hieraus, dass man sich eine Hypocycloide immer durch das Rollen zweier Erzeugungskreise in demselben festen Kreise entstanden denken kann. Denn die Werthe von r stimmen in den beiden letzten Fällen überein, während man, wenn ϱ, ϱ_1 die Radien der Erzeugungskreise sind, setzen kann:

$$\varrho = \frac{A\alpha}{2(\alpha+1)}, \quad \varrho_1 = \frac{A\alpha}{2(\alpha-1)},$$

also:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1},$$

oder, da man hat:

$$\alpha = \frac{r}{r - 2\varrho}, \quad \alpha - 1 = \frac{2\varrho}{r - 2\varrho},$$

$$\alpha + 1 = \frac{2(r-\varrho)}{r - 2\varrho},$$

also:

$$\varrho_1 + \varrho = r,$$

woraus sich dann ergibt:

„Die Radien der beiden Erzeugungskreise, welche dieselbe Hypocycloide geben, sind zusammen gleich dem Radius des festen Kreises.“

Der letzte Fall ist endlich der, wo r kleiner als ϱ ist. Nach den oben angegebenen Definitionen müssen wir diesen Fall zunächst als den einer Hypocycloide bezeichnen. Es ist dann:

$$A = \frac{4\varrho}{r}(\varrho - r), \quad \alpha = \frac{r}{2\varrho - r}$$

$$r = \frac{2\varrho\alpha}{\alpha+1}, \qquad A = \frac{2\varrho(1-\alpha)}{\alpha},$$

also:

$$\varrho = \frac{A\alpha}{2(1-\alpha)}, \qquad r = \frac{A\alpha^2}{1-\alpha^2}.$$

Die Bedingung ist die, dass α kleiner als l ist. Diese Bedingung fand aber auch bei der Epicycloide statt, und folglich ist die gefundene Curve immer einer Eipcycloide congruent. Nimmt man also

nicht auf die jedesmalige Entstehung sondern nur auf die Form der Curven Rücksicht, so sind Hypocycloiden nur alle diejenigen, deren Erzeugungskreis kleiner als der feste Kreis ist, wo das Rollen wirklich innerhalb des festen Kreises stattfindet. Epicycloiden würden dagegen nur Curven sein, deren Erzeugungskreis den festen Kreis entweder von Aussen berührt, oder ihn zwar von innen berührt, wo aber der Erzeugungskreis grösser als der feste ist.

Indess ist es bei Anwendungen in der Mechanik oft gerathen, wie dies hier z B. in dem Artikel: Rad geschehen ist, die Namen bloss auf die Erzeugung zu beziehen, und alle Curven, die bei innerer Berührung beider Kreise entstehen als Hypocycloiden zu bezeichnen.

Suchen wir noch die Bezeichnung zwischen den Radien zweier Erzeugungskreise, welche dieselbe Cycloide bilden, wenn α kleiner als Eins ist. Es war:

$$\varrho = \frac{A\alpha}{2(\alpha+1)}, \quad \varrho_1 = \frac{A\alpha}{2(1-\alpha)},$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha},$$

$$\alpha = \frac{r}{r+2\varrho},$$

also:

$$1-\alpha = \frac{2\varrho}{r+2\varrho}, \quad 1+\alpha = \frac{2(r+\varrho)}{r+2\varrho},$$

d. h.

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{\varrho}{r+\varrho} \quad \text{oder} \quad \varrho_1 - \varrho = r.$$

„In diesem Falle ist also die Differenz der Radien beider Erzeugungskreise gleich dem des festen Kreises."

Ist die Geichung:

$$s = A \cos \alpha l$$

gegeben, so hat man also eine Hypocycloide, wenn α grösser als l ist, eine Epicycloide, wenn α kleiner als l ist, eine gemeine Cycloide, wenn $\alpha = 1$ ist.

6) Evolventen und Evoluten der Cycloiden.

Die Grössen s und l sind als Coordinaten zu betrachten, welche die Gestalt der fraglichen Curve ergeben. Die einzige Transformation, welche man diesen Coordinaten geben kann, besteht offenbar darin, dass man den Punkt ändert, von welchen aus man die Bogen s zählt und die feste Linie oder Richtung, mit welcher die Tangente den Winkel l macht. Da übrigens s und l nach einer oder der andern Seite hin als positiv betrachtet werden können, so sind die allgemeinsten Transformationsformeln, wenn s, l die alten, s', l' die neuen Coordinaten sind:

$$s' = k \pm s, \quad l' = k \pm l,$$

wo k und k beliebige Constanten sind.

Ist

$$s = f(l)$$

die Gleichung einer beliebigen Curve, so muss die einer congruenten Curve die Gestalt haben:

$$s' = f(l'),$$

wo s' und l' durch irgend eine Transformation von der obigen Gestalt sich aus s und l ergeben.

Soll eine Curve derjenigen ähnlich sein, welche die Gleichung $s = f(l)$ hat, so muss ihre Gleichung sein:

$$s' = mf(l'),$$

wo m die Verhältnisszahl dieser Curve in Bezug auf die gegebene, also constant ist.

In Abschnitt 4) fanden wir, dass, wenn S und L die Coordinaten einer Curve sind, diese Grössen für ihre Evolvente sich ergeben aus den Gleichungen:

$$s = \int_0^L SdL + aL, \qquad l = L.$$

Das doppelte Vorzeichen von L ist wegzulassen, da dasselbe durch eine Coordinaten-Transformation sich wiederherstellen lässt. Ist die Gleichung der Evolventen zwischen s und l gegeben und man sucht die der Evolute, deren Coordinaten S und l sein mögen, so ist:

$$\frac{ds}{dl} = S + a.$$

Sei also:

$$s = A \cos \alpha l,$$

also die Evolvente eine Cycloide, so ist:

$$S = -A\alpha \sin \alpha l + aR,$$

also wenn wir setzen:

$$s' = -S + a$$

$$l = \frac{\pi}{2\alpha} - l',$$

so ergibt sich für die Evolute:

$$s' = A\alpha \cos \alpha l',$$

d. h. die „Evolute irgend einer Epicycloide oder Hypocycloide ist eine der gegebenen ähnliche Curve." Die Verhältnisszahl α ist bei den Hypocycloiden grösser als 1, bei den Epicycloiden kleiner als 1, bei der gemeinen Cycloide gleich 1, also:

„Die Evolute einer gemeinen Cycloide ist derselben congruent."

Digitized by Google

Suchen wir jetzt die allgemeine Formel für die Evolventen der Cycloide. Es ist in diesem Falle zu setzen:

$$S = A\cos(\alpha l)$$

und man hat:

$$s = A\int_0^L \cos(\alpha l)\,dl + \alpha l,$$

d. h.

$$s = \frac{A}{\alpha}\sin\alpha l + \alpha l,$$

oder, wenn man:

$$l = \frac{\pi}{2\alpha} - l', \quad s = s' + \frac{a\pi}{2\alpha}$$

einführt:

$$s' = \frac{A}{\alpha}\cos\alpha l' - a l'.$$

Nur der Fall, wo $\alpha = 0$ ist, gibt eine der gegebenen ähnliche Curve.

Die Curven, welche einem beliebigen α entsprechen, kann man als Cycloidenevolventen bezeichnen. In der Theorie der Verzahnung der Räder spielen sie eine wichtige Rolle. (Siehe den Artikel: Rad.) Ueber die weitere Ausführung dieses Gegenstandes müssen wir auf die Artikel: Evolvente, Trajectorie verweisen.

5) Mechanische Eigenschaften der Cycloiden.

Wir berühren noch die Eigenschaften der gemeinen Cycloide als Tautochrone und Brachystochrone.

Wenn sich ein Punkt von der Masse m unter dem Einflusse der Schwere auf einer Curve bewegt, so wirkt auf ihn ausser der Beschleunigung der Schwere, welche wir mit g bezeichnen, noch der Druck der Curve R in der Richtung der Normale in derselben. Nehmen wir an, dass die Curve sich in einer durch die Richtung der Schwere gehenden Ebene befinde, dass die Axe der y in der Richtung der Schwere und von oben nach unten gerichtet sei, so werden die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Axen der x und der y macht, bezüglich sein $\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dx}{ds}$, wo s der Bogen ist. Es wirkt also nach ersterer Richtung nur die Kraft $R\frac{dy}{ds}$, nach letzterer mg und $-R\frac{dx}{ds}$, so dass die Gleichungen der Bewegung sind:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = R\frac{dy}{ds}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - R\frac{dx}{ds}.$$

Also wenn man die erstere Gleichung mit $\frac{dx}{dt}$, die letztere mit $\frac{dy}{dt}$ multiplicirt und beide addirt, hat man:

$$mg\frac{dy}{dt} = m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

aber:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \tfrac{1}{2}d\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

also:

$$mgdy = \tfrac{1}{2}d\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

woraus sich dann ergibt:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - v_0^2 = 2mg(y - y_0),$$

wo v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, also der anfängliche Werth von $\frac{ds}{dt}$, und y_0 die Ordinate in diesem Punkte ist. Wir nehmen an, dass der Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit falle und erhalten:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2mg(y - y_0)}}.$$

Sei die Curve nun eine gemeine Cycloide, welche entstanden ist, indem ein Kreis mit Radius r unterhalb der horizontal gedachten Axe der x sich rollend bewegt. Damit in diesem Falle l derjenige Winkel sei, welchen die Tangente mit der Axe der x macht, kann die Gleichung:

$$s = 4r\cos l$$

genommen werden. Wir fanden nämlich in Abschnitt 1) unter dieser Voraussetzung:

$$S = 4r\left(1 - \cos\frac{\vartheta}{2}\right) \text{ und } \vartheta = \pi - 2l;$$

es ist also zu setzen:

$$s = 4r(1 - \sin l)$$

und ebenfalls nach Abschnitt 1):

$$y = r(1 - \cos\vartheta) = r(1 + \cos 2l),$$

woraus sich dann ergibt:

$$dt = \frac{-4r\cos l\,dl}{\sqrt{2mgr(\cos 2l - \cos 2l_0)}} = \frac{-2r\cos l\,dl}{\sqrt{mgr(\sin l_0^2 - \sin l^2)}},$$

also:

Digitized by Google

$$t = -\frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{mg}} \int_{l_0}^{l} \frac{d \sin l}{\sqrt{\sin l_0^2 - \sin l^2}},$$

und lässt man den bewegten Punkt bis zu dem tiefsten Punkte in der Cycloide fallen, so ist $l = 0$, da in diesem Punkte die Curve der Abscissenaxe parallel ist. Man hat nun:

$$t = -\frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{mg}} \left(\text{arc sin} \frac{\sin l}{\sin l_0} - \frac{\pi}{2} \right),$$

oder wenn $l = 0$ ist:

$$t = \sqrt{\frac{r\pi}{mg}}.$$

Dieser Ausdruck für die Fallzeit ist völlig unabhängig von l_0 und somit wird der bewegte Punkt, von welcher Stelle der Cycloide aus er auch zu fallen beginnt, immer zu gleicher Zeit im tiefsten Punkte anlangen. Bei Pendelschwingungen wird dieselbe Zeit die beim Falle bis zum tiefsten Punkt vergeht, auch bis zum Steigen nach dem höchsten Punkte auf der andern Seite hin stattfinden, und somit ist die Cycloide in der That eine Tautochrone, d. h. diejenige Curve, auf welcher ein Punkt (mit Vernachlässigung der Reibung und des Luftwiderstandes) Pendelschwingungen macht, deren Schwingungsdauer ganz von der Schwingungsweite unabhängig ist. Huyghens, der diese Eigenschaft fand, wollte durch deren Anwendung auf Uhrpendel einen genaueren Gang derselben bezwecken. Indess bediente er sich nicht etwa eines schweren Punktes der an einem Faden befestigt, sich innerhalb einer cycloidischen Rinne bewegt, sondern er wandte die Betrachtungen des vorigen Paragraphen an. Ist

$$s = 4r \cos l$$

die Gleichung der Cycloide, so wird l der Winkel sein, welchen die Tangente mit der Axe der x macht. Die Gleichung der Evolute ist dann:

$$s' = \frac{ds}{dl} = -4r \sin l = 4r \cos l',$$

wo

$$l' = l - \frac{\pi}{2}$$

ist. Es wird also die Erzeugungslinie dieser Cycloide auf die der Evolvente senkrecht gerichtet sein.

Die allgemeine Evolvente einer Cycloide hatte die Gleichung:

$$s = 4r \sin l + a\, l$$

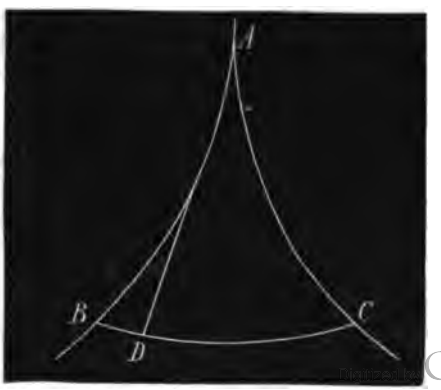
wenn

$$S = 4r \cos l$$

die Gleichung der Evolute war. Soll erstere wieder eine Cycloide sein, so ist a d. h. die Entfernung der Punkte der Graden, welche die Evolvente beschreibt, vom Anfangspunkte der Bogen S gleich Null zu setzen.

Da nun $S = 0$ für $l = \frac{\pi}{2}$ ist, und $l = \frac{\pi}{2}$ dem Punkte der Cycloide entspricht, wo zwei Zweige zusammentreffen, so muss man von diesem Punkte aus die Abwickelung beginnen lassen, und denjenigen Punkt in welchen sich zu Anfang der Bewegung Grade und Cycloide berühren zur Beschreibung der Evolvente bestimmen. Diese Bedingungen (Fig. 69) werden erfüllt, wenn wir uns die beiden halben Zweige einer Cycloide BA und AC, welche in A sich berühren, in der Vertikalebene so gelegt denken, dass die

Fig. 69.



Digitized by Google

Tangente in A vertikal, A aber der höchste Punkt ist. Ein Faden AD, welcher zu Anfang in B diese Curve berührt, wird dann vermöge der Schwere sich pendelförmig bewegen, wobei sein Endpunkt D die Evolvente der Curve und zwar die congruente Cycloide beschreibt. Ist BAC eine feste Rinne, so wird also ebenfalls die Schwingungszeit des Pendels AD eine von der Schwingungsweite unabhängige sein. Diese Art der Verbesserung der Uhren scheiterte indess an der Unzweckmässigkeit von biegsamen Pendeln, auch ist bei sorgfältiger Anfertigung und bei kleiner Schwingungsweite der Gang gewöhnlicher Kreispendel völlig ausreichend.

Was die Eigenschaft der Cycloide als Brachystochrone anbetrifft, so löst dieselbe folgende Aufgabe. Ein schwerer Punkt bewege sich von einem höhern Punkte A nach einem tiefern B unter Einfluss der Schwere allein, und zwar auf einer Curve. Welcher Art muss die letztere sein, damit diese Bewegung in möglichst kurzer Zeit zurückgelegt wird? — Sei die Anfangsgeschwindigkeit in A gleich v_0, so muss sein:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 + 2mg(y - y_0)};$$

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2mg(y - y_0)}},$$

wird also ein Minimum sein, wo x_0, y_0 die Coordinaten des festen Punktes A, x_1, y_1 die von B sind. Setzt man noch:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \frac{2mg}{v_0^2} = u^2,$$

so ist:

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{1 + u^2(y - y_0)}} = \text{Minimum}.$$

Bilden wir die Variation des Integrals, indem wir x um δx ändern (siehe den Artikel: Variationsrechnung), so ist:

$$\delta t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx\, d\delta x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\ \sqrt{1 + u^2(y - y_0)}},$$

aber durch theilweises Integriren erhält man:

$$\delta t = \frac{\delta x_1\, dx_1}{ds_1 \sqrt{1 + u^2(y - y_0)}} + \frac{\delta x_0\, dx_0}{ds_0} - \int_{x_0}^{x_1} \delta x\, d \frac{dx}{ds \sqrt{1 + u^2(y - y_0)}}.$$

Wegen $\delta x_1 = \delta x_0 = 0$ verschwindet der entwickelte Theil und es ist, damit ein Minimum stattfinde, zu setzen:

$$d \frac{dx}{ds \sqrt{1 + u^2(y - y_0)}} = 0,$$

also:

$$\frac{ds}{dx} \sqrt{1 + u^2(y - y_0)} = c,$$

wo c eine willkürliche Constante ist.

Diese letzte Gleichung nimmt nun die Gestalt an:

$$c^2 \left(1 - \frac{dy^2}{ds^2}\right) = 1 + u^2(y - y_0),$$

oder:

$$(c^2 - 1 - u^2(y - y_0))\, ds^2 = c^2\, dy^2,$$

d. h.

$$ds = \frac{c\, dy}{\sqrt{c^2 - 1 - u^2(y - y_0)}},$$

woraus sich dann ergibt:

$$s - s_0 = \frac{2c}{u^2} \left(\sqrt{c^2 - 1} - \sqrt{c^2 - 1 - u^2(y - y)}\right).$$

Ist noch l der Winkel, welchen die Tangente an die Curve mit der Axe der x macht, so ist:

$$dy = \sin l\, ds,$$

also wegen der vorletzten Gleichung:

$$c \sin l = \sqrt{c^2 - 1 - u^2(y - y_0)},$$

und wenn man $y - y_0$ aus der letzten Gleichung berechnet:

$$s - s_0 = \frac{2c}{u} (\sqrt{c^2 - 1} - c \sin l).$$

Also wenn gesetzt wird:

$$-s + s_0 + \frac{2c}{u^2} \sqrt{c^2 - 1} = s',$$

$$s' = \frac{2c^2}{u^2} \sin l,$$

was offenbar die Gleichung einer Cycloide ist. — „Es ist mithin die gemeine Cycloide die Brachystochrone."

Radwelle siehe Rad an der Welle, Rad.

Räderwerk siehe Rad.

Rammbär siehe Ramme.

Ramme (angewandte Mechanik).

Ramme (*sonnette, pile-engine*) ist eine Maschine, welche den Zweck hat, eine Last, den sogenannten Rammklotz oder Rammbär, zu einer geringen Höhe zu erheben. Durch das senkrechte Niederfallen des Letzteren auf einen Pfahl

soll dann der letztere in die Erde eingeschlagen werden, um einen Pfahlrost oder eine Spundwand zu bilden. Die Pfähle werden in Form einer vierseitigen Pyramide des leichteren Eindringens wegen zugespitzt, auch wohl mit einer Eisenspitze (Schuh) versehen.

Der Rammbär, 5 bis 15 Centner schwer, besteht aus Eichenholz oder Gusseisen. Im ersteren Falle ist er mit Eisenringen versehen.

Handramme ist eine solche Vorrichtung, wo das Heben des Rammbären mittels der freien Hand, Zugramme, wo es mittels eines über eine Rolle gespannten Seiles erfolgt. Da hier mehrere Arbeiter gleichzeitig ziehen, so muss das Seil in eine Anzahl Leinen, eine für jeden Arbeiter, auslaufen. Bei der Kunstramme wird der Rammbär mittels mechanischer Vorrichtungen gehoben.

Die Handramme besteht aus einem Klotze (Fig. 70) der mit vier Bügeln ver-

Fig. 70.

sehen ist, an welchen ihn vier Arbeiter emporheben. Im Durchschnitt beträgt die Hebekraft eines Menschen 30 Pfund. Der Rammbär darf also nicht mehr als 120 Pfund wiegen, und ist nur zum Einrammen schwacher Pfähle anwendbar.

Die Zugramme (Fig. 71) ist mit einer Führung versehen, die aus zwei Ruthen (Läufern) besteht, an welchen der Klotz *R* auf- und niedersteigt. Der letztere hat daher Arme, welche die Ruthen umfassen. Das Gerüst *ABC* ruht auf einem beweglichen Schwellwerke *ADE* mit einem Dielenboden (Stube) für die Arbeiter versehen. Im oberen Ende der Ruthe *FGH* befindet sich die Rammscheibe *H*, welche das Tau *RHK* vom Klotz nach der Stube führt. — Winde *LM* dient zum Setzen der Pfähle *P*. Das Zapfenlager der ersteren ruht auf den hintern Stäben des Gerüstes. Das Windetau *MNST* geht über zwei Rollen in den Krahnbalken *C* auf dem obern Ende der Ruthe.

Um den Klotz zu grösserer Höhe zu heben, ihm ein grösseres Gewicht geben zu können, und eine anhaltendere Arbeit zu erzielen, bedient man sich aber der Kunstrammen.

Die Kunstramme (Fig. 72) ist mit einer Welle *P* versehen, welche mittels einer doppelten Kurbel *A* von den Arbeitern in Bewegung gesetzt wird. Durch die Zahnräder *E* und *F* geht diese Bewegung auf Trommel *G* über, um welche das Rammtau gewickelt ist. Ist der Rammbär *Q* nach einer passenden Anzahl von Umdrehungen zur nöthigen Höhe gestiegen, so wird mittels des Hebels *CDE* die Welle *B* verschoben, wodurch die Zahnräder *E* und *F* ausser Eingriff kommen, und der Rammbär fällt auf den Pfahl herunter. Da aber hierbei das Rammtau sich schnell abwickelt, so wird es bald abgenutzt und kann übrigens auch leicht in Unordnung gerathen. Deshalb pflegt man den Rammbären mittelst eines Hakens an das Rammtau zu hängen, dieser Haken löst sich von selbst und lässt bei einer gewissen Steighöhe den Bären herunterfallen. Auch ist die Zange (Fig. 73) gebräuchlich. Der Rammbär ist dann in einer Führung zwischen den beiden Ruthen befindlich und mit einem Oehre versehen, womit er in der aus den bei den Haken *HOK* bestehenden Zange steckt, welche mittels der Bolzen *O* auf dem Fallblock *F* sitzen Dieser Block ist an das Rammtau befestigt, und ebenfalls in der Führung beweglich. Die Stahlfedern *J* drücken die Schenkel *H* der Zange nach aussen, und somit das Gebiss *K* zusammen. Oben angelangt, werden die Schenkel *H* von den daselbst angebrachten Seitenbacken zusammengedrückt, wobei dann also das Gebiss *K* sich öffnet, und der Rammklotz frei wieder herabfällt. So wie dies geschieht, werden mittelst der oben beschriebenen Vorrichtung die Zahnräder ausser Eingriff gebracht, so dass auch der Fallblock herunter fällt. Beim Aufschlagen öffnet sich das Gebiss von selbst und fasst das Oehr des Bären von Neuem. Bei dieser Vorrichtung kann ein Rammbär von 700 bis 1500 Pfunden mit 3 bis 6 Arbeitern 15 bis 30 Fuss gehoben werden.

Natürlich können statt der Arbeiter auch mittels besonderer Vorrichtung Thierkräfte und Wasserräder zur Arbeit benutzt werden. In neuerer Zeit wendet man auch Dampframmen an.

Die Dampframmen heben einen sehr schweren Kolben zu allerdings nur geringer Höhe, wiederholen dies aber sehr oft in einer gegebenen Zeit. Es

Fig. 71.

kann hierbei der Rammbär unmittelbar von der Stange des Dampfkolbens gehoben werden, und eben deshalb muss die Steighöhe eine geringe sein. Während bei einer gewöhnlichen Kunstramme nur etwa 10 bis 40 Schläge in der Stunde erfolgen, geschehen bei der Dampframme 70 bis 80 in einer Minute. Der Bär kann ein Gewicht von 50 Centnern (4 bis 6mal grösser als bei der gewöhnlichen Kunstramme) haben, wobei freilich die Steighöhe nur etwa 3 Fuss beträgt.

Untersuchen wir jetzt die mechanische Arbeit einer Ramme.

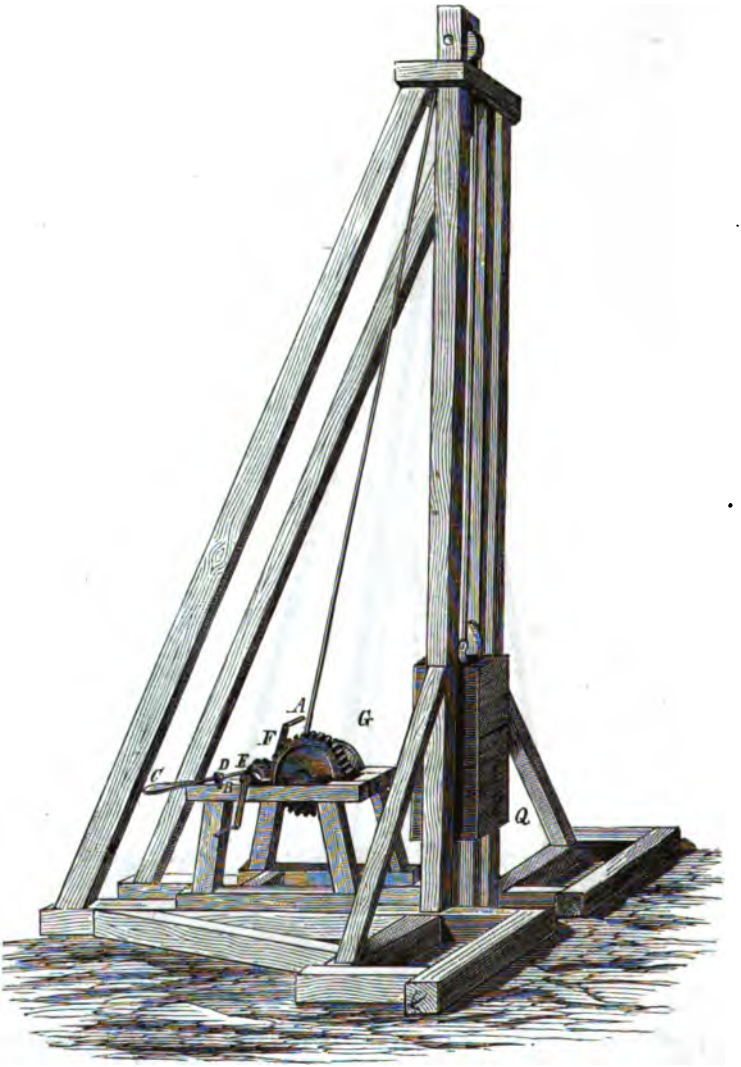
Sei Q das Gewicht des Rammbären, h die Steighöhe desselben, so ist die bei jedem Schlage verrichtete Arbeit gleich Qh. Erfordert also das Einrammen eines Pfahles n Schläge und sind m Pfähle einzuschlagen, sei ferner L die dazu nöthige Arbeit, so hat man:

$$L = m\,n\,Q\,h, \qquad m = \frac{L}{nQh}.$$

Bei allen Arbeiten, wo eine Last mittels eines über einer Rolle gespannten Seiles gehoben wird, ist:

Digitized by Google

Fig. 72.



die Kraft eines Menschen . . . . . $K = 38$ Pfund,
die mittlere Geschwindigkeit in der Secunde $C = 0{,}64$ Fuss,
die Arbeitszeit . . . . . $t = 6$ Stunden.

Also das tägliche Arbeitsquantum:

$$KCt = 38 \cdot 0{,}64 \cdot 6 \cdot 60 \cdot 60 = 525300 \text{ Fusspfund.}$$

Bei der täglichen Leistung eines Menschen an der Kurbel hat man dagegen zu nehmen:

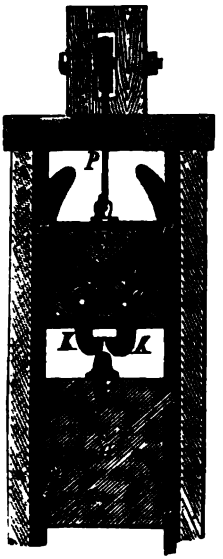
$$K = 17 \text{ Pfund}, \quad C = 2{,}4 \text{ Fuss}, \quad t = 8 \text{ Stunden},$$

also:

$$KCt = 1175040$$

Digitized by Google

Fig. 73.



und es wird bei der letzteren Uebertragung der Arbeit sich ein noch $2\frac{1}{2}$ mal so grosses Resultat wie bei der ersteren ergeben, was seinen Grund darin hat, dass bei der ersteren Arbeit eine ungünstigere also anstrengendere Uebertragung der Kraft also längere Pausen eintreten; (man rechnet auf $\frac{1}{4}$ bis 1 Minute Arbeit 2 bis 3 Minuten Pause).

Sei jetzt P die Kraft eines Arbeiters, s ihre Anzahl, α der Winkel, um welchen die Zugleinen von der vertikalen abweichen, es kommt dann nur die vertikale Componente $P\cos\alpha$ zur Verwerthung, ist also Q das Gewicht des Rammbären, so hat man:

$$P = \frac{Q}{s\cos\alpha}.$$

Bei der Kunstramme sei a die Länge des Kurbelarmes, b die des Hebelarmes, an dem die Last befestigt ist, n die Anzahl der Zähne des kleineren Triebrades E, und n_1 die des grösseren F, so ist $\frac{n}{n_1}$ auch das Verhältniss der Raddurchmesser, und es ergibt sich:

$$P = \frac{n}{n_1}\,\frac{b}{a}\,\frac{Q}{s}.$$

Für die Dampframme geschieht die Uebertragung unmittelbar. Man hat also:

$$P = Q.$$

Suchen wir jetzt die Tragfähigkeit des eingerammten Pfahles. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass bei jedem Stosse der Pfahl zusammengedrückt wird. Sehen wir zunächst vom letzteren Umstande ab. Sei h die Fallhöhe des Bären, G sein Gewicht, G_1 das des Pfahles, C die Geschwindigkeit mit der der Bär aufschlägt, g die Beschleunigung der Schwere. Es ist dann nach den Gesetzen des Falles

$$c = \sqrt{2gh}.$$

Diese Geschwindigkeit nun wird sich zum Theil dem Pfahle mittheilen, und somit eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit v für Klotz und Pfahl entstehen, so dass man hat:

$$v = \frac{Gc}{G+G_1}.$$

Diese Geschwindigkeit entspricht einer Fallhöhe:

$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{G}{G+G_1}\right)^2 \frac{c^2}{2g} = \left(\frac{G}{G+G_1}\right)^2 h.$$

Sinkt der Pfahl hierbei um die Tiefe s, so ist der Widerstand des Erdreichs und mithin die Tragfähigkeit des Pfahles:

$$P = \frac{v^2}{2gs}(G+G_1) = \frac{h}{s}\,\frac{G^2}{G+G_1}.$$

Es ist hierbei nicht darauf Rücksicht genommen, dass auch das Gewicht des Pfahles und des Rammbären entgegenwirkt. Eigentlich würde man daher haben:

$$P = \frac{h}{s}\,\frac{G}{G+G_1} + (G+G_1),$$

doch ist dies letzte Glied, welches in der Regel sehr klein gegen P ist, zu vernachlässigen. Ist G_1 viel kleiner als G so kann man auch setzen:

$$P = \frac{h}{s}\,G, \quad v = c.$$

Ist der Widerstand P sehr gross, also s unbedeutend, so muss auf die Zusammendrückung des Pfahles s_1 Rücksicht genommen werden. Sind H und H_1 die Härten des Rammbären und des Pfahles, die man der Zusammendrückung umgekehrt proportional annimmt, so ist:

$$2s_1 = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) P$$

und die auf diese Zusammendrückung zu verwendende Arbeit:

$$L = Ps_1 = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2}.$$

Da hierbei die Geschwindigkeit c in Ge-

Digitized by Google

schwindigkeit v umgesetzt wird, so wird die Masse $M = \frac{G}{g}$ die mechanische Arbeit:

$$L = \tfrac{1}{2} M c^2 - \tfrac{1}{2} M v^2 = \frac{c^2 - v^2}{2g}$$

verrichten, und es ist somit:

$$\frac{c^2 - v^2}{2g} G = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2},$$

d. h.

$$v = \sqrt{c^2 - g\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{G}}.$$

Es tritt also erst dann ein Eindringen des Pfahles in den Erdboden ein, wenn man hat:

$$\frac{c^2 G}{g} > \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) P^2.$$

Nach jedem Stosse wird also verbraucht die Arbeit:

$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$ zum Zusammendrücken,

Ps zum Eintreiben des Pfahles um die Tiefe s,

und somit ergibt sich, da $\frac{c^2}{2g} G$ die auf den Stoss verwandte lebendige Kraft ist:

$$\frac{c^2 G}{2g} = Gh = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2} + Ps,$$

und somit die Tragkraft des Pfahles:

$$P = \frac{H H_1}{H + H_1} \sqrt{\frac{(H + H_1) c^2 G}{g H H_1}} - s.$$

Ist $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$ gegen s sehr klein, so kann man in erster Näherung setzen:

$$P = \frac{Gh}{s},$$

eine zweite Näherung erhält man, wenn man diesen Werth für P in das Glied:

$$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P}{2}$$

einsetzt, wo man dann hat:

$$Gh = P\left[s + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{Gh}{2s}\right],$$

also:

$$P = \frac{Gh}{s + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{Gh}{2s}}.$$

Hieraus ergibt sich die Arbeit:

$$Ps = \frac{Gh}{1 + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{Gh}{2s^2}},$$

welche zum Eindringen des Pfahles verwendet wird. Sie nähert sich um so mehr der zum Heben des Rammbären erforderten, je kleiner $\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}$, d. h. je grösser die Härten von Pfahl und Bär sind. — Es dürfen jedoch in der Praxis die Pfähle höchstens mit $\frac{1}{5}$ des durch die Formel gefundenen Widerstandes P belastet werden.

Rammklotz · Rammbär siehe Ramme.

Rampe (angewandte Mechanik) heisst jede schiefe Ebene. Der Ausdruck ist namentlich gebräuchlich bei starken Aufsteigungen bei Eisenbahnen. Für solche Strecken bedient man sich an der Stelle der Lokomotiven stehender Dampfmaschinen. Mittels einer solchen wird ein starkes Seil um eine Trommel gewickelt, und zieht hierbei den daran befestigten Wagenzug mit empor. Um das Seil zu unterstützen, sind längs der ganzen Bahn eiserne Seilscheiben angebracht. Ohne dass die Bewegung des Zuges unterbrochen wird, muss das Seil leicht angehängt und abgelöst werden können. Damit aber beim Weiterfahren die Trommel selbst nicht hinderlich sei, ist dieselbe unterhalb der Erde zu legen. — Steht der ganze Zug auf der horizontalen Bahnstrecke, so wird das Seil ausgehängt, und eine Lokomotive angewendet. Beim Heruntergehen von der Rampe ist durch Bremsen des Zuges und des Korbes die Geschwindigkeit zu verzögern. — Auch kann man die Ueberwucht eines herabgehenden Zuges dazu verwenden, um einen gleichzeitig heraufgehenden zu unterstützen. Es werden die Seile beider Züge, die sich natürlich jeder auf einem besonderen Geleise befinden, in entgegengesetzter Richtung auf den Seilkorb gelegt, so dass sich das eine abwickelt, während das andere aufgewickelt wird. Es kann vorkommen, dass auf einer Eisenbahn grade die schwerbelasteten Züge immer nach einer Richtung und zwar die Rampe abwärts gehen; in diesem Falle braucht man gar keine Dampfmaschine, wenn das Uebergewicht des abwärts gehenden Zuges hinreicht, den aufwärts gehenden in Bewegung zu setzen. Dergleichen Bahnen sind bei Bergwerken namentlich Kohlenbergwerken in Gebrauch, wo sie den Namen „Bremsberge" führen. Hierbei gehen die mit Kohlen

belasteten Wagen bergab und treiben durch ihr Uebergewicht die leeren Wagen bergauf.

Raum. Es möchte schwer, wo nicht unmöglich sein eine genaue Definition des Begriffes „Raum" zu geben.

Bekanntlich fasst Kant Raum und Zeit gar nicht als Begriffe sondern als aprioristische Anschauungen auf, welche ausser uns keine Realität haben. Es kann hier nicht die Absicht sein, diese Kantische Definition zu kritisiren oder überhaupt vom philosophischen Standpunkte aus auf diesen Begriff einzugehen. Es soll eben nur dasjenige entwickelt werden, was für die klare Erkenntniss der geometrischen Begriffe und Sätze dem Räumlichen zu entnehmen ist.

Zu der Vorstellung des Raumes gelangen wir durch die Erfahrung, dass Körper, welche in allen ihren Merkmalen übereinstimmen, doch als von einander getrennt aufzufassen sind; wir sind also gezwungen, etwas sie Unterscheidendes anzunehmen, und nennen dies ihren Raum.

Wir sagen, dass sie einen verschiedenen Raum einnehmen. In dieser Verschiedenheit sind wir aber genöthigt, ein Mehr und ein Minder anzunehmen, indem wir erkennen, dass die räumliche Verschiedenheit zweier Körper *A* und *B* eine geringere sein kann als die zweier andern *C* und *D*. Somit fassen wir den Raum als theilbar und zwar als continuirlich theilbar auf. Da nun die räumliche Verschiedenheit zweier Körper in der Vorstellung sowohl unter alle Grenzen klein und über alle Grenzen gross angenommen werden kann, so sehen wir uns auch genöthigt, dem Raume die Eigenschaft beizulegen, dass er unendlich sei, und auch sich ins Unendliche theilen lasse. Die Erfahrung, dass die räumliche Beziehung zweier Körper nicht immer dieselbe sei, sondern sich ändern könne, führt uns auf den Begriff der Bewegung, d. h. der continuirlichen Raumänderung der Körper. Es wird, beiläufig bemerkt, durch diesen Vorgang auch die Vorstellung der Zeit in uns hervorgebracht. Jedoch ist von diesem, als nicht der Geometrie angehörig, hier ganz abzusehen. Dagegen ist die Bewegung selbst in dieser Wissenschaft nicht zu entbehren, und müssen wir daher auf diesen Begriff noch mit einigen Worten eingehen. Von zwei Körpern, die in allen Merkmalen übereinstimmen und dennoch von einander getrennt, also räumlich verschieden sind, kann man den einen continuirlich sich dem andern angenähert denken, dies folgt aus dem Obigen, und eben diese continuirliche Annäherung fassen wir als Bewegung auf. Es wird der letzte Erfolg einer solchen sein, dass beide Körper denselben Raum einnehmen. Man sagt dann die beiden Körper decken sich. Ohne den Begriff der Bewegung kann man also zu dem für die Geometrie so wichtigen Prinzip der Deckung in keiner Weise gelangen. — Nicht jede zwei Körper können sich decken. Congruent nennt man sie, wenn dies bei ihnen eintreten kann. — Dass es congruente Körper gibt, muss in der Geometrie als Postulat angenommen werden. — Da der Raum bis ins Unendliche theilbar ist, so sehen wir uns genöthigt, unendlich kleine Räume anzunehmen, die wir Punkte nennen. Wir betrachten die Punkte als völlig bestimmungslos und einheitlich. Eine continuirliche Reihe von Punkten, oder, was nach dem Obigen dasselbe ist, das Resultat der Bewegung eines Punktes nennen wir Linie. Eine Linie kann begrenzt sein, oder sich vom Anfangspunkte aus oder nach zwei Richtungen ins Unendliche erstrecken. Im ersten Falle unterscheiden wir namentlich Anfangs- und Endpunkte aus der continuirlichen Punktreihe.

Wir nennen eine Linie geschlossen, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. — Es muss als Erfahrungssatz oder als Postulat betrachtet werden, dass zwischen Anfangspunkt und Endpunkt sich unendlich viel Linien ziehen lassen, hieraus folgt auch, dass ferner von demselben Anfangspunkte aus unendlich viel Linien gezogen werden können, in denen alle Punkte bis auf den ersteren räumlich von einander verschieden sind; endlich folgt hieraus, dass man sich unendlich viel continuirlich aus einander entstehende und räumlich von einander getrennte Linien denken kann. Es kann also auch eine Linie durch Bewegung in unendlich viel Lagen gebracht werden. Die Aneinanderreihung solcher unendlich vieler Linien führt uns auf den Begriff der Fläche.

Wenn wir eine Aneinanderreihung von räumlichen Gegenständen als Ausdehnung bezeichnen, so hat ein Punkt keine, eine Linie eine, eine Fläche zwei Ausdehnungen. Die Möglichkeit einer Aneinanderreihung von Flächen ist Postulat und führt auf den Begriff des Körpers mit drei Ausdehnungen. Dass der Raum nur drei Ausdehnungen hat, also durch Aneinanderreihung von Körpern oder Bewegung eines Körpers immer nur

Digitized by Google

wieder ein Körper entsteht, ist ebenfalls als Postulat zu nehmen, und möchten wohl alle Versuche, diese höchst wichtige Eigenschaft des Raumes aus dem Begriffe der Ausdehnung abzuleiten, vollständig scheitern. — Aus diesen Betrachtungen folgt auch leicht, dass ein Körper von Flächen, eine Fläche von Linien, eine Linie von Punkten begrenzt sei, wogegen der umgekehrte Weg, der in den Anfangsgründen der Geometrie oft eingeschlagen wird, und wonach man Flächen als die Grenzen von Körpern, Linien als die Grenzen von Flächen, Punkte als die Grenzen von Linien definirt, zu weniger genauen Vorstellungen gelangen lässt, namentlich was die Ausdehnungen des Raumes anbetrifft, und möchte unter beiden Wegen der hier eingeschlagene den Vorzug verdienen.

Der Begriff der Congruenz, der oben entwickelt wurde, führt leicht auch zu dem Begriffe der Raumgleichheit. Wir nennen zwei Gebilde (Linien, Flächen, Körper) nämlich raumgleich, wenn deren jedes aus Aneinanderreihung von Stücken entstanden gedacht werden kann, welche entsprechend den Stücken des andern Gebildes congruent und an Anzahl gleich sind, ohne dass hierbei die Anordnung dieselbe zu sein braucht. Auch können diese Stücke gegen das ganze Gebilde unendlich klein gedacht werden (wie z. B. ein Kreis und eine Ellipse raumgleich sein können, beide aber nur dann als aus entsprechend congruenten Dreiecken zusammengesetzt gedacht sein können, wenn man die in der Peripherie liegenden Grundlinien dieser Dreiecke sich unendlich klein denkt). Mit diesen Begriffen und Definitionen kann man sich in der Geometrie begnügen, um darauf die Kenntniss und die Eigenschaften der Raumgrössen zu bauen.

Raumgrösse.

Linien, Flächen und Körper, mit deren Entstehung wir uns im vorigen Artikel beschäftigt haben, sind fähig vermehrt oder vermindert zu werden. Sie sind also Grössen und können also als Raumgrössen bezeichnet werden. Ausser diesen sind auch die Winkel Raumgrössen. Diese vier Arten von Grössen kommen allein in der Geometrie vor.

Es soll hier dasjenige von ihren Eigenschaften entwickelt werden, was zum Beginn des Studiums der Geometrie nothwendig ist. — Sprechen wir zuerst von den Linien. — Die Linien entstanden nicht allein aus der Bewegung eines Punktes, sondern die vorauszusetzenden Eigenschaften des Raumes brachten es auch mit sich, dass die Linien selbst beweglich seien. Bei jeder solchen Bewegung geht eine Linie in eine andere über. Wir können aber bei diesen Uebergängen zwei verschiedene Arten unterscheiden. Entweder die neu entstandene Linie geht aus der alten durch eine Bewegung hervor, in welcher alle Punkte dieselbe Beziehung zu einander behalten wie bei der letztern, also sich nur der absolute Raum, den sie einnimmt ändert; man sagt dann, dass beide Linien sich nur in der Lage unterscheiden, und dass sie sich decken. Oder diese Beziehung ist nicht in allen Punkten dieselbe; man sagt dann, dass die Linien bei der Bewegung eine Formänderung erlitten habe, und beide Linien unterscheiden sich nicht allein durch die Lage, sondern auch durch die Form von einander.

Betrachten wir, von diesem Prinzipe ausgehend, jetzt zwei gegebene Linien A und B. Diese Linien können entweder so beschaffen sein, dass die eine A durch Aenderung der Form und Lage in die andere B übergeht; man sagt dann: „beide Linien sind gleich," — oder ihre Beschaffenheit ist derart, dass dies nicht der Fall ist, und es ist dann selbstverständlich, dass jedenfalls die eine, die A sein möge, durch Aenderung der Form und der Lage in einen Theil von B übergeht, und man sagt dann: „die Linie A ist kleiner als B, B grösser als A." — Leicht ersichtlich ist es hiernach, was es heisse B sei 2, 3 mal so gross als A, wenn man überlegt, dass auch durch Aenderung der Form und Lage A in den noch übrig bleibenden Theil der Linie B übergehen kann, in welchem Falle B 2 mal so gross ist als A u. s. w. Es kann also jede Linie als Maass einer andern betrachtet, und somit jede Linie gemessen werden. Unter den Linien sind namentlich die graden Linien hervorzuheben. Für grade Linien hat man verschiedene Definitionen. Die beiden gebräuchlichsten sind: — 1) die grade Linie ist eine solche, welche in allen ihren Theilen dieselbe Richtung hat, — 2) die grade Linie ist die kürzeste zwischen 2 Punkten. Gegen die erste Definition möchte einzuwenden sein, dass eben der Begriff der Richtung erst durch den der graden Linie in uns entsteht, d. h. dass wir eben 2 Linien gleich gerichtet nennen, wenn sie in einer graden liegen. (Man müsste dann den parallelen Linien, wie allerdings oft geschieht, auch gleiche Richtung zuschreiben, was jedenfalls, wenn man die Sache genau über-

Digitized by Google

legt, der Auseinandersetzung etwas Vages und schwer zu Verdeutlichendes gibt). Was die zweite Definition anbetrifft, so lässt sich gewiss Nichts gegen ihre Richtigkeit einwenden, jedoch will es uns scheinen, dass diese Erklärung wenig geeignet sei, gewisse Eigenschaften der Graden daraus zu entwickeln, die man doch sehr nöthig in den Elementen der Geometrie braucht, z. B. schon den Satz, dass zwischen 2 Punkten nur eine grade Linie möglich sei. Wir halten es daher für besser, von den oben gegebenen Betrachtungen ausgehend auf eine andere Art zur Definition der graden Linie zu gelangen.

Denke man sich eine beliebige Linie in ihren beiden Endpunkten fest, so kann im Allgemeinen nach dem Vorigen nichts destoweniger dieselbe ihre Lage, zugleich aber auch muss dieselbe ihre Form ändern. Ist nun eine Linie so beschaffen, dass sie zwischen ihren Endpunkten nur eine einzige Lage annehmen kann, so soll sie eine grade heissen. — Es soll gezeigt werden, dass aus dieser Definition die andern Eigenschaften der graden Linie sehr leicht hervorgehen.

Sätze von graden Linien.

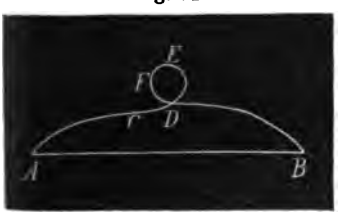
I. Jeder Theil einer graden Linie ist wieder eine solche.

Denn könnte ein Theil *a* der graden Linie *A* zwischen seinen Endpunkten seine Lage ändern, so geschähe dies gleichzeitig auch mit der ganzen Linie *A*.

II. Die grade Linie ist kleiner als jede andere zwischen ihren Endpunkten.

Denn angenommen, es liesse sich zwischen den Punkten *AB* (Fig 74) ausser,

Fig. 74.



der Graden *AB* noch eine zweite nicht grössere Linie *ADB* zeichnen, so wäre letztere entweder gleich *AB*, und es müsste diese durch Formänderung in *ADB* übergehen können, was der Definitton der graden widerspricht, oder es wäre *ADB* kleiner als *AB*, so könnte erstere durch Hinzufügung einer Ausbiegung *DEFD*, in eine Linie *ADEFDB* verwandelt werden, welche gleich *AB* wäre, was also auch unmöglich ist. Hieraus folgt sogleich:

III. Zwischen zwei Punkten ist nur eine Grade möglich.

Denn wären *AB* und *ADB* beide grade, so wären sie beide die kürzesten zwischen *A* und *B* also gleich gross, was dem vorigen Satze widerspricht.

IV. Zwei grade Linien decken sich ganz oder theilweise.

Denn immer können sie so auf einander gelegt werden, dass die Endpunkte der kleineren mit zwei Punkten der grösseren zusammenfallen, und da zwischen diesen Punkten dann nur eine Grade möglich ist, so findet Deckung statt.

Indess hat diese Definition der graden Linie auch ihre schwache Stelle. Es ist die, dass vorausgesetzt werden muss, es gebe immer zwischen zwei Punkten wirklich eine Grade. Ueberhaupt ist es unmöglich, dergleichen Voraussetzungen in den Anfängen der Raumlehre zu vermeiden. Wir nehmen nämlich in der Anschauung des Raumes gewisse Eigenschaften desselben zugleich in uns auf, welche eben als vorhanden betrachtet werden müssen, und die man nicht weiter begründen kann, so die Möglichkeit der 3 Dimensionen, der Beweglichkeit der Raumgrössen, des Vorhandenseins der graden Linien u. s. w.

„Jede nicht grade Linien nennen wir krumm, gebrochen, gemischt, je nachdem entweder kein Theil eine grade bildet, oder sie nur aus Graden besteht, oder zum Theil Ersteres zum Theil Letzteres eintritt."

Wie unter den Linien die grade, so ist unter den Flächen die ebene Fläche oder Ebene hervorzuheben.

Die gewöhnliche Definition der Ebene: „Sie ist eine solche Fläche, in welcher sich zwischen jeden zwei Punkten eine grade Linie ziehen lasse", muss als die beste anerkannt werden, und lässt sich wohl jede andere Definition auf diese zurückführen. Ihre schwache Stelle ist eben nur die unvermeidliche, dass sie das Vorhandensein einer Fläche von der bezeichneten Eigenschaft ohne Weiteres voraussetzt. Von den Grundeigenschaften der Ebene gehören hierher nur die Folgenden:

I. „Durch eine grade Linie lassen sich unendlich viel Ebenen legen."

Es ist nämlich möglich, eine Ebene so zu bewegen, dass eine Linie in ihr der Lage nach unverändert bleibt, und nimmt die Ebene hierbei unendlich viel Stellungen an.

Digitized by Google

II. Durch eine grade Linie und einen Punkt, der nicht in ersterer liegt, (oder was dasselbe ist, durch drei Punkte, die nicht in einer Graden liegen) lässt sich stets eine und nur eine Ebene legen.

Bei der eben beschriebenen Bewegung muss die Ebene nämlich einmal in eine Lage kommen, wo sie einen beliebigen Punkt in sich aufnimmt. Selbstverständlich sind diese Auseinandersetzungen in I. und II. nicht als Beweise zu betrachten. Sie geben eben nur diejenigen Eigenschaften des Raumes, welche man in den Anfängen der Raumlehre mit Bezug auf die Ebene voraussetzen muss.

Jede nicht ebene Fläche heisst krumm. (Man kann auch gebrochene und gemischte Flächen, welche ähnlich wie die entsprechenden Linien zu definiren sind, von den krummen absondern.)

Eine neue Art der Raumgrössen ist der Winkel. Wir sprechen hier nur von Winkeln zwischen Linien. Winkel zwischen Ebenen und Winkel zwischen einer Linie und einer Ebene werden in der Körperlehre oder Stereometrie auf Winkel zwischen Linien zurückgeführt.

Von der gewöhnlichen Definition der Winkel: „Ein Winkel ist der Unterschied in der Richtung zweier Linien", glauben wir als einer nicht klaren absehen zu müssen. Eben durch den Winkel den zwei Linien machen, kommt uns zum Bewusstsein, dass sie ungleich gerichtet sind. Wir messen den Unterschied ihrer Richtung eben durch den Winkel, welchen sie machen, und ist uns nicht einleuchtend, wie man ohne diese Messung vorher vornehmen zu können, von einem grössern oder kleineren Unterschied der Richtung sprechen will. Ueberhaupt scheint es nothwendig bei der Definition der Winkel die Ebene zu Hülfe zu nehmen. Man kann nämlich einen Winkel nur messen oder theilen, wenn man zwischen seinen Schenkeln und zwar in deren Ebene sich andere Linien gezogen denkt, so dass nothwendig die Ebene eine Stelle in der Definition des Winkels finden muss. Um eine solche zu geben, scheinen uns folgende Betrachtungen nöthig zu sein.

I. Eine grade Linie kann ihre Lage derart verändern und zwar auf unendlich viel Arten, dass sie in einer Ebene bleibt und ein Punkt derselben A seine Lage nicht ändert.

II. Setzt man diese entsprechende Bewegung der Graden in dieser Weise fort, so kommt die grade Linie schliesslich in ihre frühere Lage zurück.

Das Letztere muss als Voraussetzung angenommen werden, und lässt sich nicht beweisen, sondern führt immer auf die Anschauungen, welche uns mit dem Raume zugleich gegeben sind, zurück.

Bei dieser Aenderung der Lage denkt man sich die Grade vom festen Punkte A aus nach einer Richtung ins Unendliche verlängert; die Bahn, welche die Grade bei einer solchen Bewegung beschreibt, nennen wir Winkel.

Ein Winkel lässt sich also auch definiren als ein Theil einer Ebene, welcher begrenzt ist von zwei Graden, die sich in einem Punkte A schneiden, und von diesem aus nach einer Richtung hin ins Unendliche verlängert gedacht werden. Der Punkt A heisst Spitze oder Scheitelpunkt, während die begrenzenden Linien Schenkel genannt werden. Ein Winkel ist also nicht vollständig begrenzt.

„Wird die Bewegung der Linie so lange fortgesetzt, bis sie in ihre frühere Lage zurückfällt, so nennen wir den entstehenden Winkel einen vollen." — Dass Winkel Grössen sind, wird bewiesen, wenn man zeigt, dass dieselben der Messung fähig sind, und kann dies auf folgende Weise geschehen.

Zwei Winkel P und Q können offenbar so auf einander gelegt werden, dass je ein Schenkel und die Scheitelpunkte zusammenfallen. Decken sich hierbei auch die andern Schenkel so werden die Winkel gleich genannt. Geschieht dies nicht, so wird der eine Winkel P den andern Schenkel des Winkels Q in sich enthalten und man sagt dann: Winkel P sei grösser als Q. In diesem Falle ist ein Theil von P gleich Q. Sonach lässt sich jeder Winkel theilen, indem man vom Scheitelpunkte aus Linien zwischen seinen Schenkeln gezogen denkt. Es ist somit auch klar, was die Hälfte, der vierte Theil u. s. w. eines Winkels sei. Zu dem Folgenden ist ein Satz, der an sich klar ist, nöthig:

I. Zwei volle Winkel sind gleich.

Es fallen nämlich die beiden Schenkel eines jeden von ihnen zusammen, und somit decken sich dieselben, da ja jede zwei Graden sich decken.

Es ergeben sich hieraus folgende Definitionen:

„Die Hälfte eines vollen Winkels heisst gestreckter, die Hälfte eines gestreckten rechter Winkel. Jeder Winkel, der kleiner als ein rechter ist, spitzer, der grösser als ein rechter und kleiner als ein gestreckter ist, stumpfer, jeder der grösser als ein stumpfer und kleiner als ein voller Winkel ist, erhabener oder con-

Digitized by Google

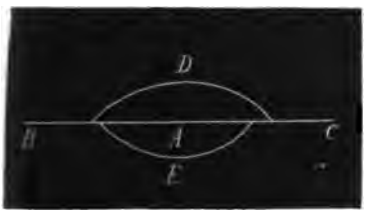
vexer Winkel, während jeder, welcher kleiner als ein gestreckter ist, als hohler oder concaver Winkel bezeichnet wird."

Aus Satz I. folgt dann augenblicklich:

II. Jede zwei gestreckten Winkel sind gleich. — Jede zwei rechten Winkel sind gleich. — Ausserdem lässt sich leicht der folgende Satz beweisen:

III. Die Schenkel eines gestreckten Winkels bilden eine grade Linie. Denn bewegt man die grade Linie *BA* (Fig. 75) so in ihrer Ebene, dass *A* festbleibt und so lange, dass sie in die Lage *AC* kommt, die mit *B* in einer Graden liegt, und setzt die Bewegung fort bis *BA* in ihre frühere Lage kommt, so ist Winkel *BAB* in zwei andere *BDAC* und *CEAB*

Fig. 75.



getheilt. Diese sind gleich, denn die Graden *BDAC* und *BEAC* decken sich, und folglich auch die Winkel. Jeder derselben ist also die Hälfte des vollen und mithin ein gestreckter Winkel.

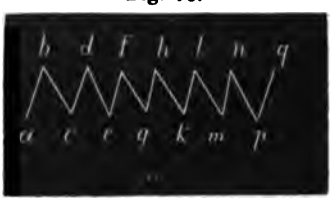
Hieran ist noch die Definition zu knüpfen: „Wenn man einen gestreckten Winkel in zwei Theile theilt, so heissen dieselben Nebenwinkel." Und hieraus folgt dann sogleich:

IV. Zwei Nebenwinkel sind entweder beide rechte, oder der eine ein spitzer der andere ein stumpfer. Immer aber betragen sie zusammen einen gestreckten oder zwei rechte Winkel.

Mit diesen Definitionen und Sätzen wäre dass für die Anfangsgründe der Geometrie in Bezug auf die Raumgrössen Nothwendige gegeben. Es sind aber hieran noch einige Erläuterungen zu knüpfen, die namentlich Schwierigkeiten begegnen sollen, welche in den höhern Theilen der Geometrie oftmals entgegentreten.

In dem man die grade Linie gleichsam als das erste Element und als diejenige betrachtet, auf welche man alle Linien zurückführen kann, sieht man sich in der Theorie der krummen Linien veranlasst zu der Annahme, dass jede solche Linie in ihren kleinsten Theilen sich der graden annähere, derart nämlich, dass ein sehr kleiner Theil einer krummen Linie um so näher einer graden komme, als ihre Grösse abnimmt, und schliesslich mit derselben zu identificiren sei. Nur in einzelnen Punkten einer jeden Linie kann von dieser Regel Abweichung stattfinden. In den sogenannten Spitzen der krummen Linien wird derjenige Theil derselben, welcher von zwei Punkten begrenzt wird, die auf beiden Seiten der Spitze liegen, nie einer graden gleich zu setzen sei, so sehr man diese Punkte auch der letztern näher rücken lasse. Diese Betrachtungen setzen auch voraus, dass je zwei nächste Stücke einer beliebigen Linie, also solche die man jedes als grade betrachten kann einen Winkel mit einander machen, welcher nur um unendlich wenig von einem gestreckten Winkel abweichen kann; denn da sich die Richtung dieser Stücke gegen einander bis auf jede Grenze der einer Graden annähern muss, wie eben gezeigt wurde, muss diese Richtung einem gestreckten Winkel entsprechen. Ausnahmen können nur in einzelnen Punkten stattfinden, und dies sind eben bei krummen Linien die Spitzen, bei gebrochenen Linien aber die Endpunkte. Da nun in der Erklärung einer Linie als eine Aneinanderreihung von Punkten oder als die Bahn eines bewegten Punktes von solchen Beschränkungen Nichts enthalten ist, so sind dieselben anderweitig zu begründen. An sich nämlich kann man z. B. in der gebrochenen Linie *abcdefghklmnpq* (Fig. 76), die man sich

Fig. 76.



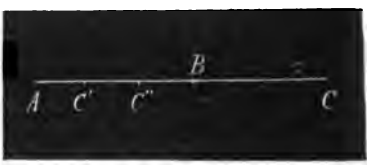
jedenfalls als Bahn eines Punktes denken kann, die einzelnen graden Stücke *ab*, *bc* u. s. w. so aneinander rücken lassen, dass sämmtliche Winkel *bcd* u. s. w. immer kleiner werden, und man wird dabei immer noch annehmen können, dass die gebrochene Linie die Bahn eines Punktes bleibe. Wenn sich aber die Anzahl der Strecken dabei ins Unendliche vermehrt, so stellt die so gebildete Bahn gleichzeitig einen Theil der Ebene vor, was doch dem Wesen einer Linie zu widersprechen scheint. Dergleichen Bahnen, möge man sie nun als Linien bezeichnen oder nicht, müssen also in den

geometrischen Betrachtungen ausgeschlossen werden. Von der Nothwendigkeit dieser Ausschliessung überzeugt man sich wohl am leichtesten auf folgende Weise. Jede Linie, die in der Geometrie betrachtet wird, muss durch irgend ein Gesetz gegeben sein, welches man auf eine Bewegung zurückführen kann. Jede Bewegung aber lässt sich schliesslich zurückführen auf fortschreitende und drehende Bewegungen. Die ersteren geben grade Linien, die letzteren Kreise. Ist nun das Bewegungsgesetz zugleich, einzelne Punkte höchstens ausgenommen, ein Continuirliches, wie dies ja sein muss, da sich sonst nicht ein allgemeiner Ausdruck für dasselbe finden liesse, so muss die Linie durch Aneinanderreihung continuirlich aus einander entstehender graden Linien und Kreise sich bilden lassen, und kommt es dann eben nur darauf an, zu zeigen, dass die Theile einer Kreislinie sich einer graden annähern, wenn sie an Grösse abnehmen. Dies aber hat keinerlei Schwierigkeit und wird in dem die Kreislinie behandelnden Theil der Raumlehre ausgeführt. Eben so einfach ergibt sich dies Prinzip, wenn man annimmt, dass die Curven nur der Betrachtung unterliegen, welche durch eine Gleichung zwischen gradlinigen Coordinaten (siehe den Artikel: „analytische Geometrie") gegeben sind. Da die grade Linie selbst eine lineare Gleichung zwischen den Coordinaten voraussetzt, jede beliebige Gleichung, welche y als Function von x gibt, aber als linear betrachtet werden kann, wenn x und y unendlich klein sind (es folgt dies nämlich aus den Grundsätzen der Differenzialrechnung oder dem Taylorschen Satze. Vergleiche den Artikel: Quantitäten), einzelne Werthe von y höchstens ausgenommen, so folgt die Eigenschaft der krummen Linien, sich continuirlich an grade anzuschliessen, einfach aus dem Continuitätsprinzipe. Wir fügen hier noch hinzu, dass Aehnliches von den krummen Flächen in ihrem Verhältniss zu den Ebenen gilt, und in gleicher Weise zu entwickeln ist. Die Ausführung dieser Betrachtungen, welche geometrische Kenntnisse voraussetzt, bleibt indessen den Artikeln: Rectification, Tangente überlassen.

Raumgrössen (positive und negative).

Die Berücksichtigung der Vorzeichen bei Raumgrössen ist bekanntlich von grosser Wichtigkeit. Sie macht es möglich Resultate, die durch Rechnung sich auffinden lassen, in aller Allgemeinheit durch eine einzige Formel zu geben, welche sonst in eine Anzahl, oft in eine sehr grosse Anzahl, einzelner Fälle auseinanderfallen, und einen ganz besonderen Aufwand von Rechnung nothwendig machen würde. — Jedoch ist die Richtigkeit von dergleichen Betrachtungen um so mehr zu begründen, als sie vielen Geometern derartige Schwierigkeiten zu machen scheinen, dass man sehr ausführlicher Auseinandersetzungen zu deren Ueberwindung für nothwendig gehalten hat, wie dies z. B. in Carnots: *Géometrie de position* durch lange Betrachtungen geschehen ist, welche die Berücksichtigung der Vorzeichen ersetzen sollen. — Gehen wir beispielsweise von Linien aus, so möchte allerdings feststehen, dass eine begrenzte Linie an sich weder positiv noch negativ sei, wie auch ihre Lage beschaffen sei. Zwischen den Theilen der Linie AC, BC' und BC (Fig. 77)

Fig. 77.



macht sich durchaus kein Gegensatz geltend, und was die Linien BC und CB anbetrifft, so sind ja diese vollständig identisch, und um so weniger hier ein Gegensatz vorhanden. Letzterer aber tritt ein, wenn wir die Linie als Entfernung des Anfangspunktes vom Endpunkte oder wie wir uns hier ausdrücken wollen, um einen auch auf Flächen und Körper übertragbaren Ausdruck zu haben, als ihren Zwischenraum betrachten. Wir wollen dies hier etwas genauer zu begründen suchen.

I. Unter Zwischenraum zweier Punkte A und B, welche auf einer gegebenen (graden oder krummen) Linie liegen, verstehen wir den zwischen ihnen befindlichen Theil dieser Linie mit der Maassgabe, dass der Zwischenraum zugleich angibt, welchen Punkt man als Anfangspunkt und welchen als Endpunkt desselben betrachtet. Es sind also die Zwischenräume AB und BA nicht identisch, da der erstere die von A nach B führende Strecke, der letztere die von B nach A führende angeben soll.

II. Die Zwischenräume zweier Punkte auf Linie AC sind entweder gleich gerichtet mit AB oder mit BA, z. B. AC',

$C'B$, BC, denn hier ist immer vom Anfangspunkte aus nach derselben Richtung wie von A nach B vorzuschreiten, um zum Endpunkte zu gelangen, oder sie sind gleich gerichtet mit BA, wie BC', CB. Ausser diesen beiden Richtungen gibt es keine weiteren.

III. Der Zwischenraum zweier beliebigen Punkte A und B lässt sich als Summe anderer gleichgerichteter Zwischenräume ausdrücken, z. B.:

$$AB = AC' + C'B = AC' + C'C'' + C''B \ldots$$

wenn C', C'' ... beliebige Punkte sind, die zwischen A und B liegen.

IV. Der Zwischenraum zweier Punkte A und B lässt sich als Differenz von zwei Zwischenräumen $AC - BC$ ausdrücken, wenn C ein beliebiger nicht auf der Strecke AB liegender Punkt ist, also der Zwischenraum CB und BA gleich gerichtet ist. Unterscheidet man nun die beiden Richtungen, welchen Zwischenräume haben können, durch das Vorzeichen, nimmt also an, dass unter $-AB$ immer die Strecke BA, unter $-BA$ die Strecke AB verstanden werde, so ist:

$$BC = -CB,$$

also:

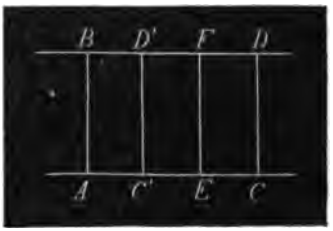
$$AB = AC + CB.$$

Es war vorhin $AB = AC' + C'B$ und die in III. und IV. gegebenen Sätze lassen sich somit in folgenden enger zusammenfassen.

V. Wenn man alle mit AB gleich gerichteten Zwischenräume als positiv, alle mit BA gleich gerichteten als negativ betrachtet, so ist der Zwischenraum zweier Punkte A und B gleich der Summe aller Zwischenräume von A und C, C und C', C' und C'' ... $C^{(n)}$ und B, wo C' und C'' ... $C^{(n)}$ beliebige Punkte auf der nach beiden Seiten unendlich zu denkenden Linie AB sind.

Es ist namentlich die Entfernung des Punktes gleich $AB - AB = 0$ oder auch gleich $AB + BA$. Diese Gleichung zeigt, dass sich Zwischenräume aufheben können. — Da nun in der Arithmetik, (siehe den Artikel: Quantität) eine negative Grösse $-a$ als eine solche definirt wird, welche zu a addirt Null gibt, so zeigt sich, dass man bei allen Rechnungen, denen Linien unterworfen werden können, die bekannten Regeln des Rechnens mit positiven und negativen Zahlen anwenden kann, in der Voraussetzung, dass die Vorzeichen, die Richtung der Zwischenräume andeuten. Das Gesagte lässt sich nun ohne Weiteres auf andere Raumgrössen (Flächen, Körper, Winkel) übertragen. Wir geben daher nur ein Beispiel. Seien AC, BD (Fig. 78) zwei be-

Fig. 78.



liebige ins Unendliche sich erstreckende Linien, BA, EF zwei andere, welche dieselben schneiden, so ist: $BAEF$, d. h. das von BA und EF, BD und AC begrenzte Viereck, der Zwischenraum zwischen AB und CD zu unterscheiden von $EFAB$. Im erstern Falle ist nämlich BA die Anfangsbegrenzung, im letztern Falle EF und immer ist:

$$BAEF = BAC'D' + C'D'EF$$

und

$$BAEF = BACD - EFCD,$$

zwei Gleichungen, die auf eine gemeinschaftliche Form zurückkommen, wenn man setzt: $EFCD = -CDEF$, so dass diese Voraussetzung das Rechnen mit negativen Grössen auch für Flächen rechtfertigt.

Raumlehre (Geometrie).

1) Einleitung.

Raumlehre oder Geometrie ist bekanntlich derjenige Theil der Grössenlehre (Mathematik), welcher sich mit den Raumgrössen beschäftigt.

Sie muss insofern als die älteste der mathemathischen Wissenschaften betrachtet werden, als sie zuerst zu einem völlig geordneten Zusammenhange (System) verbunden ist. Es ist ein solches geometrisches System zuerst von Euklid bearbeitet worden, und ist im Wesentlichen seine Art des Vortrags, namentlich was die Elemente anbetrifft, noch jetzt beibehalten worden, ohne dass jedoch anzunehmen ist, dass alle in Euklids Werke vorhandenen Sätze, Aufgaben u.s.w. ihrem Inhalte oder ihrer Form nach auch von ihm herrühren. Vielmehr haben Jahrhunderte vor ihm schon bedeutende Geometer die Wissenschaft mit ihren Entdeckungen bereichert, jedoch ist Euklid hier ergänzend, berichtigend und verbindend eingetreten, und somit ist er, was den geometrischen Vortrag in Form

Digitized by Google

eines Systems anbetrifft, als dessen Urheber zu betrachten.

Was die Euklidische Methode anbetrifft, welche auch in den übrigen mathematischen Wissenschaften nachgeahmt worden ist, so darf sie nicht mit der mathemathischen Methode überhaupt identificirt werden. Wenn die letztere darin besteht, dass jede vorgetragene Wahrheit in strenger Weise und in deductiver Auseinandersetzung auf Früheres zurückzuführen ist, so pflegt man unter Euklidischer Methode die eigenthümliche äussere Form, deren sich aus guten Gründen Euklid hierbei bediente, zu verstehen. Es wird die Euklidische Methode auch oft als geometrische Methode bezeichnet, und auch sie ist mit mehr oder weniger Glück auf verschiedene Wissenschaften nicht bloss mathematische, sondern auch philosophische, selbst technische übertragen worden. Das Wesen dieser Methode lässt sich wohl in kurzer Weise so definiren: „dass die einzelnen Wahrheiten aus denen das System besteht, nicht in fortlaufendem Vortrage gegeben werden, sondern in viele kleine Theile, die immer der Form nach in gewisser Weise ein Ganzes bilden, und jeder eine Wahrheit enthalten, aus einander fallen." Ein solcher Theil ist entweder ein Lehrsatz (Theorem), wenn er eine neue bemerkenswerthe Eigenschaft der Grössen, von welchen die Wissenschaft handelt, mittheilt, oder eine Aufgabe (Problem), wenn es darauf ankommt, die schon gegebenen Wahrheiten und Erkenntnisse zur Erreichung gewisser Zwecke zu verwenden.

Der Lehrsatz verlangt stets einen Beweis, die Aufgabe eine Auflösung, und letztere wieder einen Beweis. Beide letztere sind derart aus einander zu halten, dass die Auflösung eben die Mittel giebt, welche zur Erreichung des Zweckes nothwendig sind, und alle Begründung des Verfahrens dem Beweise überlassen bleibt.

Was die Beweise anbetrifft, so gibt es von denselben zwei Hauptarten, den directen und den indirecten. Der erstere geht von irgend einem passenden Anfangspunkte aus, und führt uns auf deductivem Wege allmälig zur Richtigkeit des in Rede stehenden Satzes, der letztere setzt das Gegentheil des zu beweisenden Satzes voraus, und zeigt dann aus früheren Sätzen, dass diese Annahme zu einem Widerspruche führt. — Der indirecte Beweis also verlangt jedenfalls, dass der zu beweisende Satz zuerst genannt werde. Der directe Beweis kann seiner Natur nach vor dem Beweise genannt werden, oder zuletzt als Resultat der Constructionen und Deductionen gegeben werden. In der Euklidischen Methode wird immer der erstere Weg gewählt. In neueren Lehrbüchern geht man hiervon zuweilen ab (jedoch ist auch im Euklid die Möglichkeit hierzu durch die Form des Scholion gegeben). Die Reihenfolge, welche Euklid befolgt, ist dann immer die beste, wenn der Beweis complicirt ist, Aufwand an Construction und Anknüpfung an verschiedene Sätze, die vorher gegeben sind, erfordert. Es bildet bei alle diesem der vorher angeführte Satz gewissermaassen das natürliche Band, zu dem als Zielpunkt diese Beweismittel hinstreben, welche ohne Kenntniss dieses Zweckes als zufällig und in der Luft schwebend erscheinen würden. Ist dagegen der Beweis nur einfach und knüpft auf ungezwungene Weise an vorhandene Sätze sich an, so ist es vielleicht besser, wie ja auch jetzt namentlich in den höhern Theilen der Geometrie und Mathematik im Allgemeinen häufig geschieht — die Beweismittel in Form einer Betrachtung an den vorher gegebenen Satz, auf welchen sich der neue stützt, anzuknüpfen und dann eben diesen neuen Satz folgen zu lassen. Es gelingt so namentlich auch oft, in kürzerer Weise mehrere Sätze durch dieselben Beweismittel abzuleiten.

Man kann also sagen, dass von der Euklidischen Methode desto mehr abgegangen werden muss, je mehr das System an Einfachheit und Natürlichkeit mit dem Fortschreiten der Wissenschaft gewinnt. — Erforderniss eines guten Beweises ist möglichste, Kürze und Durchsichtigkeit. Es wird dies namentlich erreicht durch passende Aufeinanderfolge der Sätze, die Beziehung auf mehrere schon gegebene kürzt oft den Vortrag sehr ab.

Was dagegen die Auflösungen der Probleme anbetrifft, so ist bei einer guten Auflösung nicht allein erforderlich, dass dieselbe sich kurz mittheilen, sondern, dass sie sich auch in möglichster Kürze ausführen lasse. Letzteres ist nun nicht der Fall, wenn man dieselbe auf Lösung mehrerer früheren Aufgaben zurückführt, da ja jede eine neue Construction nöthig macht, und es oft möglich ist, besondere Erleichterungen einzuführen, wenn man diese als ein Ganzes zusammenfasst. Es werden dann nämlich gewisse Linien, welche eine Construction erfordert, in einer vorangegangenen schon gegeben sein können. Billig sollte also eine Auflösung sich bestreben,

dies anzugeben, und so zu zeigen, wie das beabsichtigte Ziel am einfachsten sich erreichen lasse. Selbstverständlich muss die Aufgabe immer vor der Auflösung genannt sein. Dagegen kann man statt der letztern den Beweis folgen zu lassen, derselben eine Betrachtung voranschicken, welche schrittweise zur Erreichung des Zieles führt. Dergleichen Betrachtungen machen sich oft sehr bequem, wenn man die Aufgabe als bereits gelöst annimmt, und von diesem Ziele zurückgehend Beziehungen zwischen denjenigen Grössen, welche gesucht sind, zu denen ermittelt, welche sich zu einer Lösung verbinden lassen. Dies Verfahren bezeichnen die griechischen Mathematiker als geometrische Analyse. Sie ist dem Verfahren in der Algebra zu vergleichen, wo die unbekannten Grössen ebenfalls als bekannt angenommen werden, und man von ihnen ausgehend die Lösung zu erreichen sucht. Gewissermaassen durch Umkehrung der Analyse folgt dann die Auflösung. Wenn die alten derselben noch einen Beweis folgen lassen, so ist dies streng genommen überflüssig, da die Analyse ja schon die Auflösung begründen muss.

An die Haupttheile des Systems: Lehrsatz und Aufgabe knüpfen sich nun nachfolgende Nebenglieder im Euklidischen Systeme.

Das Axiom oder der Grundsatz, ein Satz, der keines Beweises bedarf oder keines Beweises fähig ist. Dasselbe ist der Fall bei den einfachen Wahrheiten, welche den Anfängen der Mathematik oder im besondern der Geometrie zu Grunde liegen. Dergleichen Grundsätze sind z. B. die:

„Der Raum hat 3 Dimensionen."

„Zwischen zwei Punkten ist eine Grade immer möglich."

Gewöhnlich rechnet man auch dazu die rein logischen Sätze von der Gleichheit, die in der Mathematik so oft Anwendung finden.

Zwei Grössen, die einer dritten gleich sind, werden unter einander gleich sein.

Das Ganze ist gleich der Summe seiner Theile.

Gleiches zu Gleichem gezählt, oder von solchem abgezogen gibt gleiches.

Indessen mag man dieselben einfach aus der Definition der Gleicheit ableiten können:

„Zwei Grössen werden gleich genannt, wenn man die eine für die andere setzen kann."

Zuweilen zweigt man von den Axiomen auch ab:

Das Postulat. Man versteht unter demselben die geforderte Auflösung oder Möglichkeit der Auflösung einer einfachen Aufgabe.

Es ist also z. B. Postulat:

„Zwischen zwei Punkten eine Grade zu ziehen."

und setzt dieselbe das Axiom, dass solche Grade immer möglich sei, voraus. Von den Lehrsätzen zweigt man noch ab:

Den Zusatz (Corollarium), ein einfacher Satz, der augenblicklich aus einem Lehrsatze folgt.

Den Lehnsatz (Lemma), ein einem andern als dem grade behandelten Gebiete entnommener Satz, welcher zur Lösung einer Aufgabe nöthig ist.

Für Lehrsatz, Lehnsatz und Aufgabe hat man auch den gemeinschaftlichen Namen: Proposition.

Zu diesen Theilen kommt noch:

Das Scholion, eine Betrachtung irgend einer Art, also z. B. eine Erweiterung oder eine Beschränkung, welche sich an irgend einen Satz knüpft.

Die Euklidische Methode in den hier gegebenen Sätzen ist also als etwas rein Aeusserliches zu betrachten, und bezieht sich eben nur auf die Art, wie die geometrischen Wahrheiten und ihre Begründung mit einander verbunden werden, namentlich auf die Reihenfolge. — Indessen muss auch die ganze Art und Weise der Ableitung, deren sich Euklid bedient, in ihrer innern Beziehung aufgefasst und von andern Methoden unterschieden werden. Man bezeichnet hierbei die Euklidische Weise als synthetische Geometrie und setzt ihr entgegen die analytische Geometrie, als deren Begründer Descartes anzusehen ist. — Der Unterschied zwischen beiden Methoden ist folgender.

Die synthetische Geometrie gewinnt ihre Resultate hauptsächlich durch Betrachtungen, welche an die Raumgrössen als solche anknüpfen, also aus den Begriffen der Deckung und Aehnlichkeit, während die analytische Geometrie nur weniges den Raumgrössen als solchen entnimmt, und ihre Eigenschaften so viel als möglich auf Sätze zurückführt, die der allgemeinen Grössenlehre (Arithmetik, Algebra) entnommen sind. Es geschieht dies (wie zu seiner Zeit weiter ausgeführt werden soll), indem Linien und Flächen als eine Reihe von Punkten betrachtet werden, die man durch ihre Entfernung von oder sonstige Beziehung zu gewissen als unveränderlich betrach-

teten Linien oder andern Raumgrössen definirt. Der Zusammenhang zwischen allen Punkten, welche eine Linie oder Fläche bilden, ist dann durch eine Gleichung gegeben, und Aufgabe der analytischen Geometrie ist es dann, aus dieser Gleichung alle Eigenschaften des betreffenden Raumgebildes abzuleiten. — Beide Methoden bieten sich oft einander ergänzend und erläuternd die Hand. Selbstverständlich ist eine analytische Geometrie ohne die Anfangsgründe der synthetischen undenkbar. Im Uebrigen ist die erstere der letzteren an Fülle der Resultate, an Allgemeinheit derselben und an Einfachheit der Methoden unverhältnissmässig überlegen.

Dagegen führt die synthetische Geometrie, was einzelne Probleme anbetrifft, oft auf kürzerem Wege zum Ziel und zu einfacheren Resultaten. Der Grund ist der, dass bei der analytischen Geometrie der Ausgangspunkt ein gegebener ist, während in der synthetischen derselbe beliebig genommen werden kann. Ersteres erleichtert allerdings das Angreifen einer Aufgabe, und macht die Verallgemeinerung derselben leicht möglich, während die Einfachheit des Resultats in irgend einem einzelnen Falle durch passende Ausgangspunkte, wie sie die synthetische Geometrie freistellt, gefördert werden kann. — Viele neuere, sogenannte analytische Methoden sind in Wahrheit als gemischte zu bezeichnen, und in der That gelingt es auf diesem Wege, sich bis zu einem gewissen Grade der Vortheile beider Hauptmethoden zu bemächtigen. —

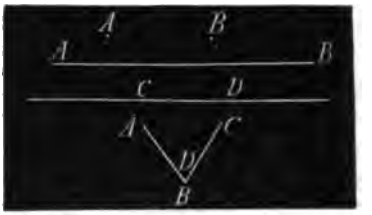
Die zunächst folgenden Abschnitte dieses Artikels sind bestimmt, die Anfangsgründe der Raumlehre auf möglichst kurzem Wege abzuleiten. Wir beginnen mit der ebenen Geometrie, um daran die Geometrie im Raume zu knüpfen.

Was die Definitionen anbetrifft, so beziehen wir uns dabei auf das im Artikel: Raumgrösse Gesagte.

2) Von graden Linien und Winkeln in der Ebene.

I. Bezeichnungen. Ein Punkt wird durch einen Buchstaben bezeichnet, *A*, *B* (Fig. 79). Eine grade Linie durch zwei, die sich an ihren Endpunkten derselben befinden, wenn die Linie begrenzt ist, (*AB*) oder an zwei beliebigen Punkten derselben (*CD*), wenn sie unbegrenzt gedacht ist. — Die Bezeichnung eines Winkels ist eine doppelte. Er wird durch drei Buchstaben bezeichnet (*ABC*, *CBA*) wovon sich zwei auf den Schenkeln, der

Fig. 79.



dritte am Scheitelpunkte befindet, welchen man beim Schreiben immer in die Mitte setzt, oder durch einen Buchstaben *D*, der innerhalb des Winkelraums gesetzt wird. Ist kein Missverständniss zu befürchten, so kann man auch den am Scheitelpunkt befindlichen Buchstaben *B* zur Bezeichnung verwenden.

II. Definition und Satz. Wenn man beide Schenkel eines Winkels *P* (Fig. 80) verlängert, so schliessen die

Fig. 80.

Verlängerungen einen zweiten Winkel *Q* ein; derselbe wird Scheitelwinkel von *P* genannt. Also:

Definition. „Scheitelwinkel sind solche Winkel, wo die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderu sind.“

P und *Q* haben offenbar den gemeinschaftlichen Nebenwinkel *R*. Sie werden also von demselben Winkel zu einem gestreckten ergänzt, und sind folglich gleich. Dies gibt also den Satz:

Lehrsatz 1. „Jede zwei zusammengehörige Scheitelwinkel sind gleich.“

III. Scholion und Definitionen. Man sagt von zwei Linien, dass sie sich schneiden, wenn sie einen Punkt gemein haben. Zwei Linien, die sich schneiden, schliessen, wenn man sie ins Unendliche nach beiden Seiten hin verlängert, demnach immer vier Winkel ein (*P*, *Q*, *R*, *S*), von denen immer zwei *P* und *Q* einerseits und *R* und *S* andrerseits Scheitelwinkel, also gleich sind, von denen ferner immer zwei *P*, *R* und *Q*, *S* oder *P*, *S* und *Q*, *R* Nebenwinkel sind, also zusammen je einen gestreckten Winkel betragen, und die

Digitized by Google

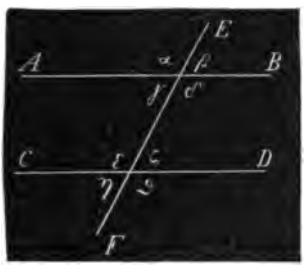
deshalb alle vier zusammen einen vollen oder vier rechte Winkel betragen. — Es können aber auch zwei Linien (Fig. 81)

Fig. 81.

in einer Ebene liegen und sich in keiner Verlängerung schneiden, wie *AB* und *BD*. „Solche Linien werden parallel genannt.“ Das Zeichen der Parallelität zweier Linien ist folgendes: ∦.

IV. Definitonen. Werden zwei Linien (Fig. 82) *AB* und *CD* von einer

Fig. 82.



dritten *EF* geschnitten, so entstehen an jedem der Schnittpunkte vier, also im Ganzen acht Winkel. Von diesen nennen wir diejenigen vier, welche zwischen den beiden geschnittenen Linien liegen, also $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ innere Winkel, die andern vier also $\alpha, \beta, \eta, \vartheta$ äussere Winkel. Wir bezeichnen jede zwei äussern und jede zwei innern Winkel als gleichartige, einen äussern und einen innern dagegen als ungleichartige, und unterscheiden in ihrer Beziehung zu einander noch folgende Arten von Winkeln:

A) Gegenwinkel heissen je zwei gleichartige Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie aber an verschiedenen Schnittpunkten.

Zusammengehörige Gegenwinkel sind also: α und ε, γ und η, β und ζ, δ und ϑ.

B) Wechselwinkel heissen je zwei gleichartige Winkel auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie und an verschiedenen Schnittpunkten.

Zusammengehörige Wechselwinkel sind also: α und ϑ, β und η, γ und ζ, ε und δ.

V. Lehrsatz 2. Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, und es sind zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich, so sind alle zusammengehörigen Gegenwinkel und Wechselwinkel gleich.

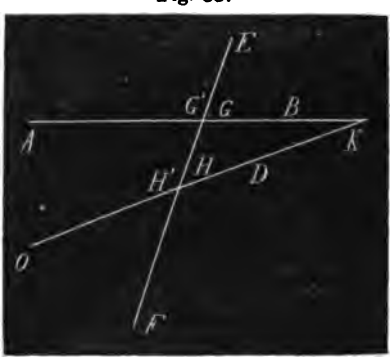
Beweis. Seien zunächst zwei Gegenwinkel gleich, also etwa $\alpha = \varepsilon$, so sind auch deren Nebenwinkel gleich, also $\gamma = \eta$, und die Nebenwinkel von diesen olso $\delta = \vartheta$, endlich die Nebenwinkel auch von diesen, also $\beta = \zeta$. Es sind also in der That alle Gegenwinkel gleich.

Was nun die Wechselwinkel anbetrifft, so ist $\alpha = \delta$ als Scheitelwinkel, mithin auch $\delta = \varepsilon$. Deren Nebenwinkel sind γ und ζ, also $\gamma = \zeta$, und als Nebenwinkel von diesen $\alpha = \vartheta$, endlich $\beta = \eta$ wieder als Nebenwinkel der zuletzt genannten. — Es sind also auch alle Wechselwinkel gleich. — Nehmen wir jetzt an, es seien zwei gleiche Wechselwinkel gegeben, also etwa $\delta = \varepsilon$, so ist $\alpha = \delta$ als Scheitelwinkel, folglich $\alpha = \varepsilon$, und da dies Gegenwinkel sind, so folgt aus dem Vorigen die Gleichheit aller übrigen Gegen- und Wechselwinkel.

VI. Lehrsatz 3. Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, und es sind zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel (mithin alle Gegen- und Wechselwinkel) gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Beweis. Nehmen wir an die geschnittenen Linien *AB* und *OD* (Fig. 83)

Fig. 83.



wären nicht parallel, so müssten sie sich auf einer Seite der schneidenden Linie *EF* schneiden, z. B. in K. Man denke sich nun den Theil der Figur AG_1H_1O auf *DHGB* so gelegt, dass AG_1 in *DH* und Punkt G_1 in *H* fällt, so werden auch die andern Schenkel G_1H_1 und *HG* der Winkel AG_1H_1 und *DHG* zusammenfallen, da diese Winkel Wechselwinkel und also gleich sind. Da aber die Linien *GH* und H_1G_1 gleich sind,

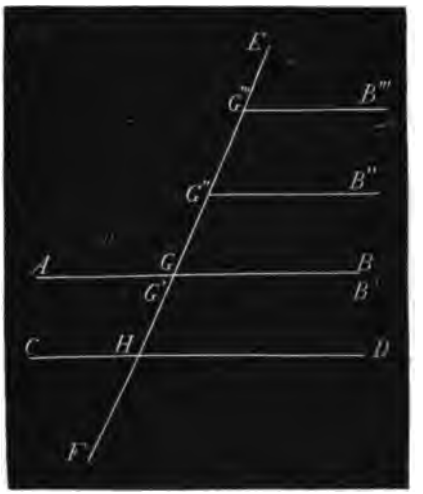
Digitized by Google

(beide Bezeichnungen stellen ja dieselben Linien vor), so müssen auch die andern Endpunkte H_1 und G zusammenfallen, also die einen Schenkel und die Scheitelpunkte der Winkel HGB und G_1H_1O. Es sind aber diese Winkel gleich, und somit fallen auch deren andere Schenkel GB und H_1O zusammen. Da nun auch AG_1 mit HD zusammenfällt, so werden die Linien AG_1 und OH_1 sich schneiden müssen, da die mit ihnen zusammenfallenden DH und GB sich schneiden, und daraus würde folgen, dass die graden Linien AB und OD sich nicht allein in K sondern auch auf der andern Seite von EF schneiden. Zwei grade Linien können sich aber nur in einem Punkte schneiden, und somit ist überhaupt kein Schnittpunkt K möglich. Es sind also die Linien AB und OD parallel.

Scholion. Es ist dieser Beweis im Gegensatze zu den bis jetzt vorgekommenen ein indirecter.

VII. Lehrsatz 4. Denkt man sich zwei parallele Linien AB und CD, welche von einer dritten EF (Fig. 84) ge-

Fig. 84.



schnitten werden, nach beiden Seiten von derselben ins Unendliche verlängert, so entstehen die Räume $BGHD$ und $AGHC$, die allerdings nicht vollständig begrenzt sind. Es lässt sich nun zeigen, dass wenigstens einer dieser Räume gegen den von dem darüber liegenden Winkel EGB oder EGA gebildeten Raum verschwindend klein ist.

Beweis. Es sind hierbei drei Fälle möglich.

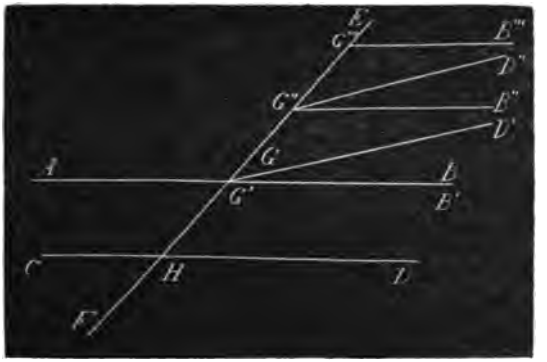
Entweder der Winkel EGB ist gleich GHD, oder EGB ist grösser als GHD, oder endlich EGB ist kleiner als GHD.

Nehmen wir zunächst das erste an.

Man kann dann das Stück $B'G'HD$ auf EGB so gelegt denken, dass H in G, HD mit GB zusammenfällt; es wird dann auch $G'H$ auf EG fallen, da die Winkel $G'HD$ und EGB gleich sind. Nimmt dann für $G'B'$ die Lage $G''B''$ an, so ist offenbar Winkel $EG''B''$ mit EGB identisch. In den Winkelraum $EG''B''$ wird nun $B''G''GB$ oder $B'G'HD$ so gelegt, dass wieder H mit G'' und HD mit $G''B''$ zusammenfällt, es wird dann wieder gezeigt werden können, dass GB in die Lage $G'''B'''$ fällt, und fährt man so fort, so werden die Linien ins Unendliche erstreckt, in dem Winkel EGB unendlich viel Räume, $BGG''B''$, $B''G''G'''B''$ enthalten sein, deren jeder gleich $B'G'HD$ ist. Mithin ist dieser Raum gegen den Winkel EGB unendlich klein. — Sei jetzt (Fig. 85) Winkel EGB grösser als GHD. Man legt dann das Flächenstück $B'G'HD$ so auf EGB, dass Punkt H in G, G' in G'', also die Linie G und GH in einer Richtung fallen, es muss dann HD innerhalb des Winkelraumes FGB, also in die Lage GD' fallen, da Winkel GHD kleiner als EGB ist, während $G'B'$ in die Lage $G''B''$ fällt, und Winkel $EG''B'' = EGB$ ist. Legt man in Winkelraum $EG''B''$ wieder $DHG'B'$, so dass HD in die Lage $G''D'$, $G'B'$ in die Lage $G'''B'''$ fällt, und fährt so fort, so wird der Winkelraum EGB in unendlich

Digitized by Google

Fig. 84.



viel Räume $BGG''B''$, $B''G''G'''B'''$ u.s.w. getheilt, die alle gleich sind, und deren jeder grösser als $B''G''GD' = B'G'HD$ ist. Dieser Raum $B'G'HD$ ist also gegen den von Winkel EGB gebildeten verschwindend klein.

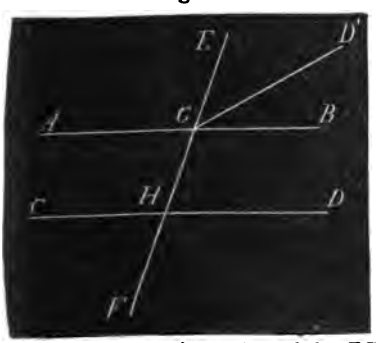
Sei endlich Winkel EGB kleiner als EHD, so wird EGB von EGA, und EHD von EHC zu einem gestreckten ergänzt; es ist also Winkel EGA grösser als EHC, und somit nach dem Vorigen der Flächenraum $AGHC$ gegen EGA verschwindend klein.

Lehrsatz, Zusätze und Scholion.

VIII. Lehrsatz 5. Werden zwei parallele Linien von einer dritten Linie geschnitten, so sind alle zusammengehörigen Gegenwinkel und Wechselwinkel gleich.

Beweis. Es ist nur zu beweisen, dass ein Paar von Gegenwinkeln gleich ist, da sich das Uebrige aus V. ergibt. — Seien die Gegenwinkel EGB und EHD

Fig. 85.



nicht gleich, so kann jedenfalls EGB grösser als EHD angenommen werden, da man im Falle EGB kleiner als EHD wäre, man nur die Nebenwinkel EGA und EHC zu betrachten brauchte. Legt man nun EHD auf EGA, so dass die Scheitelpunkte G und H, so wie die Schenkel EG und GH zusammenfallen, so wird HD innerhalb des Winkelraumes EGB in die Lage GD' fallen, also um das Stück $D'GB$ kleiner sein als EGA. Dies Stück ist gegen EGB nicht verschwindend klein, da EGB und $D'GB$ gewisse Theile eines gestreckten Winkels sind. Andererseits zerfällt aber EHD in die Räume EGB und $BGHD$, von denen der letztere gegen den ersteren nach vorigem Satze verschwindend klein ist. Der Unterschied beider Winkel kann also keine endliche Grösse betragen, und somit muss HD mit GB zusammenfallen.

Zusatz 1. Da somit auch Winkel $AGE = CHE$, so werden beide Räume $AGHC$ und $BGHD$ gegen die darüberliegenden und somit gegen jeden Winkel verschwindend klein sein. D. h.:

„Der zwischen zwei parallelen Linien und einer sie schneidenden dritten Linie liegende Raum ist verschwindend klein gegen den Winkel."

Zusatz 2. Winkel EGB und BCH sind Nebenwinkel also zusammen gleich einem gestreckten oder zwei Rechten. $EGB = EHD$, also auch $EHD + BGH$ gleich zwei rechten Winkeln. D. h.:

„Wenn zwei parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind die beiden inneren Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie zusammen gleich zwei Rechten."

Findet Letzteres nicht statt, so können also auch die Linien nicht parallel sein. Sie müssen sich also auf einer Seite der Linie EF schneiden.

Sind nun HD und GD' (Fig. 85) zwei von EF geschnittene Linien, und ist $D_1GH + GHD$ grösser als zwei Rechte, so wird sein $EGD' + D'GH = 2$ Rechten

Digitized by Google

als Nebenwinkel, also EGD' kleiner als GHD, und wenn GB parallel mit HD ist, EGD' kleiner als EGB; es wird also GD' sich von HD noch mehr als die parallele Linie GB entfernen, und kann auf dieser Seite von EF nicht HD schneiden. Daraus folgt:

Zusatz 3. Zwei Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so dass die inneren Winkel auf der einen Seite der schneidenden Linie nicht zwei rechte Winkel zusammen betragen, werden sich immer auf der Seite schneiden, auf welcher diese Winkelsumme kleiner als zwei Rechte ist.

Scholion. Die Sätze V. bis VIII., enthalten die Theorie der Parallel-Linien. Den Zusatz 3. dieses Paragraphen gibt Euklid als ein Axiom, d. h. als eine Wahrheit, die des Beweises nicht bedarf. Indess ist es wohl nur ein Satz, für den eben kein Beweis von ihm gefunden worden ist. Seitdem ist unzählich oft versucht worden, einen Beweis dafür zu geben. Es lässt sich dann nämlich, wenn man von Zusatz 3. ausgeht, die Reihe derjenigen Sätze, welche die Theorie der Parallelen bildet, durch einfache Betrachtungen beweisen. Die hier gegebenen Entwicklungen stützen sich auf die Definition des Winkels, welche in dem Artikel: Raumgrösse gegeben ist, und denselben als einen Theil der Ebene erklärt, was wie dort gezeigt wurde, auch aus andern Gründen uns nothwendig scheint. Diese Betrachtungen sind, wenn wir nicht irren, zuerst in ihren Grundzügen von Crelle angestellt. Die Geometrie dieses Verfassers enthält im Wesentlichen den hier gegebenen Beweis des Lehrsatzes, der uns jedoch zur vollständigen Schärfe einer Ergänzung zu bedürfen schien, welche hier durch Lehrsatz 4. gegeben ist.

2) Von den Figuren insbesondere den Dreiecken.

I. Definitionen. A) Die Verbindung von einer Anzahl grader Linien in der Ebene, von denen jede folgende die als vorhergehend gedachte schneidet, wird Vielseit und je nachdem die Anzahl der Graden 3, 4, 5 ... n ist, Dreiseit, Vierseit, Fünfseit, ... n-seit genannt. Schneidet jede der Graden alle Uebrigen, so heisst die Verbindung: „vollständiges n-seit." Die Linien, welche das n-seit bilden, heissen Seiten, ihre Schnittpunkte Ecken. Verbindet man zwei Ecken durch eine Linie, welche nicht Seite ist, so heisst dieselbe Diagonale des n-seits.

B) Wenn von einer beliebigen Anzahl von Punkten jede zwei durch eine von diesen beiden Punkten begrenzte Grade verbunden werden, so heisst das entstehende Gebilde ein vollständiges Vieleck, also vollständiges 3-eck, 4-eck ... n-eck. Auch hier nennt man die Verbindungslinien Seiten, die gegebenen Punkte Ecken."

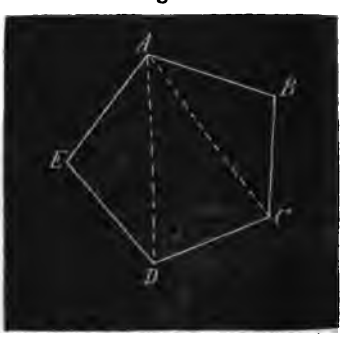
Der Hauptunterschied zwischen einem vollständigen Vielseit und einem Vieleck ist, dass bei dem ersteren die graden Linien als unbegrenzt bei dem andern als begrenzt gedacht werden. Ein vollständiges Vieleck braucht selbstredend nicht in der Ebene zu liegen.

C) Ein endlicher Theil der Ebene, welcher überall begrenzt ist, heisst Figur. Die Begrenzung einer Figur kann aus krummen oder graden oder aus krummen und graden Linien bestehen. Eine nur von graden Linien begrenzte Figur heisst gradlinig. Eine solche heisst auch Vieleck (Polygon), Dreieck, Viereck ... n-eck, wenn sie von 3, 4. ... n Linien begrenzt ist. — Wenngleich die Bezeichnung n-eck sonach einen Doppelsinn hat, so ist ein Irrthum nicht gut möglich, da dem in Definition B) betrachteten Gebilde die Bezeichnung vollständig hinzugefügt ist.

Die Linien, welche eine Figur begrenzen, heissen Seiten; sie sind immer als endlich anzunehmen. Die Punkte, in welchen zwei Seiten zusammentreffen, heissen Ecken.

Ein Vieleck kann man entstanden denken, wenn man (Fig. 86 und 87) von

Fig. 86.



einer Anzahl in der Ebene befindlicher Punkte A, B, C, D, E den ersten A mit dem zweiten B, den zweiten mit dem dritten C u. s. w., den letzten E wieder mit dem ersten A verbindet. AB, BC u. s. w. sind dann die Seiten der Figur. Die Seiten sind also hier immer begrenzt, und zwar sind ihre Grenzen die Ecken. Es wird ferner immer jeder der Eckpunkte mit

Fig. 87.

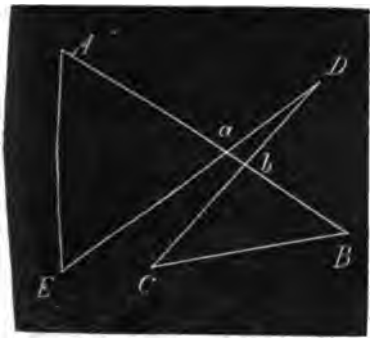
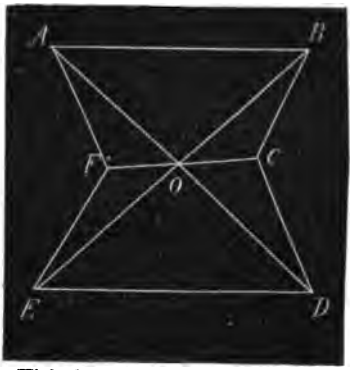


Fig. 88.



zwei und nur zwei anderen durch eine Grade verbunden sein. Eine grade Linie, welche zwei Ecken verbindet, ohne eine Seite zu sein, wie *AC* oder *AD* heisst Diagonale der Figur.

Ein Vieleck hat eben so viel Seiten als Ecken, da hier die erste Ecke mit der zweiten, die zweite mit der dritten, endlich die letzte mit der ersten durch eine Seite verbunden ist.

Welchen Punkt man bei der Bildung eines Vielecks als den ersten, welchen als den darauf folgenden u. s. w. annimmt, ist im Allgemeinen beliebig. Jedoch versteht man gewöhnlich unter Vieleck nur solche Figuren, wo die Seiten (natürlich so lange sie nicht verlängert werden) nur in den ursprünglich gegebenen Eckpunkten zusammentreffen, also einander nicht durchschneiden.

Diese Bedingung ist nicht erfüllt, wenn (Fig. 87) z. B. die Seiten *DE* und *DC* die Linie *AB* in *a* und *b* durchschneiden.

Im Allgemeinen wird in der elementaren Geometrie von der Betrachtung von dergleichen Vielecken Abstand genommen.

An jeder Ecke eines Vielecks befindet sich ein Winkel, welchen man Vieleckswinkel, (Polygonwinkel) nennt.

Da zwei Linien, welche sich schneiden einen Winkel, also kein endliches und völlig begrenztes Stück der Ebene abschneiden, so muss ein Vieleck wenigstens drei Seiten haben, und wird dann Dreieck genannt. — Jedes andere Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen. Erfüllen seine Seiten die eben gegebene Bedingung, so kann dies durch diejenigen Diagonalen geschehen, welche von einem Endpunkte gezogen sind, z. B (Fig. 86) durch die Diagonalen *AC*, *AD*.

Seien (Fig. 88) aber unter den Polygonwinkeln solche, die grösser als ein gestreckter sind, wie *AFE* und *BCD*, so kann, wenn man die Diagonalen zieht, das Vieleck möglicher Weise statt durch eine Summe, durch eine Differenz von Dreiecken ausgedrückt werden: so ist *ABCDEF* = Dreieck *ABC*+*ACD*+*ADE* − *AEF*. In diesem Falle können die abgezogenen Dreiecke als negativ betrachtet werden.

D) Ein Vieleck heisst regelmässig, wenn alle Polygonwinkel und alle Seiten desselben unter einander gleich sind. Es heisst gleichseitig, wenn alle Seiten gleich sind.

E) Ein Dreieck heisst gleichschenklig, wenn zwei Seiten desselben gleich sind. Ein Dreieck, welches weder gleichseitig noch gleichschenklig ist, heisst ungleichseitig.

F) Die Dreiecke werden auch nach der Beschaffenheit ihrer Winkel eingetheilt. Ein Dreieck heisst rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel enthält, stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen, spitzwinklig, wenn es nur spitze Winkel enthält.

Zur Begründung dieser Definitionen ist, wie bald geschehen wird, noch zu zeigen, dass in jedem Dreiecke wenigstens zwei spitze Winkel vorhanden sind.

II. Aufgaben und Lehrsätze.

Aufgabe 1. Die Anzahl der Eckpunkte eines vollständigen n-seit zu finden.

Auflösung. Jede Seite des n-seit schneidet alle $n-1$ übrigen; man würde also für jede der n Seiten $n-1$, also im Ganzen $n(n-1)$ Schnittpunkte haben. Da aber unter diesen Schnittpunkten sowohl der vorkommt, wo irgend eine Seite *AB* eine andere *BC*, als der, wo die letztere *BC* die erstere *AB* schneidet, diese Punkte aber zusammenfallen, so wird sich die Anzahl der Schnittpunkte auf die Hälfte von $n(n-1)$ beschränken, und diese Anzahl sei gleich $\frac{n(n-1)}{2}$.

Digitized by Google

Beispiele. Sie wird also beim Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck bezüglich betragen:

$$\frac{3\cdot 2}{2}=3,\ \frac{4\cdot 3}{2}=4,\ \frac{5\cdot 4}{2}=10,\ \frac{6\cdot 5}{2}=15.$$

Man kann diese Aufgabe auch in die Form eines Lehrsatzes umstellen.

Lehrsatz 1. n grade Linien können sich in höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten schneiden.

Aufgabe 2. Die Anzahl der Seiten eines vollständigen n-ecks zu finden.

Auflösung. Je zwei Ecken lassen sich durch eine Seite verbinden.

Man erhält also aus denselben Betrachtungen wie in Aufgabe 1. wieder die Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$.

Lehrsatz 2. Zwischen n Punkten lassen sich höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien ziehen.

Scholion. Nur im vollständigen Dreiseit und Dreieck ist die Anzahl der Ecken und Seiten gleich, also 3.

Dagegen hat schon ein vollständiges Vierseit 6 Ecken und ein vollständiges Viereck 6 Seiten. — Wir bemerken noch, dass die Lehrsätze 1. und 2. darum nur die grösst-mögliche Anzahl der Schnittpunkte bezüglich Verbindungslinien geben, weil im ersten Falle mehrere Linien sich in einem Punkte schneiden, wo dann die entsprechenden Schnittpunkte ausfallen, im letzteren Falle mehrere Punkte in einer Graden liegen können, wo dann aus der Anzahl der Verbindungslinien einige wegfallen. Auch können im ersteren Falle einige der gegebenen Linien parallel sein.

Aufgabe 3. Die Anzahl der Diagonalen eines n-ecks zu finden.

Auflösung. Von jedem Endpunkte lassen sich nach allen übrigen, mit Ausnahme der beiden angrenzenden, also durch Seiten verbundenen Diagonalen ziehen, und da es $n-3$ solcher Punkte gibt, so würden für alle n Ecken mithin $n(n-3)$ Diagonalen vorhanden sein. Von dieser fällt jedoch wie bei den früheren Untersuchungen dieses Abschnittes die Hälfte weg, da die Diagonale, welche Ecke A mit B verbindet, derjenigen, welche B mit A verbindet identisch ist, und somit ist die Anzahl der Diagonalen $\frac{n(n-3)}{2}$.

Beispiele. Es hat also das Dreieck keine Diagonale, das Viereck: $\frac{4\cdot 1}{2}=2$, das Fünfeck: $\frac{5\cdot 2}{2}=5$ Diagonalen.

Diese Aufgabe enthält den Satz.

Lehrsatz 3. Jedes n-eck hat $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen.

Scholion. Wir haben auch von den Diagonalen vollständiger n-seite gesprochen. Deren Anzahl trifft mit der hier gegebenen keineswegs zusammen. So z. B. hat das vollständige Vierseit (Fig. 89)

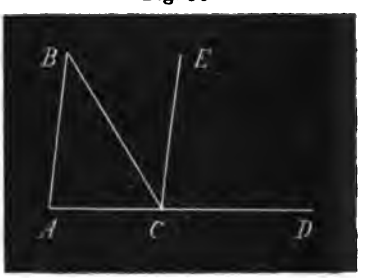
Fig. 89.

ABCDEF die drei Diagonalen *AF*, *BD* und *CE* im Gegensatz zu dem Vierecke, welches nur zwei Diagonalen hat.

III. Definitionen und Lehrsätze.

Definition. Wenn man eine Seite eines Dreiecks *AC* (Fig. 90) verlängert.

Fig. 90



so bildet die Verlängerung *CD* mit der anstossenden Seite *BC* einen Winkel *BCD*, welchen man Aussenwinkel nennt. — Da jede Seite nach zwei Richtungen hin verlängert werden kann, z. B. *AC* über *A* und über *D* hinaus, so hat jedes Dreieck im Ganzen sechs Aussenwinkel.

Digitized by Google

Lehrsatz 4. Der Aussenwinkel eines Dreiecks ist so gross als die beiden Dreieckswinkel zusammen, die nicht seine Nebenwinkel sind.

Beweis. Es soll bewiesen werden, dass Aussenwinkel $BCD = A + B$ ist.

(Die Winkel A, B sind hier mit einem Buchstaben bezeichnet, da kein Missverständniss möglich ist)

Man zieht Linie CE parallel mit AB. Es werden dann die Parallelen AB und CE von AD geschnitten, und sind somit die Gegenwinkel A und ECD gleich. Es werden aber auch AB und CE von BC geschnitten, und deshalb sind die Wechselwinkel B und BCE gleich.

Man hat also:

$$A + B = BCE + ECD,$$

die beiden Winkel rechts aber bilden den Winkel BCD, womit unser Satz bewiesen ist.

Der Winkel BCD ist der Nebenwinkel von BCA, wird also von demselben zu zwei Rechten ergänzt, somit muss auch BCA, d. h. der dritte Dreieckswinkel $A + B$, also die beiden andern zu zwei Rechten ergänzen, und dies gibt den neuen wichtigen Satz:

Lehrsatz 5. Die Winkel eines Dreiecks betragen zusammen zwei Rechte.

Scholion. In diesem Satze liegt auch der Grund, dass zwei Dreieckswinkel nothwendig spitze sein müssen, da wenn zwei rechte vorhanden wären, der dritte Winkel gleich Null sein müsste. Noch weniger kann natürlich ein Dreieck zwei stumpfe oder einen rechten und einen stumpfen Winkel haben. Dagegen hindert nichts, dass alle drei Winkel spitze sind.

Aus dem Lehrsatze 5. folgt noch ein wichtiger Zusatz, den wir an folgende Erklärung knüpfen:

„Eine Linie steht auf einer andern senkrecht (winkelrecht, oder ist ein Loth auf dieselbe), wenn sie mit derselben einen rechten Winkel bildet."

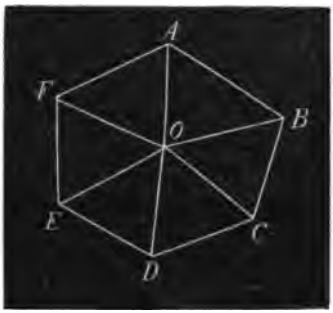
Zusatz. Von einem Punkte ausserhalb einer Linie lässt sich nur eine senkrechte auf dieselbe ziehen, denn liessen sich von B aus (Fig. 90) die beiden Lothe BA und BC auf AC fällen, so wäre BAC und BCA rechte Winkel, was unmöglich ist, da ein Dreieck nicht zwei dergleichen haben kann.

IV. Aufgabe und Lehrsatz.

Aufgabe. Die Summe der Polygonwinkel eines Vielecks zu bestimmen.

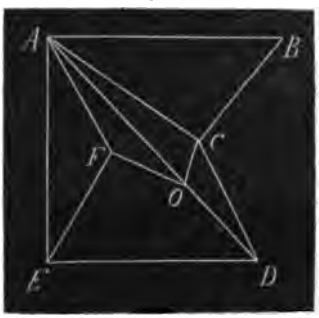
Auflösung. Wir setzen voraus, dass keine Seite des Vielecks die andere durchschneide, da nur unter dieser Voraussetzung die folgende Entwicklung richtig ist. Nehmen wir ferner vorläufig an, es gäbe einen Punkt O innerhalb des Vielecks (Fig. 91 und 92), von welchem aus

Fig. 91.



sich Linien nach allen Ecken derart ziehen lassen, dass keine der Seiten durchschnitten wird. Bei einem Vielecke, welches keinen erhabenen Winkel hat (Fig. 91), ist dies bei jedem Punkte innerhalb des Vielecks der Fall.

Fig. 92.



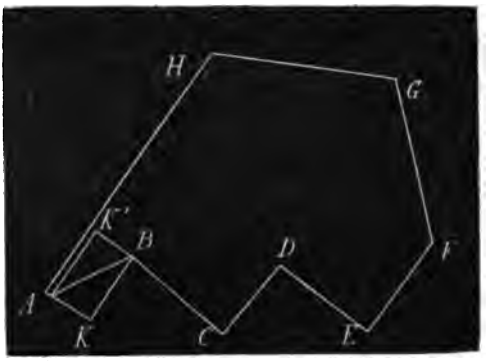
Durch diese von O ausgezogene Linien wird das Vieleck offenbar in so viel Dreiecke zerlegt als es Seiten hat, also in n, wenn die Figur ein n-eck, und da die drei Winkel eines solchen zwei Rechte betragen, so erhält man $2n$ Rechte als Summe. In derselben sind alle Polygonwinkel, ausserdem aber die um O liegenden Winkel enthalten. Die letzteren, welche zwei gestreckte oder vier rechte betragen, sind also abzuziehen, und man erhält als Summe der Polygonwinkel $2n - 4$ Rechte,

Diese Betrachtungen würden nicht mehr gelten, wenn es keinen solchen Punkt O gäbe, von welchem aus das Vieleck ohne die Seiten zu durchschneiden in Dreiecke getheilt werden könnte. Um dies zu umgehen, wollen wir daher noch auf einem

andern Wege das obige Resultat zu erreichen suchen.

Wie auch das Vieleck beschaffen sei, so kann es entstanden gedacht werden, indem man von n Punkten immer jeden vorausgehenden mit dem folgenden verbindet. Seien nun zuerst (Fig. 93) eine Anzahl von n Punkten $A, B, C, D, E, F,$

Fig. 93.



G, H gegeben, welche auf eine Weise verbunden sind, dass je zwei Seiten sich nicht durchschneiden und sei s die Summe seiner Polygonwinkel. Kommt nun noch ein Punkt hinzu, so wird derselbe entweder ausserhalb des Vielecks wie K, oder innerhalb desselben wie K_1 liegen.

Im ersten Falle wird das Vieleck in $AKBCDEFGHA$ verwandelt, und es kommen zu der Polygonwinkel-Summe noch die drei Winkel von Dreieck AKB hinzu, so dass man jetzt $s+2$ Rechte hat. Liegt aber K' innerhalb, so kommt der erhabene Winkel $AK'B$ hinzu, den wir mit K' bezeichnen, um ihn von dem hohlen Winkel $AK'B$ zu unterscheiden, und es sind die Winkel $K'AB$ und $K'BA$ abzuziehen. Diese werden von dem hohlen Winkel $AK'B$ zu zwei Rechten ergänzt. Man hat also zu der Polygonwinkel-Summe zuzuzählen:

$$K'-(2R-AK'B) = K'+AK'B-2R^*).$$

Da aber die Winkel $K'+AK'B$ zusammen $4R$ betragen, so ist $4R-2R=2R$ zuzuzählen, also die Summe der Polygonwinkel wieder $s+2$ Rechte. Bei einem Dreiecke nun ist $s=2$, also beim Vierecke $2+2=4$, beim Fünfecke $2+4=6$, u. s. w., so dass man fürs n-eck wieder wie oben $2n-4$ Rechte erhält.

Dies gibt folgenden Satz:

Lehrsatz 6. In jedem n-eck, worin sich zwei Seiten nicht durchschneiden, beträgt die Summe der Polygonwinkel $2n-4$ Rechte.

*) Wir bedienen uns in dem Folgenden öfter des Zeichens R für einen rechten Winkel.

V. Definitionen. Von den Vielecken kommen hauptsächlich noch die Vierecke in Betracht. Die Summe der Polygonwinkel eines solchen beträgt also vier Rechte. Ein Viereck hat ferner zwei Diagonalen. (Ein vollständiges Viereck deren drei). Sind in einem Viereck je zwei Seiten einander parallel, so heisst dasselbe Parallelogramm. Sind nur überhaupt zwei Seiten parallel, so heisst es Trapez. — Sind in einem Parallelogramm alle Winkel rechte, so heisst es Rechteck (Oblong); sind alle Seiten gleich so heisst es Raute (Rhombus); werden diese beiden letztangegebenen Bedingungen erfüllt, so nennt man das Parallelogramm Quadrat. Wird keine derselben erfüllt, so wird es auch wohl Rhomboid genannt.

3) Von der Congruenz der Dreiecke.

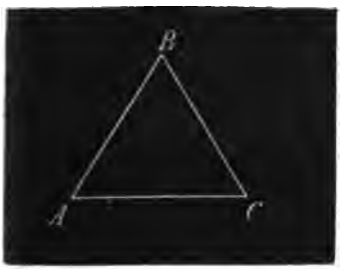
I. Vorbemerkung und Definitionen. Nach der allgemeinen Definition der Congruenz sind Dreiecke dann congruent, wenn sie so auf einander gelegt werden können, dass sie sich decken. Es werden dann natürlich die entsprechenden Seiten und Winkel zusammenfallen, also gleich sein, und umgekehrt, findet dies statt, so worden sich die Dreiecke auf einander gelegt decken. Der Begriff der Congruenz von Dreiecken und überhaupt von Vielecken lässt sich aber auch so feststellen, dass alle entsprechenden Seiten und Winkel des einen denen des andern gleich sind. Die Lehre von der Congruenz der Dreiecke hat zum Zweck, zu zeigen, dass man schon aus der Gleichheit von einigen dieser

Stücke auf die Congruenz, also auch auf die Gleichheit der übrigen schliessen könne. Wenn man weiss, dass aus gewissen Stücken (den drei Seiten und den drei Winkeln) eines Dreiecks sich überhaupt nur ein Dreieck bilden lasse, so ist auch klar, dass jedes andere, welches diese Stücke ebenfalls hat, dem gegebenen Dreiecke congruent sei. — Schliesslich merken wir noch um Weitläuftigkeit zu vermeiden folgende Definitionen. — Jeder Winkel eines Dreiecks hat zu Schenkeln zwei Seiten desselben.

Die dritte Seite nun, welche nicht Schenkel eines gegebenen Winkels ist, heisst Gegenseite desselben, und umgekehrt nennt man Gegenwinkel einer gegebenen Seite, denjenigen Winkel, dessen Schenkel dieselbe nicht ist. — Das Zeichen der Congruenz ist $\cong$.

II. Lehrsätze. Wenn in einem Dreiecke ein Winkel A (Fig. 94) und die

Fig. 94.



Länge seiner Schenkel AB und AC gegeben sind, so sind offenbar die anderen Endpunkte der letzteren B und C völlig bestimmt. Da nun zwischen B und C sich nur eine Grade BC ziehen lässt, so ist diese Linie ihrer Länge und ihrer Lage nach völlig bestimmt, also auch das ganze Dreieck kann nur einerlei Gestalt haben, und jedes andere, welches Winkel A und Seite AB und AC hat, ist ihm congruent. Dies giebt den ersten Satz von der Congruenz:

Lehrsatz 1. „Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des einen den entsprechenden Stücken des andern bezüglich gleich sind, so sind die Dreiecke congruent."

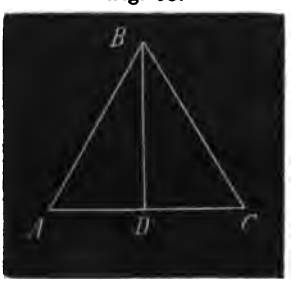
Ist Seite AB gegeben und dazu die anliegenden Winkel A und B, so ist auch die Richtung der Linien AB und AC völlig bestimmt, und da sich zwei gegebene Linien nur in einem Punkte schneiden können, so ist auch der Schnittpunkt C, mithin das ganze Dreieck ein völlig bestimmtes, jedes andere, worin eine Seite und die beiden anstossenden Winkel bezüglich mit AB, A und B übereinstimmen, ihm congruent. — Dies gäbe einen zweiten Lehrsatz von der Congruenz, den wir aber noch etwas allgemeiner ausdrücken wollen. Wenn in zwei Dreiecken zwei beliebige Winkel bezüglich gleich sind, so muss dies offenbar auch mit den dritten stattfinden, denn diesen dritten erhält man ja, wenn man die Summe der beiden gegebenen, also für beide Dreiecke dieselbe Grösse von zwei Rechten abzieht. Wenn also in zwei Dreiecken eine Seite und zwei beliebige, aber gleichliegende Winkel übereinstimmen, so werden jedenfalls auch die der gegebenen Seite anliegenden Winkel gleich sein. Also:

Lehrsatz 2. „Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und zwei Winkel des einen den entsprechenden (gleichliegenden) Stücken des andern bezüglich gleich sind."

III. Definition und Lehrsätze. Es sollen aus den eben gegebenen Sätzen einige Folgerungen für gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke gezogen werden. — Wir merken zunächst folgende Bezeichnungen:

Die den andern ungleiche Seite eines gleichschenkligen Dreiecks wird Grundlinie oder Basis, der Eckpunkt, welcher dem Gegenwinkel der Grundlinie entspricht, Spitze genannt. Die beiden gleichen Seiten nennt man zuweilen auch Schenkel. AB und AC (Fig. 95) sind

Fig. 95.



die Schenkel, AE die Grundlinien, B die Spitze. — Denkt man sich jetzt den Winkel B an der Spitze durch Linie BD in zwei gleiche Theile getheilt, so entstehen zwei Dreiecke ABD und CBD, in diesen ist $AB = BC$, und CD beiden gemeinsam, ausserdem Winkel $ABD = CBD$; es sind also zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich. Somit hat man den Satz:

Lehrsatz 3. „Wenn man den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen

Dreiecks in zwei gleiche Theile theilt, so wird durch die Theilungslinie das Dreieck in zwei congruente Dreiecke getheilt."

Indem man die gleichliegenden Stücke dieser Dreiecke vergleicht, gelangt man zu neuen wichtigen Sätzen. — Es liegen Winkel A und C der gemeinschaftlichen Seite BD gegenüber, sind also gleich, d. h.:

Lehrsatz 4. „In jedem gleichschenkligen Dreiecke sind auch die Winkel an der Grundlinie (oder die Gegenwinkel der Schenkel) gleich."

Winkel BDA liegt AB, und BDC der BC gegenüber, es sind also auch diese Winkel BDA und BDC gleich. Da sie aber Nebenwinkel sind, so müssen sie rechte sein. Es sind ferner AD und DC gleichliegende Stücke, da sie den Winkeln ABD und CBD gegenüberliegen, also ebenfalls gleich. Wir fassen beide Resultate in einem einzigen Satz zusammen:

Lehrsatz 5. „Die Linie, welche den Winkel an der Spitze in zwei gleiche Theile theilt oder halbirt, halbirt auch die Grundlinie, und bildet mit letzterer rechte Winkel, (steht senkrecht, winkelrecht auf derselben)."

Da es nun nur eine Linie gibt, die aus der Mitte D von AC gezogen auf derselben senkrecht steht, so muss dies die Halbirungslinie des Winkels B sein, also:

Lehrsatz 6. „Die Linie, welche aus der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks gezogen auf derselben senkrecht steht, geht durch die Spitze des Dreiecks und halbirt den Winkel an derselben."

Es lässt sich ferner nur eine Linie ziehen, welche die Spitze B mit der Mitte D der Grundlinie AC verbindet, also:

Lehrsatz 7. „Die Linie, welche die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie verbindet, halbirt den Winkel an der ersteren, und steht senkrecht auf der letzteren."

Auch lässt sich nur eine Linie von B senkrecht auf AC ziehen, also:

Lehrsatz 8. „Die Linie, welche von der Spitze senkrecht auf die Grundlinie gezogen wird, halbirt die letztere und den Winkel an der ersteren."

Nehmen wir jetzt an, in Dreieck ABC (Fig. 95) sei Winkel $A = C$. Wir halbiren wieder den Winkel B durch Linie AD, und es entstehen dann ebenfalls die congruenten Dreiecke ABD und CBD, da die Winkel bei B, $A = C$ und BD sich selbst gleich also entsprechend eine Seite und zwei gleichliegende Winkel übereinstimmen. Gleichliegende Stücke aber sind dann AB und CB, also einander gleich.

Dieser Satz bildet die Umkehrung des Lehrsatzes 4. nämlich:

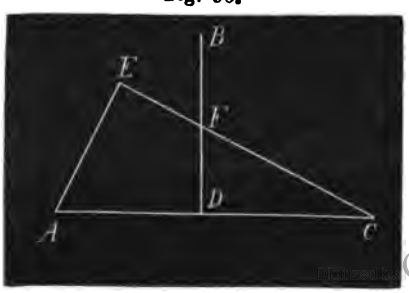
Lehrsatz 9. „Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so sind auch ihre Gegenseiten gleich. (Das Dreieck ist also gleichschenklig.)"

An diese Sätze sind noch folgende Betrachtungen zu knüpfen. — Ist AC (Fig. 95) eine beliebige Linie, BD aus ihrer Mitte senkrecht gezogen, und ein beliebiger Punkt B von BD mit A und C verbunden, so entstehen die congruenten Dreiecke ABD und CBD. In ihnen ist nämlich $AD = CD$, $BD = BD$, Winkel $ABD = CBD$ als rechte, also zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich. Es sind also auch die gleichliegenden Stücke AB und CB gleich, d. h. Punkt B ist von A und C gleich weit entfernt. Also:

Lehrsatz 10. „Wenn man aus der Mitte der Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte eine Senkrechte auf derselben errichtet, so ist jeder Punkt der letzteren von beiden gegebenen Punkten gleich weit entfernt."

Es kann aber auch keinen Punkt ausserhalb BD geben, der von A und C gleich weit entfernt wäre. Denn wäre E (Fig. 96) ein solcher, so könnte man EC und EA ziehen, von denen die er-

Fig. 96.



Digitized by Google

stere BD in F schneidet, und wäre dann nach unserem Satze $AF = CF$, nach der Annahme aber $AE = CE = CF + FE = AF + FE$. Mithin die grade Linie AE gleich der gebrochenen AFE, was unmöglich ist, da die grade die einzige kürzeste zwischen zwei Punkten ist.

Eine Linie, welche alle Punkte und nur solche Punkte enthält, welche eine gewisse Eigenschaft gemein haben, nennt man Ort dieser Punkte. Es folgt also aus dem Vorigen:

Lehrsatz 11. „Die aus der Mitte der Verbindungslinie zweier Punkte gezogene Senkrechte ist der Ort aller Punkte, welche von den gegebenen gleich weit entfernt sind."

Wir wollen diese Linie als Mittellinie der Punkte A und C oder der Linie AC, auch als die des gleichschenkligen Dreiecks ABC bezeichnen.

Von den Sätzen dieses Abschnittes lassen sich leicht Anwenduugen auf das gleichseitige Dreieck machen. — Da in letzterem jede zwei Seiten gleich sind, so sind nach Lehrsatz 4. auch jede zwei Winkel mithin alle drei unter einander gleich. Da nun alle Winkel eines Dreiecks zwei Rechte betragen, so ist im gleichseitigen jeder $\frac{2}{3}$ Rechten gleich. Also:

Zusatz 1. „Ein gleichseitiges Dreieck hat auch drei gleiche Winkel, deren jeder $\frac{2}{3}$ Rechte beträgt. Das gleichseitige Dreieck ist mithin zugleich ein regelmässiges."

Sind in einem Dreiecke alle Winkel gleich, so sind nach Lehrsatz 9. je zwei Seiten, mithin alle drei unter einander gleich.

Zusatz 2. „Wenn in einem Dreiecke alle Winkel gleich sind, so ist dasselbe ein gleichseitiges."

Auch ist noch eine Folge für das gleichschenklige Dreieck zu ziehen, Sei α die Grösse des Winkels an der Spitze, β die des einen an der Grundlinie, also dann auch die des andern gleich β, so ist

$$\alpha + 2\beta = 2R,$$

woraus sich ergibt:

$$\beta = R - \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha = 2(R - \beta).$$

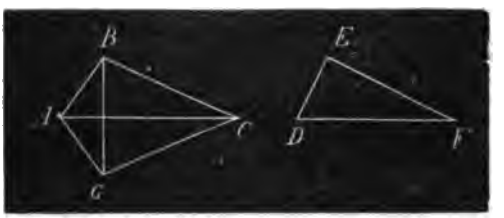
Diese Formeln lösen die Aufgabe:

„Wenn in einem gleichschenkligen Dreiecke ein Winkel gegeben ist, die beiden anderen zu finden."

IV. Lehrsatz 12. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn alle drei Seiten des einen bezüglich den drei Seiten des andern gleich sind.

Beweis. Seien (Fig. 97) ABC und DEF die gegebenen Dreiecke, und zwar $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$.

Fig. 97.



Man lege das letztere Dreieck so an das erstere, dass Punkt D in A, Seite DF in AC, Punkt E aber in G auf der anderen Seite von AC als der Punkt B fällt, und ziehe BG. — Es ist dann:

$$AB = DE = AG, \quad BC = EF = CG;$$

also die Dreiecke BAG und BCG gleichschenklig. Mithin Winkel $ABG = AGB$, und $CBG = CGB$. Durch Addition beider Gleichungen ergibt sich dann Winkel $ABC = AGE$, und da die diese Winkel einschliessenden Seiten auch einander bezüglich gleich sind, so ist Dreieck $ABC \cong AGC$ oder $\cong DEF$, da die beiden letzteren Dreiecke identisch sind, womit dieser Satz erwiesen ist.

V. Lehrsätze. Mit einem noch zu entwickelnden Satze von der Congruenz lässt sich diese Theorie abschliessen. Indess hat dieser Satz nicht die Einfachheit der früheren. Wir geben ihm zunächst eine möglichst allgemeine Gestalt.

Lehrsatz 13. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und die Gegenwinkel je einer Seite gleich sind, so sind die Dreiecke entweder congruent, oder die Gegenwinkel der andern gleichen Seiten ergänzen sich zu einem gestreckten."

Beweis. Seien ABC und DEF

Digitized by Google

Fig. 98.

(Fig. 98) die gegebenen Dreiecke, und zwar $AB=DE$, $AC=DF$, Winkel $C=F$. So kann man jedenfalls DEF so auf ABC legen, dass die Winkel C und F zusammenfallen, es wird dann Punkt D in A und Punkt E entweder in B selbst, wo dann die Dreiecke congruent sind, oder auf die nöthigen Falls zu verlängernde Seite BC fallen. Man kann aber annehmen, dass immer, wenn die Dreiecke nicht congruent sind, E zwischen B und C fällt, denn tritt dies nicht ein, so kann man Dreieck ABC auf DEF legen, und wird dann B zwischen E und F fallen, also die ganze Betrachtung ist dann mit Vertauschung der Dreiecke noch anwendbar. Falle somit Punkt E in G, so wäre Dreieck $AGC \cong DEF$, also $AG=DE=AB$. Mithin im gleichschenkligen Dreiecke ABG Winkel $ABG=AGB$, also $ABG+AGC=2R$ und da $AGC=DEF$ ist, auch

$$ABE+DEF=2R,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Da von drei Winkeln nicht jeder den andern zu zwei rechten ergänzen kann, so hat man auch den Satz:

Lehrsatz 14. „Wenn in drei Dreiecken immer 2 Seiten und der Gegenwinkel der einen entsprechend gleich sind, so sind wenigstens zwei der Dreiecke congruent."

Wenn sich ferner zwei Winkel zu zwei Rechten ergänzen, so sind entweder beide Rechten, oder der eine grösser, der andere kleiner als ein solcher.

Im ersteren Falle sind unsere Dreiecke congruent, da dann ausser den Seiten noch zwei Winkel gleich sind (Lehrsatz 2). Man kann also dem Lehrsatz 13. auch die Form geben:

Lehrsatz 15. „Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen entsprechend zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich sind, der Gegenwinkel der andern, aber bei beiden entweder gleichseitig spitz, gleichseitig recht, oder gleichseitig stumpf ist."

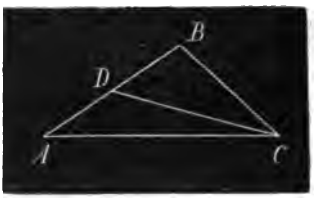
Indess ist an diesen Congruenzsatz noch eine wichtige Bemerkung zu knüpfen, welche noch einige Vorbereitung nöthig macht.

VI. Lehrsätze. Es beziehen sich diese Sätze auf die Ungleichheit der Seiten und Winkel.

Lehrsatz 16. „Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten ungleich sind, so ist derjenige von ihren Gegenwinkeln der grössere, welcher der grösseren Seite gegenüberliegt."

Beweis. Sei (Fig. 99) ABC das ge-

Fig. 99.



gebene Dreieck, und AB grösser als BC, so soll bewiesen werden, dass auch der Gegenwinkel von AB, nämlich C grösser ist als A, der Gegenwinkel von BCA. Man schneide von AB Stück $BD=BC$ ab, und ziehe DC, so ist in dem gleichschenkligen Dreiecke BDC Winkel BDC gleich BCD, also jedenfalls BCA oder C grösser als BDC. Letzterer Winkel aber ist Aussenwinkel von Dreieck ADC, also gleich den Winkeln DAC und DCA zusammen, also grösser als DAC oder A; es muss also um so mehr C grösser als A sein, was zu beweisen war. — Dieser Lehrsatz ist einer Umkehrung fähig, d. h.:

Lehrsatz 17. „Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel ungleich sind, so ist diejenige ihrer Gegenseiten die Grössere, welche dem grösseren Winkel gegenüberliegt."

Beweis. Sei (Fig. 99) Winkel C grösser als A, so soll auch AB grösser als BC sein. Sei letzteres nicht der Fall, so wäre entweder $AB=BC$, in welchem Falle das Dreieck gleichschenklig, also Winkel $A=C$ sein müsste, was der Voraussetzung widerspricht, oder es müsste BC grösser als AB sein, in welchem Falle nach dem vorigen Satze auch Winkel $A>C$ wäre. Es bleibt also nur die unserm Satze entsprechende Möglichkeit, dass AB grösser als BC ist.

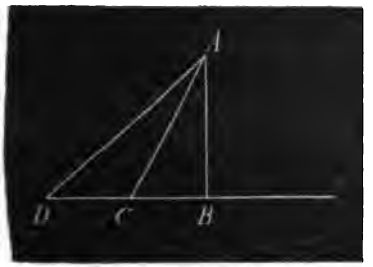
Scholion. Da in einem rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreieck jedenfalls der rechte, bezüglich stumpfe Winkel der grösseste im Dreieck so ist, so muss auch die demselben gegenüberliegende Seite die grösseste im Dreiecke sein.

Definitionen. Im rechtwinkligen Dreiecke wird die dem rechten Winkel gegenüberliegende, also grösseste Seite Hypotenuse genannt, die beiden andern heissen Katheten.

Digitized by Google

Zusatz. „Wenn von einem Punkte *A* (Fig. 100) aus nach einer Graden *BD*

Fig. 100.



beliebige Linien gezogen werden, *AB*, *AC*, *AD*, worunter eine senkrechte *AB*, so ist diese die kürzeste, und die Linien werden immer grösser, je mehr sie sich von der senkrechten entfernen."

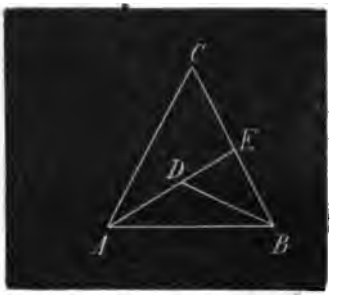
Es ist nämlich im rechtwinkligen Dreieck *ABC* die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *AC* grösser als *AB*, im stumpfwinkligen Dreiecke *ACD* die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite *AD* grösser als *AC*, u. s. w.

Hier zu nennen ist auch der selbstverständliche Satz:

Lehrsatz 18. „Zwei Seiten eines Dreiecks sind immer grösser als die dritte." — Denn zwei Seiten *AC* und *CB* bilden eine gebrochene Linie, welche zwei Punkte *A* und *B* verbindet, während die Grade *AB*, also die dritte Seite die kürzeste Verbindung derselben ist. Aus diesem Satze folgt dann leicht der folgende:

Lehrsatz 19. „Wenn man von einem Punkte *D* im Innern eines Dreiecks *ABC* (Fig. 101) zwei Grade nach den Eckpunkten *A* und *B* zieht, so sind sie zusammen kleiner als die Seiten *AC*+*BC*."

Fig. 101.

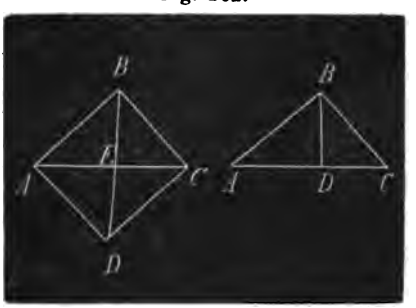


Beweis. Man verlängere *AD* bis zum Schnittpunkte *E* mit *BC*, so ist nach dem vorigen Satze *AE* kleiner als *AC* + *CE*, also wenn man auf beiden Seiten das Stück *EB* hinzufügt, *AE*+*EB* kleiner als *AC*+*CB*. Ferner *DB* kleiner als *DE*+*EB*, also wenn man auf beiden Seiten das Stück *AD* hinzufügt: *AD*+*DB* kleiner als *AE* + *EB* und um so mehr als *AC*+*CB*.

Lehrsatz 20. „Wenn in 2 Dreiecken je 2 Seiten bezüglich gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so ist die dritte Seite in demjenigen Dreieck die grössere, wo ihr der grössere Winkel gegenüberliegt."

Beweis. Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden. Immer nämlich kann man das eine Dreieck so auf das andre legen, dass eine Seite des einen *AB* mit der des andern zusammenfällt. Die andere Seite *BD* des einen wird dann mit *AB* gleichen *BC* des andern nicht zusammenfallen, und es kann Punkt *D* a) ausserhalb des Dreiecks *ABC*, b) in die Seite *AC*, c) innerhalb des Dreicks fallen. Fall a) (Fig. 102) Möge *BD* die *AC* in *E* schneiden, so ist *AD* kleiner als

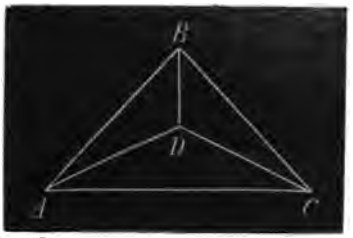
Fig. 102.



AE+*ED*, *BC* kleiner als *BE*+*EC*, also durch Addition *AD* + *BC* kleiner als *AE*+*ED*+*BE*+*EC*, d. h. als *BD*+*AC*, da aber *BD*=*BC*, so muss *AD* kleiner als *AC* sein, wie zu beweisen war. — Fall b): hier ist der Satz selbstverständlich wahr. — Fall c) (Fig. 103) Aus Lehrsatz 19. folgt unmittelbar, dass

Digitized by Google

Fig. 103.



$AD + DB$ kleiner als $AC + CB$ ist, und da $DB = CB$, so muss AD kleiner als AC sein. Dieser Satz ist einer Umkehrung fähig.

Lehrsatz 21. „Wenn in 2 Dreiecken 2 Seiten des einen bezüglich denen des andern gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, so liegt in demjenigen Dreiecke, wo diese dritte Seite die grössere ist, ihr auch der grössere Winkel gegenüber.

Beweis. Denn seien (Fig. 98) $AB = DE$, $AC = DF$ und BC grösser als EF. Nehmen wir dann an, Winkel A wäre gleich D, so wären die Dreiecke congruent, (2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich,) mithin gegen die Voraussetzung $BC = EF$. Wäre ferner D grösser als A, so müsste nach dem vorigen Satze, aber ebenfalls gegen die Voraussetzung, EF grösser als BC sein; es bleibt also nur der dritte Fall als möglich übrig, dass Winkel A grösser als D ist.

VII. Lehrsatz und Scholion.

Mit Hülfe der Betrachtungen des vorigen Paragraphen lässt sich in einem bestimmten wichtigen Falle dem Lehrsatz 15. eine andere Form geben.

Lehrsatz 22. „Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen entsprechend 2 Seiten und die Gegenwinkel der grösseren Seite gleich sind."

Beweis. Da nur der grössesten Seite eines Dreiecks ein rechter oder stumpfer Winkel gegenüber liegen kann, so sind die Gegenwinkel der andern gegebenen Seite immer gleichzeitig spitz. Es erfüllt sich also die Bedingung des Lehrsatzes 15. von selbst.

Scholion. Wir stellen hier die vier oder 5 Sätze von der Congruenz nochmals zusammen.

Zwei Dreiecke sind congruent:

A. Wenn 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel,
B. wenn eine Seite und 2 Winkel,
C. wenn alle 3 Seiten,
D. wenn 2 Seiten und der Gegenwinkel der grösseren von ihnen,
E. wenn 2 Seiten und der Gegenwinkel der kleineren

entsprechend gleich sind. Im letzteren Falle mit der Massgabe, das man ausserdem noch wissen muss, ob die Gegenwinkel der kleineren Seite beide gleichzeitig spitz oder recht oder stumpf sind.

Mit dieser wohl zu berücksichtigenden Ausnahme, kann man sagen, Dreiecke seien congruent, wenn ihnen entweder alle 3 Seiten, oder 2 Seiten und ein Winkel oder eine Seite und 2 Winkel gleich seien, kurz wenn von den 6 Stücken, die ein Dreieck enthält den 3 Seiten und den 3 Winkeln überhaupt 3, die jedoch nicht alle gleichzeitig Winkel sein dürfen, gleich sind.

Was die Bezeichnung der Congruenz anbetrifft, so wollen wir noch folgende Bemerkung machen. — Sagt man z. B. Dreieck ABC sei congruent DEF, so ist damit an sich noch nicht festgestellt, welches die gleichen Seiten bezüglich Winkel der Dreiecke sein. Wir werden nun durchgehend festsetzen, dass die 3 Buchstaben, welche ein Dreieck bezeichnen, so geschrieben werden sollen, dass die Bezeichnungen der gleichen Winkel und Seiten in gleicher Ordnung folgen. Schreiben wir also $ABC \cong DEF$, so heisst dies, dass Winkel $A = D$, $B = E$, $C = F$, und Seite $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$ ist. Es ist also die Reihenfolge der Buchstaben nur bei einem der congruenten Dreiecke als willkürlich zu betrachten.

Was die Congruenz der Vielecke anbetrifft, so gilt für dieselben folgender selbstverständliche Satz:

Zusatz. „Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie sich in irgend einer Weise in derselben Reihenfolge in gleichliegende congruente Dreiecke zerlegen lassen."

Ist die Reihenfolge der congruenten Dreiecke nicht dieselbe, oder liegen dieselben nicht gleich, so sind die Vielecke zwar nicht congruent aber flächengleich.

Die Sätze von der Congruenz vereinfachen sich natürlich für gleichschenklige und für rechtwinklige, noch mehr für gleichseitige Dreiecke.

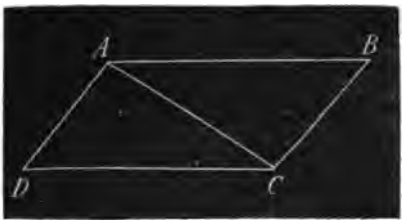
Da namentlich in den letzteren die Winkel gegeben sind, so sind sie congruent, wenn in beiden eine Seite gleich ist.

VIII. Definitionen und Lehrsätze.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf Parallelogramme, in Bezug auf welche sich aus der Congruenz der Dreiecke wichtige Folgerungen ergeben.

Digitized by Google

Fig. 104.



Definition. Sei *ABCD* (Fig. 104) ein beliebiges Parallelogramm, dessen eine Diagonale *AC* ist. Beiläufig bemerkt, wird oft, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, das ganze Parallelogramm durch die Buchstaben *AC*, welche sich an den Endpunkten einer Diagonale befinden, bezeichnet. Je zwei Seiten eines Parallelogramms sind entweder anstossende, wie *AD* und *AB*, oder gegenüberliegende, wie *AD* und *BC*, *AB* und *CD*. Eben so heissen die Winkel *A* und *D*, welche an einer Seite liegen anstossende, *A* und *C* gegenüberliegende.

Die Diagonale theilt das Parallelogramm in 2 Dreiecke *ADC* und *CBA*; offenbar haben dieselben die Seite *AC* gemein, es ist ferner Winkel $DAC = BCA$, und $DCA = BAC$ als Wechselwinkel, mithin sind die Dreiecke congruent. Also:

Lehrsatz 23. „Jede Diagonale theilt ein Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke."

Ist Dreieck *ACD* gegeben, und zieht man *AB* parallel *DC*, *CB* parallel *AD*, so entsteht mithin ein Parallelogramm, welches ein dem gegebenen congruentes Dreieck enthält, also: doppelt so gross, als ersteres ist.

Zusatz. „Jedes Dreieck kann als die Hälfte eines Parallelogramms betrachtet werden, welches mit ihm 2 anstossende Seiten gemein hat."

Aus dem letzten Lehrsatze folgt noch: $AD = BC$, $DC = BA$, Winkel $D = B$, auch ist $A = C$, da beide aus zwei entsprechend gleichen Winkeln zusammengesetzt sind, d. h.:

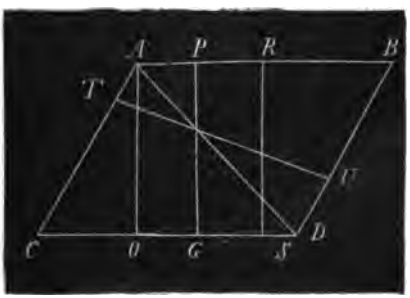
Lehrsatz 24. „In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten, und die gegenüberliegenden Winkel gleich."

Man kann den ersten Theil dieses Satzes auch anders ausdrücken. Zieht man zwischen zwei parallelen Linien *AB* und *CD*, zwei andere *AD* und *BC* so entsteht offenbar ein Parallelogramm, und es muss $AB = CD$, $AD = CB$ sein, oder:

Zusatz. „Parallelen zwischen Parallelen sind gleich."

Zieht man namentlich von der einen Seite *AB* eines Parallelogramms (Fig. 105) aus senkrechte Linien *PG* und *RS* nach der Gegenseite *CD*, so sind diese

Fig. 105.



parallel, da die Gegenwinkel *APQ*, *ARS* rechte, also gleich sind, es werden auch diese Senkrechten unter einander gleich sein.

Definition. Eine Senkrechte *PQ*, von einer Seite auf die Gegenseite des Parallelogramms gezogen heisst Höhe desselben. Die Seite *CD*, auf welche die Höhe gefällt ist, wird Grundlinie genannt. Nehme man *AC* als Grundlinie, so wäre *TU* die Höhe. Ein Parallelogramm hat also zwei Grundlinien und zwei Höhen.

Wenn man von der Winkelspitze *A*

Digitized by Google

eines Dreiecks ACD aus, (Fig. 105) eine Senkrechte auf die Gegenseite CD zieht, so heisst auch diese Höhe des Dreiecks und CD selbst seine Grundlinie. Beide hat das Dreieck mit dem Parallogramm $ABDC$, das doppelt so gross als das Dreieck ist, gemein. Da ein Dreieck drei Winkelspitzen hat, so besitzt es auch drei Höhen. Es folgen jetzt einige Sätze, welche erkennen lehren unter welchen Umständen ein Viereck ein Parallelogramm ist.

Lehrsatz 25. „Jedes Viereck, worin je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogramm."

Beweis. Seien in $ABCD$ (Fig. 104) $AB = CD$, $AD = BC$, ziehen wir die Diagonale AC, so ist Dreieck $ADC \cong CBA$, wegen Gleichheit der drei Seiten, also Winkel $DAC = ACB$, und da dies Wechselwinkel sind, DA parallel CB, ebenso Winkel $DCA = BAC$, also, da dies ebenfalls Wechselwinkel sind, AB parallel CD, das Viereck also ein Parallelogramm.

Lehrsatz 26. „Jedes Viereck, worin zwei Seiten sowohl gleich als parallel sind, ist ein Parallelogramm."

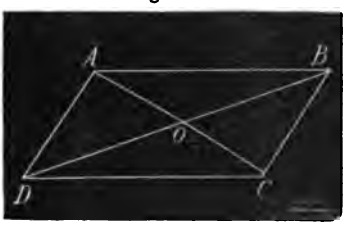
Beweis. Sei AB gleich und parallel CD (Fig. 104).

Die Diagonale AC ziehend, erhält man wieder congruente Dreiecke, denn es ist $AB = CD$, $AC = AC$, und die eingeschlossenen Winkel $BAC = DCA$ als Wechselwinkel paralleler Linien. Es folgt dann, dass auch $DC = AB$, also auch die andern Seiten gleich sind, mithin die Figur ein Parallelogramm ist.

Lehrsatz 27. „Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren sich."

Beweis. Es sollen (Fig. 106) im Parallelogramm $ABCD$ $AO = OC$, $DO = OB$

Fig. 106.



sein; Dreieck $AOB \cong COD$, dann $AB = CD$, Winkel $OAB = OCD$, $OBA = ODC$, woraus sich unser Satz ergibt.

Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so ist dies auch mit seinem Gegenwinkel der Fall. Für die beiden andern Winkel bleiben noch zwei Rechte übrig, und da diese gleich sind, muss auch jeder ein rechter sein. D. h.:

Lehrsatz 28. „Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so ist dasselbe ein Rechteck oder ein Quadrat."

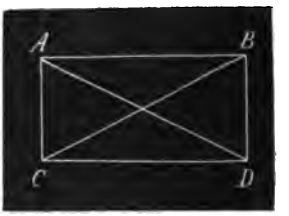
Ist in einem Parallelogramm ein Winkel spitz, so ist die Summe desselben und seines Gegenwinkels kleiner als zwei rechte, mithin die beiden anderen Gegenwinkel zusammen grösser als zwei rechte, und da sie gleich sind, jeder davon grösser als ein rechter, mithin ein stumpfer. D. h.:

Lehrsatz 29. „Die Rhomben und Rhomboiden enthalten immer zwei spitze und zwei stumpfe Winkel."

Die folgenden Sätze geben charakteristische Eigenschaften der Rechtecke, Quadrate und Rhomben.

Sei $ABDC$ (Fig. 107) ein Rechteck, AD und BC seine Diagonalen, so ist

Fig. 107.

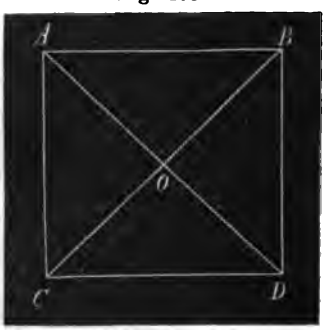


Dreieck $ACD \cong BDC$, da Winkel $D = C$ als rechte, $AC = BD$, $DC = DC$ ist, mithin auch $BC = AD$. D. h.:

Lehrsatz 30. „Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich."

Ist $ABDC$ (Fig. 108) ein Rhombus,

Fig. 108.



AD und CB seine Diagonalen, so ist $AB = DB$, also BO die Mittellinie des gleichschenkligen Dreiecks ADB, und sie steht somit auf der Grundlinie DB senkrecht (Lehrsatz 7). also:

Lehrsatz 31. „Die Diagonalen eines Rhombus stehen auf einander senkrecht."

Das Quadrat gehört sowohl den Recht-

ecken an, da seine Winkel rechte, als auch den Rhomben, da seine Seiten gleich sind; es nimmt also an den Eigenschaften beider Theil. D. h.:

Lehrsatz 32. „Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich, und stehen auf einander senkrecht."

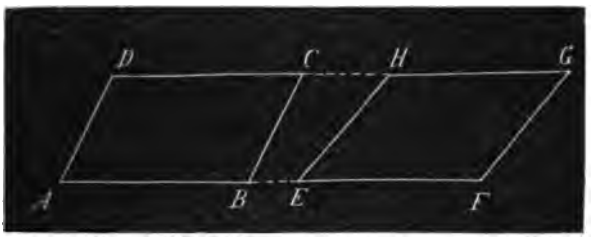
4) Ueber die Flächengleichheit und die Ausmessung der Vielecke.

I. Lehrsätze. Der folgende Satz liegt den Betrachtungen dieses Abschnittes zu Grunde, und ist daher als Hauptlehrsatz zu bezeichnen.

Lehrsatz 1. „Zwei Parallelogramme, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben, sind flächengleich."

Beweis. Seien *ABCD* und *EFGH* (Fig. 109) die Parallelogramme, also die Grundlinien $AB = EF$, und ebenso die entsprechenden Höhen. Wir legen diese Parallelogramme so, dass *AB* und *EF* in einer graden Linie liegen, ohne zusammenzufallen; es ist dann ersichtlich,

Fig. 109.



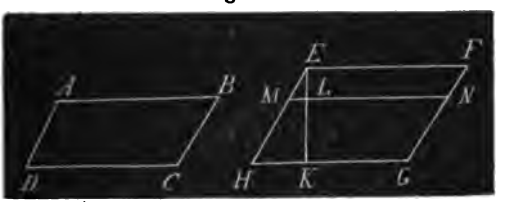
dass auch *CD* und *GH* in einer Graden liegen, da sonst die Höhen, d. h. die senkrechten Entfernungen dieser Linien von *AB* und *EF* nicht gleich sein könnten. Betrachten wir nun die Trapeze *ADHE* und *BCGF*, so sind in denselben alle Winkel bezüglich gleich, denn es sind z. B. *DAE* und *EBF* Gegenwinkel paralleler Linien, und gleiches gilt von den andern Winkeln. Auch sind alle Seiten entsprechend gleich, nämlich $AD = BC$, $HE = GF$ als Gegenseiten von Parallelogrammen, $AE = BF$, da sie aus den gleichen Stücken $AB = EF$ und dem gemeinschaftlichen *BE* bestehen, ebenso $DH = CG$, da sie *CH* gemein haben, und $DC = HG$ ist. Es sind also die Trapeze congruent, also jedenfalls flächengleich. Zieht man von beiden aber das gemeinschaftliche Stück *BEHC* ab, so bleiben *ADCB* und *EHGF*, und diese Parallelogramme sind also, wie zu beweisen war, flächengleich.

Dieser Satz ist umzukehren:

Lehrsatz 2. „Parallelogramme, die gleiche Grundlinie und ungleiche Höhe, und gleiche Höhe und ungleiche Grundlinie haben, können nicht flächengleich sein."

Beweis. Denn habe von den Parallelogrammen *ABCD* und *EFGH* (Fig. 110), wo $DC = HG$ ist, das letztere die grössere Höhe *EK*, so lässt sich *KL* gleich der Höhe von *ABCD* abschneiden und

Fig. 110.



durch *L* ziehen *MN* parallel *HG*. Dann ist Parallelogramm *MNGH* flächengleich mit *ABCD*, es kann also *EFGH*, welches grösser ist, diese Eigenschaft nicht haben.

Seien jetzt die Grundlinien ungleich aber die Höhen gleich (Fig. 111) und zwar *HG* grösser als *DC*; wird dann $HK = DC$, *KL* parallel *EH*, so ist $ELKH = ABCD$, also kann *EFGH* diese Eigenschaft nicht haben.

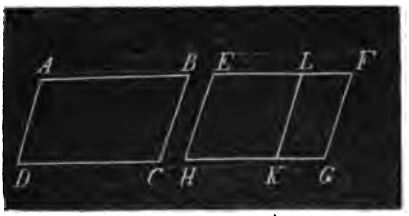
Hieraus folgt dann leicht.

Lehrsatz 3. „Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleichem Flächeninhalt haben gleiche Höhe, Parallelogramme von gleicher Höhe und gleichem Flächeninhalt gleiche Grundlinie.

Beweis. Denn wären die Höhen bezüglich Grundlinien nicht gleich, so ergäben sich nach dem vorigen Satze ungleiche Flächeninhalte.

Digitized by Google

Fig. 111.



Die Sätze 1), 2) und 3) finden unmittelbar auch auf Dreiecke Anwendung; denn man kann ein Dreieck *ABC* immer als die Hälfte eines Parallelogramms denken, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Somit also namentlich:

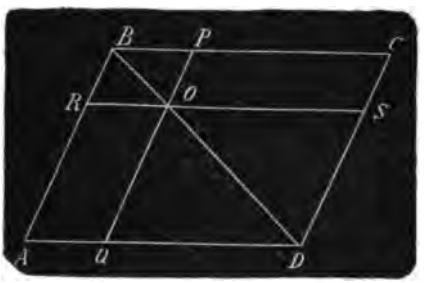
Zusatz. „Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe haben gleichen Flächeninhalt, Dreiecke von gleicher Grundlinie und Flächeninhalt gleiche Höhe, Dreiecke von gleichem Flächeninhalte und Höhe gleiche Grundlinie. Haben ferner ein Dreieck und ein Parallelogramm gleiche Grundlinie und Höhe, so ist Ersteres doppelt so gross als das Letztere.

II. Lehrsätze. In dem Folgenden geben wir noch zwei Sätze über Flächengleichheit.

Lehrsatz 4. „Werden durch einen beliebigen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms zwei Linien parallel den Seiten gezogen, und somit das Parallelogramm in vier andere getheilt, so sind von diesen Theilen diejenigen beiden flächengleich, durch welche die Diagonale nicht geht."

Beweis. Sei *ABCD* (Fig. 112) das

Fig. 112.



Parallelogramm. Durch Punkt *O* seiner Diagonale ist gezogen, *RS* parallel *AD*, *PQ* parallel *AB*. Diejenigen zwei Parallelogramme durch welche *BD* nicht geht, sind *PS* und *QR*, und diese sollen flächengleich sein.

Da eine Diagonale ein Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke theilt, ist $BAD \cong BCD$, $RBO \cong POB$, $DSO \cong OQD$. Zieht man die Summe der Dreiecke links und rechts der beiden letzten Congruenzen von denen in der ersten ab, so bleiben die Parallelogramme *PS* und *RQ* übrig, womit deren Flächengleichheit erwiesen ist. Den folgenden Satz knüpfen wir an eine Definition.

Definition. Scheitel-Dreiecke heissen solche Dreiecke, worin ein Winkel des einen Scheitelwinkel von einem des andern Dreiecks ist. — Es sind somit *OAB* und *OCD* (Fig. 113) Scheitel-Dreiecke.

Lehrsatz 5. „Scheitel-Dreiecke sind gleich, wenn die Verbindungslinien je

Fig. 113.

Digitized by Google

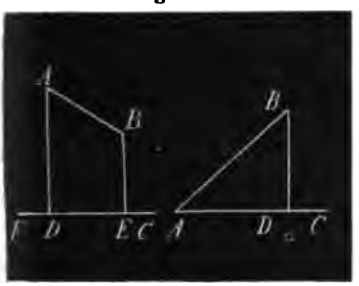
zweier Ecken, die nicht den Scheitelwinkeln angehören, parallel sind."

Beweis. Es sind diese Verbindungslinien AC und BD (Fig. 113), wenn diese parallel sind, so haben die Dreiecke ACB und ACD gemeinschaftliche Grundlinie AC und gleiche Höhe, sie sind also flächengleich. Zieht man von beiden das gemeinschaftliche Stück AOC ab, so bleiben die Scheitel-Dreiecke übrig, und somit ist unser Satz erwiesen.

III. Lehrsätze. Die folgenden Sätze geben höchst wichtige Eigenschaften der rechtwinkligen Dreiecke. Wir knüpfen dieselben zunächst an eine Definition.

Definition. Wenn man von den Endpunkten einer begrenzten Linie (Fig. 114) AB Senkrechte auf eine andere

Fig. 114.

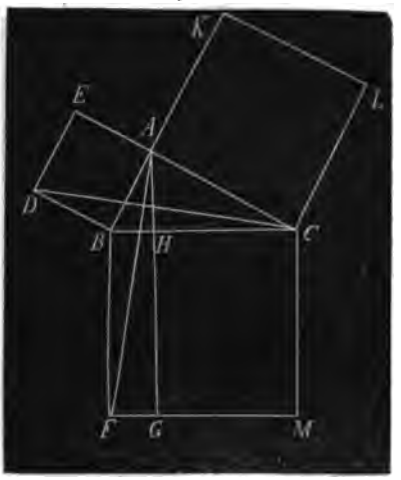


Linie FC fällt, so schneiden dieselben ein Stück derselben DE ab, welches man die Projection von AB auf FC nennt. Wenn beide Linien AB und AC sich in A schneiden, und man zieht von B aus Loth BD auf AC, so ist AD die Projection von AB auf AC.

Lehrsatz 6. „In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das über einer Kathete errichtete Quadrat gleich einem Rechtecke, welches zu Seiten hat die Projection dieser Katheten auf die Hypotenuse und die Hypotenuse selbst."

Beweis. Sei Dreieck ABC (Fig. 115) bei A rechtwinklig, also BC die Hypotenuse, AH senkrecht auf BC, $BF = BC$ und senkrecht darauf, $BFGH$ ein Rechteck, BD und AE senkrecht auf BA und gleich dieser Linie, so ist HF das bezeichnete Rechteck, $BAED$ das Quadrat. Wir ziehen die Linie DC und AF, so wird sein: Dreieck $DCB \cong AFB$. Denn $DB = AB$ sind Seiten eines Quadrates, BF war gleich BC gemacht, die eingeschlossenen Winkel DBC und ABF sind gleich, da beide einen Rechten und ausserdem das gemeinschaftliche Stück ABC enthalten. Nun hat Dreieck ABF Grundlinie BF und Höhe BH mit Rechteck

Fig. 115.



HF gemein, während Dreieck DCB Grundlinie DB und Höhe BA mit dem Quadrate $BAED$ gemein hat, und hieraus folgt die Gleichheit von Rechteck und Quadrat, da sie doppelt so gross als die Dreiecke sind. — Errichtet man auch über AC das Quadrat $ACLK$ und zieht CM senkrecht auf BC, GM in der Verlängerung von FG, so ist $CM = BF$ (Parallelen zwischen Parallelen) also $BCMF$ ein Quadrat. Nach dem eben bewiesenen Satze ist HM flächengleich mit dem Quadrate $ACLK$. Also, wenn man beide Rechtecke und beide Quadrate addirt, $BFMC = ABDE + ACLK$ oder:

Lehrsatz 7. „Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate, welche über beiden Katheten errichtet sind."

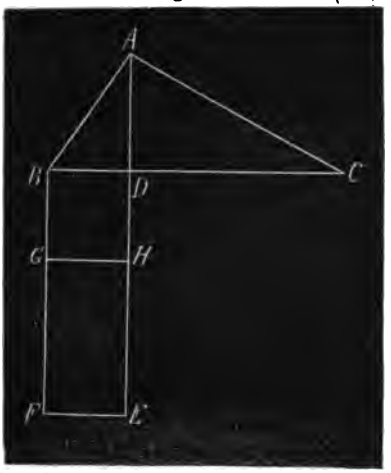
Scholion. Dieser wichtige Satz ist der sogenannte Pythagoraeische, der hier gegebene Beweis ist unter den vielen, welche man für ihn gefunden hat, der gewöhnlichste und schon von Euklid gegeben, ob auch von ihm zuerst gefunden, ist unbekannt. Mit den Lehrsätzen 6. und 7. ist noch der folgende zu verbinden.

Lehrsatz 8. „Wenn man vom Scheitel des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse zieht, und somit dieselbe in zwei Abschnitte theilt, so ist das Quadrat dieses Loths gleich dem Rechtecke, welches beide Abschnitte der Hypotenuse zu Seiten hat."

Beweis. Sei A (Fig. 116) der rechte Winkel, AD senkrecht auf BC gezogen, $BF = BC$ und BE ein Rechteck, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke BAD nach

Digitized by Google

Fig. 116.



dem letzten Satze das Quadrat über AB geich der Sum me derer über BD und AD, zugleich aber nach Lehrsatz 6, das erstgenannte Quadrat gleich dem Rechtecke BE, also dieses Rechteck gleich der Summe der Quadrate über BD und DA. Macht man BG gleich BD, und zieht GH parallel BD, so ist $BGHD$ das Quadrat über BD, also Rechteck GE gleich dem Quadrate über AD. Aber $GH = BD$, $GD = BD - BG = BC - DB = DC$, so dass dieses Rechteck zu Seiten DB und DC also die Abschnitte der Hypotenuse hat, und ist dasselbe, wie zu beweisen war, gleich dem Quadrate über AD.

IV. Erläuterungen und Definitionen. Eine Raumgrösse ausmessen heisst finden, wie oft eine andere gleichartige in ihr enthalten ist. Die letztere heisst das Maass. Das Maass einer Linie ist also immer eine Linie, das einer Fläche eine Fläche, u. s. w. Im Uebrigen ist das Maass an sich willkürlich. Die Zahl, welche angibt, wie oft das Maass in einer gegebenen Raumgrösse enthalten ist, heisst Zahlenwerth derselben. Sie wird nicht immer eine ganze Zahl sein. Ist sie ein echter oder unechter Bruch $\frac{15}{8}$ oder $\frac{p}{q}$, so heisst dies, dass die zu messende Grösse 15 (p) mal den 8ten ($q$ten) Theil des Maasses enthalte. Nimmt man also als Maass den $p$ten Theil des ursprünglichen, so ist die Zahl eine ganze. Lässt sich von zwei gegebenen gleichartigen Grössen keine durch einen genauen Bruch durch die andere ausdrücken, so nennt man die Grössen incommensurabel. Nimmt man dann einen beliebigen Theil der einen als Maass, so wird dies in der andern immer eine gewisse ganze Anzahl von Malen enthalten sein, aber dabei ein Stück übrig bleiben, welches kleiner als das Maass ist. Da nun letzteres so klein als man will genommen werden kann, so lässt sich die eine Grösse immer durch die andere mittels eines Bruches, wenn auch nicht völlig genau, doch mit einem beliebig klein zu machenden Fehler ausdrücken.

Das Maass der Linien und der Flächen ist allerdings beliebig und von einander unabhängig, jedoch bieten sich grosse Bequemlichkeiten dar, wenn man beide in eine gewisse Beziehung setzt, und zwar ist dieselbe folgender Art.

Als Maass der Linien bestimmt man eine Grade von beliebiger Länge, als Maass der Flächen ein Quadrat, welches diese Linie zur Seite hat. Diese Bestimmung ist bei den folgenden Betrachtungen immer vorausgesetzt. — Was das Maass der Winkel anbetrifft, so bietet sich als solches von selbst der gestreckte oder der rechte Winkel dar. Sind kleinere Maasse nöthig, so nimmt man den 90sten Theil des rechten Winkels, Grad genannt, hierzu. Der 60ste Theil des Grades wird Minute (*minutum primum*), der 60ste Theil der Minute, Secunde (*minutum secundum*) genannt. — Selbstverständlich findet bei Linien und Flächen ein solches sich natürlich darbietende Maass nicht statt. — Statt des Ausdrucks Maass kann man auch den der Einheit (des Messens) anwenden.

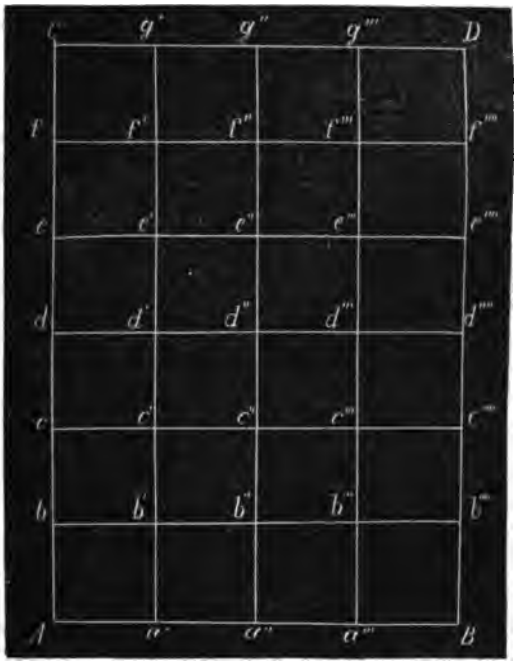
V. Lehrsätze.

Lehrsatz 9. „Wenn man die beiden anstossenden Seiten eines Rechtecks in eine Anzahl gleicher Theile theilt, die eine Seite in p die andere in q solcher Theile, so wird dadurch das Rechteck in eine Anzahl von $p \cdot q$ Quadrate getheilt, deren jedes einen solchen Theil zur Seite hat.

Beweis. Sei z. B. das Rechteck $ABDC$ (Fig. 117) gegeben, und Seite AB in vier Theile aa', $a'a''$, $a''a'''$, $a'''B$, AC in deren sechs Ab, bc, cd, de, ef, fC getheilt, die alle unter einander gleich sind. Zieht man durch jeden der Theilpunkte von AB Linien parallel mit AC, und durch jeden Theilpunkt von AC solche parallel mit AB, so entsteht eine Anzahl Vierecke, die wir zunächst als Rechtecke bezeichnen können, da alle Winkel rechte sind. Es ist aber auch $Aa' = bb'$, $a'a'' = b'b'' \ldots$, $Ab = a'b'$, $bc = b'c' \ldots$ immer als Parallelen zwischen Parallelen. Es sind also auch alle Seiten gleich, die

Digitized by Google

Fig. 117.



Vierecke also Quadrate und haben dieselben einen Theil Aa' als Seite. Was die Anzahl derselben anbetrifft, so grenzen vier davon an AB, über denselben befinden sich ebensoviel, und dies wiederholt sich so oft als AC Theile hat, so dass man $4 \cdot 6$, oder wenn dieselbe Zahl der Theile bezüglich p und q ist, $p \cdot q$ solcher Quadrate erhält.

Zusatz. Nimmt man statt des Rechtecks ein Quadrat, und wird die eine Seite in p Theile getheilt, so wird auch die andere Seite in ebensoviel, das ganze Quadrat also in $p \cdot p = p^2$ kleinerer zerlegt.

Auf diesem Satze beruht die Messung der Rechtecke und Quadrate.

Lehrsatz 10. „Der Flächeninhalt eines Rechtecks wird gefunden, wenn man den Zahlenwerth zweier anstossenden Seiten mit einander multiplicirt."

Erläuterung. Es heisst dies nach IV., dass man durch Multiplication beider Zahlenwerthe findet, wie oft die Flächeneinheit, also ein Quadrat, welches die Linieneinheit zur Seite hat in dem Rechtecke enthalten ist. Haben z. B. die Seiten bezüglich 4 oder 5 Zoll, so enthält das Rechteck $4 \cdot 5 = 20$ Quadratzoll, d. h. Quadrate, deren Seite 1 Zoll beträgt.

Beweis. Es ist dieser Satz selbstverständlich, wenn das Maass eine ganze Anzahl von Malen in beiden Seiten enthalten ist; denn sind $p \cdot q$ diese Zahlen, so können diese Seiten in p und q Theile getheilt werden, deren jeder dem Maasse gleich ist, und nach vorigem Satze werden dadurch pq Quadrate, deren jedes der Flächeneinheit gleich ist, gebildet. — Seien jetzt die Zahlenwerthe Brüche und etwa $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$. Nimmt man denn $\beta\delta$ten Theil des Masses, so enthalten die Seiten des Rechtecks bezüglich:

$$\frac{\alpha}{\beta}\beta\delta = \alpha\delta, \text{ und } \frac{\gamma}{\delta}\beta\delta = \gamma\beta,$$

also beide ganze Anzahl von Theilen. Dadurch wird das Rechteck in $\alpha\delta \cdot \gamma\beta$ Quadrate getheilt. Die Flächeneinheit, d. h. das Quadrat, welches die Linieneinheit zur Seite hat, enthält aber $\beta\delta \cdot \beta\delta$ solcher Quadrate, da ja eine Seite p die Seite eines solchen $\beta\delta$ mal enthält, und somit ist die Flächeneinheit in dem Rechteke $\frac{\alpha\delta \cdot \gamma\beta}{\beta\delta \cdot \beta\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$ mal enthalten, was zu beweisen war. — Ist aber eine Seite oder beide mit dem Maasse

Digitized by Google

incommensurabel, so denke man eine beliebige Linie n, die dem $s$ten Theile des Maasses gleich ist. Werden dann Seiten AB und AD (Fig. 118) in Theile ge-

Fig. 118.

theilt, die gleich n sind, so bleibt von AB ein Stück EB übrig und von AD ein Stück GD, welche beide kleiner als n sind. Es entsteht dabei ein Rechteck $AEFG$, welches kleiner als $ABCD$ ist, und das genau sich durch ein Quadrat mit Seite n, also durch den $s \cdot s$ten Theil des Flächenmaasses, also mittels eines Bruches ganz wie oben gezeigt, durch das Flächenmaass selbst ausdrücken lässt. Enthalte jetzt AE die Linie n $p$mal, AG dieselbe $q$mal, so ist um $ABCD$ zu finden, noch das Stück $EBCH + DGFH$ hinzuzunehmen. Da EB kleiner als n ist, so enthält $EBCH$ das Quadrat, welches n zur Seite hat weniger als $q$mal, und $DFHG$ dasselbe weniger als $p$mal. Da nun n beliebig klein genommen werden kann, so lässt sich der Fehler $EBCH + DGFH$ so klein machen, dass er ein beliebiger Theil des Flächenmaasses wird, also auf jede gegebene Grenze der Genauigkeit mit letzterem übereinstimmt.

Zusatz. „Der Flächeninhalt eines Quadrats wird gefunden, wenn man den Zahlenwerth der Seite mit sich selbst multiplicirt, d. h. ins Quadrat erhebt."

Es folgt dies einfach daraus, dass ein Quadrat ein Rechteck mit gleichen Seiten ist.

Scholion. Ein Zahl mit sich selbst multiplicirt giebt bekanntlich eine andre, die man das Quadrat der ersteren nennt. Es ist einleuchtend, wie dieser Ausdruck der eben gegebenen geometrischen Betrachtung entnommen ist. Man bezeichnet aber auch, die arithmetische Ausdrucksweise ausschliessend, das Quadrat, welches AB zur Seite hat, mit AB^2, auch das Rechteck, welches AB und AD zu Seiten hat mit $AB \cdot AD$, indem man für die Linien und Flächen ihre Zahlenwerthe substituirt denkt. Arithmetische Sätze zeigen nun leicht, wie man aus Zahlenwerthen von Quadraten und Rechtecken die Seiten finden kann. Auch führen arithmetische Betrachtungen leicht zu geometrischen Sätzen, wenn man berücksichtigt, dass jedes Product von Zahlen unter deren Einheit man sich eine Linie denkt den Flächeninhalt eines Rechtecks vorstellt. Z. B. Sei m der Zahlenwerth eines Quadrats, x der von dessen Seite, so ist

$$x^2 = m, \quad x = \sqrt{m}$$

d. h.:

„Der Zahlenwerth der Seite eines Quadrats wird aus dem des letzteren gefunden, wenn man die Quadratwurzel ausziehet."

Sei ferner a der Zahlenwerth der einen Seite eines Rechtecks, m der Flächeninhalt, und suchen wir die andere Seite x, so ist

$$ax = m, \quad x = \frac{m}{a}.$$

Seien a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks (Zahlenwerthe derselben), so ergibt sich die Hypotenuse x in folgender Weise. Nach dem Pythagoraeischen Satze ist:

$$x^2 = a^2 + b^2 \text{ also } x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

u. s. w. Die bekannte arithmetische Formel:

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

giebt wenn man sich unter a und b Linien denkt folgenden wichtigen Satz:

A) „Theilt man die Seite eines Quadrats in zwei beliebige Theile, so wird das Quadrat aus vier Stücken bestehen, wovon zwei Quadraten gleich sind, welche immer eins der Stücke zu Seiten haben, und die beiden andern Rechtecken, welche beide Stücke zu Seiten haben."

B) „Ein Quadrat dessen Seite die Differenz zweier gegebenen Linien ist, enthält das Quadrat jeder dieser Linien weniger zwei gleichen Rechtecken, die beide zu Seiten haben."

Der folgende Paragraph giebt ebenfalls eine Anwendung dieser Betrachtungen.

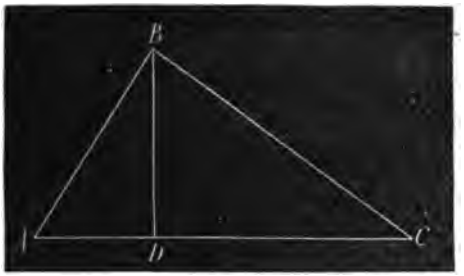
Digitized by Google

VI. Lehrsätze.

Lehrsatz 11. „In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite, welche einem spitzen Winkel gegenüber liegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger einem doppelten Rechteck, welches die eine dieser Seiten und die Projection der andern auf dieselbe zu Seiten hat."

Beweis. Sei (Fig. 119) C ein spitzer

Fig. 119.



Winkel, BD senkrecht auf AC, also DC die Projection von BC; es ist also zu beweisen, dass man hat:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CD$$

wo die arithmetischen Zeichen die im vorigen Paragraphen eingeführte Bedeutung haben. Im rechtwinkligen Dreieck ADB ist:

$$AB^2 = AC^2 + DB^2,$$

da man aber hat:

$$AD = AC - DC,$$

also:

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC,$$

so ergibt sich:

$$AB^2 = AC^2 + DC^2 + DB^2 - 2AC \cdot DC$$

und da in dem rechtwinkligen Dreiecke BDC ist:

$$DB^2 + DC^2 = BC^2,$$

so ergibt sich endlich, wie der Satz verlangt:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot DC.$$

Lehrsatz 12. „In jedem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf dieselbe.

Beweis. Es soll (Fig. 120) C ein stumpfer Winkel, BD das Loth auf AC sein, so ist

$$AB^2 = BD^2 + DA^2 = BD^2 + (AC + CD)^2$$
$$= BD^2 + AC^2 + CD^2 + 2AC \cdot CD$$

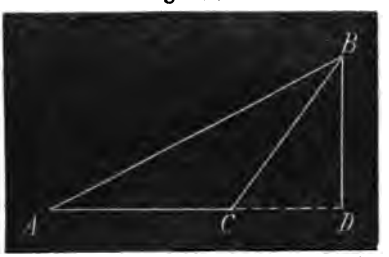
$BD^2 + CD^2 = BC^2$, also:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2AC \cdot CD,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Scholion. Die Lehrsätze 11. und 12. können als Erweiterungen des Pythago-

Fig. 120.



raeischen Satzes auf stumpf- und spitzwinklige Dreiecke betrachtet werden. Sie fallen beide in einen Satz zusammen, wenn man die Betrachtungen über das Vorzeichen der Raumgrössen (siehe den Artikel: Raumgrössen) berücksichtigt. Nimmt man nämlich an CD (Fig. 120) sei positiv, so wird (Fig. 119) CD negativ zu nehmen sein, da Punkt D in der entgegengesetzten Richtung von AC zu suchen ist wie im ersten Falle. Wenn also das doppelte Rechteck oder Product $2AC \cdot DC$ im ersten Falle positiv ist, ist es im zweiten als negativ zu betrachten.

Aus diesen Sätzen folgt leicht der jetzt zu gebende:

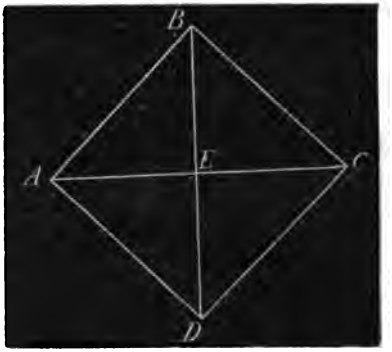
Lehrsatz 13. „In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate aller vier Seiten."

Beweis. Ist das Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 121) ein Rechteck, so ist $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AB^2 + AD^2 = BD^2$ aber da $AB = DC$ ist, durch Addition:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BC^2,$$

Digitized by Google

Fig. 121.



womit der Satz für diesen Fall erwiesen ist.

Sei jetzt (Fig. 122) das Parallelogramm kein Rechteck, DAB der spitze Winkel, mithin auch $CBF = DAB$ ein solcher, ziehe man DE und CF senkrecht auf AB, so ist Dreieck $ADE \cong BCF$, denn ausser den Winkeln DAE und CBF sind die Rechten einander gleich, und $AD = CB$. Es ist also auch $AE = BF$. Man hat nun in dem spitzwinkligen Dreiecke BAC nach Lehrsatz 11.:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AE$$

und im stumpfwinkligen Dreiecke ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BF$$

aber da $AB \cdot AE = AB \cdot BF$ ist, ergibt sich durch Addition, wenn man noch für AB einmal das gleiche CD setzt:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + AC^2 + DC^2,$$

womit der Satz allgemein bewiesen ist.

Aus diesem Satz lässt sich auch auf Dreiecke eine Anwendung machen. Dazu bedürfen wir jedoch eines andern Satzes.

Lemma. „Wenn die beiden Diagonalen eines Vierecks sich halbiren, so ist dasselbe ein Parallelogramm."

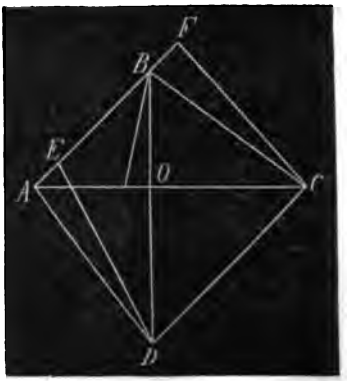
Beweis. Es sei (Fig. 121) $BE = ED$, $AE = EC$. Dann ist Dreieck $AEB \cong CED$, da 2 Seiten und die eingeschlossenen Winkel (als Scheitelwinkel) gleich sind. Hieraus folgt $AB = CD$.

Ebenso zeigt sich die Congruenz der Dreiecke BEC und CEA, woraus $AD = BC$ folgt, und somit hat das Viereck je zwei gleiche Gegenseiten, und ist somit ein Parallelogramm.

Ist nun ABC (Fig. 122) ein beliebiges Dreieck, E die Mitte von AC, so kann man leicht das Parallelogramm vervollständigen.

Für das Letztere gilt dann Lehrsatz 13. oder wenn man setzt $AD = BC$, $DC = AB$, $BD = 2BE$, so erhält man:

Fig. 122.



$$2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + (2 \cdot BE)^2 = AC^2 + 4BE^2,$$

d. h.

$$AB^2 + BC^2 = \frac{AC^2}{2} + 2BE^2,$$

oder:

Zusatz. „Wenn man in einem Dreiecke die Mitte einer Seite mit der gegenüberliegenden Ecke verbindet, so ist die Quadratsumme der beiden sie einschliessenden Seiten gleich dem halben Quadrate der dritten Seite vermehrt um das doppelte Quadrat der Verbindungslinie."

Offenbar spricht sich dieser Satz weit weniger gut als der Lehrsatz 13. aus, mit dem er eigentlich identisch ist.

VIII. Lehrsätze. Aus der Ausmessung der Rechtecke folgen sehr einfach die Grundzüge für die Ausmessung der übrigen Vielecke. Zunächst folgt daraus, dass jedes Parallelogramm einem Rechtecke von gleicher Grundlinie und Höhe flächengleich ist, bei dem letzteren aber die Höhe mit der an die Grundlinie anstossenden Seite gleichbedeutend ist.

Lehrsatz 14. „Der Flächeninhalt jedes Parallelogramms ist gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe desselben."

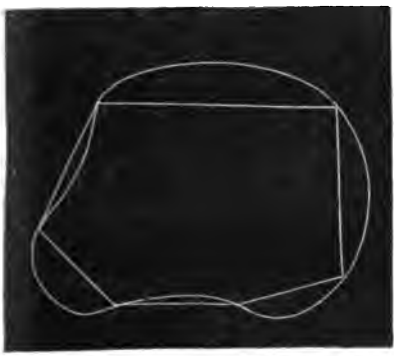
Ferner, da ein Parallelogramm doppelt so gross ist als ein Dreieck von gleicher Grundlinie und Höhe:

Lehrsatz 15. „Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Grundlinie und Höhe.

Scholion. Mit diesem Satze ist die Möglichkeit gegeben jedes Vieleck auszumessen, indem man es auf irgend eine Art in Dreiecke theilt, und jedes der-

selben einzeln misst. Aber auch zur Ausmessung krummliniger Figuren bis auf beliebige Grenzen der Genauigkeit ist man mittels dieser Betrachtungen im Stande. Indem man nämlich beliebige Punkte in der Begrenzung des Vielecks annimmt (Fig. 123) und dieselben durch grade Linien verbindet, erhält man ein Vieleck, dessen Inhalt sich der krummlinigen Figur um so mehr nähert, je

Fig. 123.



näher man diese Punkte an einander rücken lässt, so dass man bis auf einen beliebig klein zu machenden Fehler beide Figuren miteinander identificiren, und somit, wie oben gezeigt, verfahren kann.

Sei jetzt ein Trapez zu messen. Zu dem Ende führen wir noch folgende Definitionen ein.

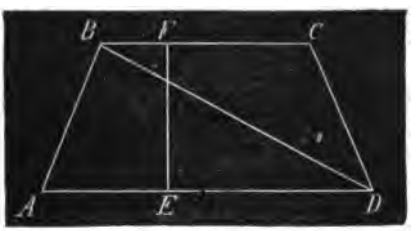
Definitionen: Höhe eines Trapezes heisst die zwischen beiden parallelen Seiten gezogene auf ihnen senkrechte Linie. Mittellinie eines Trapezes heisst die Grade, welche die Mitten der beiden nicht parallelen Seiten desselben verbindet.

Sei ein Trapez $ABCD$ (Fig. 124) gegeben, EF seine Höhe, BD eine Diagonale. Offenbar haben dann die Dreiecke ABD und BCD die Höhe EF gemein, wenn man AD und BC bezüglich zu Grundlinien nimmt. Der Flächeninhalt beider Dreiecke ist also bezüglich:

$$\frac{AD \cdot EF}{2}, \quad \frac{BC \cdot EF}{2},$$

ihre Summe oder der Flächeninhalt des Trapezes:

Fig. 124.



$$\frac{AD \cdot EF}{2} + \frac{BC \cdot EF}{2} = \frac{EF(AD+BC)}{2},$$

d. h.:

Lehrsatz 16. „Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich der Höhe mal der halben Summe der parallelen Seiten."

Es lässt sich diesem Satze noch eine andere Form geben. Dazu dient Folgendes:

Lemma. „Die Mittellinie eines Trapezes ist den parallelen Seiten gleichfalls parallel und gleich der halben Summe derselben."

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 125) das Trapez, EF die Mittellinie. Ziehe durch F mit AB parallel GH, so ist Dreieck $CFG \cong DFH$.

Fig. 125.

Digitized by Google

Denn nach der Annahme ist $CF = FD$, Winkel $CGF = FHD$ als Wechselwinkel paralleler Linien, und aus demselben Grunde Winkel $GCF = FDH$. Es ist also EF gleich und parallel mit BC, folglich $BEFG$ ein Parallelogramm, und EF parallel BG, womit der erste Theil des Satzes erwiesen ist.

Ferner ist

$$EF = BG = \frac{BG + AH}{2}.$$

Aber

$$BG = BC + CG, \quad CG = HD,$$

wegen der bewiesenen Congruenz, also:

$$BG + AH = BC + HD + AH = BC + AD,$$

also:

$$EF = \frac{BC + AD}{2};$$

dies aber ist der zweite Theil unseres Satzes. Aus ihm und Lehrsatz 16. folgt unmittelbar:

Lehrsatz 17. „Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Product aus Höhe und Mittellinie."

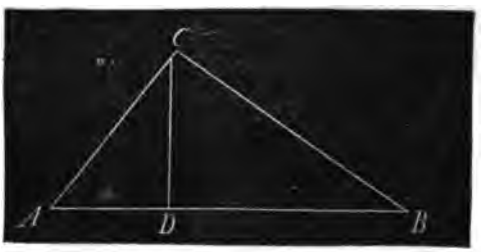
VIII. Aufgaben.

Es haben diese Aufgaben lediglich die Berechnung von Dreiecken zum Zwecke.

Aufgabe 1. In einem Dreiecke sind die Zahlenwerthe der Seiten gegeben, man soll den einer Höhe bestimmen.

Auflösung. Wir bezeichnen die Seiten (Fig. 126) des Dreiecks AB, BC, AC mit a, b, c, mit h die auf AB errichtete Höhe. Sei noch k die Projection von b auf a. Dieselbe soll negativ genommen werden, wenn der Winkel zwischen a und b ein stumpfer ist, also diese Projection nicht auf a selbst sondern auf seine Verlängerung trifft. Unter dieser Voraussetzung ist nach den Lehrsätzen 11. und 12. immer:

Fig. 126.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ak,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$k = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

Nach dem Pythagoraeischen Satze ist dann:

$$h^2 + k^2 = b^2, \; h^2 = b^2 - k^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)\,(2ab - a^2 - b^2 + c^2)}{4a^2} = \frac{[(a+b)^2 - c^2]\,[c^2 - (a-b)^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}{4a^2}.$$

Bezeichnen wir nun mit s die halbe Summe der drei Seiten, so ist

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

folglich auch:

$$s - a = \frac{b+c-a}{2}, \; s - b = \frac{a+c-b}{2}, \; s - c = \frac{a+b-c}{2},$$

somit:

Digitized by Google

$$h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2},$$

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}.$$

Diese Formel löst unsere Aufgabe. — Mit Hülfe derselben lässt sich nun auch die Aufgabe lösen:

Aufgabe 2. Den Flächeninhalt eines Dreiecks zu finden, wenn alle 3 Seiten gegeben sind.

Auflösung. Man hat dann, wenn die Ausdrücke der vorigen Aufgabe ihren Werth behalten, und f der gesuchte Flächeninhalt ist: $f = \frac{ah}{2}$, oder mit Berücksichtigung des Werthes von h.:

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

oder wenn man für s wieder seinen Werth setzen will:

$$f = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

Jedoch ist meistentheils die erstere Formel bequemer. Ist das Dreieck ein gleichschenkliges also $b = c$, so giebt die letzte Form:

$$f = \frac{a}{4}\sqrt{(a+2b)(2b-a)} = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2},$$

wie man auch leicht direct finden kann. — Ist das Dreieck gleichseitig, also

$$a = b = c,$$

so hat man:

$$f = \frac{a^2}{4}\sqrt{3},$$

wie sich ebenfalls leicht direct nachweisen liesse.

5) Von den Proportionen zwischen Raumgrössen, und von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

I. Einleitung. Die Beziehung der Proportionalität erstreckt sich nicht auf Raumgrössen allein, sondern auf Grössen überhaupt. — Es sind indess hier der Vollständigkeit wegen die nöthigen Sätze über Proportionen zusammen zu fassen.

Definitition. Vier Grössen a, b, c, d stehen in Proportion, wenn der Quotient der ersten beiden gleich dem der letzten beiden ist, d. h. wenn sie die Gleichung erfüllen:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ oder } a : b = c : d,$$

gelesen a zu b wie $c : d$. Die Grössen a und d heissen äussere, b und c innere Glieder, a und c Vorderglieder, b und d Hinterglieder.

Es folgt aus der Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ unmittelbar:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{d}, \quad ad = bc,$$

d. h.:

Sätze. „In jeder Proportion kann man vertauschen: A) beide Vorderglieder mit den Hintergliedern, B) die inneren Glieder, C) die äusseren. — Ferner ist das Product der innern Glieder gleich dem der äusseren.

Wenn man in der Proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ auf beiden Seiten 1 addirt oder 1 abzieht, so erhält man: $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, oder auch da man die Vorder- und Hinterglieder vertauschen kann $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$. Auch $\frac{a+c}{a} = \frac{b+d}{b}$, da man b mit c vertauschen kann.

Sätze. „Die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder verhält sich zum ersten (oder zweiten) wie die Summe oder Differenz der beiden letzten zum dritten (oder letzten). Die Summe oder Differenz der beiden Vorderglieder verhält sich zum ersten, wie die der Hinterglieder zum zweiten."

Sind 2 Proportionen gegeben $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, und $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, so ergibt sich:

$$x = d = \frac{bc}{a},$$

d. h.:

Satz. „Haben zwei Proportionen drei Glieder gemein so sind auch die vierten gleich."

Digitized by Google

Sind ferner $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ 2 beliebige Proportionen, so erhält man durch Multiplication: $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$, und durch Division:

$$\frac{a}{e}:\frac{b}{f}=\frac{c}{g}:\frac{d}{h}.$$

Sätze. „Aus zwei Proportionen kann man eine dritte finden, wenn man die entsprecchenden Glieder mit einander multiplicirt bezüglich dividirt."

Hiernach folgt aus den Proportionen: $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$, und $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$, durch Division:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

also:

Satz. „Die Summe der Vorderglieder verhält sich zu deren Differenz, wie die Summe der Hinterglieder zu deren Differenz.

Difinitionen. Haben mehrere Proportionen die Hinterglieder gemein, hat man also:

$$\frac{a}{e}=\frac{f}{l},\quad \frac{b}{e}=\frac{g}{l},\quad \frac{c}{e}=\frac{h}{l},\quad \frac{d}{e}=\frac{k}{l},$$

so schreibt man diese Combination auch:

$$a:b:c:d:e=f:g:h:k:l$$

und nennt dieselbe laufende Proportion. Vertauscht man in allen Proportionen aus denen dieselbe besteht, die innern Glieder, so ergibt sich:

$$\frac{a}{f}=\frac{b}{g}=\frac{c}{h}=\frac{d}{k}=\frac{e}{l};$$

hieraus erhält man sogleich:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{f+g}{f},$$

oder:

$$\frac{a+b}{f+g}=\frac{a}{f}=\frac{c}{h}=\frac{d}{k}=\frac{e}{l},$$

also auch:

$$\frac{a+b+c}{f+g+h}=\frac{c}{h}=\frac{d}{k}=\frac{e}{l},$$

$$\frac{a+b+c+d}{f+g+h+k}=\frac{e}{l},$$

$$\frac{a+b+c+d+e}{f+g+h+k+l}=\frac{e}{l}=\frac{a}{f},$$

oder auch:

$$\frac{a+b+c+d+e}{a}=\frac{f+g+h+k+l}{l}.$$

Satz: „In einer laufenden Proportion verhält sich die Summe aller Glieder vor dem Gleichheitszeichen zum ersten davon, wie die Summe aller Glieder hinter dem Gleichheitszeichen zum ersten davon."

Definition. Eine Proportion heisst stetig, wenn die mittleren Glieder gleich sind, also $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ist eine solche. b heisst mittleres Glied oder mittlere Proportionale von a und c.

Man hat offenbar $b^2=ac$. D. h.:

Satz. „Das Quadrat des mittleren Gliedes ist gleich dem Product der äusseren."

Anmerkung. Sind ab, cd Linien, und ist $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, folglich $bc=ad$, so kann man sagen:

„In jeder Proportion ist das Rechteck aus den inneren Gliedern gleich dem aus den äussern."

Stehen a, b, c, in stetiger Proportion, ist also $b^2=ac$, so hat man ferner den Satz:

„Das Quadrat des mittleren Gliedes ist gleich dem Rechteck aus den äusseren."

b ist also die Seite eines Quadrats, das einem Rechteck mit Seiten a und c flächengleich ist, und die Aufgabe, die mittlere Proportionale von a und c zu finden, also identisch mit der, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

II. Lehrsätze. Einfache aber wichtige Sätze über Proportionalität der Figuren ergeben sich aus den Messungen des vorigen Abschnittes.

Seien p, P die Flächeninhalte zweier Parallelogramme, g, G bezüglich ihre Grundlinien, h, H ihre Höhen, und seien d, D die Flächeninhalte zweier Dreiecke mit bezüglich denselben Grundlinien und Höhen, so ist:

$$p=gh,\quad P=GH,$$

also durch Division:

$$\frac{p}{P}=\frac{gh}{GH}.$$

Ferner

$$d=\frac{gh}{2},\quad D=\frac{GH}{2},$$

also:

$$\frac{d}{D}=\frac{gh}{GH}.$$

Lehrsatz 1. „Zwei beliebige Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich

wie die Producte aus Grundlinien und Höhe."

Ist aber $g = G$, so hat man:

$$\frac{p}{P} = \frac{d}{D} = \frac{h}{H},$$

und wenn $h = H$ ist:

$$\frac{p}{P} = \frac{d}{D} = \frac{g}{G},$$

d. h.:

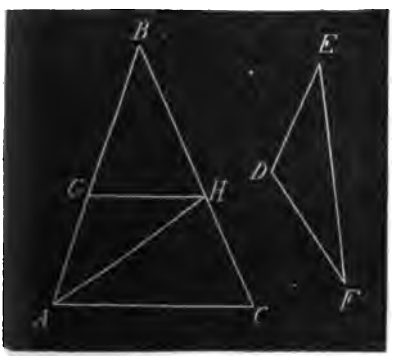
Lehrsatz 2. „Zwei Parallelogramme oder Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen, zwei von gleicher Höhe wie ihre Grundlinien."

Aus diesen einfachen Betrachtungen beweisen wir jetzt folgenden wichtigen Satz:

Lehrsatz 3. „Die Flächeninhalte zweier Dreiecke, die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich wie die Producte der diesen Winkel einschliessenden Seiten."

Beweis. In den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 127) sei Winkel $B = E$. Lege

Fig. 127.



dieselben so auf einander, dass Winkel E mit B zusammen D in G, F in H fällt, dass also Dreieck GBH mit DEF congruent oder identisch ist. Ziehe Linie HA, so haben die Dreiecke BGH und BAH, wenn man BG und BA als Grundlinien denkt, gleiche Höhe, es ist also:

$$\frac{\triangle BGH}{\triangle BAH} = \frac{BG}{BA}.$$

Die Dreiecke BAH und BCA, welche die Grundlinien BH und BC haben, werden ebenfalls gleiche Höhe haben, und ist somit:

$$\frac{\triangle BAH}{\triangle BCA} = \frac{BH}{BC}.$$

Durch Multiplication beider Gleichungen oder Proportionen ergibt sich:

$$\frac{\triangle BGH}{\triangle BCA} = \frac{BG \cdot BH}{BA \cdot BC},$$

oder:

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{DE \cdot EF}{BA \cdot BC},$$

womit unser Satz bewiesen ist. Aus diesem Satze folgt leicht der folgende, welcher lediglich Proportionalitäten zwischen Linien enthält.

Lehrsatz 4. „Halbirt man einen Dreieckswinkel, so wird die Halbirungslinie die Gegenseite in zwei Theile theilen, welche sich so verhalten, wie die an sie stossenden Seiten."

Beweis. Sei Winkel ABC (Fig. 128) durch Linie BE halbirt, so soll sein:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}.$$

Die Dreiecke ABC und CBE, welche bei B gleiche Winkel haben, verhalten sich wie die einschliessenden Seiten, also:

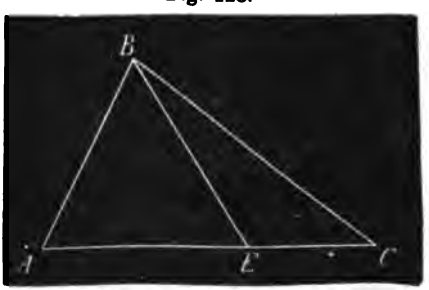
$$\frac{\triangle ABE}{\triangle CBE} = \frac{AB \cdot BE}{BE \cdot BC} = \frac{AB}{BC}.$$

Andrerseits haben die Dreiecke gleiche Höhe und verhalten sich also wie die Grundlinien AE und EC, also auch:

$$\frac{\triangle ABE}{\triangle CBE} = \frac{AE}{EC},$$

woraus sich ergibt:

Fig. 128.



Digitized by Google

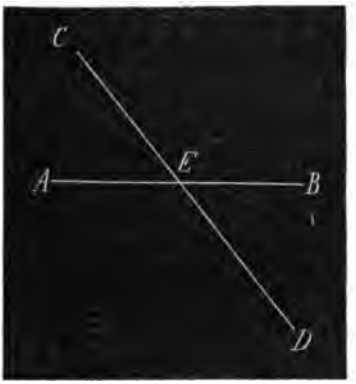
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC},$$

offenbar die verlangte Proportion.

III. Definitionen und Lehrsätze.

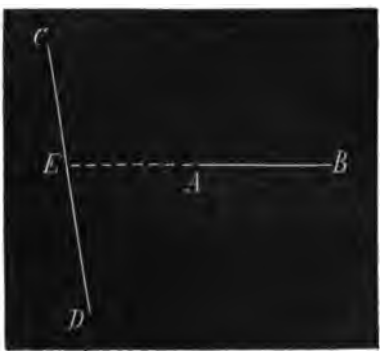
Definitionen. Wenn eine begrenzte Linie AB von einer andern CD in E geschnitten wird (Fig. 129 und 130) so

Fig. 129.



nennt man die Entfernung des Schnittpunktes E von den Endpunkten A und B **Segmente** von AB. Die Summe der Segmente AE und BE ist also dann der Linie AB gleich, wenn (Fig. 129) E zwischen A und B fällt. Fällt aber E (Fig. 130) ausserhalb AB, so ist ihre

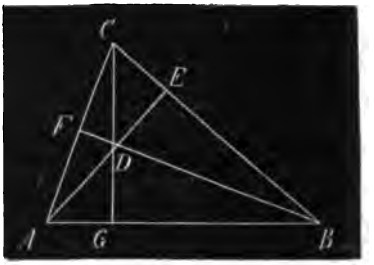
Fig. 130.



Differenz gleich AB. Immer aber kann man die Summe der Segmente gleich AB setzen, wenn man die Entfernungen des Punktes E von A als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem diese Entfernung AE mit AB gleich gerichtet ist oder nicht (vergleiche den Artikel: Raumgrössen).

Lehrsatz 5. „Wenn man von den Ecken eines Dreiecks ABC (Fig. 131 und

Fig. 131.



182 Linien nach den Grundlinien zieht, die sich in einem Punkte D schneiden, so sind die Producte je dreier Segmente der drei Seiten, von denen nicht zwei zusammenstossen, einander gleich."

Beweis. Es soll sein:

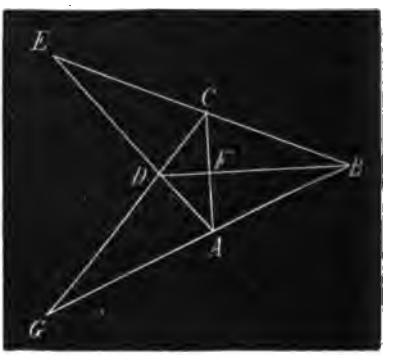
$$AG \cdot BE \cdot CF = BG \cdot CE \cdot AF,$$

Die Dreiecke AGC und BGC von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien AG und BG, also:

$$\frac{\triangle AGC}{AG} = \frac{\triangle BGC}{BG};$$

dasselbe gilt von den Dreiecken AGD und BGD, also:

Fig. 132.



$$\frac{\triangle AGD}{AG} = \frac{\triangle BGD}{BG}.$$

Durch Subtraction beider Gleichungen erhält man, da:

$$\triangle AGC - \triangle AGD = \triangle DAC,$$
$$\triangle BGC - \triangle BGD = \triangle BCD$$

ist:

$$\frac{\triangle DAC}{AG} = \frac{\triangle DBC}{BG},$$

oder:

Digitized by Google

$$\frac{\triangle DAC}{\triangle DBC} = \frac{AG}{BG}.$$

Und in ganz gleicher Weise ergibt sich:

$$\frac{\triangle DBC}{\triangle DBA} = \frac{CF}{FA}.$$

(In Figur 132 ist statt zu subtrahiren, hier jedoch zu addiren.) Und

$$\frac{\triangle DBA}{\triangle DAC} = \frac{BE}{EC}$$

Durch Multiplication der drei letzten Gleichungen ergibt sich hieraus:

$$\frac{AG \cdot CF \cdot BE}{BG \cdot FA \cdot EC} = 1,$$

also:

$$AG \cdot CF \cdot BC = BG \cdot FA \cdot EC$$

Dieser Satz lässt sich umkehren:

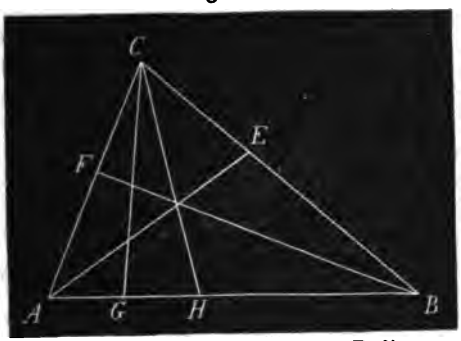
Lehrsatz 6. „Wenn von den Spitzen eines Dreiecks aus drei Linien so gezogen sind, dass die Produkte dreier nicht zusammenstossender Segmente der Seiten gleich sind, so müssen sich die drei Schnittlinien in einem Punkte schneiden."

Beweis. Denn sind AE, BF, CG (Fig. 133) diese Linien und mögen sie sich nicht in einem Punkte schneiden, aber:

$$AG \cdot CF \cdot BE = BG \cdot FA \cdot EC$$

sein, so kann man durch den Schnitt-

Fig. 133.



punkt etwa von AE und BF Linie GH ziehen, und es ist nach dem vorigen Satze:

$$AH \cdot CF \cdot BE = BH \cdot FA \cdot CE,$$

oder wenn man die erstere Gleichung durch die letztere dividirt:

$$\frac{AG}{AH} = \frac{BG}{BH}.$$

Im ersten Quotienten ist Kleineres durch Grösseres, im zweiten Grösseres durch Kleineres dividirt, der erste Quotient also kleiner, der zweite grösser, also die Gleichheit unmöglich und unser Satz bewiesen.

Hieraus ergeben sich Sätze von gewissen Linien in einem Dreieck, die sich in einem Punkte schneiden.

Lehrsatz 7. „Die drei Linien, welche die Spitzen eines Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, scheiden sich in einem Punkte."

Beweis. Seien AD, BE, CF (Fig. 134) diese Linien, so ist:

$$AF = FB,\ BD = DC,\ CE = EA,$$

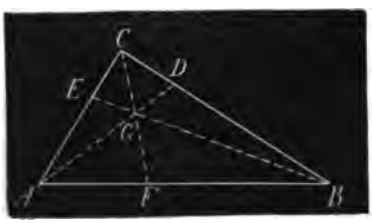
also durch Multiplication:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot DC \cdot EA,$$

mithin die Bedingung des vorigen Satze erfüllt.

Lehrsatz 8. „Wenn man von zwei Seiten eines Dreiecks CA und CB (Fig. 134) Stücke von C aus abscheidet, CE

Fig. 134.



und CD, die sich wie die ganzen Seiten verhalten, die Theilpunkte E und D mit den gegenüberliegenden Ecken verbindet, und durch den Schnittpunkt G eine Linie nach der dritten Ecke C zieht, so halbirt diese die Gegenseite."

Beweis. Man ziehe von C nach der Mitte von F von AB eine Linie, so beweisen wir, dass dieselbe durch G geht, womit dann unser Satz bewiesen ist.

Digitized by Google

Wir haben $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$, oder auch

$$\frac{CA - CE}{CE} = \frac{CB - CD}{CD},$$

d. h.:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{BD}{CD} \text{ und } AE \cdot CD = CE \cdot BD,$$

ferner $AF = FB$, also:

$$AF \cdot BD \cdot CE = FB \cdot CD \cdot EA,$$

was wieder die Bedingung des Lehrsatzes 6. ist.

Lehrsatz 9. „Die 3 Linien, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich in einem Punkte."

Beweis. Es seien wieder AD, BE, CF (Fig. 134) diese Linien, als die Halbirungslinien der Winkel. Nach Lehrsatz 4. hat man dann:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{BF}, \quad \frac{BC}{BA} = \frac{CE}{EA}, \quad \frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC},$$

also durch Multiplication:

$$1 = \frac{AF \cdot CE \cdot BD}{BF \cdot EA \cdot DC},$$

welches die Bedingung ist, dass sich die 3 Linien in einem Punkte schneiden.

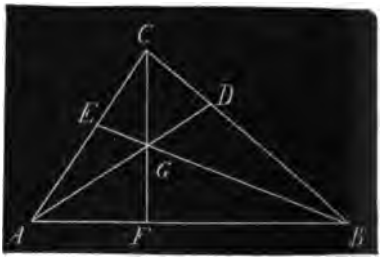
Wir reihen an diese Betrachtungen noch einen Satz, der sich auf die Segmente der Dreiecksseiten bezieht.

Lehrsatz 10. „Wenn man von einem beliebigen Punkt aus 3 Senkrechte auf die Seiten eines Dreiecks fällt, so entstehen Segmente, von denen die Quadratsummen je dreier nicht zusammenstossender gleich sind."

Beweis. Seien GF, GE, GD die Lothe (Fig. 135), so soll sein:

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = BF^2 + CD^2 + EA^2;$$

Fig. 135.



ziehe AG, GB, GC, so entstehen 6 rechtwinklige Dreiecke, von denen je 2 gleiche Hypotenuse und folglich gleiche Quadratsumme der Katheten haben, nämlich:

$$AE^2 + EG^2 = AF^2 + FG^2,$$
$$BF^2 + FG^2 = BD^2 + DG^2,$$
$$CD^2 + DG^2 = CE^2 + EG^2,$$

also durch Addition und Weglassen der Stücke, welche auf beiden Seiten gleich sind:

$$AE^2 + BF^2 + CD^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2,$$

wie zu beweisen war.

Auch dieser Satz ist der Umkehrung fähig.

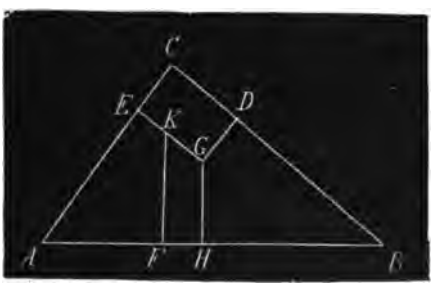
Lehrsatz 11. „Wenn jede der drei Seiten eines Dreiecks so in zwei Theile getheilt ist, dass die Quadratsumme je dreier nicht zusammenstossender Theile gleich sind, so gehen die aus den Theilpunkten errichteten Lothe durch einen Punkt."

Beweis. Es ist (Fig. 136):

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = BF^2 + CD^2 + AE^2.$$

Wir haben zu beweisen, dass sich die Lothe in einem Punkte schneiden. Sei dies nicht der Fall, so kann man aus

Fig. 136.



dem Schnittpunkte der in E und D errichteten Lothe ein anderes GH auf AB fällen, und hat dann also:

$$AH^2 + BD^2 + CE^2 = BH^2 + CD^2 + AE^2.$$

Oder wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht:

$$AF^2 - AH^2 = BF^2 - BH^2,$$

eine Gleichung, die darum unmöglich

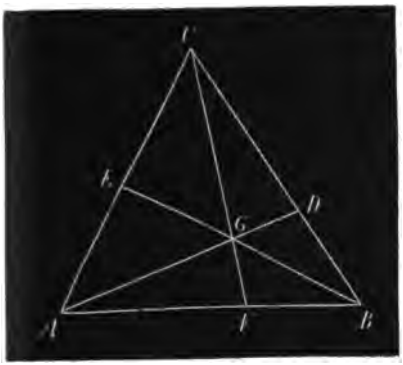
Digitized by Google

ist, weil sie etwas Negatives einem Positiven gleich setzt. Eine Anwendung dieser Betrachtung gibt der:

Lehrsatz 12. „Die drei aus den Ecken eines Dreiecks auf die Gegenseiten gefällten Lothe schneiden sich in einem Punkte."

Beweis. Seien CF, BE, AD (Fig. 137) die Lothe. Jedes theilt das Dreieck

Fig. 137.



ABC in 2 rechtwinklige mit einer gemeinschaftlichen Kathete; es ist also:

$$AC^2 - CD^2 = AB^2 - BD^2,$$
$$AB^2 - AE^2 = BC^2 - CE^2,$$
$$BC^2 - BF^2 = AC^2 - AF^2,$$

also durch Addition und Wegheben des Gleichen auf beiden Seiten,

$$-CD^2 - AE^2 - BF^2 = -BD^2 - CE^2 - AF^2,$$

welches die Bedingung für unsern Satz ist.

IV. Definitionen und Lehrsätze.

Definitionen. Vielecke heissen ähnlich, wenn in ihnen alle Winkel gleich sind, und alle Seiten in gleichem Verhältnisse (laufender Proportion) stehen. Die Aehnlichkeit der Vielecke $ABCDEF$ und $abcdef$ (Fig. 138) verlangt also, dass Winkel $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$, $F = f$ ist, und die Proportionen:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{FA}{fa},$$

oder:

$$AB : BC : CD : DE : EF : FA = ab : bc : cd : de : ef : fa$$

stattfinden. — Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∞.

Fig. 138.

Den Sätzen von der Aehnlichkeit der Dreiecke, auf welche sich die Aehnlichkeit der Vielecke zurückführen lässt, liegt folgender Hauptsatz zu Grunde.

Lehrsatz 12. „Wenn man zwischen 2 Seiten eines Dreiecks durch einen beliebigen Punkt der einen, eine Linie parallel der dritten Seite zieht, so entsteht ein andres Dreieck, welches dem gegebenen ähnlich ist, derart, dass die Abschnitte auf den gegebenen Seiten diesen Seiten selbst und die Parallele der dritten Seite entspricht."

Beweis. Sei (Fig. 139) BC parallel DE, so soll sein:

$$\triangle ABC \infty ADE.$$

(Von der Ordnung der Buchstaben bei ähnlichen Dreiecken gilt das bei der Congruenz der Dreiecke Gesagte, ebenfalls.)

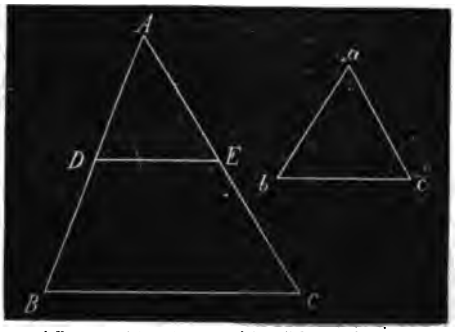
Da Winkel $A = A$ und $D = B$ als Gegenwinkel ebenso $E = C$ ist, so ist nur noch die Proportionalität der Seiten zu beweisen, d. h, die Gleichungen:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Wegen der Gleichheit der 3 Winkel hat man nach Lehrsatz 8.:

Digitized by Google

Fig. 139.



$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE} = \frac{AB \cdot BC}{AD \cdot DE} = \frac{AC \cdot BC}{AE \cdot DE}$$

In dem man von den drei letzten Quotienten die zwei ersten und die zwei letzten gleich setzt, und Gleiches weghebt, ergibt sich:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}, \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Da übrigens der Punkt D beliebig auf der Seite AB angenommen werden kann, mithin AD eine beliebige Länge hat, so ergibt sich folgender:

Zusatz. „Zu jedem Dreiecke gibt es ein ähnliches, worin eine Seite eine gegebene ganz beliebige Länge hat."

V. Lehrsätze.

Die Sätze von der Aehnlichkeit, die denen der Congruenz, wie wir gleich sehen werden, entsprechen, folgen aus dem vorigen Satze aufs Einfachste.

Jedes Dreieck, welches mit ADE (Fig. 139) congruent ist, z. B. abc ist offenbar ABC ähnlich. Nun sind die Dreiecke abc und ADE congruent, wenn zwei Seiten bezüglich gleich sind, ausserdem der eingeschlossene Winkel oder der Gegenwinkel des grösseren, oder der Gegenwinkel des kleineren mit der Beschränkung, dass dann die beiden andern Gegenwinkel gleichseitig spitz oder recht oder stumpf sind.

Die Bedingung zwischen den Seiten lässt eine der Seiten ab ganz willkürlich, da ja AD willkürlich ist; die andere ac ist aber völlig gegeben durch die Proportion: $\frac{ab}{ac} = \frac{AB}{AC}$, wenn ab wie AB und AC bekannt ist.

Es reicht also diese Proportion verbunden mit der Gleichheit der Winkel zur Aehnlichkeit der Dreiecke abc und ABC aus und man hat die Sätze:

Lehrsatz 13. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen je zwei Seiten in Proportion stehen, die eingeschlossenen Winkel aber gleich sind."

Lehrsatz 14. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen je zwei Seiten in Proportion stehen, und die Gegenwinkel der grösseren gleich sind."

Lehrsatz 15. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen je zwei Seiten in Proportion stehen, die Gegenwinkel der kleineren gleich und die Gegenwinkel der grösseren gleichzeitig spitz oder recht oder stumpf sind."

Aber die Congruenz der Dreiecke abc und ADC folgt auch aus der Gleichheit der Seiten. Denkt man $ab = AD$ wieder willkürlich, so sind ac und bc durch die Proportionen:

$$\frac{ab}{ac} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{ab}{bc} = \frac{AB}{BC}$$

bestimmt, und diese somit für die Aehnlichkeit von Dreieck abc und ABC ausreichend, also:

Lehrsatz 16. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten in gleichem Verhältnisse, laufender Proportion, stehen."

Endlich sind die Dreiecke abc und ADE congruent, wenn in ihnen zwei Winkel und eine Seite entsprechend gleich sind. Da nun, welches auch die Seite ab sei, sich eine Gleiche AD finden lässt, so übt diese Bedingung in Bezug auf die Aehnlichkeit der Dreiecke abc und ABC keinen Einfluss aus. Also:

Lehrsatz 17. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen zwei Winkel entsprechend gleich sind."

Scholion. Die letzten fünf Sätze enthalten die Aehnlichkeitsbedingungen der Dreiecke völlig. Ihre Beziehung zu den Congruenzsätzen ist einleuchtend.

Digitized by Google

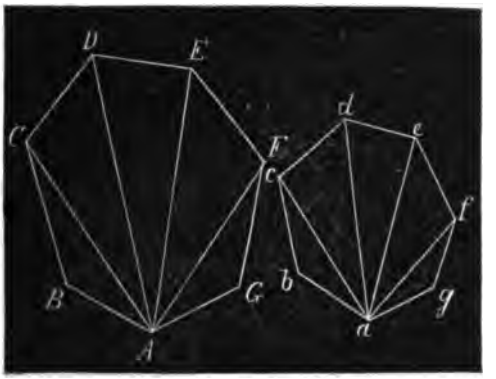
— Von den Aehnlichkeitssätzen ist der letzte derjenige, welcher am häufigsten angewendet werden muss.

Was die Aehnlichkeit der Vielecke überhaupt anbetrifft, so drängt sich ihre Theorie in den folgenden Satz zusammen:

Lehrsatz 18. „Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie sich in gleicher Reihenfolge in gleichliegende ähnliche Dreiecke zerlegen lassen."

Beweis. Seien $ABCDEFG$, $abcdefg$ (Fig. 140) die Vielecke. Die Theilung

Fig. 140.



in Dreiecke ist von einer Ecke aus geschehen. Ist nun:

$$\triangle ABC \backsim abc,$$

so hat man:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac},$$

Winkel $B = b$, Winkel $BCA = bca$;

ist ferner:

$$\triangle CAD \backsim cad,$$

so hat man:

$$\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd},$$

also:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd},$$

ferner:

Winkel $ACD = acd$,

also auch:

Winkel $BCA + ACD = bca + acd$,

d. h.:

Winkel $C = c$.

So wird nach und nach die Gleichheit aller Winkel und die Proportionalität aller Seiten bewiesen. Wir reihen hieran noch den Satz:

Lehrsatz 19. „Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie je zwei gleichliegende Seiten."

Beweis. Denn aus der laufenden Proportion:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{FG}{fg} = \frac{GA}{ga},$$

folgt sogleich:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA}{ab + bc + cd + de + ef + fg + ga} = \frac{AB}{ab},$$

wie in den Sätzen von Proportionen gezeigt wurde.

VI. Lehrsätze. Es sind an den in IV. gegebenen Satz jetzt noch einige Betrachtungen zu knüpfen. Zunächst lässt sich derselbe in folgender Weise umkehren.

Lehrsatz 19. „Wenn man zwei Seiten eines Dreiecks so theilt, dass die abgeschnittenen Stücke den ganzen Seiten proportional sind, und die Theilpunkte durch eine Grade verbindet, so ist diese der dritten Seite parallel."

Beweis. Es ist (Fig. 141) $\frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$,

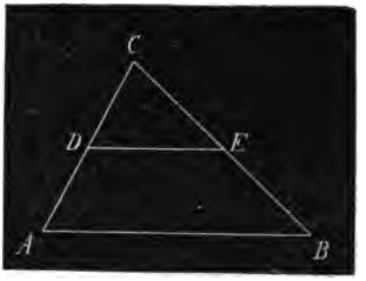
und es soll DE parallel AB sein. Offenbar ist nämlich $\triangle CDE \backsim CAB$, da je zwei Seiten in Proportion die eingeschlossenen Winkel C aber gleich sind, folglich Gegenwinkel $D = A$, und somit DE parallel AB.

Anmerkung. Es folgt auch leicht, dass sich die obern Stücke CD und CE wie die untern DA und CB, also die letztern auch wie die ganzen Seiten verhalten.

Lehrsatz 20. „Wenn man eine

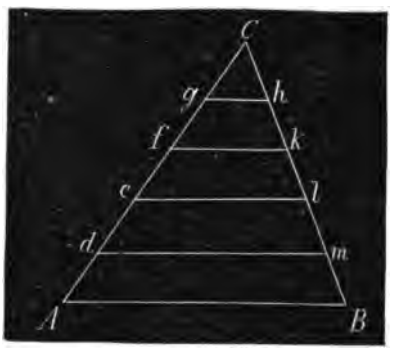
Digitized by Google

Fig. 141.



Seite eines Dreiecks AC (Fig. 142) in gleiche Theile Cg, gf, fe, ed, dA theilt, und durch die Theilpunkte Linien parallel einer zweiten Seite AB, also gh, fk, el, dm nach der dritten CB zieht, so wird auch diese in gleiche Theile getheilt.

Fig. 142.



Beweis. Man hat nach Lehrsatz 12. die Proportion:

$$\frac{Cf}{Cg} = \frac{Ck}{Ch}, \quad \frac{Ce}{Cf} = \frac{Cl}{Ck}$$

u. s. w., woraus sich ergibt:

$$\frac{Cf - Cg}{Cg} = \frac{Ck - Ch}{Ch},$$

d. h.:

$$\frac{fg}{Cg} = \frac{hk}{Ch},$$

und da

$$fg = Cg,$$

so ist auch:

$$hk = Ch;$$

$$\frac{Ce - Cf}{Cf} = \frac{Cl - Ck}{Ck} \text{ oder } \frac{ef}{Cf} = \frac{kl}{Ck}$$

$$Cf = 2ef, \text{ also } \frac{1}{2} = \frac{kl}{Ck} \text{ oder } Ck = 2kl$$

und da $Ck = Ch + hk = 2Ch$ ist, $kl = Ch$.

In derselben Weise ist die Gleichheit der andern Stücke zu beweisen.

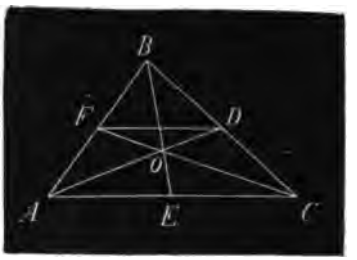
Hieran reihen wir noch den Satz:

Lehrsatz 21. „Wenn man von der Ecke eines Dreiecks Linien nach den Mitten der Gegenseiten zieht, (die sich in einem Punkte schneiden) so theilen dieselben einander im Verhältnisse 2 : 1."

Beweis. Seien BE, CF, AD (Fig. 143) diese Linien, welche sich in O schneiden, so soll sein:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OF} = \frac{2}{1}.$$

Fig. 143.



Man ziehe FD, so ist:

$$\frac{BA}{BF} = \frac{BC}{BD} = \frac{2}{1},$$

also nach Lehrsatz 19.: FD parallel AC. Aus diesem Grunde aber $\triangle FOD \backsim COA$, da die Winkel gleich sind, also:

$$\frac{OC}{OF} = \frac{CA}{FD}.$$

Und wegen der Aehnlichkeit von $\triangle BFD$ und BAC,

$$\frac{CA}{DF} = \frac{AB}{BF} = \frac{2}{1},$$

also auch:

$$\frac{CO}{OF} = \frac{2}{1}.$$

In gleicher Weise folgt dies von den Theilen der andern Linien.

VII. Lehrsätze. Die folgenden Betrachtungen enthalten einen für die Ausmessung ähnlicher Figuren wichtigen Satz.

Lehrsatz 22. „Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten."

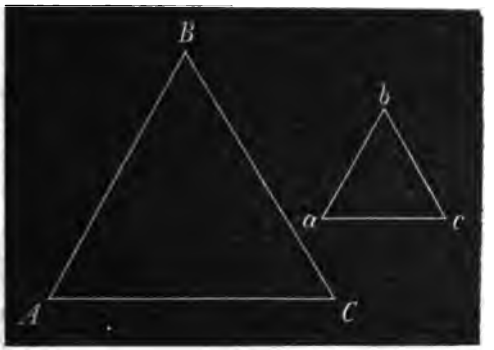
Beweis. Seien ABC und abc (Fig. 144) einander ähnlich, so ist, da

$$\text{Winkel } A = a,$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB \cdot AC}{ab \cdot ac}.$$

Man hat aber wegen der Aehnlichkeit:

Fig. 144.



$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac},$$

also:
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AC^2}{ac^2},$$

was zu beweisen war.

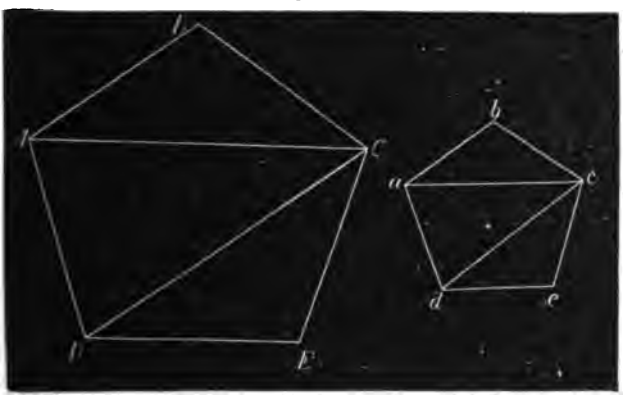
Lehrsatz 23. „Auch ähnliche Vielecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten."

Beweis. Seien z. B. die Fünfecke *ABCDE* und *abcde* (Fig. 145) gegeben, so ist:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB^2}{ab^2}.$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle acd} = \frac{AC^2}{ac^2} = \frac{AB^2}{ab^2},$$

Fig. 145.



da
$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$$

ist, und endlich

$$\frac{\triangle CDE}{\triangle cde} = \frac{DE^2}{de^2} = \frac{AB^2}{ab^2},$$

also nach einem den laufenden Proportionen eigenthümlichen Satze:

$$\frac{ABC + BCD + CDE}{abc + bcd + cde} = \frac{AB^2}{ab^2},$$

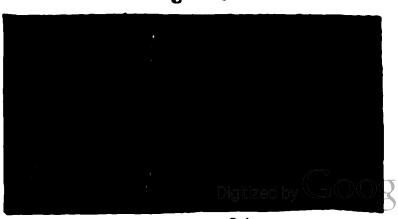
was zu beweisen war.

VIII. Lehrsätze. Wir geben jetzt Anwendungen der Aehnlichkeit.

Lehrsatz 24. „Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke von der Spitze des rechten Winkels ein Loth auf die Hypotenuse, so wird das Dreieck in zwei andere getheilt, die dem gegebenen ähnlich sind."

Beweis. Dreieck *ABC* (Fig. 146) sei bei *A* rechtwinklig, *AD* senkrecht auf *BC*.

Fig. 146.



Digitized by Google

Es haben die Dreiecke ABD und ABC gemein den Winkel B und einen rechten, sie sind also ähnlich, ebenso haben ABC ADC Winkel C und einen rechten gemein, woraus die Aehnlichkeit aller drei in folgender Ordnung sich ergibt:

$$\triangle ABC \backsim DBA \backsim DAC.$$

Scholion. Aus der Aehnlichkeit der beiden ersten Dreiecke folgt:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BA} \text{ oder } AB^2 = BC \cdot BD,$$

was offenbar mit dem Lehrsatz 6. des Abschnittes 4. zusammentrifft. Aus der Aehnlichkeit des ersten und dritten Dreiecks ergibt sich:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \text{ oder } AC^2 = BC \cdot DC$$

und dies zu der vorigen Gleichung addirt gibt:

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot DC + BC \cdot BD$$
$$= BC \cdot (DC + BD) = BC^2.$$

Dies ist der (Pythagoraeische) Lehrsatz 7. des Abschnittes 4.

Endlich folgt aus der Aehnlichkeit der beiden letzten Dreiecke:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} \text{ also } DA^2 = BD \cdot CD.$$

Dies ist Lehrsatz 8. desselben Abschnittes. Diese Beweise sind kürzer, als die früher gegebenen.

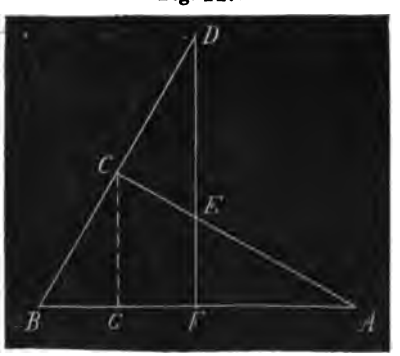
Lehrsatz 25. „Wenn man zu einem Dreiecke eine Linie zieht, welche alle drei Seiten schneidet, so sind die Producte je dreier nicht zusammenstossender Segmente einander gleich.

Beweis. Sei ABC (Figur 147) das Dreieck, DEF die Linie, so soll sein:

$$CD \cdot BF \cdot AE = BD \cdot AF \cdot CE.$$

Ziehe CG parallel DF, so ist:

Fig. 147



$$\triangle CBG \backsim DBF,$$

also:

$$\frac{DB}{CB} = \frac{BF}{BG},$$

oder:

$$\frac{DB - CB}{DB} = \frac{BF - BG}{BF},$$

d. h.:

$$\frac{DC}{DB} = \frac{GF}{BF}.$$

Ferner $\triangle EFA \backsim CGA$, also:

$$\frac{EA}{CE} = \frac{FA}{GF}$$

und durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen:

$$\frac{DC \cdot EA}{DB \cdot CE} = \frac{FA}{BF},$$

oder:

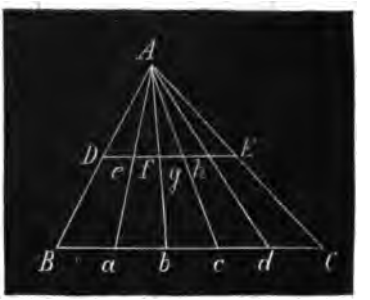
$$DC \cdot EA \cdot BF = DB \cdot CE \cdot FA,$$

wie zu beweisen war.

Lehrsatz 26. „Wenn man die Seiten eines Dreiecks in beliebige Theile in irgend welchem Verhältnisse theilt und durch die Theilpunkte Linien nach der gegenüberliegenden Ecke zieht, so wird jede der getheilten Seite parallele Linie in Stücke getheilt, die denen der gegebenen proportional sind."

Beweis. Es ist zu beweisen, dass (Fig. 148) wenn DE parallel BC gezogen ist, man hat:

Fig. 148.



$$\frac{Ba}{De} = \frac{ab}{ef} = \frac{bc}{fg} = \frac{cd}{gh} = \frac{dC}{hE}.$$

Man hat:

$$\frac{Ba}{De} = \frac{Aa}{Ae} \text{ und } \frac{ab}{ef} = \frac{Aa}{Ae},$$

also:

$$\frac{Ba}{De} = \frac{ab}{ef}; \quad \frac{ab}{ef} = \frac{Ab}{Af}; \quad \frac{bc}{fg} = \frac{Ab}{Af},$$

also:

$$\frac{Ba}{De} = \frac{ab}{ef} = \frac{bc}{fg} \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

Sind die Theile von BC untereinander gleich, so sind es mithin auch die von DE, d. h.:

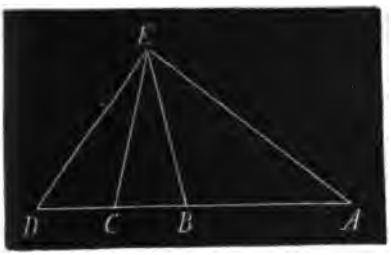
Zusatz. „Die von der Spitze eines Winkels gezogenen Linien, welche eine durch seine Schenkel gelegte Linie in gleiche Theile theilen, theilen auch jede dieser Linie parallele in gleiche Theile.

IX. Definitionen und Lehrsätze.

Den folgenden Betrachtungen liegt die Verbindung der Lehrsätze 5. und 25. dieses Abschnittes zu Grunde. Vorauszuschicken sind die folgenden

Definitionen. Ist eine Linie AD (Fig. 149) so in 3 Theile getheilt, dass

Fig. 149.



sich der erste AB zum zweiten BC verhält, wie die ganze Linie AD zum dritten Theile CD, so nennt man die Theilung eine harmonische, die vier Punkte A, B, C, D harmonische Punkte, und jede vier Graden, die bezüglich durch A, B, C, D und einen gemeinschaftlichen aber beliebigen Punkt E gehen, harmonische Strahlen. Die Punkte A und C, so wie B und D heissen zugeordnete Punkte, die durch zwei zugeordnete Punkte gehenden Strahlen, also EA, EC und EB, ED heissen zugeordnete Strahlen. Da die Proportion:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

gleichbedeutend ist mit:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{AD}{AB},$$

so ist es gleichgültig welchen Theil man als den ersten annimmt. Die Grundeigenschaft harmonischer Punkte ist aber auch noch eines andern Ausdrucks fähig. Man hat:

$$\frac{AB}{AC-AB} = \frac{AD}{AD-AC},$$

d. h. durch Umkehrung der Brüche

$$\frac{AC}{AB} - 1 = 1 - \frac{AC}{AD},$$

oder:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC},$$

d. h.:

„Vier Punkte einer Linie sind harmonische, wenn der umgekehrte Werth der Entfernung des einen vom zweiten die arithmetische Mitte der umgekehrten Werthe der Entfernungen der beiden andern vom ersten ist."

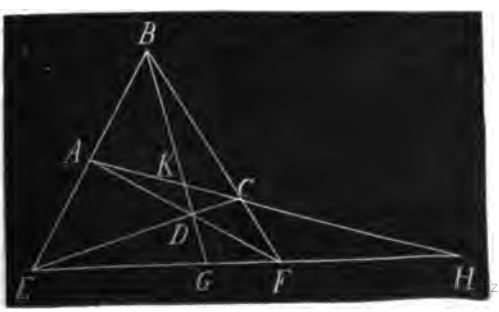
Wenn drei Grössen α, β, γ die Gleichung erfüllen $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\gamma}$, so nennt man γ auch harmonische Mitte von α und β, also:

„Vier Punkte sind harmonisch, wenn die Entfernung des einen vom zweiten die harmonische Mitte der Entfernung des ersten von den beiden noch fehlenden ist."

Lehrsatz 27. „Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird von den beiden andern und zwei Seiten harmonisch geschnitten, so dass die Schnittpunkte der Seiten zugeordnet sind."

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 150) das Vierseit, BD, AC, EF seine Diagonalen, so hat man $\triangle EBF$ und 3 Transversalen, die sich in D schneiden, mithin nach Lehrsatz 5.:

Fig. 150.



Digitized by Google

$$AB \cdot CF \cdot EG = AE \cdot BC \cdot GF.$$

Zugleich aber sind die Seiten des Dreiecks alle drei durch Linie ACH geschnitten, und somit nach Lehrsatz 23.:

$$AB \cdot CF \cdot EH = AE \cdot BC \cdot FH,$$

also durch Division:

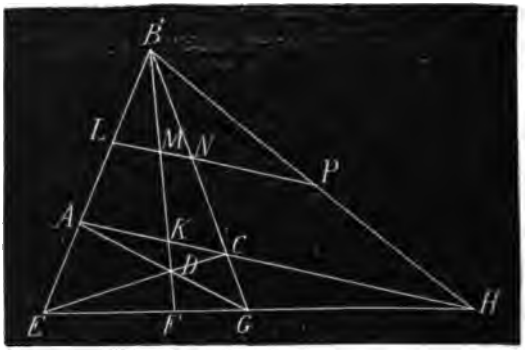
$$\frac{EG}{EH} = \frac{GF}{FH} \text{ oder: } \frac{EG}{FG} = \frac{EH}{FH};$$

was die harmonische Eigenschaft ist. In gleicher Weise ergibt sich die harmonische Theilung der beiden andern Diagonalen, also:

$$AK : KC = AH : CH,$$
$$BK : KD = BG : DG.$$

Sind nun (Fig. 151) EH und AH zwei beliebige sich in H schneidende Linien, und man zieht AE, durch einen beliebi-

Fig. 151.



gen Punkt B dieser Linie in beliebiger Richtung BG, ferner EC und AG, so ist $ABCD$ ein Vierseit. Die Punkte E, G, H liegen ganz beliebig; zieht man noch BKF, so ist F der zu E, G, H gehörige, H zugeordnet harmonische Punkt, also wie E, G, H gegeben sind, ist F bestimmt, da zu drei Gliedern einer Proportion immer nur ein viertes gehört. Die Linien BE, BG, BF und BH sind offenbar harmonische Strahlen, und sie theilen auch die willkürlich gerichtete Linie $AKCH$ harmonisch. Jedoch hat diese Linie A einen der harmonischen Punkte H mit EH gemein. Dies ist jedoch unerheblich, denn zieht man LP parallel mit AH, also durch einen beliebigen Punkt, so ist nach Lehrsatz 26:

$$\frac{AK}{KC} = \frac{LM}{MN}, \quad \frac{AH}{HC} = \frac{LP}{PN},$$

also, da

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AH}{HC}, \text{ auch } \frac{LM}{MN} = \frac{LP}{PN},$$

d. h. LP ist ebenfalls harmonisch getheilt, und diese Linie ist nicht allein willkürlich gerichtet, sondern ihr Schnittpunkt mit EH auch beliebig. D. h.:

Lehrsatz 28. „Wenn man durch vier harmonische Punkte nach einem fünften beliebigen harmonische Strahlen zieht, so wird jede hindurchgehende andere Linie von diesen Strahlen auch harmonisch getheilt."

Definition. Wenn die Segmente einer Linie eine gewisse Eigenschaft haben, man zieht durch die Theilpunkte Strahlen die alle durch einen Punkt gehen, und die Segmente jeder von diesen Strahlen geschnittene Grade haben dieselbe Eigenschaft, so heisst diese Eigenschaft eine perspectivische.

Die Eigenschaft der harmonischen Theilung ist also eine perspectivische.

Wir werden sogleich einen sehr allgemeinen Satz über perspectivische Eigenschaften geben, wollen aber zuerst die Sätze von der harmonischen Theilung noch ergänzen.

Sei (Fig. 152) Winkel ABC durch BF halbirt, so ist:

$$\frac{EB}{BG} = \frac{EF}{FG},$$

also da nach Lehrsatz 27.:

Fig. 152.

$$\frac{EF}{FG} = \frac{EH}{GH},$$

ist auch:

$$\frac{EB}{BG} = \frac{EH}{GH}.$$

Sei nun GK parallel BE, so ist auch:

$$\frac{EB}{GK} = \frac{EH}{GH},$$

da

$$\triangle EBH \backsim GKH$$

ist, also:

$$BG = GK,$$

woraus dann folgt:

Winkel $GBK = GKB$;

da aber:

$$EBK + GKB = 2R$$

ist, so hat man:

Winkel $EBG + GBK + GKB = 2R$

d. h.:

$$2GBK + FBG + FBE = 2R,$$

oder da:

$$FBG = FBE$$

war,

$$2GBK + 2FBG = 2R,$$

d. h.:

$$FBK = R.$$

Dies gibt folgenden:

Lehrsatz 29. „Wenn der Winkel zweier zugeordneter harmonischer Strahlen durch den dritten halbirt wird, so steht dieser auf dem vierten senkrecht."

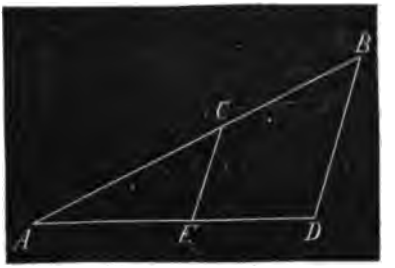
Fügen wir schliesslich noch die Bemerkung hinzu, dass wenn $EF = FG$ wäre, $GH = EH$ sein müsste, was nur möglich ist, wenn Punkt H ins Unendliche rückt, mithin der durch B gezogene nach H gerichtete Strahl EH parallel wird, weil sonst ein Schneiden, also ein in endlicher Entfernung befindlicher harmonischer Punkt sich ergäbe. Hieraus folgt noch:

Lehrsatz 30. „Wenn durch drei der harmonischen Strahlen eine Linie halbirt wird, so ist diese dem vierten Strahl parallel."

Dies sind die Grundzüge der Theorie der harmonischen Theilung. Das weitere Verfolgen dieser Theorie gehört nicht in diesen Artikel. Wir geben indess noch den oben versprochenen allgemeineren Satz über perspectivische Eigenschaften, dem wir jedoch noch eine Definition vorausschicken.

Definition. Wenn man von einem beliebigen Punkte des Schenkels eines Winkels A (Fig. 153) ein Loth auf den

Fig. 153.



andern fällt, so heisst der Quotient dieses Lothes BD durch AB dividirt Sinus des Winkels A, geschrieben: sin A.

Lemma. „Der Sinus eines gegebenen Winkels ist eine völlig bestimmte, nicht von der Länge des Schenkels AB, sondern nur von der Grösse dieses Winkels abhängige Zahl."

Beweis. Lassen wir den Punkt D nach E (Fig. 154) rücken, so würde der Sinus von $A = \frac{CE}{AC}$ werden, da aber die Dreiecke ACE und ABD ähnlich sind, so hat man:

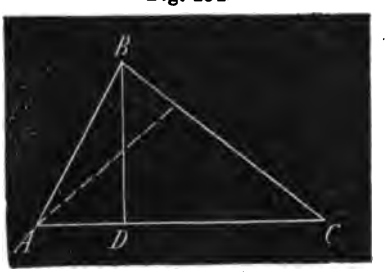
$$\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AB}.$$

Also in der That übt die Länge von AB keinen Einfluss aus.

Zusatz. „In jedem Dreieck ist der Flächeninhalt gleich dem halben Product zweier Seiten multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels."

Beweis. Sei ABC (Fig. 154) das

Fig. 154.



Dreieck und BD senkrecht auf AC gezogen, so ist der Flächeninhalt gleich

$$\frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Nun hatten wir:

$$\frac{BD}{AB} = \sin A,$$

also:

$$BD = AB \cdot \sin A$$

Digitized by Google

und somit den Flächeninhalt gleich

$$\frac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2},$$

wie zu beweisen war.

Lehrsatz 31. „Wenn zwischen den Segmenten einer Linie eine Gleichung stattfindet, welche sich derart darstellen lässt, dass ein Product von Segmenten durch ein anderes dividirt einer Constanten gleich ist, so ist diese Eigenschaft dann eine perspectivische, wenn der Zähler aus dem Nenner, die Linien in der gewöhnlichen Bezeichnung geschrieben, nur durch Vertauschung der Buchstaben hervorgeht."

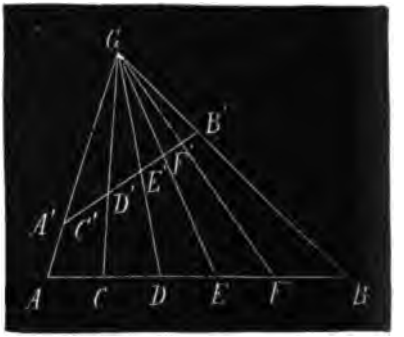
Erläuterung. Sei z. B. (Fig. 155) AB die Linie und dieselbe in C, D, E, F getheilt. Bildet man nun zum Beispiel das Product $AD \cdot CE \cdot BF \cdot CF$, so kann man durch Vertauschung der Buchstaben erhalten:

$$AF \cdot CF \cdot DE \cdot BC.$$

Ist also:

$$\frac{AD \cdot CE \cdot BF \cdot CF}{AF \cdot CF \cdot DE \cdot BC}$$

Fig. 155.



irgend einer Zahl α gleich, und zieht man durch den beliebigen Punkt G ferner ein Strahlensystem GA, GC, UD, GE, GF, GB, legt die beliebige Linie $A'B'$ die in C', D', E' F' geschnitten wird, hindurch, so ist auch:

$$\frac{A'D' \cdot C'E' \cdot B'F' \cdot C'F'}{A'F' \cdot C'F' \cdot D'E' \cdot B'C'} = \alpha.$$

Beweis. Wir setzen die Linie:

$$GA = a, \quad GC = c, \quad GD = d, \quad GE = e, \quad GF = f, \quad GB = b,$$
$$GA' = a', \quad GC' = c', \quad GD' = d', \quad GE' = e', \quad GF' = f', \quad GB' = b'.$$

Ferner Winkel $AGC = (a, c)$, $AGD = (ad)$ u. s. w., also z. B.: $AGF = (a, f)$, so dass jeder Winkel durch die beiden Linien bezeichnet wird, welche seine Schenkel bilden. Da nun die Dreiecke, welche ein Segment von $A'B'$ zur Grundlinie und G zur Spitze, alle dieselbe Höhe haben, so verhalten sie sich wie die Grundlinien, also:

$$\frac{\triangle A'GD' \cdot \triangle C'GE' \cdot \triangle B'GF' \cdot \triangle C'GF'}{\triangle A'GF' \cdot \triangle C'GF' \cdot \triangle D'GE' \cdot \triangle B'GC'} = \frac{A'D' \cdot C'E' \cdot B'F' \cdot C'F'}{A'F' \cdot C'F' \cdot D'E' \cdot B'C'}.$$

Zugleich aber ist der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks auch gleich dem Product der beiden von G ausgehenden Seiten, multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, also der obige Quotient auch gleich:

$$\frac{a'd'c'e'b'f'c'f' \sin(ad) \sin(ce) \sin(bf) \sin(cf)}{a'f'c'f'd'e'b'c' \sin(af) \sin(cf) \sin(de) \sin(bc)}.$$

Die Linien heben sich aber alle weg, da Zähler und Nenner Producte enthalten, die durch Vertauschung der Faktoren aus einander hervorgegangen sind, denn beide enthalten dieselben (klein geschriebenen Buchstaben), welche sich in den aus den Segmenten gebildeten Quotienten fanden. Man hat als die folgende Gleichung:

$$\frac{A'D' \cdot C'E' \cdot B'F' \cdot C'F'}{A'F' \cdot C'F' \cdot D'E' \cdot B'C'} = \frac{\sin(ad) \sin(ce) \sin(bf) \sin(cf)}{\sin(af) \sin(cf) \sin(de) \sin(bc)}.$$

Ebenso aber lässt sich die Gleichung beweisen

$$\frac{AD \cdot CE \cdot BF \cdot CF}{AF \cdot CF \cdot DE \cdot BC} = \frac{\sin(ad) \sin(ce) \sin(bf) \sin(cf)}{\sin(af) \sin(cf) \sin(de) \sin(bc)}$$

so dass beide Ausdrücke links in den beiden letzten Gleichungen, wie dies verlangt wurde, in der That derselben Zahl gleich sein müssen.

Beispiele. Sind nur zwei Schnittpunkte D und C in AB vorhanden und nimmt man je zwei Segmente, so hat der Quotient die Gestalt:

$$\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = \alpha,$$

Digitized by Google

Fig. 156.

es ist also auch:

$$\frac{A'C' \cdot B'D'}{A'B' \cdot D'C'} = \alpha.$$

Man sagt dann, zwischen den Segmenten finde ein anharmonisches Verhältniss statt. Ist aber:

$$\alpha = 1,$$

so hat man:

$$\frac{CA}{DC} = \frac{AB}{BD},$$

die Theilung ist somit eine harmonische, und es ergibt sich auch durch diese Schlüsse, dass die bezeichnete Eigenschaft eine perspectivische ist. Sind statt zweier Schnittpunkte deren drei gegeben, so lässt sich eine Beziehung, die der harmonischen analog ist, bestimmen, die man Involution nennt. Dies würde jedoch hier zu weit führen.

6) Vom Kreise.

1. Definitionen. Eine in sich geschlossene ebene Curve, die von einem gegebenen Punkte überall gleich grossen Abstand hat, heisst Kreislinie (Peripherie). Der Punkt, von dem sie den gegebenen Abstand hat, wird Mittelpunkt (Centrum) genannt. Der ebene Raum, welcher von der Kreislinie begrenzt wird, heisst Kreis. — Wie man zuweilen unter dem Namen Vieleck auch die Begrenzung der Figur versteht, so wird zuweilen auch die Kreislinie mit dem Namen Kreise bezeichnet. Die Kreislinie kann auch so definirt werden: Wenn man eine Grade *AB* so bewegt, dass ein Endpunkt *A* festbleibt, so beschreibt der andere *B* eine Kreislinie.

Der (grade) Abstand eines Punktes *P* (Fig. 157) der Kreislinie vom Mittelpunkte *O* heisst Halbmesser (Radius), da dieser Abstand überall derselbe ist, so folgt daraus:

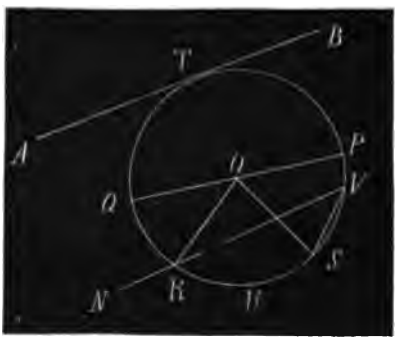
„Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich."

Die Grade *PQ*, welche von einem Punkte *P* der Peripherie zu einem andern *Q* und durch den Mittelpunkt geht, wird Durchmesser (Diameter) genannt. Also:

„Der Durchmesser ist doppelt so gross als der Halbmesser." — „Alle Durchmesser sind gleich."

Die Grade *VS*, welche zwei beliebige Punkte der Kreislinie verbindet, heisst Sehne (Chorde). Der Durchmesser ist also auch eine solche. — Ein beliebiger Theil der Kreislinie *RUS* wird Bogen (*arcus*) genannt. — Der von einem Bogen und einer Sehne begrenzte

Fig. 157.



Theil des Kreises *RUSV* heisst Abschnitt (Segment). — Ist hierbei die Sehne ein Durchmesser, handelt es sich also um das Stück *POQTP*, so hat man einen Halbkreis. —

Das zwischen zwei Radien *RO* und *SO* und dem zugehörigen Bogen *RUS* liegende Stück des Kreises wird Ausschnitt (Sector) genannt.

Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt im Centrum liegt wie *ROS*, wird Centriwinkel genannt.

Ein Winkel, dessen Scheitelpunkt in der Peripherie liegt wie *RVS*, wird Peripheriewinkel genannt.

Beim ersten also sind die Schenkel Radien, beim letzteren Sehnen. Auch dieses sind Definitionen der betreffenden Winkel. — Der Centriwinkel und der Peripheriewinkel stehen auf dem Bogen *RUS*, der in der Winkelebene zwischen ihren Schenkeln liegt, und in dem Bogen *RTVS*, der ausserhalb der Winkelebene zwischen ihren Schenkeln liegt.

Eine gradlinige Figur, deren Seiten sämmtlich Sehnen sind heisst, dem Kreise eingeschrieben.

Eine Grade *NRV*, welche zwei Punkte mit dem Kreise gemein hat, heisst Secante.

Eine Grade *ATB*, welche ins Unendliche verlängert nur einen Punkt mit dem Kreise gemein hat, heisst Tangente.

Digitized by Google

Der gemeinschaftliche Punkt *T* wird Berührungspunkt genannt.

Zwei Kreise berühren sich, wenn sie nur einen Punkt gemein haben.

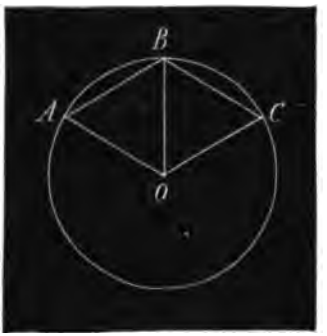
Eine Figur, deren Seiten alle Tangenten eines Kreises sind, heisst demselben umschrieben.

II. Lehrsätze.

Lehrsatz 1. „Keine Grade kann den Kreis in mehr als zwei Punkten schneiden."

Beweis. Denn nehmen wir an *ABC* (Fig. 158) sei eine Grade, welche die

Fig. 158.



Punkte *ABC* mit dem Kreise gemein hätte, so wären Winkel *OBA* und *OBC* Nebenwinkel, also einer davon mindestens einem Rechten gleich. Sei *OBA* derselbe, so ist ihm *OAB* gleich, da △ *OAB* gleichschenklig ist; man hätte also ein Dreieck mit zwei rechten oder stumpfen Winkeln, was unmöglich ist.

Lehrsatz 2. „In demselben oder in gleichen Kreisen lassen gleiche Bogen sich so auf einander legen, dass sie sich decken."

Beweis. Seien (Fig. 159) *AB* und *AC* die gleichen Bogen; man lege sie so

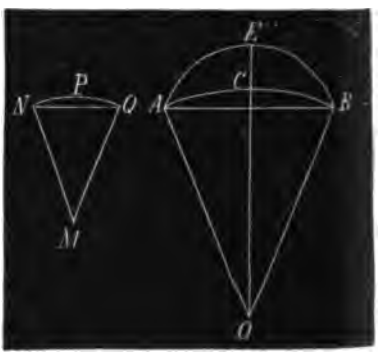
Fig. 159.

auf einander, dass die aus *A* gezogenen Halbmesser zusammenfallen, fiele dann *C*, ein Punkt des einen, nicht in den andern, sondern schnitte ihn in *D*, so wären *OD* und *OC* ungleiche Halbmesser, was unmöglich ist.

Lehrsatz 3. „In demselben oder in gleichen Kreisen gehören: 1) zu gleichen Bogen gleiche Sehnen und Centriwinkel, Sectoren und Segmente, 2) zu gleichen Sehnen gleiche Bogen und Centriwinkel, 3) zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen und Sehnen."

Beweis. 1) Seien *ACB* und *NPQ* (Fig. 160) die gleichen Bogen; da diese

Fig. 160.



auf einander gelegt sich decken, so decken sich auch die Sehnen *AB* und *NQ*, also *AB* = *NQ*. Es sind dann die Dreiecke *AOB* und *NMQ* congruent, aus Gleichheit aller Seiten, also auch Winkel *AOB* = *NMQ*. Auch decken sich die Sectoren und Segmente.

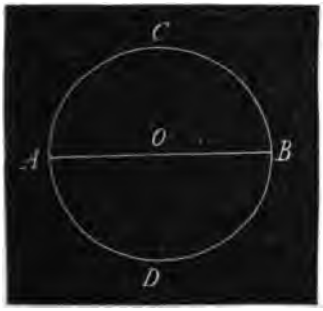
2) Ist *AB* = *NQ*, so kann man diese Linien zur Deckung bringen; fiele dabei ein Punkt *E* des Bogens *NPQ* nicht in *ACB*, so hätte man wieder die ungleichen Radien *OE* und *OC*, und somit ist Bogen *ACB* = *NPQ*, also auch die Centriwinkel gleich.

3) Ist Winkel *AOB* = *NMQ*, so sind die Dreiecke *AOB* und *NMQ* congruent, aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels, mithin auch die Sehnen *AB* und *NQ* und folglich auch die Bogen gleich.

Ist der Centriwinkel *AOB* (Fig. 161) ein gestreckter, so gehört zu ihm der Bogen *ACB*, und so bilden seine beiden Schenkel einen Durchmesser; auch der Bogen *ADB* gehört zu einem gestreckten Centriwinkel *AOB*. Es sind also diese Bogen *ACB* und *ADB* einander gleich.

Zusatz. „Ein Durchmesser theilt die

Fig. 161.



Peripherie des Kreises und somit auch den Kreis selbst in zwei gleiche Theile."

Offenbar rührt von dieser Eigenschaft die Bezeichnung Halbkreis her.

Lehrsatz 4. „Wenn zwei Bogen eines oder zweier gleichen Kreise ungleich sind, so gehört zu dem grössern auch die grössere Sehne und der grössere Centriwinkel."

Beweis. Die Bogen *AB* und *AC* (Fig. 162) lassen sich immer so auf ein-

Fig. 162.

ander legen, dass der Theil des grössern *AC*, der mit dem kleinen gleich ist, diesen auch deckt; es wird also *C* über *B* hinausfallen und Winkel *AOC* grösser als *AOB* sein.

Die Dreiecke *AOB* und *AOC* haben nun je 2 als Radien gleiche Seiten, dem kleineren eingeschlossenen Winkel *AOB* wird also auch die kleinere Seite *AB* gegenüberliegen, also *AC* grösser als *AB*.

Lehrsatz 5. „Eine Sehne und ihr zugehöriger Bogen ist desto grösser je näher die Sehne dem Mittelpunkte, d. h. je kleiner das vom Mittelpunkte aus auf sie gefällte Loth ist."

Beweis. Sind *AB* und *BC* (Fig. 163) die Sehnen, und Loth *OE* grösser als *OD*, so lässt sich *OD* auf *OE* legen, wo dann die Bogen zum Theil zusammenfallen, und *AB* in die Lage *FG* zwischen *O* und *BO* fällt. Es ist also Bogen *FG*

Fig. 163.

grösser als *BC* und Gleiches gilt somit von den zugehörigen Sehnen.

III. Lehrsätze.

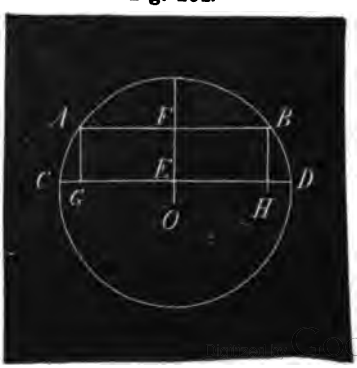
Eine Sehne und die aus ihren Endpunkten gezogenen beiden Halbmesser bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Die Mittellinie desselben (Abschn. 3. Satz 11) geht durch die Spitze desselben und mithin durch den Mittelpunkt, und da sie den Winkel an der Spitze d. h. den Centriwinkel halbirt, so wird sie auch den zugehörigen Bogen halbiren, da zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören. Also:

Lehrsatz 6. „Zu jedem Bogen gibt es eine und nur eine Linie, welche ihn, die zugehörige Sehne und den zugehörigen Centriwinkel halbirt, durch den Mittelpunkt geht, und auf der Sehne senkrecht steht."

Diese Linie wollen wir auch als Mittellinie des Bogens bezeichnen.

Zieht man jetzt vom Mittelpunkte *O* aus (Fig. 164) ein Loth *OE* auf eine Sehne *CD*, so steht dies auch auf der parallelen Sehne *AB* in *F* senkrecht

Fig. 164.



Digitized by Google

und ist somit auch die Mittellinie von AB (Abschnitt 3. Satz 11). Also:

Lehrsatz 7. „Zwei parallele Sehnen haben gemeinschaftliche Mittellinien."

Zieht man noch AG und BH parallel mit OF, so ist $AG = BH$,

$$CG = CE - AF = ED - FB = HD,$$

also die Dreiecke ACG und BDH congruent, aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen (rechten) Winkels, somit auch Sehne $AC = BD$, also ebenso die zugehörigen Bogen.

Lehrsatz 8. „Zwei parallele Sehnen schneiden auf beiden Seiten gleiche Bogen ab."

Hiermit verbinden wir noch den Satz:

Lehrsatz 9. „Durch drei Punkte, die nicht in einer Graden liegen, lässt sich immer ein und nur ein Kreis legen."

Beweis Seien A, B, C (Fig. 165) die Punkte. Man zieht die Mittellinie DO

Fig. 165.

von A und B, und FO von BC, die sich in O schneiden, so ist O als Punkt von DO gleich weit entfernt von A und B, und als Punkt von FO auch von B und C. Es gibt also einen Punkt O und nur einen, der von A, B und C gleich weit entfernt ist, und O ist mithin Mittelpunkt eines Kreises der durch A, B und C geht.

Hieraus folgt augenblicklich.

Zusatz. „Zwei Kreise können höchstens zwei Punkte gemein haben."

IV. Lehrsätze.

Die folgenden Sätze betreffen das Verhalten zweier Kreise zu einander. Haben dieselben (Fig. 166 und 167) wirklich zwei Punkte A und B gemein, und sind O und C die Mittelpunkte der Kreise, so sind A und B gleich weit von O und von C entfernt, also O und C Punkte der Mittellinie von AB, welche somit die Linie OC selbst ist,

Fig. 166.

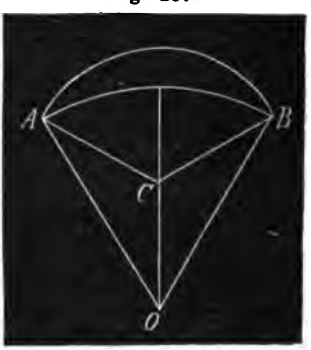
während AB die gemeinschaftliche Sehne beider Kreise ist. Hieraus folgt:

Lehrsatz 10. „Wenn sich zwei Kreise in zwei Punkten schneiden, so halbirt die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte die gemeinschaftliche Sehne, und steht auf derselben senkrecht."

Wir erhalten aber auch Bedingungen dafür, dass die Kreise wirklich zwei Punkte gemein haben. Zunächst merken wir noch folgende

Definition. Die Verbindungslinie OC der Mittelpunkte zweier Kreise heisst Centrale. In unserm Falle bilden nun die Radien OA, CA und die Centrale ein Dreieck; es ist also sowohl $AO + AC$ grösser als OC, also auch, wenn AO der grössere Radius ist, AO kleiner als $AC + OC$, oder $AO - AC$ kleiner als OC. D. h.

Fig. 167.



Lehrsatz 11. „Wenn zwei Kreise zwei Punkte gemein haben, so ist die Summe ihrer Halbmesser grösser, die Differenz derselben kleiner als die Centrale."

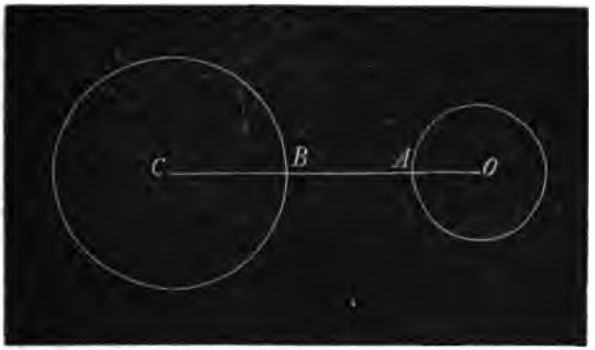
Dieser Satz lässt sich aber auch in folgender Weise umkehren.

Digitized by Google

Lehrsatz 12. „Wenn zwei Kreise keinen Punkt gemein haben, so ist entweder die Summe ihrer Halbmesser kleiner als die Centrale, oder die Differenz derselben grösser als die Centrale."

Beweis. Es müssen nämlich dann beide Kreise entweder ganz ausser einander (Fig. 168), oder der kleinere *C* ganz innerhalb des grössern *O* (Fig. 169) fallen. Im ersteren Falle ist offenbar

Fig. 168.



die Centrale *OC* grösser als die Summe der Radien *OA* und *BC*, im letztern ist $OC = OA - CA$, also $OA - CB$ jedenfalls grösser als *OC*, da das abgezogene *CB* kleiner ist als *CA*, womit unser Satz erwiesen ist.

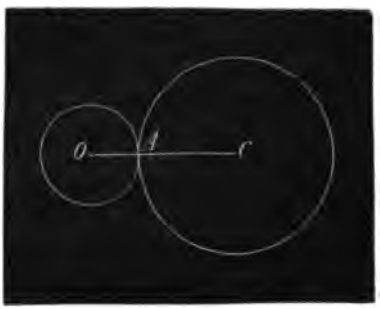
Fig. 169.

Lehrsatz 13. „Ist die Centrale gleich der Summe oder gleich der Differenz der Halbmesser so berühren sich die Kreise immer (d. h. sie haben nur einen Punkt gemein), und zwar liegen im ersten Falle die Kreise ganz ausser einander, im letzteren der kleinere, innerhalb des grösseren, der Berührungspunkt aber in der Centrale."

Beweis. Offenbar können die Kreise in beiden Fällen nach Lehrsatz 11. nicht zwei Punkte gemein haben, und nach Lehrsatz 12. auch nicht ohne gemeinschaftlichen Punkt sein.

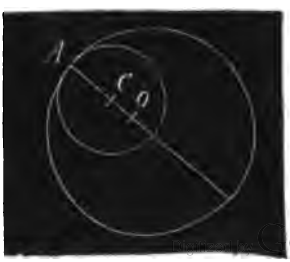
Uebrigens wird in jedem Falle, wenn (Fig. 170) die Centrale *OC* gleich der Summe der Halbmesser ist, auf derselben ein Punkt *A* sein, dessen Entfernung von *O* gleich dem einen, und dessen Entfernung von *C* gleich dem andern Radius ist, somit ist dieser Punkt *A* ein beiden Kreisen gemeinschaftlicher Punkt

Fig. 170.



und dieselben liegen der eine ausserhalb des andern. Wenn aber (Fig. 171) die Centrale gleich der Differenz der Halbmesser ist, so gibt es in der Verlänge-

Fig. 171.



Digitized by Google

rung von OC einen solchen Punkt A; derselbe ist also der Berührungspunkt der beiden Kreise, von denen C innerhalb O liegt.

Der letzte Lehrsatz lässt sich auch umkehren.

Lehrsatz 14 „Berühren sich zwei Kreise äusserlich, so ist die Centrale immer gleich der Summe, berühren sie sich innerlich, so ist sie gleich der Differenz der Radien."

Beweis. Es kann nämlich dann weder das Criterium zweier Schnittpunkte noch keines Schnittpunktes stattfinden, und es bleiben nur die in diesem Lehrsatze gegebenen Grössen der Halbmesser möglich. Dass im ersteren Falle äussere, im zweiten innere Berührung stattfindet, folgt wie im vorigen Satze.

V. Lehrsätze.

Das Folgende betrifft die Ausmessung der Winkel mittels der Kreisbogen. Wenn man aus den Scheitelpunkten O und C zweier Winkel (Fig. 172) Kreise mit gleichen Halbmessern OA und CD legt, so entstehen AB und DE, deren Centriwinkel die gegebenen Winkel sind. Haben dieselben nun irgend ein genaues Maass, d. h. einen Winkel, der in AOB eine ganze Anzahl von n Malen, und eine andere ganze Anzahl p mal in DCE enthalten ist, kann man also AOB in n Theile theilen, deren jeder gleich AOE ist, und DCE in p solcher Theile theilen, so werden die Bogen AB und DE in gleich viel Theile Ae, ef ..., Dg, gh ... getheilt, die alle gleich dem zu AOB gehörigen Bogen Ae sind. Haben beide Winkel kein genaues Maass, so lässt sich, ganz wie bei der Ausmessung der Figuren dargethan, immer ein Winkel AOe finden, der bis auf einen beliebig klein zu machenden Fehler die Winkel misst, und der zugehörige Bogen Ae wird dasselbe in Bezug auf AB und DE thun. Daraus folgt der wichtige Satz:

Fig. 172.

Lehrsatz 15. „Man kann die Winkel mittels der Bogen, deren Centriwinkel sie sind, und die Bogen mittels der Winkel messen. Um nämlich einen Winkel DCE durch ein gegebenes Maass AOB, das also eine Winkelgrösse sein muss, zu messen, schlage man von O und C als Mittelpunkte mit beliebigen aber gleichen Radien Bogen AB und DE; so oft der erstere in dem letzteren enthalten ist, wird auch der Winkel AOB in DCE enthalten sein."

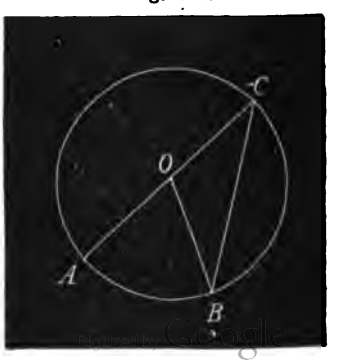
Erläuterung. Wählt man also als Winkeleinheit den Rechten, so ist der entsprechende Bogen der vierte Theil der Peripherie, den man Quadrant nennt. Hat z. B. ein Winkel $\frac{3}{4}$ Rechte, so hat der zugehörige Bogen $\frac{3}{4}$ Quadranten. Da man als Winkeleinheit oft den Grad, d. h. den 90. Theil des Rechten nimmt, so kann als Bogeneinheit der 90. Theil des Quadranten, den man ebenfalls Grad nennt, dienen, und alle Bogen werden dann durch dieselbe Zahl bestimmt sein, als die zu ihm gehörigen Centriwinkel. Der 60. Theil eines Grades, die Minute, und der 60. Theil der Minute, die Secunde, beziehen sich also nun in gleicher Weise auf Bogen wie auf Winkel. Auf diesen Betrachtungen beruht offenbar der Gebrauch des Transporteur.

VI. Lehrsätze und Zusätze.

Lehrsatz 16. „Stehen Peripheriewinkel und Centriwinkel auf demselben Bogen, so ist der letztere doppelt so gross als der erstere."

Beweis. Wir unterscheiden 3 Fälle. Fall a. Der Mittelpunkt O liegt in einem Schenkel des Peripheriewinkels ACB (Fig. 173). Fall b. Derselbe liegt innerhalb der Winkelebene des Peripheriewinkels. Fall c. Derselbe liegt ausserhalb dieser Winkelebene.

Fig. 173.

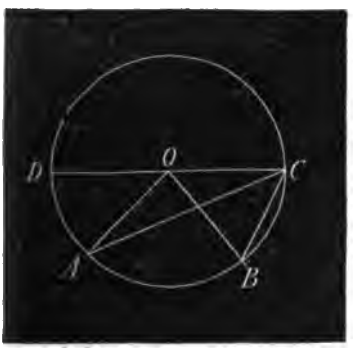


Führen wir den Beweis für Fall a. Der Centriwinkel AOB (Fig. 173) ist Aussenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks OCB, mithin gleich $OBC + OCB$, und da diese beiden Winkel gleich sind, $AOB = 2OCB$. Es ist aber OCB oder ACB der mit AOB auf gleichem Bogen AB stehende Peripheriewinkel. — Was die beiden andern Fälle anbetrifft, so ziehen wir durch C und O (Fig. 174 und 175) Linie CD, dann ist wie eben

Fig. 174.

gezeigt: $DOB = 2DCB$, $DOA = 2DCA$, oder Beides im Falle b. addirend, im Falle c. das Letztere vom Ersteren abziehend, ergibt sich $AOB = 2ACB$, womit unser Satz bewiesen ist.

Fig. 175.

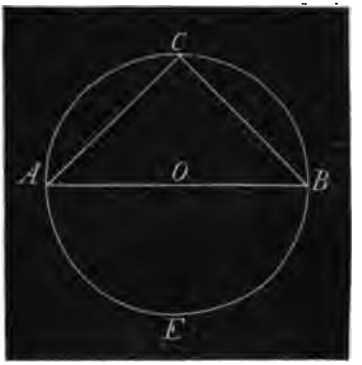


Wenn der Bogen ein Halbkreis ist, so ist der zugehörige Centriwinkel AOB (Fig 176) gleich zwei Rechten, also der Peripheriewinkel ACB gleich einem Rechten, d. h.

Zusatz 1. „Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist immer ein Rechter."

Wenn ferner ein Viereck $ABCD$ (Fig. 177) dem Kreise eingeschrieben ist, so ist von zwei gegenüberliegenden Winkeln

Fig. 176.



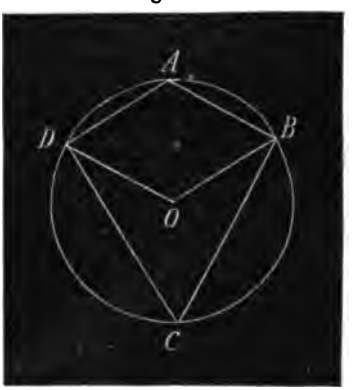
A und C offenbar der eine O mit dem hohlen Winkel DOB und der andere A mit dem erhabenen Winkel DOB auf demselben Bogen befindlich, und da beide Winkel DOB zusammen 4 Rechte betragen, so wird die Summe $A + O$ gleich 2 Rechten sein, d. h.:

Zusatz 2. „In jedem Kreisviereck ist die Summe je zweier gegenüberliegenden Winkel 2 Rechten gleich."

Stehen endlich zwei Peripheriewinkel auf demselben oder gleichen Bogen, so sind sie die Hälften gleicher Centriwinkel, also:

Zusatz 3. „Peripheriewinkel auf gleichen oder demselben Bogen sind gleich."

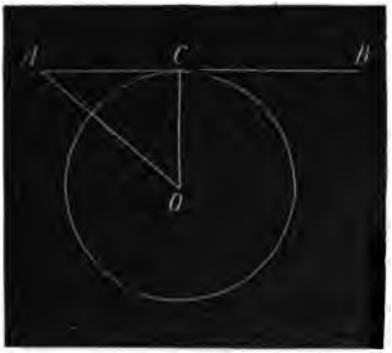
Fig. 177.



VII. Lehrsätze.

Diese Sätze beziehen sich auf Tangenten. Ist AB eine solche an Kreis O (Fig. 178) und C der Berührungspunkt, so ist jede von O nach AB gezogene Linie, also z. B. OA länger als OC, da OC der Halbmesser, OA grösser als derselbe ist. Von allen Linien, die von O

Fig. 178.



nach AB gezogen sind, ist aber die auf AB senkrechte, die kürzeste, also:

Lehrsatz 17. „Die vom Berührungspunkte einer Tangente nach dem Mittelpunkte gezogene Linie steht auf der Tangente senkrecht."

Dieser Satz lässt sich auch ausdrücken: „Ein Loth vom Mittelpunkte auf die Tangente gefällt, geht durch den Berührungspunkt."

Denn es gibt ja nur ein solches Loth. Aber unser Satz lässt sich auch umkehren.

Lehrsatz 18. „Jede Linie, die durch den Endpunkt C eines Radius OC gezogen ist (Fig. 179) und auf demselben senkrecht steht, ist eine Tangente."

Beweis. Wäre AB keine solche, und stände doch auf CO senkrecht, so müsste sie einen zweiten Punkt A mit dem Kreise gemein haben, es wäre also AO ein Halbmesser, also $AO = CO$ und Winkel $OAC = OCA = R$, was unmöglich ist.

Lehrsatz 19. „Wenn zwei Tangenten einen Schnittpunkt haben, so sind die Entfernungen ihrer Berührungspunkte von demselben gleich. Auch geht die Halbirungslinie ihres Winkels durch den Mittelpunkt."

Beweis. Seien AC und BC (Fig. 179) die Tangenten, O der Mittelpunkt; wir ziehen AO, OB und CO, so ist

$$\triangle AOC \cong BOC,$$

weil $CO = CO$, $AO = BO$ als Radien, Winkel $A = B$ als Rechte, also $AC = BC$, Winkel $ACO = BCO$. In der That also geht die Halbirungslinie des Winkels ACB durch den Mittelpunkt.

Lehrsatz 20. „Zwei Kreise, welche sich berühren, haben im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente."

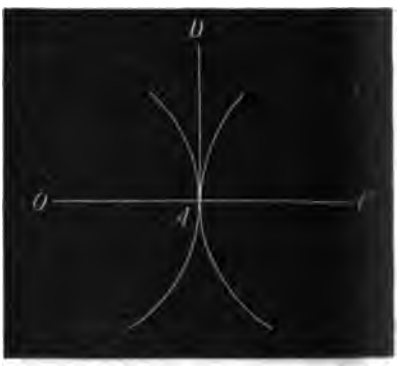
Beweis. Offenbar nämlich fällt der Berührungspunkt A (Fig. 180) mit den Mittelpunkten O und C in eine Linie

Fig. 179.

(Lehrsatz 13.); die Senkrechte AD auf OC steht also auf beiden Halbmessern OA und CA senkrecht, und ist also Tangente beider Kreise.

Lehrsatz 21. „Zieht man durch einen Punkt der Peripherie eine Sehne

Fig. 180.

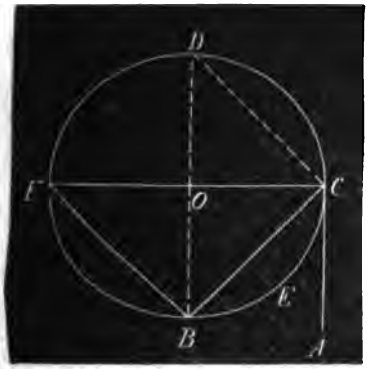


und eine Tangente, so ist der Winkel dieser Linie gleich dem Peripheriewinkel, der auf dem dazwischen liegenden Bogen steht."

Beweis. Seien CA (Fig. 181 und 182) die Tangente, CB die Sehne, so soll der auf Bogen CEB stehende Peripheriewinkel gleich Winkel ACB sein. Wir nehmen zunächst an, dieser Winkel sei ein spitzer (Fig. 181). Den Peripheriewinkel BDC ziehen wir so, dass sein einer Schenkel CD durch den Mittelpunkt geht. Dann ist Winkel $DCA = R$, also auch $DCB + BCA = R$, ferner Winkel im Halbkreise $DBC = R$, und die Summe

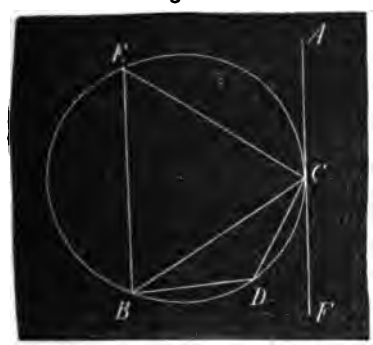
Digitized by Google

Fig 181.



der beiden anderen Winkel des Dreiecks FBC: $FCB + BFC = R$; diese Gleichung in Verbindung mit $FCB + BCA = R$ gibt $BFC = BFC = BCA$. — Wäre BCA ein Rechter, so wäre BC der Durchmesser, BDC der Winkel im Halbkreise, also ebenfalls ein Rechter. Sei jetzt (Fig. 182) ACB ein stumpfer Winkel, BDC der Winkel auf Bogen BEC, Winkel BEC innerhalb dieses Bogens, so betragen die Winkel E und D zwei Rechte als Winkel im Kreisvierecke, E aber steht auf Bogen BDC und ist also gleich dem spitzen Winkel BCF, dem Nebenwinkel von BCA;

Fig. 182.



da nun $BCF + BCA = 2R$,

und $E + D = 2R$, so muss $BDC = BCA$ sein, was zu beweisen war.

Schliesslich erwähnen wir noch einen Satz von dem dem Kreise umschriebenen Vierecke.

Lehrsatz 22. „In jedem dem Kreise umschriebenen Vierecke ist die Summe je zweier gegenüberliegender Seiten gleich."

Beweis. Sei $ABDO$ (Fig. 183) das Viereck, E, F G, H die Berührungspunkte, so ist nach Satz 19.:

Fig. 183.

$AE = AH$, $BG = BH$, $DE = DF$, $OG = OF$, also durch Addition:

$$AE + BG + DE + OG = AH + BH + DF + OF,$$

oder:

$$AD + BO = AB + DO.$$

7) Geometrische Constructionen.

I. Einleitung.

Geometrische Constructionen haben den Zweck, gewisse Punkte, Linien, Winkel aus gegebenen Bedingungen zu finden, welche sich auf Lage und Grössenverhältnisse beziehen. Es ist dazu das Ziehen von graden und krummen Linien nöthig. Im engern Sinne versteht man unter geometrischer Lösung indess eine solche, wobei nur die grade Linie und der Kreis verwendet sind. Da sich auch die Lage von Raumgrössen zuletzt immer auf Grössenverhältnisse zurückführen lässt, so steht der Construction immer eine Berechnung gegenüber, welche ebenfalls die Aufgabe löst, und beide Lösungen stehen in der merkwürdigen Beziehung, dass wenn die letztere zu einer einfachen oder quadratischen Gleichung führt, immer die Construction mittels der graden Linie und des Kreises geschehen kann. (Diese Beziehung ist in dem Artikel: „Quadratische Gleichung" bewiesen)

Was die Art und Weise der Constructionen anbetrifft, so merken wir zunächst folgende Grundwahrheiten:

A) „Ein Punkt kann gegeben sein, wenn man zwei (grade oder krumme) Linien kennt, die durch denselben gehen, sich also in ihm schneiden. Diese Linien nennt man jede: „Ort" des fraglichen Punktes. — Sind beide Linien grade, so haben sie nur einen Schnittpunkt, der Punkt kann also nur einer sein. Ist ein Ort ein Kreis, der andere eine Grade oder beide Kreise, so können 2 Schnitt-

punkte vorhanden sein, also es sind auch 2 Punkte möglich, welche die gegebene Bedingung erfüllen."

B) „Eine unbegrenzte grade Linie ist gegeben, wenn man 2 Punkte in derselben kennt."

C) „Ein Winkel ist gegeben, wenn man die Richtuug beider Schenkel, d. h. 2 Punkte in jedem derselben kennt. Ist der Scheitelpunkt gegeben, so ist nur noch ein Punkt in jedem Schenkel nöthig."

D) „Ein Kreis ist gegeben, wenn man 3 Punkte seiner Peripherie, oder seinen Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie kennt."

Alle Constructionen sind auf einige einfache zurückzuführen, die wir als Postulate (Forderungen) bezeichnen.

Postulat 1. „Zwischen zwei gegebenen Punkten *A* und *B* kann man immer eine Grade ziehen."

Bekanntlich gewährt ein Lineal, welches man auf *A* und *B* legt, das Mittel hierzu.

Postulat 2. „Man kann aus *A* als Mittelpunkt mit einem gegebenen Radius einen Kreis ziehen."

Der Zirkel gewährt hierzu die Möglichkeit.

Postulat 3. „Man kann aus *A* als Mittelpunkt einen Kreis ziehen, der durch einen gegebenen Punkt *B* geht."

Auch dies geschieht mittels des Zirkels.

II. Aufgaben.

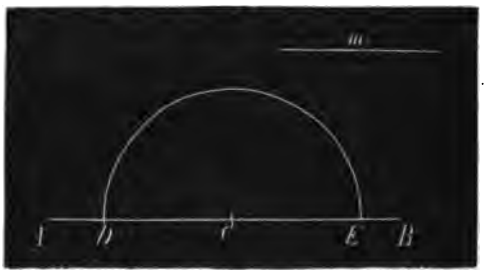
Die hier zu behandelnden Aufgaben beruhen auf einer Ortsbestimmung, welche durch die Definition des Kreises gegeben ist.

Ortsbestimmung. „Die Peripherie eines Kreises, welcher aus Mittelpunkt *A* mit Halbmesser *r* gezogen ist, ist der Ort aller Punkte, welche von *A* die Entfernung *r* haben."

Aufgabe 1. „Von Punkt *C* einer gegebenen unbegrenzt gedachten Linie *AB* ein Stück abzuschneiden, das gleich einer gegebenen Strecke *m* ist."

Auflösung. Von *C* (Fig. 184) aus

Fig. 184.



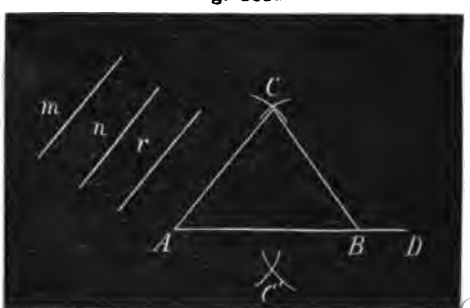
wird mit Halbmesser *m* ein Kreis geschlagen, welcher *AB* in *D* und *E* schneidet; es sind dann *CD* und *CE* zwei solcher verlangten Stücke.

Determination. Es gibt mithin immer zwei Lösungen unserer Aufgabe.

Aufgabe 2. „Es sind drei Strecken *m*, *n*, *p* gegeben. Ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten *m*, *n* und *p* sind, mit der Maassgabe, dass die *m* gleiche Seite in die gegebene Richtung *AD* fällt, und die Seiten *m* und *n* in *A* zusammenstossen.

Auflösung. Schneide von *AD* ab *AB* = *m*, (Fig 185) schlage mit *n* von *A*, mit *p* von *B* aus Kreise, die sich in *C*

Fig. 185.



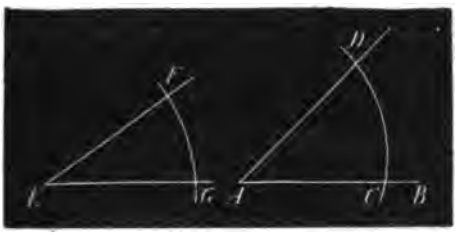
Digitized by Google

schneiden, so ist ACB das verlangte Dreieck (denn die Entfernung AC ist gleich m, BC gleich p).

Determination. Die Kreise schneiden sich noch in einem zweiten Punkte C_1, es sind also 2 Dreiecke möglich, die aber congruent sind. Damit jedoch die Kreise sich überhaupt schneiden, muss die Summe zweier der Linien m, n, p grösser als die dritte sein. Ist dies nicht der Fall, so gibt es kein Dreieck.

Bemerkung. Ist $m = n$, also das Dreieck gleichschenklig, so wird der

Fig. 186.



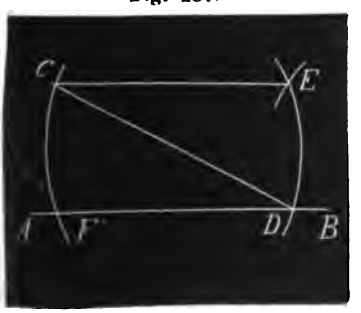
eine Seite A die Ecke wird, in die Winkel E fällt, was nach voriger Aufgabe geschieht, so hat man ein congruentes Dreieck, also bei A einen E gleichen Winkel, womit die Aufgabe gelöst ist. Am bequemsten macht man das Dreieck gleichschenklig, also:

Auflösung. Mit beliebiger Zirkelöffnung schlägt man von Punkt E einen Kreis, der die Schenkel des Winkels E in F und G schneidet. Schlägt von A aus mit EF einen Bogen der AB in C schneidet, und von C aus mit FG einen Bogen, der den vorigen in D schneidet, verbindet DA, so ist DAC der verlangte Winkel.

Determination. Es sind 2 Winkel auf beiden Seiten von AB möglich.

Aufgabe 4. „Gegeben Linie AB und Punkt C (Fig. 187); durch letztern eine Parallele mit AB zu legen."

Fig. 187.



Vorbereitung. Zieht man CD beliebig nach AB, und trägt Winkel CDA so an CD an, dass ein gleicher Winkel ECD entsteht, so hat man gleiche Wechselwinkel, und es ist CE parallel AB, also:

Auflösung. Ziehe CD beliebig nach AB, schlage von D mit CD einen Kreis, der AB in F schneidet, und mit demselben Radius von C aus einen Kreis DE, dann mit FC von D aus einen solchen der DE in E schneidet, und verbindet CE, so ist diese Linie die gesuchte.

Determination. Es gibt natürlich nur eine, und immer eine solche Linie, wenn C nicht in AB liegt. — Auf die hier gelösten Aufgaben lassen sich viele andere zurückführen. Wir geben hier noch diejenigen, welche die Construction eines Dreiecks aus drei gegebenen Stücken bewirken.

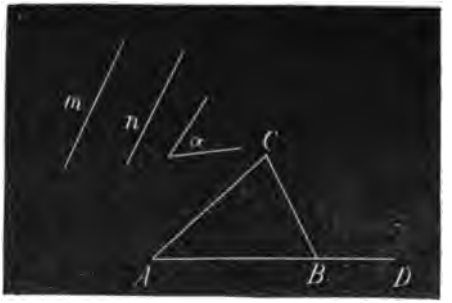
Aufgabe 5. „Gegeben Linie AD (Fig. 188). Darüber ein Dreieck zu errichten, dessen eine Seite AB gleich der gegebenen Strecke m ist, und in die Richtung AD fällt, dessen zweite Seite der gegebenen Strecke n gleich ist, und mit AB den gegebenen Winkel α einschliesst."

Auflösung. Mache $AB = m$, Winkel $BAC = \alpha$, Schenkel $AC = n$ und ziehe BC.

Offenbar sind immer zwei Dreiecke auf beiden Seiten von AB möglich.

Aufgabe 6. „Gegeben Linie AD (Fig. 189). Darüber ein Dreieck zu errichten, dass $AB = m$ die eine Seite desselben

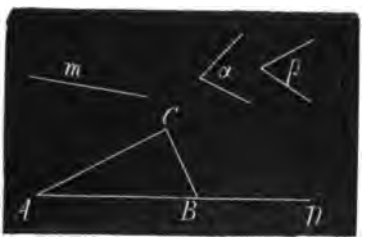
Fig. 188.



wird, die Winkel bei A und B die gegebenen Grössen α und β haben."

Auflösung. Mache $AB = m$, Winkel $BAC = \alpha$, Winkel $ABC = \beta$, deren Schenkel sich in C schneiden. ABC ist das verlangte Dreieck. Offenbar gibt es deren zwei.

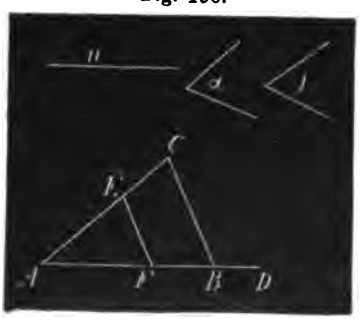
Fig. 189.



Aufgabe 7. „Ueber AD (Fig. 190) ein Dreieck zu errichten, dass $AB = m$ eine Seite, der Gegenwinkel derselben $C = \gamma$, und der anliegende Winkel $A = \alpha$ wird."

Auflösung. Mache Winkel $EAD = \alpha$. Trage an einen beliebigen Punkt E von EA als Scheitelpunkt Winkel $FEA = \gamma$ an, und ziehe durch B, BC parallel mit FE, so ist ACB das verlangte Dreieck, (denn Winkel $C = E = \gamma$).

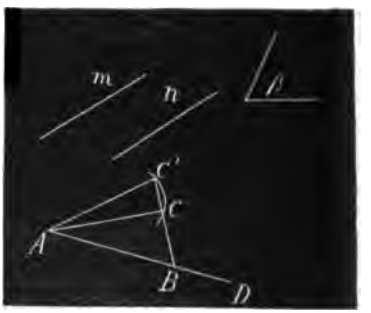
Fig. 190.



Aufgabe 8. „Gegeben AD (Fig. 191). Ein Dreieck darüber zu errichten, dass Seite $AB = m$, Seite $AC = n$, und der Winkel bei $B = \beta$ wird."

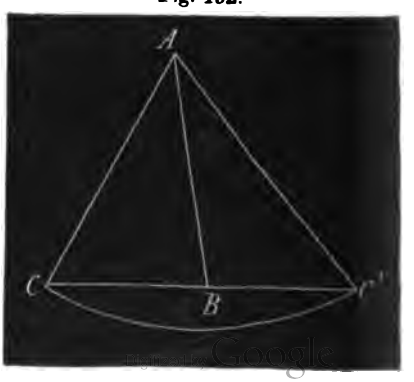
Auflösung. Mache $AB = m$, Winkel $ABC = \beta$. Schlage von A mit n einen Bogen, der BC in C schneidet. ABC ist offenbar das verlangte Dreieck.

Fig. 191.



Determination. Der Kreis schneidet ABC in zwei Punkten. Liegen beide Punkte C und C' auf verschiedenen Seiten von AB (Fig. 192), so ist nur ein Dreieck möglich, da nur eins der so gewonnenen

Fig. 192.



Digitized by Google

Dreiecke den Winkel β, das andere den Nebenwinkel von β hat. Liegen C, C' auf einer Seite von AB (Fig. 191), so hat man zwei Dreiecke ABC und ABC'. Da aber, wenn AC die grössere Seite ist, nur ein Dreieck möglich ist, so tritt der erste Fall ein, wenn m kleiner als n, der zweite, wenn m grösser als n ist.

III. Aufgaben.

Ortsbestimmung. Wie wir im zweiten Abschnitt gesehen haben, ist die Mittellinie zweier Punkte A und B der Ort aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind. Dies gibt sogleich eine Construction der Mittellinie.

Aufgabe 9. „Zwei Punkte A und B oder eine Linie AB ist gegeben. Die Mittellinie zu finden."

Auflösung. Schlage von A und B (Fig. 193) mit beliebiger aber gleicher

Fig. 193.

Zirkelöffnung Kreise, die sich in C und D schneiden, so ist CD die Mittellinie. (Denn C und D sind von A und B gleichweit entfernt.)

Bemerkung. Der Halbmesser der Kreise muss grösser als die Hälfte von AB sein, weil sonst dieselben sich nicht schneiden. Da die Mittellinie AB halbirt, so ist mit dieser Auflösung zugleich eine gefunden für die

Aufgabe 10. „Eine Linie AB zu halbiren."

Auflösung. Der Schnittpunkt E von AB und CD ist der Halbirungspunkt. Da ferner die Mittellinie auch den Winkel an der Spitze des über AB errichteten gleichschenkligen Dreiecks halbirt, ferner auf AB senkrecht steht, so lassen sich leicht auf demselben Wege noch folgende Constructionen finden.

Aufgabe 11. „Einen gegebenen Winkel C zu halbiren."

Vorbereitung. Macht man die Schenkel von C (Fig. 194) CA und CB gleich, so ist C ein Punkt der Mittellinie von AB; ein zweiter ist wie in der vorigen Aufgabe zu finden. Also:

Fig. 194.

Auflösung. Schlage von C aus mit beliebigem Radius einen Bogen, der die Schenkel von C in A und B schneidet, von diesen Punkten aus mit beliebiger aber gleicher Zirkelöffnung Bogen, die sich in D schneiden; CD halbirt dann den Winkel C.

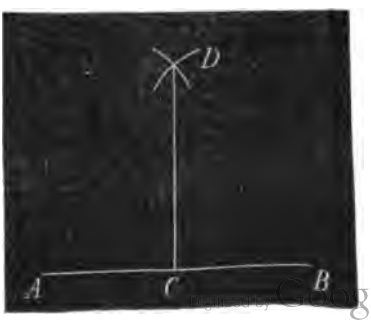
Aufgabe 12. „Durch einen gegebenen Punkt C einer Linie AC eine Senkrechte auf derselben zu errichten."

Vorbereitung. Verlängert man AC (Fig. 195) um ihre eigene Grösse CB, so ist C ein Punkt der Mittellinie von AB, die somit auf AC in C senkrecht steht. Also:

Auflösung. Mache $CB = AC$, schlage von A und B aus mit gleicher Zirkelöffnung Bogen, die sich in D schneiden, so ist DC das Loth auf AB.

Aufgabe 13. „Von einem Punkt C

Fig. 195.

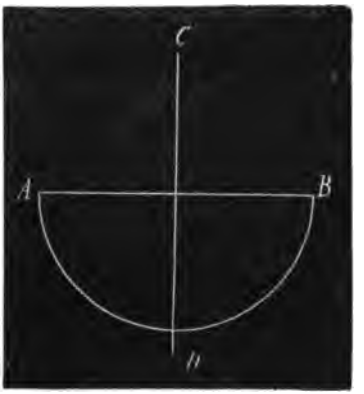


Digitized by Google

ausserhalb *AB* eine Senkrechte darauf zu fällen."

Vorbereitung. Schlägt man von *C* (Fig. 196) aus einen Bogen, der *AB* in zwei Punkten *A* und *B* schneidet, so ist *C* ein Punkt der Mittellinie von *AB*. Also:

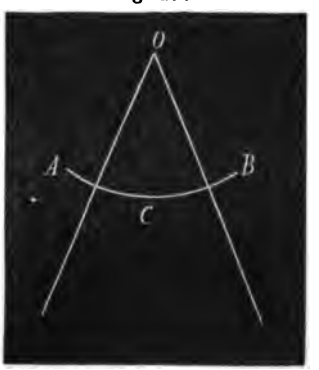
Fig. 196.



Auflösung. Schlage von *C* aus einen Bogen, der die Linie *AB* in *A* und *B* schneidet, von *A* und *B* mit gleicher Zirkelöffnung Bogen, die sich in *D* schneiden, so ist *CD* senkrecht auf *AB*. — Aus den Eigenschaften der Mittellinie ergibt sich auch die Lösung einiger Aufgaben, die den Kreis betreffen.

Aufgabe 14. „Es ist ein Bogen *AB* (Fig. 197) gegeben. Seinen Mittelpunkt zu finden."

Fig. 197.



Vorbereitung. Da die Mittellinie jeder Sehne und des zugehörigen Bogens durch den Mittelpunkt geht, so handelt es sich nur darum *AB* in zwei Bogen zu theilen und ihre Mittellinien zu finden. Also:

Auflösung. Nehme *C* beliebig auf *AB*, ziehe die Mittellinien von *AC* und *CB*. Diese schneiden sich im Mittelpunkte *O*.

Aufgabe 15. „Einen Bogen zu halbiren."

Auflösung. Ist *AB* (Fig. 198) der Bogen, so zieht man seine Mittellinie *CD*, welche das Verlangte leistet.

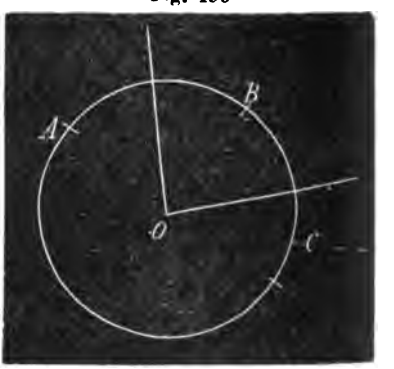
Fig. 198.

Aufgabe 16. „Drei Punkte *A, B, C* gegeben. Einen Kreis durch dieselben zu legen"

Vorbereitung. Nach Abschnitt 6. Satz 9. schneiden sich die Mittellinien je zweier Punkte im Mittelpunkte des gesuchten Kreises. Also:

Auflösung. Bestimme die Mittellinien von *AB* und *BC* (Fig. 199), die sich in *O* schneiden, und schlage aus *O* mit Halbmesser *OA* einen Kreis, welcher der gesuchte ist.

Fig. 199



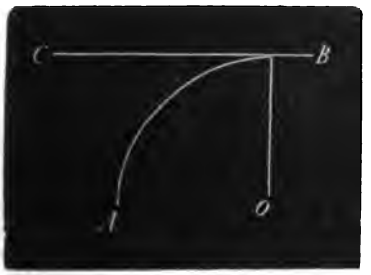
Determination. Die drei Punkte *A, B, C* dürfen nicht in grader Linie liegen.

Aufgabe 17. „Ein Bogen *AB* gegeben. Durch den gegebenen Punkt *B* desselben eine Tangente zu legen."

Digitized by Google

Auflösung. Ziehe den Halbmesser *BO* (Fig. 200), und *BC* senkrecht darauf, so ist dies die Tangente. (Da jede Grade, die auf dem Radius steht, eine solche ist.)

Fig. 200.



IV. Aufgaben.

Definition. Wenn man von einem Punkte *C* (Fig. 201) eine beliebige Linie *CP* nach der gegebenen *AB* zieht, welche mit derselben den Winkel α macht, so heisst *CP* die schiefe Entfernung des Punktes *C* von der Linie *AB* unter Winkel α. Ist der Winkel α ein Rechter, so ist die Linie *CP* die kürzeste von allen Linien, die von *C* nach *AB* gezogen werden können. Sie heisst daher kürzeste Entfernung, auch senkrechte Entfernung, oder bloss Entfernung des Punktes *C* von *AB*.

Fig. 201.

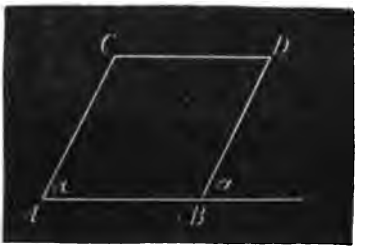
Aufgabe 18, „Die schiefe Entfernung des Punktes *C* von *AB* (Fig. 201) unter Winkel α zu finden."

Auflösung. Trage im beliebigen Punkte *E* der Linie *AB* den Winkel α an. Ist *EF* der andere Schenkel desselben, so ziehe *CP* parallel *EF* und *CP* ist offenbar die gesuchte Linie.

Ortsbestimmung. Die durch Punkt *C* (Fig. 202) mit *AB* parallel gelegte Linie *CD* ist der Ort aller Punkte, die mit *C* gleiche (schiefe oder senkrechte) Entfernung von *AB* haben.

Offenbar nämlich sind zwei von *C* und *D* nach *AB* unter gleichem Winkel α gezogene Linien *CA* und *DB* parallel, und als Parallelen zwischen Parallelen einander gleich.

Fig. 202.

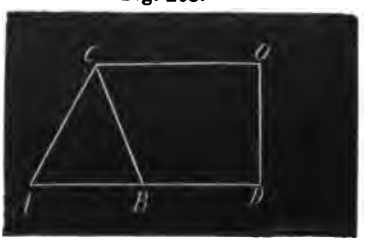


Aufgabe 19. „Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist: die Höhe *DO*, die Grundlinie *AB* und der anliegende Winkel α."

Vorbereitung. Die Höhe ist die senkrechte Entfernung der Spitze *C* von *AB*, also die von *AB* um *DO* entfernte Parallele ein Ort dieser Spitze, ein zweiter Ort ist der andere Schenkel des Winkel α. Also:

Auflösung. Trage an *AB* in *A* den Winkel $\alpha = CAB$ an (Fig. 203) und in

Fig. 203.



einem beliebigen Punkte *D* von *AB* senkrecht *DO* gleich der gegebenen Höhe. Ziehe durch *O* eine Parallele *OC* mit *AB*, welche den Schenkel *AC* von α in *C* schneidet. *ABC* ist das verlangte Dreieck.

Aufgabe 20. „Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind die Höhe *DO*, die Grundlinie *AB* und eine andere Seite *AC*.

Vorbereitung. Ort von *C* sind die um *DO* von *AB* entfernte Parallele, und der Kreis, welcher *A* zum Mittelpunkt, *AC* zum Radius hat. Also:

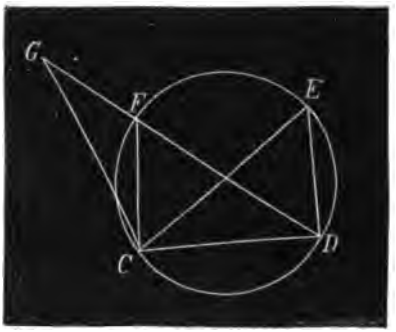
Auflösung. Schlage von *A* (Fig. 203) mit Radius *AC* einen Bogen, ziehe *DO* senkrecht auf *AB*, und *OC* parallel mit *AB*. Möge letztere Linie den Bogen in *C* schneiden, so ist *ABC* das verlangte Dreieck.

Digitized by Google

V. Aufgaben.

Ortsbestimmung. Ist CD (Fig. 204) eine Sehne eines Kreises, CED ein darüber errichteter Peripheriewinkel, so ist der Bogen CED der Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche auf derselben Seite von CD liegend, diese Linie zur Grundlinie und als deren Gegenwinkel den Winkel E haben.

Fig. 204.



Denn offenbar haben alle Dreiecke, deren eine Seite CD ist, und deren Spitze in einem Punkte F des Bogens CED liegt, diese Eigenschaft. Es hat sie aber kein anderes Dreieck. Denn sei CGD ein solches und schneidet eine Seite GD die Peripherie in F, so müsste Winkel $CGD = CFD$ sein, was unmöglich ist.

Definition. Ist über CD ein Bogen errichtet, der den Peripheriewinkel CED umfasst, so nennen wir diesen Bogen den Umspannungsbogen des Winkels.

Aufgabe 21. „Gegeben Linie CD. Durch C und D einen Bogen zu legen, der den gegebenen Winkel α umfasst."

Auflösung. Trage an CD (Fig. 205) Linie CA unter Winkel α an. Ziehe OC senkrecht darauf, und die Mittellinie EO von CD. Der Punkt O, wo CO und EO sich

Fig. 205.

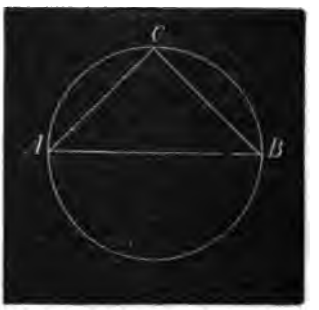
schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Bogens, welcher auf der andern Seite als CA von CD liegt. — Es ist nämlich DCA Winkel zwischen Tangente und Sehne, CBD z. B. der Peripheriewinkel auf dem dazwischen liegenden Bogen.

Ist α ein Rechter, so muss CD Durchmesser sein. In diesem Falle halbire CD in E, und schlage mit ED einen Kreis, welcher der gesuchte ist.

Aufgabe 22. „Gegeben eine Linie AB. Darüber ein Dreieck zu errichten, dessen andere Seite AC, und der Gegenwinkel γ von AB gegeben sind."

Auflösung. Errichte über AB (Fig. 206) den Umspannungsbogen von γ, und von A aus einen Bogen mit Radius AC, der den Umspannungsbogen in C schneidet. ABC ist das gesuchte Dreieck.

Fig. 206.



Aufgabe 23. „Gegeben ein Kreis O (Fig. 207) und ein Punkt ausserhalb desselben C. Eine Tangente an den erstern zu legen, die durch C geht.

Vorbereitung. Da die Tangente auf dem Halbmesser senkrecht steht, so ist der über CO als Durchmesser er-

Fig. 207.

Digitized by Google

richtete Halbkreis ein Ort des Berührungpunktes. Ein zweiter ist die Peripherie des gegebenen Kreises selbst. Also:

Auflösung. Ziehe CO. Errichte darüber als Durchmesser einen Kreis der den gegebenen in A und B schneidet. CA und CB sind dann Tangenten. Es gibt somit deren zwei.

VI. Vermischte Aufgaben.

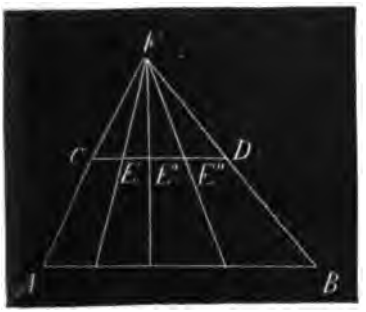
Diese vorigen Aufgaben sind als einfache zu bezeichnen. Wir fügen noch ein Paar vermischte hinzu, bei denen die Auflösung der eben gegebenen vorausgesetzt wird. Die Auflösungen folgen leicht aus bereits gegebenen Sätzen.

Aufgabe 24. „Eine Linie in eine beliebige gegebene Anzahl (n) Theile zu theilen."

Auflösung. Sei AB (Fig. 208) die Linie. Ziehe CD parallel AB, und trage darauf n mal eine beliebige Länge

$$CE = EE' = E'E'' \ldots = E^{(n-2)}E^{(n-1)} = E^{(n-1)}D$$

Fig. 208.



ab, was immer geschehen kann, da die Linie unbegrenzt gedacht wird. Ziehe AC und BD, die sich in F schneiden, ferner FE, $FE' \ldots FE^{(n-1)}$. Diese Linien theilen AB in n gleiche Theile. — Es folgt dies sogleich aus Lehrsatz 24. des Abschnittes 5. — Aus diesem Satze folgt auch die Lösung der

Aufgabe 25. „Eine Linie in Stücke nach einem beliebigen Verhältnisse zu theilen.

Auflösung. Ganz wie vorhin schneidet man von CD Stücke nach dem gegebenen Verhältnisse ab.

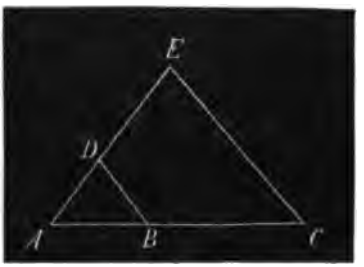
Diese Constructien setzt aber voraus die Lösung von

Aufgabe 26. Zu drei Linien a, b, c eine vierte d zu finden, so dass

$$a : b = c : d.$$

Auflösung. Mache $AB = a$ (Fig. 209) und deren Verlängerung $BC = b$, ziehe $AD = c$, ferner BD und CE parallel BD, so ist $DE = d$ die verlangte Linie. — Dies folgt aus den Sätzen von der Aehnlichkeit.

Fig. 209.



8) Von den Proportionen am Kreise.

I. Lehrsätze.

Lehrsatz 1. „Wenn von irgend einem Punkte A ausserhalb oder innerhalb eines Kreises 2 Linien gezogen sind, welche die Peripherie in 2 Punkten schneiden, so sind die Producte der beiden Abschnitte jeder Linie von A aus bis nach der Peripherie hin einander gleich."

Beweis. Es soll sein (Fig. 210 und 211) $AB \cdot AE = AC \cdot AD$. Ziehe BC und ED, so ist $\triangle BAC \backsim DAE$, denn Winkel $BAC = DAE$ (als Scheitelwinkel im Falle A innerhalb des Kreises, und als identisch im Falle A ausserhalb desselben liegt) und Winkel $ACB = AED$ als Peripheriewinkel auf demselben Bogen BD; es ist also auch: $\frac{BA}{AD} = \frac{CA}{AE}$, woraus unser Satz folgt.

Fig. 210.

Digitized by Google

Fig. 211.

Denkt man im zweiten Falle die Secante AC sich so um den festen Punkt A bewegt, dass die Sehne BE kleiner wird, und somit die Punkte B und E immer mehr zusammenrücken, so wird schliesslich die Secante sich in eine Tangente verwandeln, die Punkte B und E zusammenfallen, und unser Lehrsatz wird dann folgender:

Lehrsatz 2. „Zieht man von einem Punkte A ausserhalb des Kreises eine Tangente und eine Secante an denselben, so ist das Quadrat der Tangente von A bis zum Berührungspunkte gleich dem Producte aus den Abschnitten derSecante von A bis nach der Peripherie."

Die oben gegebenen Betrachtungen lassen sich noch durch einen genaueren Beweis dieses Satzes ersetzen.

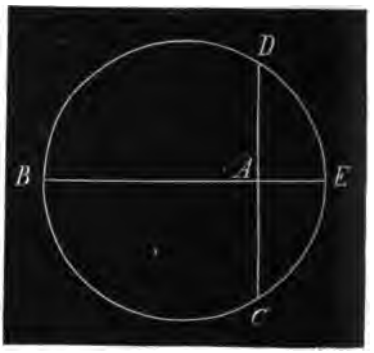
Beweis. Es soll sein (Fig. 212) $AB^2 = AC \cdot AD$. Ziehe BC und BD, so ist $\triangle ABC \backsim ADB$, denn Winkel $A = A$, Winkel $ABC = ADB$, (der erstere ist

Fig. 212.

nämlich von Tangente und Sehne gebildet, der andere ist der Peripheriewinkel auf dem dazwischen liegenden Bogen BC), somit also: $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$, woraus unser Satz folgt.

Liegt der Punkt A (Fig. 213) innerhalb des Kreises und ist die eine Sehne BE der Durchmesser, die andere DC auf demselben senkrecht, so ist $DA = CA$, also: $DA^2 = BA \cdot AE$.

Fig 213.



Zusatz. „Zieht man aus irgend einem Punkte eine Senkrechte nach der Peripherie, so ist ihr Quadrat gleich dem Product aus den Abschnitten des Durchmessers."

II. Lehrsätze.

Die folgenden Sätze geben wichtige Eigenschaften der Kreisvierecke.

Lehrsatz 3. „In jedem Kreisviereck ist das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte je zweier gegenüberliegender Seiten.

Beweis. Es soll sein (Fig. 214) $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. Ziehe BE, so dass Winkel $ABE = DBC$, so ist auch $\triangle ABE \backsim DBC$, denn ausser den beiden genannten Winkeln ist Winkel $BAE = BDC$ als Peripheriewinkel auf Bogen BC. Ferner ist $\triangle CBE \backsim DBA$, denn Winkel $BCE = BDA$ als Peripheriewinkel auf Bogen BA, und Winkel $CBE = DBA$, da beide das Stück EBD gemein haben, und die Reste die Winkel ABE und CBD sind. Aus dem ersten Paare ähnlicher Dreiecke erhalten wir:

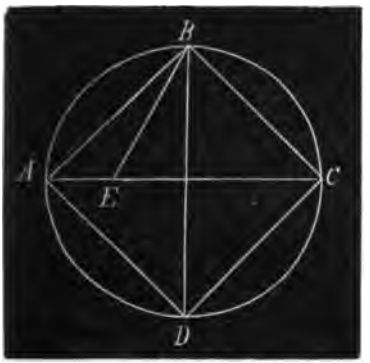
$$\frac{AB}{AE} = \frac{DB}{DC},$$

und aus dem zweiten:

$$\frac{CB}{CE} = \frac{DB}{DA},$$

Digitized by Google

Fig. 214.



d. h.:

$$AB \cdot DC = AE \cdot DB,$$
$$CB \cdot DA = CE \cdot DB,$$

und durch Addition der beiden letzten Gleichungen:

$$AB \cdot DC + CB \cdot DA = DB(AE + CE) = DB \cdot AC,$$

was zu beweisen war.

Um noch eine Beziehung im Kreisviereck zu finden, ist zunächst ein andrer Satz unerlässlich:

Lehrsatz 4. „Wenn man durch die Eckpunkte eines Dreiecks einen Kreis legt, so ist das Product zweier Dreieckseiten gleich dem Product der dazwischen liegenden Höhe und des Durchmessers."

Beweis. Sei ABC (Fig. 215) das Dreieck, BD auf AC senkrecht, BE der Durchmesser, so soll sein

$$AB \cdot BC = BD \cdot BE.$$

Ziehe EA, so ist $\triangle BAE \backsim BDC$, denn Winkel $E = C$ als Peripheriewinkel auf Bogen BA, und Winkel $BAE = BDC$ als rechte, also: $\frac{BE}{CB} = \frac{BA}{BD}$, woraus unser Satz folgt.

Bezeichnet man noch den Flächeninhalt des Dreiecks mit f, so ist

$$2f = AC \cdot BD, \quad BD = \frac{2f}{AC},$$

also:

$$AB \cdot BC = \frac{2f \cdot BE}{AC},$$

also:

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{2BE} = f,$$

d. h.

Lehrsatz 5. „Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Product seiner Seiten dividirt durch den doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises."

Sei jetzt wieder $ABCD$ (Fig. 216) ein Kreisviereck. Sei d der Durchmesser des Kreises, so ist wenn wir mit ABC, ABD u. s. w. die Flächeninhalte der entsprechenden Dreiecke bezeichnen, nach vorigem Satze:

Fig. 215.

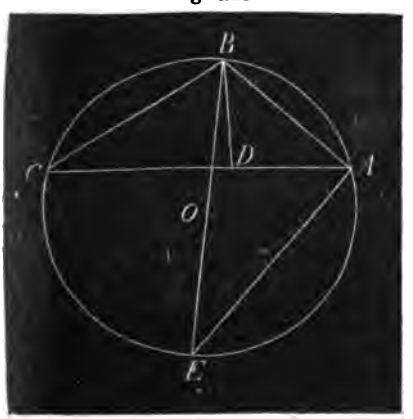
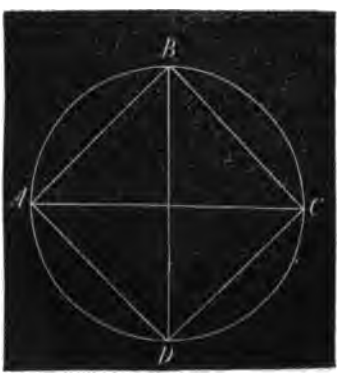


Fig. 216.



$$ABC = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{2d}, \quad ADC = \frac{AD \cdot DC \cdot AC}{2d}$$

$$ABD = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{2d} = DBC = \frac{DB \cdot BC \cdot DC}{2d}.$$

Wenn man die beiden ersten und die beiden letzten Gleichungen addirt, so erhält man in beiden Fällen den Flächeninhalt des Vierecks, also zwei gleiche Resultate für denselben, nämlich:

Digitized by Google

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC + AD \cdot DC \cdot AC}{2d} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD + DB \cdot BC \cdot DC}{2d},$$

also mit Unterdrückung des gemeinschaftlichen Nenners:

$$AC(AB \cdot BC + AD \cdot DC) = BD(AB \cdot AD + BC \cdot DC)$$

oder:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \cdot AD + BC \cdot DC}{AB \cdot BC + AD \cdot DC};$$

dies gibt folgenden Satz:

Lehrsatz 6. „In jedem Kreisviereck verhalten sich die Diagonalen wie die Summen der Producte je zweier in der entsprechenden Diagonale zusammenstossenden Seiten."

Scholion. Die Sätze 3. und 6. machen es immer möglich, wenn die Zahlenwerthe der vier Seiten eines Kreisvierecks gegeben sind, die der Diagonalen zu finden. Sei $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = x$, $BD = y$, so ist:

$$xy = ac + bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}.$$

Beide Gleichungen multiplicirt geben:

$$x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

und die erste durch die zweite dividirt:

$$y^2 = \frac{(ac + bd)(ad + cd)}{ad + bc}.$$

Die Diagonalen sind also die Quadratwurzeln der eben gefundenen Ausdrücke.

III. Definition und Lehrsätze.

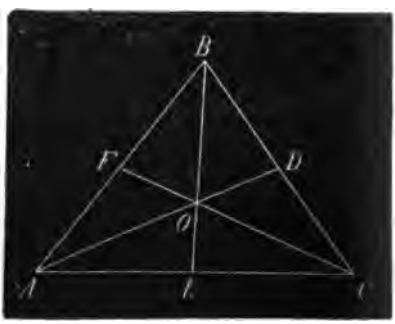
Die folgenden Sätze beziehen sich auf die einem Kreise umschriebenen Dreiecke.

Definition. Man nennt einen Kreis einem Dreieck innerlich eingeschrieben, wenn derselbe von 3 Seiten des Dreiecks berührt wird, und innerhalb des Dreiecks liegt. Ein Kreis ist dagegen dem Dreiecke äusserlich eingeschrieben, wenn er von den Seiten (dieselben ins Unendliche verlängert gedacht), berührt wird, aber ausserhalb des Dreiecks liegt.

Lehrsatz 7. „Halbirt man 2 Winkel eines Dreiecks, so ist der Schnittpunkt der Halbirungslinie der Mittelpunkt eines innerlich eingeschriebenen Kreises. Halbirt man zwei Aussenwinkel eines Dreiecks, welche einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, so ist der Schnittpunkt der Halbirungslinien der Mittelpunkt eines dem Dreieck äusserlich eingeschriebenen Kreises."

Beweis. Sei ABC (Fig. 217) das Dreieck, AO und BO die Halbirungslinien der Winkel A und B, DO, EO, FO senkrecht auf den Seiten, so folgt sehr leicht die Congruenz der Dreiecke AOF und AOE (2 Seiten und ein Winkel sind gleich) und ebenso der Dreiecke BOF und BOD, es ist also $OF = OE$ und auch $OF = OD$; ein von O mit

Fig. 217.



Radius OF gezogener Kreis geht also durch die Punkte F, D und E, und da die Linien AB, BC, AC auf den Radien senkrecht stehen, sind alle 3 Berührungslinien.

Halbirt man jetzt die Aussenwinkel bei A und B (Fig. 218) durch die Linien AO und BO, und zieht OD, OE, OF auf die Seiten senkrecht, so lassen sich ganz dieselben Schlüsse machen; OF ist also der Radius eines äussern Berührungskreises.

Zusatz 1. „Zieht man von dem Mittelpunkt O eines eingeschriebenen Kreises eine Linie nach der dritten Winkelspitze C, so wird auch der entsprechende Winkel halbirt."

Beweis. Es ist $\triangle COE \cong COD$ (Fig. 217 und 218) (zwei Seiten und der rechte

Fig. 218.

Winkel sind gleich) also Winkel

$$\measuredangle ACO = BCO.$$

Hieraus folgt noch:

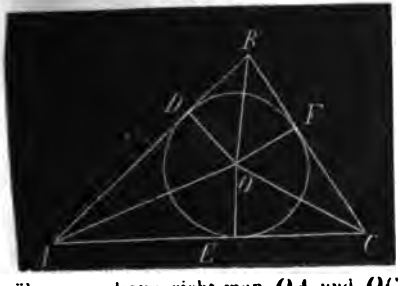
Zusatz 2. „Werden die drei Winkel eines Dreiecks oder zwei an einer Seite liegende Aussenwinkel und der dritte Winkel des Dreiecks halbirt, so geht die Halbirungslinie durch einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt eines der eingeschriebenen Kreise."

Anmerkung. Der erste Theil des Satzes war schon früher bewiesen worden.

Lehrsatz 8. „Es gibt nur einen Kreis, der einem Dreieck innerlich und drei, die demselben äusserlich eingeschrieben sind."

Beweis. Im ersten Falle sei O (Fig. 219) der Kreis, OF, OE, OD die Be-

Fig. 219.



rührungsradien; zieht man OA und OC, so ist

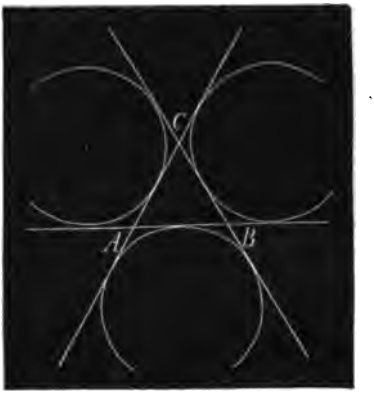
$$\triangle AOE \cong AOD, \quad \triangle EOC \cong FOC,$$

also Winkel

$$DAO = EAO \text{ und } ECO = FCO,$$

also 2 Winkel halbirt. Da es nur einen Punkt O gibt in dem sich die Halbirungslinien der Winkel schneiden, so ist nur ein Kreis möglich. Eben so beweisen wir im Falle der äusserlichen Berührung, dass zwei Aussenwinkel, welche eine Dreiecksseite zu gemeinschaftlichem Schenkel haben, halbirt werden. Verlängert man die drei Seiten eines Dreiecks (Fig. 220) nach beiden Richtungen hin, so ent-

Fig. 220.



stehen nur sechs Aussenwinkel, von denen je zwei die verlangte Bedingung erfüllen, und somit hat man drei äusserlich berührende Kreise.

Der blosse Anblick der Figur 221 lehrt Folgendes:

Fig. 221.

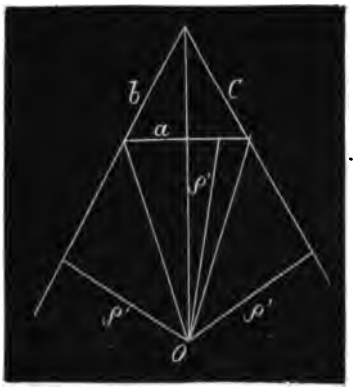
Lehrsatz 9. „Jedes Dreieck zerfällt in drei andere, die den Radius des innern Berührungskreises zur gemeinschaftlichen Höhe und je eine Seite zur Grundlinie haben."

Der Anblick der Figur 222 zeigt dagegen:

Lehrsatz 10. „Jedes Dreieck ist gleich der Summe zweier Dreiecke, welche Seiten zur Grundlinie und den Radius eines äussern Kreises zur Höhe haben, weniger einem Dreiecke, welche dieselbe

Digitized by Google

Fig. 222.



Höhe und die dritte Seite zur Grundlinie hat."

Scholion. Bezeichnet man mit a, b, c die Seiten eines Dreiecks mit, ϱ den Radius des innerlich eingeschriebenen Kreises, mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Radien derjenigen äusserlich eingeschriebenen Kreise, welche bezüglich die Seiten a, b, c selbst und die Verlängerungen der andern Seiten berühren, mit F den Flächeninhalt des Dreiecks, so ist:

$$F = (a+b+c)\frac{\varrho}{2}, \quad F = (b+c-a)\frac{\varrho_1}{2},$$

$$F = (a+c-b)\frac{\varrho_2}{2}, \quad F = (a+b-c)\frac{\varrho_3}{2}.$$

Setzt man noch wie in einer früher entwickelten Formel:

$$\frac{a+b+c}{2} = s,$$

so ergibt sich:

$$F = s\varrho = (s-a)\varrho_1 = (s-b)\varrho_2 = (s-c)\varrho_3,$$

Es war aber nach einem früheren Satze:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Multiplicirt man nun die vier eben gefundenen Werthe von F mit einander und nimmt man auf die letzte Formel Rücksicht, so hat man:

$$F^4 = s(s-a)(s-b)(s-c)\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = F^2\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3,$$

d. h.:

$$F^2 = \varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3;$$

dies gibt folgenden Satz:

Lehrsatz 11. „Das Product der Radien der vier einem Dreiecke eingeschriebenen Kreise ist gleich dem Quadrate seines Flächeninhaltes."

9) Von den regelmässigen Vielecken.

I. Lehrsätze und Definition.

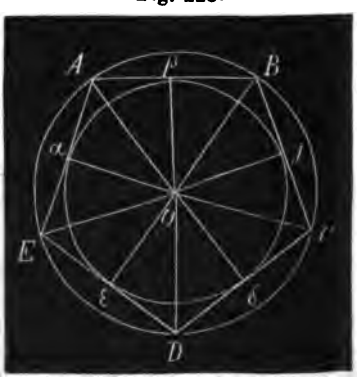
Lehrsatz 1. „Um jedes regelmässige Vieleck und in dasselbe lässt sich immer je ein Kreis beschreiben. Diese beiden Kreise haben gemeinschaftlichen Mittelpunkt."

Beweis. Sei $ABCDE$ (Fig. 223) das regelmässige Vieleck. Halbirt man zwei Winkel A und B desselben durch die Linien AO, BO und zieht von O aus Linien nach den andern Eckpunkten, so entstehen congruente und gleichschenklige Dreiecke. Es ist nämlich Winkel $A = B$, also auch Winkel

$$OAB = OBA = OAE$$

als die Hälften dieser Winkel, also auch $OA = OB$, ferner $AE = AB$, als Seiten des Vielecks, woraus dann die Congruenz der Dreiecke OAB und OEA folgt; ebenso wird die der andern Dreiecke bewiesen, und man hat $OA = OB = OC = OD = OE$. Also ein von O als Mittelpunkt mit

Fig. 223.



Halbmesser OA gezogener Kreis geht durch alle Eckpunkte $ABCDE$ und ist somit dem Vielecke umschrieben. Die Halbmesser OA, OB u. s. w. halbiren übrigens alle Winkel des Vielecks. Zieht man nun von O aus nach den Mitten der Seiten die Linien $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$, $O\varepsilon$, so sind dies die Mittellinien dieser Seiten und stehen also auf denselben senkrecht. Diese Linien sind aber auch einander gleich, da wie augenblicklich zu sehen alle Dreiecke $OA\alpha$, $OA\beta$, $OB\beta$ u. s. w. congruent sind. Alle Seiten sind also

Digitized by Google

Tangenten eines Kreises, dessen Radius $O\alpha$ ist, womit unser Satz bewiesen ist.

Definitionen. Der Halbmesser des umschriebenen Kreises OA wird auch grosser Radius des Vielecks, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $O\alpha$ kleiner Radius desselben genannt. Das Dreieck AOB, welches zu Seiten beide Radien und die halbe Vieleckseite hat, nennen wir Bestimmungsdreieck, den Winkel AOB, welchen zwei grosse Radien, die nach auf einander folgenden Ecken gerichtet sind, mit einander machen, Centriwinkel, den Winkel zweier auf einander folgenden Seiten Polygonwinkel des Vielecks.

Scholion. Ist n die Seitenanzahl des Vielecks, so ist die aller Centriwinkel ebenfalls n aber ihre Summe gleich 4 Rechte, so dass die Grösse jedes einzelnen $\frac{4R}{n}$ ist. — Da ferner das Bestimmungsdreieck einen rechten Winkel, den halben Centriwinkel $= \frac{2R}{n}$ und den halben Polygonwinkel zu Winkeln hat, so werden die beiden letztgenannten zusammen einen Rechten betragen, und die Grösse des halben Polygonwinkels ist: $R - \frac{2R}{n} = \frac{n-2}{n} R$, also des ganzen:

$$\frac{2n-4}{n} R = 2R - \frac{4R}{n}.$$

Beispiele. Fürs Viereck ist die Grösse des Centriwinkels $\frac{4R}{4} = R$, des Polygonwinkels: $\frac{8-4}{4} n = R$.

Fürs Fünfeck der Centriwinkel $= \frac{4}{5} R$, der Peripheriewinkel $\frac{6}{5} R$.

Fürs Sechseck: der Centriwinkel $= \frac{2}{3} R$ der Peripheriewinkel $\frac{4}{3}$ Rechte.

Theilt man den rechten Winkel in 90 Grade, so erhält man folgende Tafel:

Seitenanzahl.	Centriwinkel.	Polygonwinkel.
3	120°	60°
4	90°	90°
5	72°	108°
6	60°	120°
7	51° 25′ 43″	128° 34′ 17″
8	45°	135°
9	40°	140°
10	36°	144°
11	32° 43′ 38″	147° 16′ 22″
12	30°	150°
13	27° 41′ 32″	152° 18′ 28″
14	25° 42′ 51″	154° 17′ 9″
15	24°	156°
16	22° 30′	157° 30′
17	21° 10′ 35″	158° 49′ 25″
18	20°	160°
19	18° 56′ 50″	161° 3′ 10″
20	18°	162°

Das Verhältniss der Seiten eines regelmässigen Vielecks ist, wenn a die Grösse der Seite ist, $\frac{a}{a} = 1$. Die Seiten jeder 2 regelmässigen Vielecke stehen also in gleichem Verhältnisse. Ist bei beiden die Seitenanzahl dieselbe, so sind auch die Winkel gleich. D. h.:

Lehrsatz 2. „Regelmässige Vielecke von gleicher Seitenanzahl sind ähnliche Figuren."

Daraus folgt dann nach den bekannten Eigenschaften ähnlicher Figuren:

Zusatz. „Die Umfänge regelmässiger Vielecke von gleicher Seitenanzahl verhalten sich wie ihre Seiten, die Inhalte wie die Quadrate der Seiten."

Scholion. Bezeichnen wir noch mit ϱ den kleinen Radius des Vieleckes also $O\alpha$ (Fig. 223), mit s die Seite, mit r den grossen Radius OA, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke $OA\alpha$:

$$r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks OAB aber gleich $\frac{s\varrho}{2}$, und wenn n die Seitenzahl, F der Flächeninhalt des Vieleckes ist:

$$F = \frac{nsq}{2}.$$

Digitized by Google

Lehrsatz 3. „Jedes in oder um einen Kreis beschriebene Vieleck mit gleichen Seiten ist ein regelmässiges."

Beweis. Denke man sich die Peripherie eines Kreises (Fig. 224) in gleiche

Fig. 224.

Theile AB, BC, CD, DE, EA getheilt, und die Theilpunkte durch gerade Linien, die also ebenfalls gleich sind, verbunden. Verbindet man noch die Ecken mit dem Mittelpunkte O, so entstehen congruente gleichschenklige Dreiecke; es ist also Winkel $OAB = OBA = OBC$ u. s. w., also auch: $OAB + OAE = OBA + OBC = OCB + OCD$ u. s. w., also alle Winkel gleich und das Vieleck regelmässig, womit die Existenz des eingeschriebenen Vielecks bewiesen ist. — Legt man nun durch alle Eckpunkte Tangenten, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\alpha$, so ist z. B. $E\alpha = A\alpha$. Daraus folgt leicht die Congruenz der Dreiecke $AO\alpha$, $AO\beta$, $BO\beta$, $BO\gamma$ u. s. w. wodurch sich dann die Gleichheit der Seiten und Winkel augenblicklich ergibt. — Leicht ist zu sehen, dass wenn man zu den Seiten die Mittellinie On gezogen und bis zur Peripherie nach t verlängert, durch die Punkte t aber Tangenten gelegt hätte, auch ein dem gegebenen ähnliches also regelmässiges, dem Kreise umschriebenes Vieleck entstanden wäre.

Scholion. Aus Figur 224 ergibt sich sogleich, dass der grosse Radius des einem Kreise eingeschriebenen Vielecks gleich dem kleinen des umschriebenen Vielecks ist, bezeichnet man also wieder mit r, ϱ, s, F bezüglich grossen und kleinen Radius, Seite und Flächeninhalt des dem Kreise eingeschriebenen n-Ecks, mit r_1, ϱ_1, s_1, F_1 diese Grössen in Bezug auf das demselben Kreise umschriebene Vieleck, so ist:

$$\varrho_1 = r,$$

ferner wegen der Aehnlichkeit beider Vielecke:

$$\frac{s_1}{s} = \frac{\varrho}{r} \text{ oder } s_1 = \frac{rs}{\varrho},$$

$$\frac{r_1}{r} = \frac{r}{\varrho}, \text{ also } r_1 = \frac{r^2}{\varrho}$$

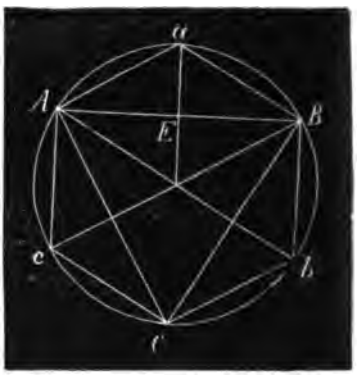
und

$$\frac{F_1}{F} = \frac{s_1^2}{s^2} = \frac{r^2}{\varrho^2} \text{ oder } F_1 = \frac{r^2 F}{\varrho^2} = \frac{nsr^2}{2\varrho}.$$

Diese Formeln lehren, aus den Bestimmungsstücken des eingeschriebenen n-Ecks die des umschriebenen zu finden.

Zieht man zu den Seiten AB, BC, CA (Fig. 225) eines n-Ecks die Mittellinien

Fig. 225.



Oa, Oc, Ob, die natürlich durch den Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises gehen, so werden die Centriwinkel AOB, BOC, COA durch dieselben halbirt; es sind also die Bogen Aa, Ba, Bb, bC u. s. w. gleich, mithin auch die zugehörigen Sehnen, und die Figur $AaBbCcA$ ist ein regelmässiges $2n$-Eck, d. h.:

Lehrsatz 4. „Die Mittellinien der Seiten eines dem Kreise O eingeschriebenen n-Ecks schneiden die Peripherie, in Punkten, welche mit den Ecken des n-Ecks zusammen die Eckpunkte eines regelmässigen $2n$-Ecks bilden."

Sei jetzt ABC (Fig. 226) ein dem Kreise O umschriebenes Vieleck, dessen Seiten den Kreis in m, n, p berühren, zieht man die Linien OA, OB, OC, welche die Peripherie in α, β, γ schneiden und legt durch diese Punkte die Tangenten dl, fg, hk, so ist, wenn man noch mO, nO, pO dO, lO, fO, gO, hO, kO, zieht offenbar $\triangle dO\alpha \cong lO\alpha$ (eine Seite $O\alpha$ und die Winkel sind gleich), ferner $\triangle dO\alpha \cong dOm$ (alle drei Seiten sind gleich), daraus folgt dann:

$$d\alpha = \alpha l = ln = nf \ldots,$$

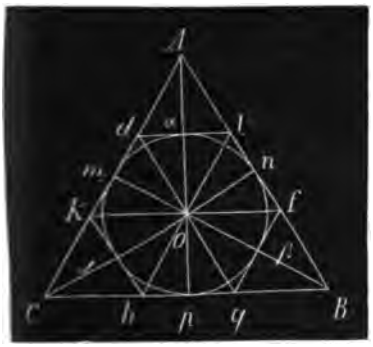
also:

$$dl = lf = fg = gh = hk \ldots,$$

d. h.:

Digitized by Google

Fig. 226.



mit dem Mittelpunkt verbindet, durch die Schnittpunkte der Verbindungslinien mit der Peripherie aber Tangenten legt, so sind diese und die Seiten des n-Ecks zugleich die Seiten des dem Kreise umschriebenen $2n$-Ecks "

Scholion. Sind P, S, Φ kleiner Radius, Seite und Flächeninhalt des eingeschriebenen $2n$-Ecks so ist (Fig. 225):

$$Aa = S, \quad AE = \frac{s}{2}, \quad Ea = r - \varrho,$$

also:

$$S^2 = \frac{s^2}{4} + (r-\varrho)^2,$$

oder da

$$\frac{s^2}{4} = r^2 - \varrho^2$$

Lehrsatz 5. „Wenn man die Ecken eines dem Kreise umschriebenen n-Ecks ist

$$S^2 = r^2 - \varrho^2 + (r-\varrho)^2 = 2r^2 - 2r\varrho = 2r(r-\varrho)$$

$$P^2 = r^2 - \frac{s^2}{4} = r^2 - \frac{r}{2}(r-\varrho) = \frac{r(r+\varrho)}{2},$$

also:

$$S = \sqrt{2r(r-\varrho)}, \quad P = \sqrt{\frac{r(r+\varrho)}{2}}.$$

Offenbar verhalten sich ferner die Dreiecke AOE und AOa, welche die Höhe AE gemein haben wie die Grundlinien OE und Oa oder ϱ und r, und da diese bezüglich den $2n$ten Theil des n-Ecks und $2n$-Ecks sind, so haben F und Φ dasselbe Verhältniss, also:

$$\frac{\Phi}{F} = \frac{\varrho}{r}, \text{ oder } \Phi = \frac{F\varrho}{r},$$

woraus auch mittelst des Werthes von F folgt:

$$\Phi = \frac{ns\varrho^2}{2r}.$$

Sind R_1, S_1, P_1, Φ_1 die entsprechenden Grössen fürs umschriebene $2n$-Eck, so erhalten wir ganz wie in dem Scholion zu Lehrsatz 3.: $P_1 = r$,

$$S_1 = \frac{rS}{P} = 2r\sqrt{\frac{r-\varrho}{r+\varrho}}$$

$$R_1 = \frac{r^2}{P} = r\sqrt{\frac{2r}{r+\varrho}}$$

$$\Phi_1 = \frac{r^2\Phi}{P^2} = \frac{nSr^2}{2P} = nr^2\sqrt{\frac{r-\varrho}{r+\varrho}}.$$

Wir wollen die hier und in den Scholion zu den Sätzen 2. und 3. gegebenen Formeln hier nochmals zusammenschreiben. Es ist:

1) $r^2 = \varrho^2 + \frac{s^2}{4}$

2) $F = \frac{ns\varrho}{2}$

3) $\varrho_1 = r.$

4) $s_1 = \frac{rs}{\varrho}$

5) $r_1 = \frac{r^2}{\varrho}$

6) $F_1 = \frac{nsr^2}{2\varrho}$

7) $S = \sqrt{2r(r-\varrho)}$

8) $P = \sqrt{\frac{r(r+\varrho)}{2}}$

9) $\Phi = \frac{ns\varrho^2}{2r}$

Digitized by Google

10) $P_1 = r$

11) $S_1 = 2r\sqrt{\frac{r-\varrho}{r+\varrho}}$

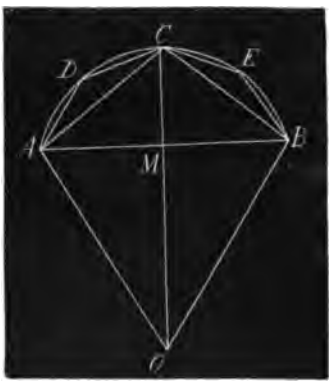
12) $R_1 = r\sqrt{\frac{2r}{r+\varrho}}$

13) $\Phi_1 = \pi r^2\sqrt{\frac{r-\varrho}{r+\varrho}}$.

Was die Bezeichnungen anbetrifft, so sind s, s_1, S, S_1 die Seiten, r, r_1, R, R_1 die grossen Radien, ϱ, ϱ_1, P, P_1 die kleinen Radien, F, F_1, Φ, Φ_1 die Flächeninhalte bezüglich des dem Kreise mit Radius r eingeschriebenen n-Ecks und $2n$-Ecks, so wie des umschriebenen n-Ecks und $2n$-Ecks. Hierauf Bezügliches enthält auch der Artikel: „Quadratur ebener Figuren" in Abschnitt 2.

Scholion 2. Es nähert sich der Inhalt des dem Kreise eingeschriebenen regulären Vielecks um so mehr dem Inhalte des Kreises selbst, je mehr Seiten letzteres hat. Denn ist AB (Fig. 227) eine Seite des n-Ecks, so ist ABO der

Fig. 227.



$n$te Theil desselben, $ACBO$ der $n$te Theil des Kreises selbst, und das Segment ACB ist die Differenz zwischen beiden. Errichtet man nun über AB, AC und BC, so wird der $n$te Theil eines $2n$-Ecks abgeschnitten, und die Differenz desselben vom $n$ten Theile des Kreises ist gleich der Summe der Segmente $ADC + CEB$. Je mehr sich die Seiten des Vielecks dem Bogen annähern, desto geringer wird diese Differenz. Diese Annäherung geschieht aber wie leicht zu sehen in dem Maasse als sich $OM = \varrho$ der Grösse $OA = r$ nähert.

Nun war $\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$. Da mit der Vermehrungszahl der Seiten s unter jede gegebene positive Zahl sinken kann, so nähert sich ϱ auch der Grenze $\sqrt{r^2} = r$ bis auf einen beliebigen Grad der Genauigkeit an, und in diesem Falle werden Sehne und Bogen einen sich bis ins Unendliche vermindernden Raum zwischen sich lassen. Aber auch der Umfang eines regelmässigen so wie jedes anderen in den Kreis beschriebenen Vielecks nähert sich mit wachsender Seitenanzahl der ganzen Peripherie, so wie ein beliebiger Theil des ersteren dem dadurch abgeschnittenen Bogen an. Denn mit Vermehrung der Seitenanzhl erhält man AB, $AC + CB$, $AD + DC + CE + EB$ (Fig. 227) u. s. w. Der Zahlenwerth dieser gebrochenen Linien wächst immer mehr, da immer grade Linien durch gebrochene ersetzt werden, da aber alle diese Zahlenwerthe kleiner sind als der des Bogens ACB, (weil die graden Linien AD, DC ... immer kleiner sind als die von denselben Punkten A, D, C, E, B begrenzten Bögen) so müssen sich diese gebrochenen Linien mit zunehmender Seitenanzahl einer Grenze nähern, die nicht grösser als der Bogen ACB sein kann. Sie ist aber auch nicht kleiner als der Bogen, da sich soviel Punkte von ACB als man will, schliesslich also jeder Punkt dieses Bogens auf der gebrochenen Linie befinden muss, dieselbe also mit dem Bogen zusammenfällt. — (Hierauf beruht die Ausmessung des Kreises, welche in dem Artikel: Quadratur ebener Figuren Abschnitt 2., gegeben ist.)

II. Aufgaben.

Diese Aufgaben bezwecken eine Anzahl regelmässiger Vielecke in einen gegebenen Kreis einzuschreiben.

Aufgabe 1. „Ein regelmässiges Viereck in einen gegebenen Kreis zu schreiben."

Auflösung. Der Centriwinkel des Vierecks beträgt einen Rechten. Zieht man also zwei Durchmesser AB und CD (Fig. 228) auf einander senkrecht, so sind die Punkte A, B, C, D die Eckpunkte des Vierecks.

Aufgabe 2. „Ein regelmässiges Sechseck in einen Kreis zu beschreiben."

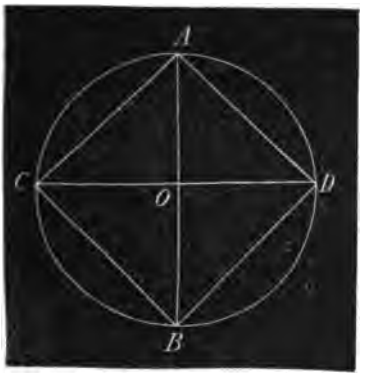
Auflösung. Sei AB (Fig. 229) die Seite des Sechsecks, so ist Centriwinkel ACB gleich 60°, also die Winkel CAB und CBA zusammen gleich

$$180 - 60 = 120°,$$

da aber beide gleich sind, beträgt jeder 60°. Das Dreieck ist also gleichseitig,

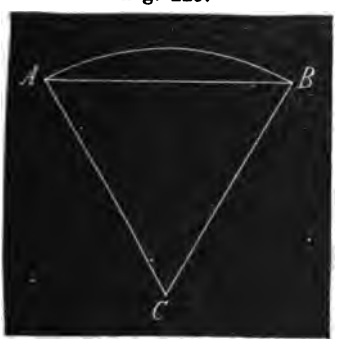
Digitized by Google

Fig. 228.



d. h. AB gleich dem Radius. Also: „Um das Sechseck zu zeichnen, trage man den Radius sechsmal nebeneinander als Sehne an den Kreis an."

Fig. 229.



Aufgabe 3. „Eine Linie ist so zu theilen, dass das Quadrat des einen Theils gleich dem Rechteck aus dem andern und der ganzen Linie ist."

Auflösung. Sei AB (Fig. 230) die gegebene Linie, und AC der gesuchte Theil, so soll also sein:

$$AC^2 = AB \cdot CB.$$

Diese Gleichung lässt sich folgendermaassen umformen. Es ist:

$$CB = AB - AC,$$

also:

$$AC^2 = AB(AB - AC) = AB^2 - AC \cdot AB,$$

also:

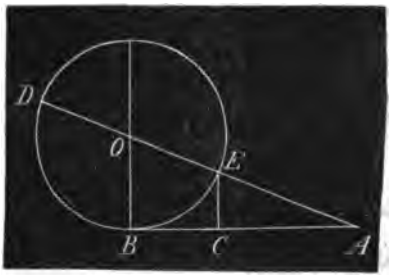
$$AC^2 + AC \cdot AB = AB^2,$$

oder:

$$AC(AC + AB) = AB^2.$$

Errichtet man eine Senkrechte $BO = \frac{1}{2}AB$ in B auf AB, und schlägt von O aus einen Kreisbogen, so ist dessen Durch-

Fig. 230.



messer gleich AB, und AB selbst eine Tangente, legt man also Secante AED durch O, so ist

$$AB^2 = AE \cdot AD = AE(AB + AE).$$

Es ist also AE gleich der gesuchten Linie AC. Daraus folgt folgende Construction:

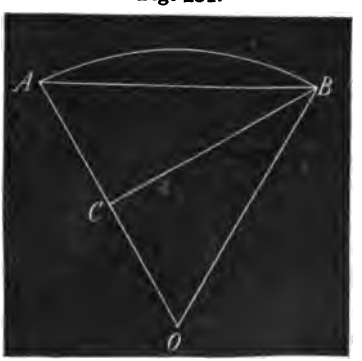
„Ziehe BO senkrecht in B auf AB, und mache diese Linie gleich $\frac{AB}{2}$, verbinde O mit A, schneide $OE = OB = \frac{AB}{2}$ von OA, und $AC = AE$ von AB ab, so ist C der gesuchte Theilpunkt."

Scholion. Der Theil AC, welcher offenbar grösser als BC ist, wird auch **Mediane** der Linie AB genannt. Die Auffindung des Punktes C wird auch golder Schnitt (*Sectio aurea*) genannt, und bildet eine bereits im Alterthum berühmte Aufgabe.

Aufgabe. „Ein regelmässiges Zehneck in einen Kreis zu schreiben."

Auflösung. Sei AB (Fig. 231) die gesuchte Seit des Zehnecks, so ist Centri-

Fig. 231.



winkel $AOB = 36°$, die Winkel OAB und OBA also jeder gleich

$$\frac{1}{2}(180 - 36) = 72°.$$

Digitized by Google

Halbire durch Linie BC den Winkel ABO, so ist Winkel $ABC = 36°$, also:

$$\triangle ACB \sim ABO,$$

da zwei Winkel gleich, nämlich

$CAB = BAO$, und $ABC = AOB = 36°$

sind, also:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AO}{AB},$$

d. h.:

$$AB^2 = AO \cdot AC.$$

Offenbar aber ist das $\triangle ACB$ (welches ABO ähnlich war) auch gleichschenklig, also $AB = BC$ und ebenso hat BCO bei B und O zwei Winkel von 36°, also $BC = CO$, es ist also auch $AB = CO$, und man hat: $AB^2 = CO^2 = AO \cdot AC$, d. h. AB ist die Mediane des Radius AO. Also:

„Suche die Mediane des Radius AO, so lässt sich diese zehnmal als Sehne an den Kreisbogen tragen und bildet somit die Seite des regelmässigen Zehnecks.

Aufgabe 5. „Ein regelmässiges Fünfzehneck in einen Kreis zu schreiben."

Sei AB die Seite des Fünfzehnecks (Fig. 232), so ist Winkel $AOB = 24°$.

Fig. 232.

Macht man einen Winkel $AOC = 60°$, so ist Winkel $BOC = 60 - 24 = 36°$, also die zugehörigen Sehnen AO die Seite des Secksecks oder der Radius, BC die Seite des Zehnecks oder die Mediane des Radius. Also hat man folgende Construction:

„Trage von einem Punkte C der Peripherie aus zwei Sehnen CA und CB an, die bezüglich dem Radius und seiner Mediane gleich sind, so ist die Sehne BA Seite des Fünfzehnecks.

Aufgabe 6. „Es ist ein Vieleck einem Kreise eingeschrieben. Es soll ein Vieleck von der doppelten, eins von der halben Seitenanzahl dem Kreise eingeschrieben und eins von derselben Seitenanzahl demselben umgeschrieben werden."

Auflösung. Das erste wird nach Lehrsatz 4 erreicht, wenn man zu allen Seiten die Mittellinien zieht (die durch den Mittelpunkt gehen) und die Schnittpunkte, welche diese Linien mit der Peripherie haben, mit den angrenzenden Eckpunkten des gegebenen Vielecks verbindet. Das zweite wird erreicht, indem man den ersten Eckpunkt des gegebenen Vielecks mit dem dritten, den dritten mit dem fünften u. s. w. verbindet.

Offenbar bilden diese neuen Sehnen mit je zwei Seiten des gegebenen Vielecks congruente Dreiecke, sie sind also unter einander gleich, und somit die Seiten eines regelmässigen Vielecks von der halben Seitenanzahl.

Das Letzte lässt sich nach Lehrsatz 3. oder vielmehr nach den in dem Beweise dieses Satzes gemachten Schlüssen erreichen, wenn man durch alle Eckpunkte des gegebenen Vielecks, (oder auch durch die Punkte, in welchen die Mittellinien der Seiten die Peripherie schneiden), Tangenten legt.

Scholion. Mit Benutzung dieser letzten Aufgabe kann man in und um einen Kreis folgende regelmässige Figuren construiren:

3-Eck,	6-Eck,	12-Eck,	24-Eck u. s. w.
4-Eck,	8-Eck,	16-Eck,	32-Eck u. s. w.
5-Eck,	10-Eck,	20-Eck,	40-Eck u. s. w.
15-Eck,	30-Eck,	60-Eck,	120-Eck u. s. w.

Gauss hat aber gezeigt, dass sich überhaupt alle diejenigen regelmässigen Vielecke geometrisch, d. h. mit Hülfe des Kreises und der graden Linie construiren lassen, deren Seitenanzahl eine Primzahl ist von der Form: $2^n + 1$, wo n natürlich eine positive ganze Zahl sein muss. Für $n = 1$ erhalten wir das Dreieck, für $n = 2$ das Fünfeck. $n = 3$ fällt aus, da $2^3 + 1 = 9$ keine Primzahl ist. $n = 4$ gibt das Siebzehneck, und somit lässt auch dieses sich geometrisch construiren. (Vergl. den Artikel: Kreistheilung). — Wie sogleich zu sehen, ist die Aufgabe ein regelmässiges n-Eck in einen Kreis zu zeichnen identisch mit der, die Peripherie des Kreises in n gleiche Theile zu theilen.

III. Aufgaben.

Dieselben beziehen sich auf die Berechnung der Bestimmungsstücke derjenigen Vielecke, die so eben construirt worden sind. Wir setzen immer s, s_1 gleich der Seite, ϱ, ϱ_1 gleich dem klei-

Digitized by Google

nen Radius, F, F_1 gleich dem Flächeninhalt des einem Kreise mit Radius r eingeschriebenen bezüglich umgeschriebenen Vielecks. ϱ_1 ist immer gleich r.

Aufgabe 7. „Die Bestimmungsstücke des eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmässigen Vierecks zu finden."

Auflösung. Ist s die Seite des eingeschriebenen Vierecks, also der zugehörige Centriwinkel ein Rechter, so ist:

$$s^2 = 2r^2$$

und

1) $$s = r\sqrt{2}.$$

Diese Formeln in Scholion 1. zu Lehrsatz 5. geben nun:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = r\sqrt{1-\tfrac{1}{2}},$$

also:

2) $$\varrho = r\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

Dies gibt auch den Satz:

„Der kleine Radius des regelmässigen Vierecks beträgt die Hälfte der Seite"

$$F = \frac{4s\varrho}{2},$$

oder:

3) $$F = 2r^2;$$

$$s_1 = \frac{rs}{\varrho},$$

also:

4) $$s_1 = 2r;$$

$$r_1 = \frac{r^2}{\varrho},$$

also:

5) $$r_1 = r\sqrt{2};$$

$$F_1 = 2s_1\varrho_1,$$

also:

6) $$F_1 = 4r^2.$$

Aufgabe 8. Die Bestimmungsstücke der eingeschriebenen und umschriebenen regelmässigen Sechsecks zu finden."

Auflösung. In diesem Falle ist:

1) $$s = r$$

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}},$$

also:

2) $$\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{3};$$

$$F = \frac{6s\varrho}{r^2},$$

d. h.:

3) $$F = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3};$$

$$s_1 = \frac{rs}{\varrho},$$

also:

4) $$s_1 = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Ferner:

$$r_1 = \frac{r^2}{\varrho},$$

also:

5) $$r_1 = \frac{2r}{\sqrt{3}},$$

also $r_1 = s_1$ wie auch selbstverständlich;

$$F_1 = \frac{s_1\varrho_1}{2},$$

also:

6) $$F_1 = \frac{6r^2}{\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 9. „Die Bestimmungsstücke des eingeschriebenen und umschriebenen regelmässigen Dreiecks zu finden.

Auflösung. Nach Formel 8) der Scholion 1. zu Lehrsatz 5., ist wenn ϱ den Radius des eingeschriebenen Dreiecks, P den des Sechsecks bezeichnet:

$$2P^2 = r(r+\varrho).$$

Aber in unserem Falle ist:

$$P^2 = \frac{3r^2}{4},$$

also:

$$\frac{3r^2}{2} = r(r+\varrho) = r^2 + r\varrho,$$

d. h.

1) $$\varrho = \frac{r}{2}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{s}{2} = \sqrt{r^2 - \varrho^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3},$$

also:

2) $$s = r\sqrt{3};$$

$$F = \frac{3s\varrho}{2}$$

also:

3) $$F = \tfrac{3}{4}r^2\sqrt{3};$$

$$s_1 = \frac{rs}{\varrho},$$

also:

4) $$s_1 = 2r\sqrt{3};$$

$$r_1 = \frac{r^2}{\varrho},$$

also:

Digitized by Google

5) $r_1 = 2r$;

endlich:

$$F_1 = \frac{3s_1\varrho_1}{2},$$

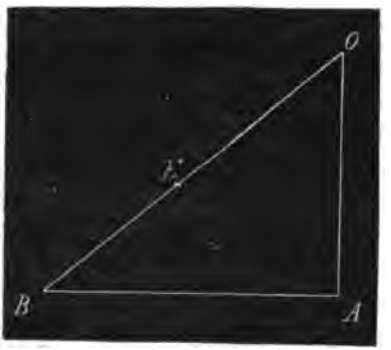
also:

6) $F_1 = 3r^2\sqrt{3}$.

Aufgabe 10. „Die Bestimmungsstücke des eingeschriebenen und umschriebenen Zehnecks zu finden."

Auflösung. Da s die Mediane von r ist, nach der Auflösung von Aufgabe 3. aber, wenn $AB = r$ (Fig. 233) ist, und

Fig. 233.



man Winkel $A = \mathrm{R}$, $AO = OE = \frac{AB}{2}$ macht, BE die gesuchte Mediane ist, so wird man haben:

$$OB^2 = AB^2 + AO^2 = r^2 + \frac{r^2}{4},$$

also:

$$OB = \frac{r}{2}\sqrt{5},$$

$$EB = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2},$$

und da $EB = s$ war:

1) $s = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Es wird noch:

$$\varrho = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = r\sqrt{1 - \tfrac{1}{16}(6 - 2\sqrt{5})}.$$

also:

2) $\varrho = r\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.

Was die übrigen Formeln anbetrifft, so mag es genügen, auf die in dem Scholion 1. zu Lehrsatz 5. zu verweisen, mit Hülfe welcher alle Bestimmungsstücke gegeben sind, wenn man s und r hat.

Aufgabe 11. „Die Bestimmungsstücke des regelmässigen Fünfecks zu finden."

Auflösung. Ist ϱ der kleine Radius des Fünfecks, P der des Zehnecks, so ist wieder:

$$2P^2 = r^2 + r\varrho,$$

also:

$$\frac{r^2}{4}(5 + \sqrt{5}) = r^2 + r\varrho,$$

oder:

1) $\varrho = \frac{r}{4}(1 + \sqrt{5})$,

da

$$s = 2\sqrt{r^2 - \varrho^2}$$

ist, so hat man:

$$s = 2r\sqrt{1 - \frac{1}{16}(6 + 2\sqrt{5})},$$

oder:

$$s = 2r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}},$$

d. h.:

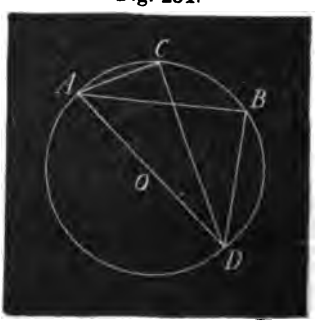
2) $s = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$.

Die übrigen Formeln sind wie in der vorigen Aufgabe zu finden.

Aufgabe 12. „Die Bestimmungsstücke des regelmässigen Fünfzehnecks zu finden."

Auflösung. Sei $AB = r$ (Fig. 234) die Seite des Sechsecks, $AC = S$ die des

Fig. 234.



Zehnecks, mithin $BC = s$, die des Fünfzehnecks, ferner $AD = 2r$ der Durchmesser, so ist in dem Kreisviereck

$ABCD: AC \cdot BD + BC \cdot AD = AB \cdot CD$,

aber da die Dreiecke ACD und ABD rechtwinklig sind:

$CD = \sqrt{AD^2 - AC^2}$, $BD = \sqrt{AD^2 - AB^2}$,

Digitized by Google

woraus dann folgt:

$$CD = \sqrt{4r^2 - S^2}, \quad BD = r\sqrt{3},$$

also, wenn man noch für AB, AC, BC die Werthe setzt:

$$Sr\sqrt{3} + 2sr = r\sqrt{4r^2 - S^2},$$

also:

$$s = \sqrt{r^2 - \frac{S^2}{4}} - \frac{S}{2}\sqrt{3},$$

oder da

$$S = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

also:

$$\frac{S^2}{4} = \frac{r^2}{2}(3 - \sqrt{5})$$

ist:

$$s = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)\right) r;$$

die übrigen Bestimmungsstücke sind dann leicht zu ermitteln.

Aus den Bestimmungsstücken irgend eines Vielecks lassen sich nach dem Scholion zu Satz 5. die des Vielecks von doppelter Seitenanzahl finden.

Wie dies zur Berechnung des Kreises selbst benutzt wird, darüber siehe den Artikel: „Quadratur ebener Figuren", Abschnitt 2.

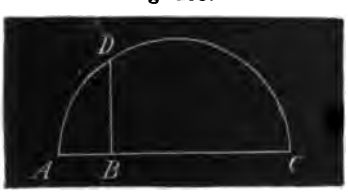
10) Fortsetzung der Constructionen.

Die in Abschnitt 7. gegebenen Constructionen sind hier noch durch einige zu ergänzen, wobei jedoch in diesem Artikel nur auf die einfachsten Bezug zu nehmen ist. Ein Mehreres ist in den Artikeln: „Transversalen, Theilung" und einigen andern zu suchen.

Aufgabe 1. „Zu zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu finden."

Auflösung. Trage die beiden Linien AB und BC (Fig. 235) auf derselben Linie AC ab, schlage über AC als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte BD senkrecht auf AC bis zur Peripherie. BD ist die gesuchte Linie. (Offenbar nämlich ist $BD^2 = AB \cdot BC$.)

Fig. 235.



Scholion. Die Aufgabe ist identisch mit der, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. Andere Auflösungen enthält der Artikel: Quadrat. Derselbe löst auch die Aufgabe: jede gradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Aufgabe 2. „Es sind die Seiten zweier Quadrate gegeben. Die eines dritten zu finden, dessen Inhalt gleich der Summe der beiden erstern ist."

Auflösung. Trage die gegebene Seite al (Fig. 236) senkrecht im Endpunkt der andern ac an. Die Linie lc ist dann die gesuchte. — Denn

$$lc^2 = al^2 + ac^2.$$

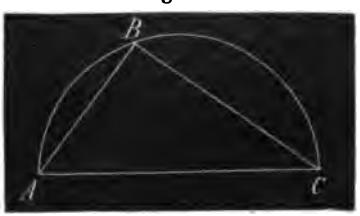
Fig. 236.

Aufgabe 3. „Die Seite eines Quadrats zu finden, dessen Inhalt gleich der Differenz zweier Quadrate ist, deren Seiten gegeben sind,"

Auflösung. Ueber der grösseren gegebenen Seite AC (Fig. 237) als Durchmesser errichte einen Halbkreis, trage die kleinere AB als Sehne ein, so ist BC die gesuchte. (Offenbar ist der Winkel bei B ein Rechter, also

$$BC^2 = AC^2 - AB^2.)$$

Fig. 237.



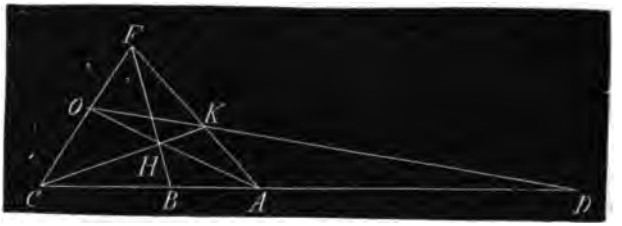
Determination. Die beiden gegebenen Seiten dürfen nicht gleich sein.

Aufgabe 4. „Zu drei gegebenen Punkten A, B, C einer Linie (Fig. 238) den vierten (mit B conjugirten) harmonischen zu finden."

Auflösung. Nehme Punkt F beliebig und ziehe AF, BF, CF. Ferner AO beliebig, die FB in H, FC in O schneidet und CH, die AF in K schneidet. Die Verbindungslinie OK schneidet dann AC im vierten harmonischen Punkte D.

Digitized by Google

Fig. 238.



(Offenbar nämlich sind *KO* und *AC* Diagonalen eines vollständigen Vierecks.)

Aufgabe 5. „Zu den drei durch *F* gehenden Strahlen *FA*, *FB*, *FC* den mit *FB* conjugirten harmonischen zu finden."

Auflösung. Lege (Fig. 238) durch die drei Strahlen eine beliebige Linie *ABC* und suche den mit *B* conjugirten harmonischen Punkt *D*; *FD* ist dann der gesuchte Strahl.

Schliesslich bemerken wir noch, dass der Artikel: „Quadratische Gleichung" ganz allgemein ein Verfahren angibt, aus der Gleichung, zu der eine Aufgabe führt, die Construction derselben abzuleiten, also die Auflösung durch Rechnung in eine durch Construction zu verwandeln, wenn die besagte Gleichung nicht höher als vom zweiten Grade ist. Sollte dieselbe aber von einem höheren Grade sein, so wäre eine Construction durch den Kreis und die grade Linie, also eine geometrische im engeren Sinne, überhaupt nicht möglich.

Indem wir hiermit die Uebersicht der ebenen Geometrie schliessen, verweisen wir in Bezug auf die weitere Ausführung namentlich auf den Artikel: „Geometrie der Lage."

11) Ueber Linien und Ebenen.

I. Vorbemerkungen und Definitionen.

Definition. Eine Ebene ist eine solche Fläche, in der zwischen jeden zwei Punkten eine Grade sich ziehen lässt. Diese Definition ist schon gegeben. — Wir erinnern noch, dass man durch zwei Punkte unendlich viel, durch drei Punkte, die nicht in einer graden Linie liegen, immer nur eine Ebene legen kann. Eine solche und nur eine lässt sich mithin auch durch eine Grade und einen Punkt ausserhalb derselben legen.

Durch zwei grade Linien lässt sich dagegen nicht immer eine Ebene legen. Findet es statt, so sind die Linien entweder parallel oder sie schneiden sich.

Lehrsatz 1. „Zwei grade Linien, die nicht in einer Ebene liegen, schneiden sich niemals."

Beweis. Angenommen, dies fände statt, so liesse sich durch die eine Linie *AB* (Fig. 239) und einen Punkt *C* der

Fig. 239.

andern jedenfalls eine Ebene legen, und die Punkte derselben *A* und *C* durch eine Grade verbinden, welche mit der gegebenen *AC* zusammenfällt, es liegen also *AC* und *AB* in einer Ebene.

Anmerkung. Dagegen lässt sich dieser Satz nicht umkehren. D. h. zwei Linien, die sich nicht schneiden, können doch in einer Ebene liegen. Sie sind nämlich parallel.

Definitionen. Zwei Ebenen, welche keinen Punkt gemein haben, heissen parallel.

Eine Linie und eine Ebene, welche keinen Punkt gemein haben, heissen ebenfalls parallel.

Lehrsatz 2. „Zwei Ebenen, welche nicht parallel sind, haben eine und nur eine grade Linie gemein."

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass zwei Ebenen nicht einen Punkt gemein haben können, und sonst ganz ausser einander fallen. Denn jede ins Unendliche verlängert gedachte Ebene theilt den Raum in zwei Theile.

Eine andere Ebene, welche einen Punkt mit der ersteren gemein hat, geht also durch dieselbe durch, d. h. sie fällt zum Theil in die eine zum Theil in die andere Hälfte des Raumes, und es wird also von der andern ein Theil von ihr abgegrenzt. Da die Grenzen von Flächen aber Linien sind, so haben beide Ebenen eine Linie gemein. Diese muss eine grade sein, denn nimmt man zwei

Digitized by Google

Punkte A und B in derselben an, so lässt sich durch dieselben in beiden Ebenen eine Grade AB ziehen, die folglich die gemeinschaftliche Grenze bildet.

Ausserdem haben die Ebenen aber keinen Punkt gemein. Denn wäre ihnen noch ein Punkt C ausserhalb AB gemeinsam, so liesse sich durch ABC nur eine Ebene ziehen, und die beiden gegebenen fielen also zusammen.

Definitionen. Die Linien, welche zwei Ebenen gemein ist, heisst ihre Schnittlinie. Von den Ebenen sagt man, dass sie sich schneiden.

II. Lehrsätze.

Lehrsatz 3. „Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die beiden Schnittlinien parallel."

Beweis. Zunächst liegen sie in einer Ebene, nämlich der Schnittebene. Dann aber schneiden sie sich nicht, weil sonst die Schnittpunkte den beiden parallelen Ebenen angehören müssten, was doch unmöglich ist.

Lehrsatz 4. „Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind gleich."

Beweis. Zieht man zwischen den parallelen Ebenen AB und CD (Fig. 240)

Fig. 240.

die parallelen Linien EF und GH, verbindet man ferner E mit H, G mit F, so liegen EH und FG in einer Ebene, nämlich in der der parallelen Linien, ferner können sich EH und FG nicht schneiden, weil ihr Schnittpunkt den Ebenen AB und CD gemein sein müsste; es sind also auch EH und FG parallel, $EFGH$ also ein Parallelogramm, woraus dann die Gleichheit von EF und GH folgt.

Lehrsatz 5. „Wenn eine Linie eine Ebene schneidet, so schneidet auch jede der erstern parallele Linie die letztere."

Beweis. Denn legt man durch beide parallele Linien eine Ebene, so schneidet diese die gegebene Ebene AB (Fig. 241)

Fig. 241.

in einer Linie CE, in welcher sich der Schnittpunkt C derjenigen von beiden Linien DC befindet, welche durch Ebene AB geht. CE aber liegt in der Ebene beider parallelen Linien, und schneidet CD folglich auch EF, so dass sich Schnittpunkt E auch in Ebene AB befindet.

Lehrsatz 6. „Wenn zwei Linien von drei parallelen Ebenen geschnitten werden, so stehen die abgeschnittenen vier Stücke in Proportion."

Beweis. Dieser Satz ist fast selbstverständlich, wenn die beiden Linien in einer Ebene liegen, da dann die Durchschnitte dieser Ebene mit den drei Parallelen auch parallele Linien sind.

Mögen aber die Linien AB und CD (Fig. 242) nicht in einer Ebene liegen. Sind EL, GM und KF die parallelen Ebenen, wovon die erste die Linie AB in E und die letzte die Linie CD in F schneidet, so ziehe man EF; es wird dann die zweite Ebene GM die Ebene AEF in GH, und die dritte Ebene KF in KF die Ebene AEF schneiden, während die erste Ebene EL die Ebene EFD in EL und die zweite Ebene GM die Ebene EFG in HM schneidet, da nun Linie BH parallel KF, HM parallel EL, so hat man

$$\triangle EGH \backsim EKF,$$

$$\triangle EFL \backsim HFM,$$

also:

$$EG : GK = EH : HF$$

und

$$EH : HF = LM : MF,$$

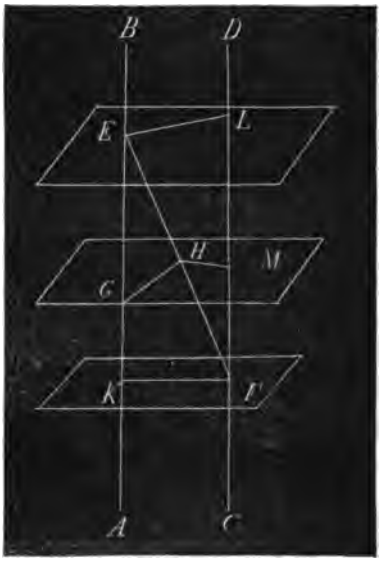
woraus dann folgt:

$$\frac{EG}{GK} = \frac{LM}{MF},$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Digitized by Google

Fig. 242.

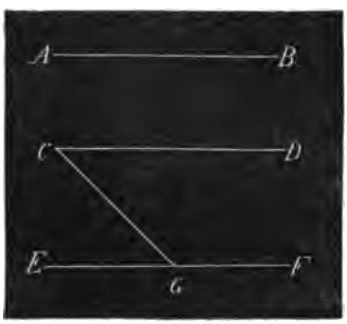


III. Hauptlehrsatz und Lehrsätze.

Den folgenden Satz bezeichnen wir wegen seiner Wichtigkeit als Hauptlehrsatz.

Lehrsatz 7. „Wenn zwei Linien *AB* und *CD* (Fig. 243) einer dritten *EF* parallel sind, so sind auch die beiden erstern *AB* und *CD* mit einander parallel."

Fig. 243.



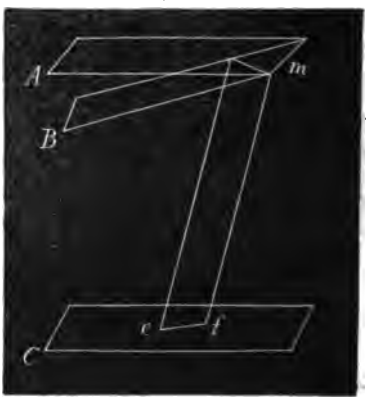
Beweis. Wir zeigen zunächst, dass *AB* und *CD* in einer Ebene liegen. Denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man durch *AB* und Punkt *C* eine Ebene legen, *ABCG*, diese möge Ebene *CDEF* in Linie *CG* und Linie *EF* in *G* schneiden. (Denn *CG*, welches *CD* schneidet, kann nicht *EF* parallel sein). Es gehen dann durch Punkte *A*, *B*, *G*, die nicht in einer Linie liegen, zwei Ebenen nämlich *ABCG* und auch die Ebene der Parallelen *AB* und *EF*, was unmöglich ist.

Nehmen wir jetzt an, die Linien *AB* und *CD* schnitten sich in Punkt *K*, so gingen durch Punkt *E*, *F*, *K* die Ebene der Parallelen *CD* und *EF* und die der Parallelen *AB* und *EF* was ebenfalls unmöglich ist. Also *AB* parallel *CD*.

Lehrsatz 8. „Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind auch die beiden ersten einander parallel."

Beweis. Seien *A*, *B*, *C* (Fig. 244) die Ebenen, und zwar sowohl *A* als *B*

Fig 244.



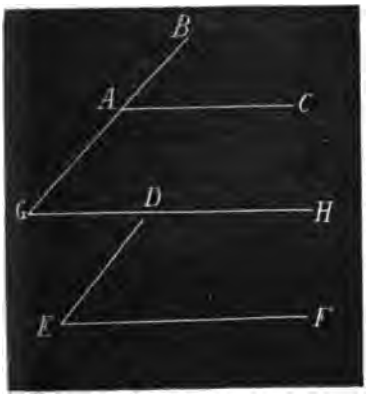
parallel *C*. Schnitten sich nun *A* und *B*, so könnte man durch einen Punkt *m* ihrer Durchschnittslinie und durch zwei Punkte *e* und *f* von *C* eine neue Ebene legen, die auch *A* und *B* schneiden müsste, und zwar in Linien, die *ef* parallel (Satz 3), also auch unter einander parallel wären, was unmöglich ist, da sie sich in *m* schneiden.

Lehrsatz 9. „Wenn die Schenkel zweier Winkel parallel sind, so sind auch die Winkelebenen parallel."

Beweis. Seien *BAC* und *DEF* die Winkel (Fig. 245). Angenommen ihre Ebenen schnitten sich in *GH*, so würde jedenfalls ein Schenkel von *ABC*, *AB* sich mit *GH* schneiden (denn beide Schenkel können doch nicht *GH* parallel sein). Aber *DE* parallel *AB* würde dann auch *GH* schneiden, (denn sonst wäre *DE* parallel *GH*, also auch *GH* parallel *AB*). Es gingen also durch die drei Punkte *G*, *D*, *E* zwei Ebenen, nämlich *DEF* und die der parallelen Linien *AB* und *DE*, was unmöglich ist.

Digitized by Google

Fig. 245.

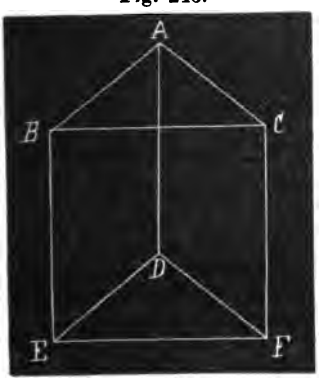


IV. Zusätze und Lehrsätze.

Lehrsatz 10. „Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sind gleich."

Beweis. In den Winkeln ABC und DEF (Fig. 246) sei AB parallel DE, BC parallel EF, BA und ED so wie BC und EF nach derselben Seite hingerichtet. Mache $AB = DE$, $BC = EF$ und ziehe AD, CF, AC und DF, so entstehen die Parallelogramme $BADE$ und $BCEF$; es ist also BE gleich und parallel AD, BE gleich und parallel CF, also auch AD gleich und parallel CF, woraus dann

Fig. 246.



folgt, dass auch $ACDF$ ein Parallelogramm, mithin $AC = DF$ ist, woraus sich dann die Congruenz der Dreiecke ABC und DEF so wie die Gleichheit der gegebenen Winkel folgern lässt.

Zusatz 1. „Winkel mit parallelen und entgegengesetzt gerichteten Schenkeln sind gleich."

Denn offenbar ist, wenn die Schenkel von A und B beide entsprechend entgegengesetzt gerichtet sind, diejenigen von A und dem Scheitelwinkel von B gleichgerichtet, woraus sich unser Satz ergibt.

Zusatz 2. „Winkel mit parallelen Schenkeln, wovon ein Paar gleich, das andere Paar entgegesetzt gerichtet ist, ergänzen sich zu zwei Rechten."

Lehrsatz 11. „Sind die Ebenen zweier gleicher und gleichgerichteter Winkel und das eine Schenkelpaar unter einander parallel, so ist es auch das andere Schenkelpaar."

Beweis. Sind $ABC = DEF$ (Fig. 246) die Winkel, ihre Ebenen seien parallel, und BC parallel EF. Seien AB und DE nicht parallel, so lege durch C eine Linie parallel mit AB, diese wird mit EF einen Winkel bilden, der gleich ABC ist, aber ungleich DEF sein muss, was nicht sein kann.

12) Von den Winkeln zwischen Ebenen, Ebenen und Linien, und zwischen Linien, die sich nicht schneiden.

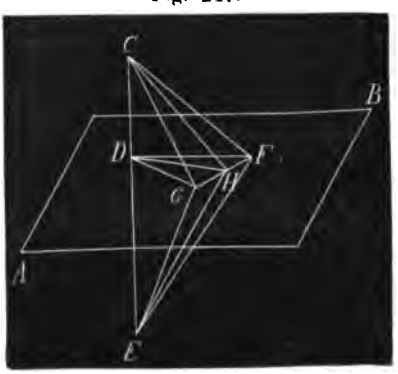
I. Hauptlehrsatz und Lehrsätze.

Der folgende Lehrsatz ist als Hauptsatz zu bezeichnen.

Lehrsatz 1. „Wenn eine Linie eine Ebene schneidet und man kann durch den Schnittpunkt in der Ebene zwei Linien ziehen auf denen die gegebene senkrecht steht, so steht sie auch auf jeder andern Linie, welche man in der gegebenen Ebene durch den Schnittpunkt legen kann, senkrecht."

Beweis. Sei CD (Fig. 247) auf Linie DF und DG in Ebene AB senkrecht,

Fig. 247.



lege in dieser Ebene DH beliebig durch D, so soll CD auch auf DH senkrecht stehen. Verlängere CD um ihre eigene Grösse DE nach der andern Seite von

Digitized by Google

AB hin, so sind Winkel CDF, EDF, CDG, EDG Rechte, und daher Dreieck $CDF \cong EDF$, $CDG \cong EDG$, woraus sich ergibt $CF = EF$, $CG = EG$, also Dreieck $CGF \cong EGF$, und hieraus:

$$\text{Winkel } CFG = EFH.$$

Hieraus folgt dann:

$$\text{Dreieck } CFH \cong EFH,$$

(je zwei Seiten $CF = EF$, $FH = FH$, und die eingeschlossenen Winkel sind gleich) und hieraus folgt $CH = EH$, also wegen Gleichheit der dritten Seite,

$$\text{Dreieck } CDH \cong EDH,$$

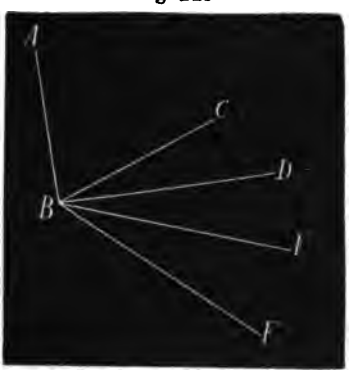
also auch Winkel $CDH = EDH$. Diese Winkel aber sind Nebenwinkel, und somit rechte, womit unser Satz erwiesen ist.

Definition. Wenn eine Linie auf zweien und somit auf jeder in einer Ebene senkrecht steht, so sagt man: „Die Linie stehe auf der ganzen Ebene senkrecht."

Lehrsatz 2. „Drei Linien, die auf einer vierten senkrecht stehen, und durch einen Punkt derselben gehen, liegen in einer Ebene."

Beweis. Stehe Linie AB (Fig. 248) mit BC, BD und BE senkrecht. Durch

Fig. 248.



BC und BD legt man eine Ebene, auf welcher nach dem vorigen Satze AB senkrecht steht. Läge BE nicht in dieser Ebene, so würde die durch ABE gelegte Ebene die erstere etwa in BF schneiden, also die Winkel ABF und ABE, welche in einer Ebene liegen, Rechte sein, was unmöglich ist.

Lehrsatz 3. „Steht eine Linie AB (Fig. 249) auf einer Ebene senkrecht, so steht auch jede mit der ersteren parallelen Linie CD auf der letzteren senkrecht."

Beweis. Zieht man durch die Schnitt-

Fig. 249.

punkte B und D beider Linien AB und CD mit der Ebene in derselben DG parallel BE und DH parallel BF, so entstehen die Winkel

$$ABE = CDG, \quad ABF = CDH,$$

oder:

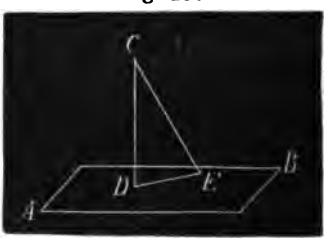
$$ABE = ABF = R,$$

also steht auch CD auf zweien in der Ebene, mithin auf der ganzen Ebene senkrecht.

Lehrsatz 4. „Durch einen Punkt innerhalb oder ausserhalb einer Ebene lässt sich nur eine Senkrechte auf derselben ziehen."

Beweis. Liege Punkt C ausserhalb oder innerhalb der Ebene AB (Fig. 250 und 251) und mögen zwei auf AB senk-

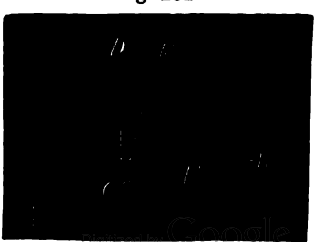
Fig. 250.



rechte Linien CD und CE hindurch gehen, so wird die Schnittlinie der Ebene AB und CDE, also (Fig. 250) DE oder CF (Fig. 251), auf Linie CD und CE senkrecht stehen, die mit derselben in einer Ebene liegen, was unmöglich ist.

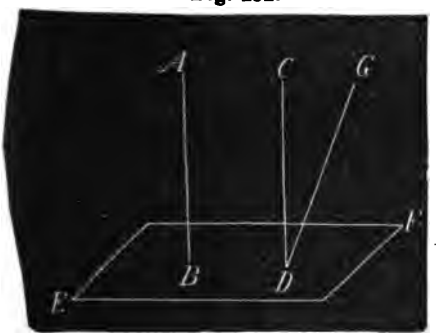
Lehrsatz 5. „Stehen zwei Linien

Fig. 251.



Digitized by Google

Fig. 252.



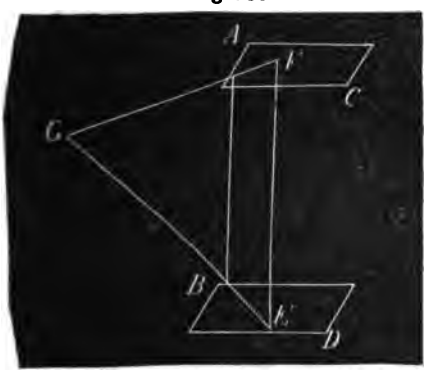
AB und *CD* (Fig. 252) auf einer Ebene senkrecht, so sind sie parallel."

Beweis. Angenommen *CD* wäre nicht parallel *AB*, so lege durch Punkt *D*, *DG* parallel *AB*, so wäre *DG* auf *EF* senkrecht, also durch den Punkt *D* gingen zwei auf *EF* senkrechte Linien, was unmöglich ist.

Lehrsatz 6. „Steht eine Linie *AB* (Fig. 253) auf zwei Ebenen *AC* und *BD* senkrecht, so sind letztere parallel."

Beweis. Angenommen die Ebenen *AC* und *BD* schnitten sich, so lege

Fig. 253.



durch Linie *AB* und eine beliebige Linie *AF* in Ebene *AC*, eine andere Ebene *ABFE*, welche *BD* in *BE* schneidet. Ist *AF*, wie dies doch immer gemacht werden kann, nicht dem Durchschnitte von *AC* und *BD* parallel, so kann dies auch nicht mit der *AF* parallelen Linie *BE* der Fall sein, mithin müssen *AF* und *BE* durch diesen Durchschnitt der Ebenen *AC* und *BD* gehen, und zwar muss dies in demselben Punkte *G* geschehen, wo die Ebene *AFBE* durch diesen Durchschnitt geht; es wären also durch Punkt *G* zwei senkrechte Linien auf *AB* gezogen, was unmöglich ist.

II. Definition und Lehrsätze.

Definition. Sind zwei Linien gegeben, *AB* und *CD* (Fig. 254), die sich nicht schneiden, und man legt durch einen beliebigen Punkt *B* von *AB* eine Parallele *BE* mit *CD*, durch den beliebigen Punkt *D* von *CD* eine Parallele *DF* mit *AB*, oder durch irgend einen Punkt *G* im Raume zwei Linien *GH* und *GK*, die mit *AB* und *CD* parallel sind, so entstehen nach Lehrsatz 10. des vorigen Abschnittes gleiche Winkel, *ABE*, *CDF*, *HGK*. Der Winkel, welchen die mit zwei gegebenen Linien parallelen und im gleichen Sinne gerichteten sich aber schneidenden Linien machen, ist also nur von der Richtung dieser Linien

Fig. 254.

abhängig, und völlig unveränderlich, wo auch der Schnittpunkt sei, möge derselbe auf einer der gegebenen Linien oder irgend wo im Raume liegen. Man kann somit auch von dem Winkel sprechen, den zwei sich nicht schneidende Linien machen, und versteht darunter eben den, welchen zwei damit parallele sich schneidende Linien machen. Es ist auch ersichtlich, dass der Winkel zweier parallelen Linien 0 Grad beträgt.

Wenn man jetzt davon spricht, dass zwei Linien auf einander senkrecht stehen, so ist sonach durchaus nicht nöthig, dass dieselben sich schneiden. Es gelten aber die jetzt bewiesenen Sätze, wie leicht zu sehen ist, auch bei dieser allgemeinen Definition. Namentlich nimmt Satz 1. dieses Abschnittes die Form an.

„Steht eine Linie auf zwei in einer Ebene liegenden und nicht einander parallelen Linien (welche die erstere schneiden mögen oder nicht) senkrecht, so steht sie auf der ganzen Ebene senkrecht."

Immer nämlich lassen sich durch den Schnittpunkt von Linien und Ebenen zwei den senkrechten parallele Linien, also auf der gegebenen senkrechte legen.

Digitized by Google

Mit Berücksichtigung der eben gegebenen Definition erhalten wir einige wichtige Sätze

Steht eine Linie *AB* (Fig. 255) zunächst auf zweien sich schneidenden *BC* und *CD*

Fig. 255.

senkrecht, die selbst mit einander einen rechten Winkel machen, so steht auch die Verbindungslinie *AC* auf *CD* senkrecht; denn *CD* steht auf *AB* und *BC*, folglich auf der ganzen Ebene *ABC* und mithin auf *AC* senkrecht. D. h.:

Lehrsatz 7. „Errichtet man auf der Ebene zweier einen rechten Winkel bildenden Linien *BC* und *CD* eine Senkrechte *AB*, welche durch einen Punkt *B* des einen Schenkels geht, so steht jede Linie, welche den Scheitelpunkt *C* des gegebenen rechten Winkels mit einem Punkt *A* der Senkrechten verbindet, auf dem andern Schenkel *CD* des gegebenen Rechten senkrecht."

Ist ferner *AB* auf den Schenkeln irgend eines Winkels *BC* und *CD* senkrecht, so steht *CD* auf *AB* und *AC*, d. h. auf Ebene *ABC* und mithin auch auf *BC* senkrecht. Also:

Lehrsatz 8. „Legt man durch den einen Schenkel eines Winkels *AB* eine Senkrechte auf die Winkelebene und ist die Verbindungslinie des Scheitelpunkts *C* mit irgend einem Punkte *A* dieser Senkrechten auf dem andern Schenkel senkrecht, so ist der gegebene Winkel ein rechter."

Steht ferner *CD*, *CB* auf *CA* senkrecht und *AB* auf *BC* senkrecht, so steht *CD* auf der ganzen Ebene *ABC*, also auch auf *AB*, mithin *AB* auf *CD* senkrecht.

Lehrsatz 9. „Wenn eine Linie *CD* durch den Scheitelpunkt eines Winkels *BCA* geht, und auf beiden Schenkeln senkrecht steht, so wird jede andere, welche in der Winkelebene von *BCA* liegt und auf einem Schenkel *BC* senkrecht, auch auf der gegebenen Linie *CD* und mithin auf der Ebene des rechten Winkels *BCD* senkrecht stehen."

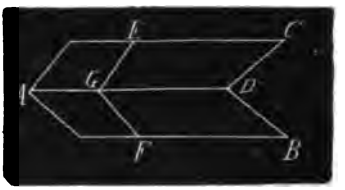
Da die drei Sätze sich complicirt aussprechen, so möchte es gerathen sein, sie eben nur als leichte Anwendungen des in Rede stehenden Prinzipes aufzufassen.

III. Definitionen und Lehrsätze.

Definitionen. Wenn sich zwei Ebenen schneiden, und man zieht in jeder derselben durch denselben Punkt des Durchschnittes eine Linie, so bilden je zwei solcher Linien einen Winkel. Derjenige Winkel nun, welcher von den auf dem Durchschnitte senkrechten Linien gebildet wird, heisst: „Neigungswinkel der Ebenen."

Sind *AC* und *AB* (Fig. 256) die beiden Ebenen, *AD* ihr Durchschnitt, *EG*

Fig. 256.

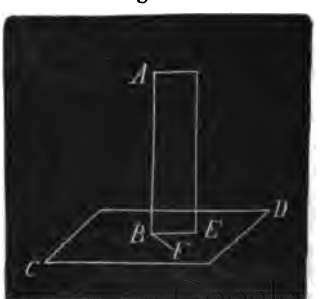


und *GF* auf derselben senkrecht, so ist *EGF* der Neigungswinkel. Wie auch der Punkt *G* in *AD* liege, immer würde derselbe Neigungswinkel stattfinden, da alle Winkel deren Schenkel bezüglich in Ebene *AC* und *AB* auf *AD* senkrecht liegen und deren Scheitelpunkt in *AD* sich befindet, parallele Schenkel haben.

Zwei Ebenen stehen senkrecht auf einander, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist.

Lehrsatz 10. „Wenn eine Linie *AB* (Fig. 257) auf einer Ebene *CD* senkrecht steht, so steht jede durch *AB* gelegte Ebene auf *CD* senkrecht."

Fig. 257.



Digitized by Google

Beweis. Sei *AE* die durch *AB* gelegte Ebene, *BE* der Durchschnitt mit *CD*. Auf derselben ziehe man in Ebene *CD* senkrecht *BF*, so sind *AB* und *BF* auf *BE* senkrecht, also *ABF* der Neigungswinkel der Ebene, und dieser ist ein rechter, da jede Linie *BF* in *CD* auf *AB* senkrecht steht.

Lehrsatz 11. „Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, und man zieht in einer eine Senkrechte auf den Durchschnitt, so steht diese auf der andern Ebene senkrecht.

Beweis. Seien *AE* und *CD* (Fig. 257) die Ebenen, *BE* der Durchschnitt, Winkel *EBF* ein rechter. Zieht man noch *AB* auf *BE* senkrecht in Ebene *AE*, so ist *ABF* der Neigungswinkel, also ein rechter, mithin *BF* auf *BE* und *BA* d. h. auf der ganzen Ebene *AE* senkrecht.

Lehrsatz 12. „Wenn zwei Ebenen auf einer dritten senkrecht stehen, so steht auch der Durchschnitt der beiden erstern auf der letzteren senkrecht."

Beweis. Es mögen die Ebenen *AC* und *AD* (Fig. 258) auf *CD* senkrecht stehen.

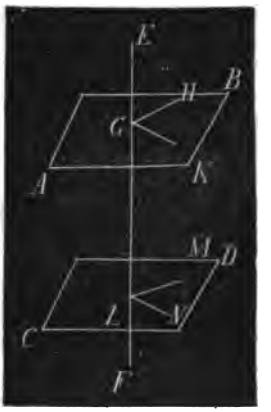
Fig. 258.

Sei *AB* der Durchschnitt von *AC* und *AD*, *BC* der von *AC* und *CD*, *BD* der von *AD* und *CD*. Ziehe in *CD*, *BE* auf *CB*, *BF* auf *BD* senkrecht, so steht *BE* auch auf *AC*, *BF* auf *AD* senkrecht, also *BE* und *BF* auf der beiden Ebenen gemeinschaftlichen Linie *AB*, und mithin letztere auf der ganzen Ebene *CD* senkrecht.

Lehrsatz 13. „Steht eine Linie oder eine Ebene auf einer anderen Ebene senkrecht, so steht erstere auf jeder der letzteren parallelen Ebene senkrecht."

Beweis. A) Seien *AB* und *CD* (Fig. 259) zwei parallele Ebenen, und Linie *EF* auf *AB* senkrecht. Lege man durch *EF* zwei Ebenen, welche *AB* in *GH* und *GK*, *CD* in *LM* und *LN* schneiden, so dass also *GH* parallel *LM*, *GK* parallel *LN* ist. Da nun *GH* und *GK* auf *EF*

Fig. 259.



senkrecht stehen, so muss dies auch mit *LM* und *LN*, d. h. mit der Ebene *CD* stattfinden.

B) Stehe Ebene *GHML* (Fig. 259) auf einer der parallelen Ebenen *AB* und *CD* senkrecht, also auf *AB*, so ziehe auf den Durchschnitt *GH* mit *AB* in Ebene *GHLM* die Senkrechte *EF*, so steht diese auf Ebene *AB* also nach vorigem Satze auch auf *CD* senkrecht. Gleiches also findet mit jeder durch *EF* gelegten Ebene, mithin auch mit *GHML* statt.

IV. Definitionen und Satz.

Definitionen. Der Theil einer beliebigen Linie, welcher zwischen zwei parallelen Ebenen liegt heisst schiefe Entfernung; der Theil eines Lothes auf beiden parallelen Ebenen, welcher zwischen denselben liegt, grade Entfernung oder Entfernung.

Lehrsatz 14. „Die grade Entfernung zwischen zwei parallelen Ebenen ist zugleich die kürzeste."

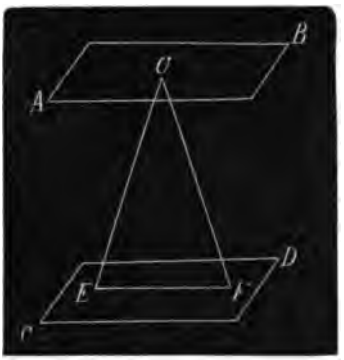
Beweis. Ziehe durch Punkt *O* (Fig. 260) in Ebene *AB* nach der parallelen Ebene *CD* das Loth *OE* und die beliebige Linie *OF*, sei *EF* der Durchschnitt von *CD* und Ebene *EOF*, so ist *OE* senkrecht auf *EF* also kleiner als *OF*. *OF* war aber beliebig gerichtet. Man kann auch die schiefe Entfernung durch einen andern Punkt als *O* legen. Denn sie ist immer einer durch *O* gehenden Linie *OF* parallel, und auch derselben gleich (als parallele Linien zwischen parallelen Ebenen).

V. Definition und Lehrsätze.

Definition. Möge Linie *CD* (Fig. 261.) die Ebene *AB* in *D* schneiden, so kann man durch *D* eine beliebige Linie

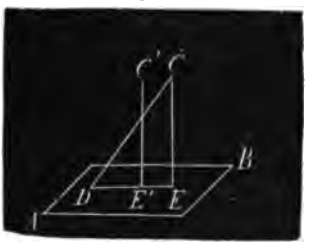
Digitized by Google

Fig. 260.



in *AB* ziehen, welche mit *CD* einen Winkel macht. Von allen diesen Winkeln unterschneidet man den folgenden: Durch irgend einen Punkt *C* von *CD* ziehe man ein Loth auf *AB*, welches diese Ebene in *D* schneidet, und verbinde *D* mit *E*. Der Winkel *CDE* heisst dann der Neigungswinkel der Linie *CD* mit Ebene *AB*. Wie auch Punkt *C* in *CD* liege, so ist der Neigungswinkel derselbe, denn die Lothe *CE* und *C'E'* auf *AB* werden parallel sein, und mit *CD* in einer Ebene liegen; es wird

Fig. 261.

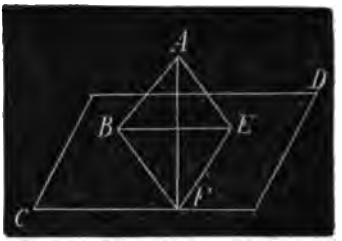


also *C'E'* durch den Durchschnittspunkt der Ebene *ECD* mit *AB*, d. h. durch *DE* gehen.

Lehrsatz 15. „Von allen Winkeln, welche eine Linie mit andern in einer gegebenen Ebene befindlichen Linien macht, ist der Neigungswinkel der kleinste."

Beweis. Sei *ABE* (Fig. 262) der Neigungswinkel der Ebene *CD* und der Linie *AB*, *BF* eine beliebige in *CD* durch *B* gelegte Linie. Das von *A* auf *CD* gefällte Loth geht dann durch einen Punkt *E* von *BE* (nach der Definition des Neigungswinkels). Mache jetzt *BF* = *BE* und ziehe *AF*, so haben die Dreiecke *ABE* und *ABF* je zwei gleiche Seiten, *AB* = *AB*, *BE* = *BF*, von den

Fig. 262.

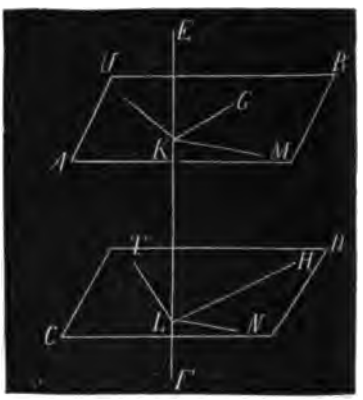


dritten Seiten aber ist *AE* die kürzere (sie ist ein Loth auf die Ebene *CD* und mithin auf die Verbindungslinie *EF*). Es liegt also auch *AE* der kleinere Winkel *ABE* gegenüber, was zu beweisen war.

Lehrsatz 16. „Jede Linie oder Ebene schneidet zwei parallele Ebenen unter demselben Winkel."

Beweis. A) Möge *AB* parallel *CD* (Fig. 263) sein, und Linie *EF* dieselben bezüglich in *K* und *L* schneiden. Fälle von *E* aus ein Loth auf beide Ebenen, welches dieselben in *K* und *H* schneidet. Es sind dann die Durchschnitte der

Fig. 263.



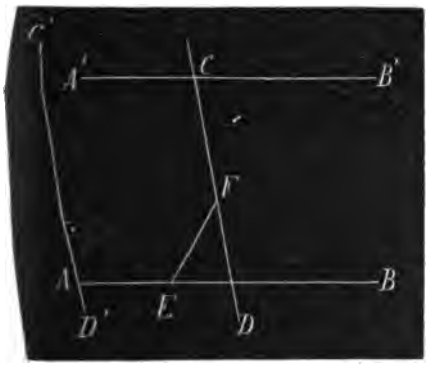
Ebene *FEH* mit den gegebenen, also *KG* und *LH* parallel, somit Winkel *EKG* = *ELH*. Dies aber sind die Neigungswinkel von *EF* mit den gegebenen Ebenen.

B) Schneidet Ebene *HEF* die parallelen Ebenen *AB* und *CD* in *KG* und *LH*, so ziehe *KM* auf *KG* senkrecht in Ebene *AB*, und *LN* auf *LH* senkrecht in *CD*. Also Winkel *GKM* = *HLN* = R. Diese beiden Winkel haben zwei parallele Schenkel *KG* und *LH*; es ist also auch *KM* parallel *LN*. Zieht man nun in *HEF*, Linien *KU* auf *KG* und *LT* auf *LH* senkrecht, so sind auch diese Linien parallel, und folglich Winkel *UKM* = *TLN*.

Das aber sind die Neigungswinkel der Ebene *FEH* bezüglich mit *AB* und *CD*.

Lehrsatz 17. „Wenn zwei Linien *AB* und *CD* (Fig. 264) nicht in einer Ebene liegen, so lässt sich immer eine dritte *EF* finden, die auf beiden senkrecht steht und dies ist ihre kürzeste Entfernung."

Fig. 264.



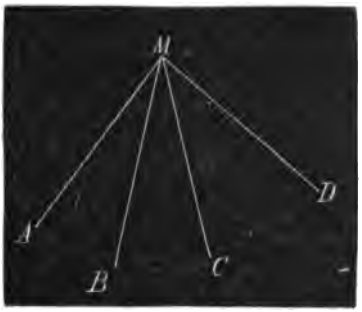
Beweis. Ziehe durch Punkt *A* Linie *C'D'* parallel *CD* und durch *C* Linie *A'B'* parallel *AB*. Lege dann durch *AB* eine Ebene, die auf *BAD'* und mithin auf der damit parallelen Ebene *B'CD* senkrecht steht, ferner durch *CD* eine Ebene, die auf *B'CD* und mithin auch auf *BAD'* senkrecht steht. Der Durchschnitt dieser beiden Ebenen *EF* wird dann sowohl durch *AB* als auch durch *CD* gehen, und auf den Ebenen *BAD'* und *B'CD*, also auch auf den Linien *AB* und *CD* senkrecht stehen, mithin die angegebenen Bedingungen erfüllen. Da ferner *EF* auf den parallelen Ebenen *BAD'* und *B'CD* senkrecht steht, so ist sie die kürzeste Entfernung dieser Ebenen, mithin auch der in denselben befindlichen Linien *AB* und *CD*.

13) Von den körperlichen Ecken und den sphärischen Figuren.

I. Definitionen.

Wenn sich drei oder mehrere Linien *MA*, *MB*, *MC*, *MD* ..., welche nicht in einer Ebene liegen, in einem Punkte schneiden (Fig. 265), so sagt man, dass sie eine körperliche Ecke bilden. — Diese Linien heissen Kanten der Ecke. Man unterscheidet sonach die Ecken in dreikantige, vierkantige u. s. w. Durch je zwei auf einander folgende Kanten (d. h. als auf einander folgende gedachte, denn die Ordnung ist keine bestimmte), denkt man sich eine Ebene gelegt, und die Ecke hat sonach eben soviel Ebenen als Kanten. — Je zwei auf einander folgende Kanten bilden einen Kantenwinkel, der Neigungswinkel je zweier auf einander folgenden Ebenen heisst Ebenenwinkel. Die Anzahl der Kantenwinkel und der Ebenenwinkel ist gleich der der Seiten.

Fig. 265.



II. Definitionen und Sätze.

Definitionen. Der Ort aller Punkte im Raume, welche von einem gegebenen gleiche Entfernung haben, d. h. die Oberfläche, in der alle diese Punkte liegen, nennt man Kugelfläche. Die Kugelfläche entspricht also gewissermaassen im Raume der Kreislinie. Die Definition der Kugelfläche lässt sich auch so geben. Sie ist eine Oberfläche, deren Punkte alle von einem gegebenen gleich weit entfernt sind. Auch kann man sich eine Kugel entstanden denken, wenn man einen Halbkreis um seinen als fest betrachteten Durchmesser sich drehen lässt Denn die Kreislinie wird dann eine Fläche beschreiben, die von dem festbleibenden Mittelpunkt in allen Punkten gleiche Entfernung behält, und somit eine Kugelfläche ist.

Der von der Kugelfläche begrenzte Körper heisst Kugel, der Punkt, von dem die Kugelfläche gleichweit entfernt ist, Mittelpunkt oder Centrum wie beim Kreise, eben so gelten die Ausdrücke Halbmesser (*Radius*) und Durchmesser (*Diameter*) auch für die Kugel. Der erstere Ausdruck bezeichnet also die Verbindungslinie der Kugelfläche mit dem Mittelpunkte, der letztere eine grade Linie, welche zwei Punkte der Kugelfläche verbindend durch den Mittelpunkt geht.

Denkt man sich in einem Endpunkte des festen Durchmessers des Halbkreises, welcher durch seine Drehung die Kugel bildete, eine Tangente, so bleibt diese während der ganzen Drehung auf diesem Durchmesser senkrecht, sie wird also

Digitized by Google

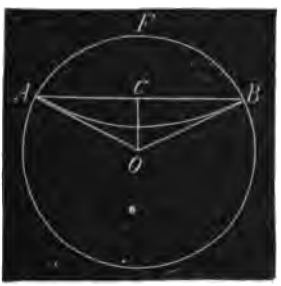
eine auf diesem senkrechte Ebene beschreiben, welche nur einen Punkt mit der Kugel gemein hat. Da man jeden Punkt der Kugelfläche aber als Endpunkt des festen Durchmessers ansehen kann, so hat man den Satz:

„Errichtet man in einem Punkte der Kugelfläche eine Ebene senkrecht auf dem durch diesen Punkt gehenden Kugelradius, so hat diese nur den einen Punkt mit der Kugelfläche gemein.“ Diese Ebene heisst Tangentialebene.

Lehrsatz 1. „Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten so entsteht immer als Durchschnitt ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt des vom Mittelpunkte der Kugel gefällten Lothes auf die Ebene ist.“

Beweis. Sei O die Kugel, AB ein Durchschnitt derselben (Fig. 266), OC

Fig. 266.



das von O auf AB gefällte Loth. Es ist eben nur zu beweisen, dass beliebige Punkte der Begrenzung A und B von C gleich weit entfernt sind, es muss diese Begrenzung dann eine Kreislinie sein. Ziehe CA, CB, OA, OB so entsteht:

Dreieck $AOC \cong BOC$,

($AO = BO$ als Kugelradien, $OC = OC$, Winkel $OCA = OCB$ als Rechte), also

$$CA = CB,$$

was zu beweisen war.

Lehrsatz 2. „Von allen Kreisen, die durch Durchschneiden der Kugel entstehen, ist derjenige der grösste, welcher von einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene abgeschnitten wird, und die Kreise werden um so kleiner, je mehr sich ihre Ebenen von der damit parallelen Ebene, welche durch den Mittelpunkt gehen, entfernen.

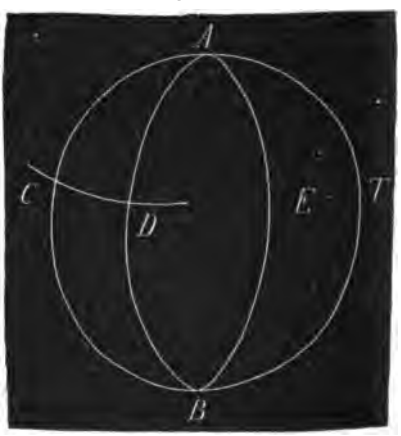
Beweis. Der Kreis dessen Ebene durch den Mittelpunkt geht, hat den Halbmesser der Kugel ebenfalls zum Halbmesser, derjenige, welcher in Ebene AB (Fig. 266) liegt, hat den Radius AC und die Entfernung OC vom Mittelpunkt, da nun: $AC^2 = AO^2 - OC^2$, also AC^2 desto kleiner ist, je grösser OC wird, so findet gleiches auch mit AC statt, womit unser Satz bewiesen ist.

III. Definitionen.

Jeder Kreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heisst grösster Kreis der Kugel. Da man durch jede drei Punkte eine Ebene legen kann, so lässt sich auch durch jede zwei Punkte der Kugelfläche ein grösster Kreis legen, und es wird nur einer möglich sein, wenn diese beiden Punkte nicht Endpunkte eines Durchmessers sind. — Findet Letzteres aber statt, so liegen sie mit dem Mittelpunkt in einer Graden, und es lassen sich unendlich viel grösste Kreise hindurch legen.

Offenbar schneiden sich aber jede zwei grösste Kreise in den Endpunkten eines Durchmessers. Denn ihre Ebenen gehen ja durch den Mittelpunkt, ihre Schnittlinie ist also eine durch Letztere gehende Grade, mithin ein Durchmesser. Zwei grösste Kreise auf derselben Kugel theilen einander somit in je zwei Halbkreise: ADB, ATB und ACB, AEB (Fig. 267).

Fig. 267.



Das von zwei grössten Halbkreisen, die zwei Punkte gemein haben, begrenzte Stück der Kugel $ACBD$ heisst sphärisches Zweieck.

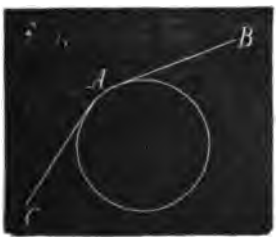
Wird durch ein sphärisches Zweieck ein dritter grösster Kreis CD gelegt, so werden diese drei sich im Allgemeinen in drei Punkten A, C, D schneiden. Der von den abgeschnittenen Bogen AC, CD, DA begrenzte Theil der Kugeloberfläche

Digitized by Google

heisst sphärisches Dreieck, die Bogen selbst Seiten des Dreiecks.

Eine beliebige Anzahl von grössten Kreisen, von denen nicht drei durch denselben Punkt der Kugelfläche gehen, schneiden auf der Kugel ein sphärisches Vieleck (Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w.) ab, und die das Vieleck begrenzenden Bogen werden ebenfalls Seiten desselben genannt. Auch spricht man von den Winkeln eines sphärischen Dreiecks, und versteht darunter diejenigen Winkel, welchen die Tangenten CA und AB, die an je zwei auf einander folgenden Seiten (Fig. 268) in deren Schnittpunkt gelegt werden, mit einander machen.

Fig. 268.

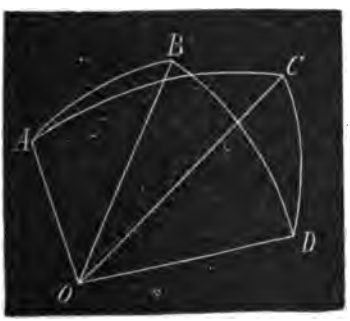


IV. Lehrsätze und Scholion.

Lehrsatz 3. „Wenn man durch eine körperliche Ecke eine Kugelfläche legt, deren Mittelpunkt mit dem Schnittpunkte der Kanten zusammenfällt, so schneiden die Ebenen der Ecke ein sphärisches Vieleck ab, das so viel Seiten, als die Ecke Kanten hat. Die Seiten des Vielecks betragen dann ebensoviel Grade, als die Kantenwinkel der Ecke, und die Winkel des Vielecks sind gleich den Ebenenwinkeln der Ecke."

Beweis. Sei $OABCD$ (Fig. 269) die Ecke. $ABCD$ das zugehörige Vieleck. Der Kantenwinkel AOB ist dann Centri-

Fig. 269.



winkel der Vieleckseite AB, beide haben also gleich viel Grade. Was den Neigungswinkel der Ebenen AOB und AOC anbetrifft, so wird er von den in beiden Ebenen auf AO senkrechten Linien gebildet; diese Ebenen sind aber zugleich die der Bogen AB und AC. Zieht man nun z. B. an Bogen AB eine Tangente, so liegt diese in Ebene AOB, und steht auf dem Halbmesser AO senkrecht. Da nun die Tangenten an AB und AC den Winkel des Vielecks bilden, so fällt derselbe mit dem Ebenenwinkel der Ecke zusammen.

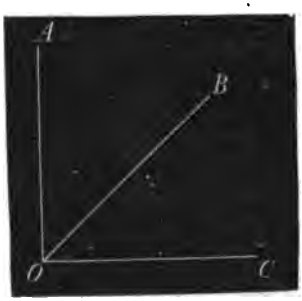
Scholion. Man kann sonach jede Ecke durch ein sphärisches Vieleck von gleicher Seitenanzahl repräsentiren. Beide entsprechen sich so, dass die Kantenwinkel der Ecke durch die Seiten des Vielecks, die Ebenenwinkel der Ecke durch die Winkel des letzteren gemessen werden. Alle Sätze von Ecken beziehen sich also ohne Weiteres auf sphärische Vielecke und umgekehrt. In der Regel lassen sich diese Sätze, namentlich die von dreiseitigen Ecken und sphärischen Dreiecken, besser für die letzteren als für die ersteren merken, nämlich wegen der Analogie mit den ebenen Dreiecken, welche sich hierbei vorfindet.

V. Lehrsätze.

Lehrsatz 4. „Wenn in einem sphärischen Dreiecke (dreikantige Ecke) zwei Seiten dem Quadranten gleich, (zwei Kantenwinkel rechte sind) so hat jeder Winkel die gleiche Gradzahl als seine Gegenseite, (ist jeder Ebenenwinkel dem gegenüberliegenden Kantenwinkel gleich)."

Beweis. Seien in der dreikantigen Ecke $OABC$ (Fig. 270) die Winkel AOB

Fig. 270.



und AOC rechte. Es steht dann AO auf OB und OC, also auf der ganzen Ebene OBC senkrecht, es sind also auch die durch AO gelegten Ebenen AOB

und AOC auf BOC senkrecht sind, die Ebenenwinkel bei OB und OC rechte, wie die gegenüberliegenden Kantenwinkel. Was den dritten Ebenenwinkel bei AO anbetrifft, so wird er von den Lothen auf AO in Ebenen AOB und AOC d. h. von den Linien BO und CO gebildet, und ist also dem gegenüberliegenden Kantenwinkel BOC ebenfalls gleich.

Lehrsatz 5. „Ist in einem sphärischen Dreiecke (dreikantigen Ecke) eine Seite ein Quadrant und ein Winkel ein rechter, (ein Kantenwinkel und ein Ebenenwinkel rechte) so wird jeder Winkel gemessen durch die gegenüberliegende Seite, (ist jeder Ebenenwinkel gleich dem gegenüberliegenden Kantenwinkel)."

Beweis. A) Seien Kantenwinkel AOB (Fig. 270) und der anliegende Ebenenwinkel OB rechte, so ist AO auf der Durchschnittslinie der Ebenen AOB und BOC, also auch auf der ganzen Ebene BOC senkrecht (Satz 11. des vorigen Abschnittes). Also Winkel AOC ein rechter, somit findet der vorige Lehrsatz statt, woraus das Uebrige folgt.

B) Seien Kantenwinkel AOB (Fig. 270) und der gegenüberliegende Ebenenwinkel OC rechte. Zieht man in Ebene AOC auf OC ein Loth, so muss dies (Satz 11. des vorigen Abschnitts) auf Ebene BOC, also auf BO senkrecht stehen. Dies Loth fällt also mit AO zusammen, d. h. Winkel AOC ist ein Rechter, und der Fall wie oben.

VI. Lehrsätze.

Lehrsatz 6. „In jedem sphärischen Dreiecke ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte."

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 271) die zugehörige Ecke, und BAD der grösste Kantenwinkel. Ziehe AF so in Ebene BAD, dass Winkel $BAF = BAC$ ist.

Fig. 271.

Mache ferner $AF = AC$, nehme AB beliebig lang und ziehe BC, BF, welche AD in D schneidet und DC, so ist Dreieck $BAF \cong BAC$, also $BC = BF$. BD kleiner als $BC + CD$ und also: wenn man $BC = BF$ abzieht, FD kleiner als CD. Nun haben die Dreiecke CAD und FAD, zwei gleiche Seiten, es ist also der FD gegenüberliegende Winkel kleiner, und mithin Winkel FAD kleiner als CAD und hierzu Winkel $BAF = BAC$ addirend, erhält man: Winkel BAD kleiner als $BAC + CAD$. Was aber von dem grössten Winkel BAD gilt, ist umsomehr bei den andern Winkeln der Fall.

Lehrsatz 7. „Die Summe aller Seiten eines sphärischen Vielecks (der Kantenwinkel einer Ecke) ist kleiner als die Peripherie des grössten Kreises (als vier Rechte)."

Beweis. Man durchschneide die Ecke $OABCDE$ (Fig. 272) durch eine beliebige Ebene $ABCDE$, welche somit ein ebenes Vieleck von so viel Seiten als das

Fig. 272.

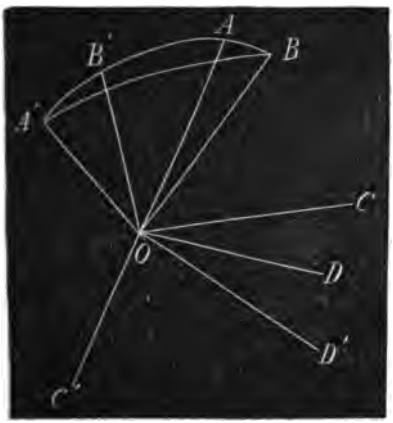
zugehörige sphärische abschneidet. Die Summe der Polygonwinkel eines n-Ecks beträgt $2n - 4$ Rechte. Die Schenkel jedes dieser Winkel EAB, bilden mit einer Kante OA unserer Ecke eine andere dreiseitige, es ist also EAB kleiner als $OAE + OAB$ nach dem vorigen Satze; somit beträgt die Summe derjenigen Winkel OAE, OAB, OBA, OBC u. s. w., welche die Kanten der Ecke bei O mit den angrenzenden Seiten des ebenen Vielecks machen, mehr als $2n-4$ Rechte. Je zwei dieser Winkel OAB und OBA geben aber mit einem Kantenwinkel AOB zusammen zwei Rechte, so dass für die Summe aller dieser Winkel und der Kantenwinkel bei O zusammen sich $2n$ Rechte ergeben. Da nun die ersteren Winkel mehr als $2n-4$ Rechte betrugen,

so werden die letztern, d. h. die Kantenwinkel selbst kleiner als 4 Rechte sein müssen, was zu beweisen war.

VII. Definitionen und Lehrsätze.

Definitionen. Wenn man durch den Schnittpunkt O einer Ecke $OABCD$ (Fig. 273) auf allen Ebenen derselben,

Fig. 273.



nach auswärts hin, Lothe errichtet, OA', OB', OC', OD', so bilden diese die Kanten einer andern Ecke, die also mit der ersteren gleichviel Kanten hat. Diese letztere wird **Supplementarecke** der ersteren genannt. Legt man durch die ursprüngliche und durch die Supplementarecke eine Kugelfläche, so bilden beide sphärische Vielecke von gleicher Seitenanzahl. Das der Supplementarecke nennt man **Polarvieleck** des ursprünglichen. Steht z. B. OA', auf Ebene OAB senkrecht, so sind die Winkel AOA' und $A'OB$ rechte. Die Entfernungen des Punktes A' von den Punkten A und B auf der Kugel sind also Quadranten. Man kann daher ein **Polarvieleck** eines gegebenen Vielecks auch als ein solches definiren, dessen Eckpunkte von je zweien des gegebenen um einen Viertelkreis entfernt sind.

Lehrsatz 8. „Ist $OA'B' \ldots$ die Supplementarecke von $OAB \ldots$, so ist auch $OAB \ldots$ die von $OA'B' \ldots$"

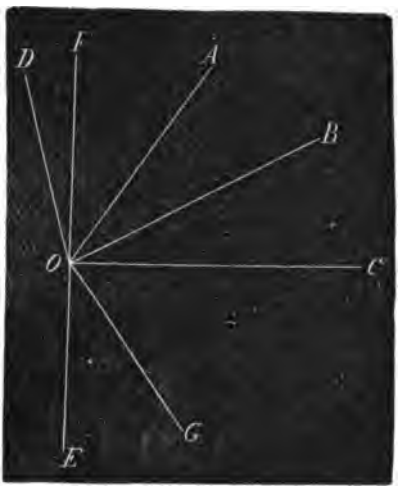
Beweis. Es ist lediglich zu beweisen, dass wenn OA', $OB' \ldots$ (Fig. 273) bezüglich auf den Ebenen OAB, $OBC \ldots$ senkrecht stehen, auch OA, OB bezüglich auf $OA'B'$, $OB'C'$ senkrecht stehen müssen. Stehe OA' auf OAB, OB' auf OBC senkrecht, so stehen beide Linien auf dem Durchschnitte OB senkrecht, mithin OB auf Ebene $OA'B'$, also jede Kante der ursprünglichen Ecke senkrecht auf einer Ebene der Supplementarecke, was zu beweisen war.

Scholion. Also die Bezeichnung Supplementarecke ist eine gegenseitige.

Lehrsatz 9. „Jeder Kantenwinkel der einen von zwei Supplementarecken ergänzt den entsprechenden Ebenenwinkel der andern zu zwei Rechten."

Beweis. Seien AOB, BOC (Fig. 274) zwei auf einander folgende Ebenen der

Fig. 274.



einen Ecke, OD senkrecht auf AOB, OE auf BOC entsprechende Kanten der Supplementarecke. Zieht man nun auf OB senkrecht OF in Ebene OAB, OG in Ebene BOC, so ist FOG der Neigungswinkel dieser Ebenen und DO auf FO, EO auf GO senkrecht. Die vier auf BO senkrechten Linien DO, EO, FO, GO liegen aber in einer Ebene, und da somit

$$DOE + DOF + FOG + GOE = 4\,\text{R}$$

ist, aber DOF und EOG Rechte sind, so ist

$$DOE + FOG = 2\,\text{R},$$

was zu beweisen war.

Zusatz. Wenn zwei Ecken entsprechend gleiche Kanten- und Ebenenwinkel haben, so findet dies somit auch bei den Supplementarecken statt.

Lehrsatz 10. „Die Ebenenwinkel einer n kantigen betragen zusammen mehr als $2n-4$ und weniger als $2n$ Rechte.

Beweis. Bei der Supplementarecke der gegebenen beträgt die Summe der

Digitized by Google

Kantenwinkel weniger als vier Rechte (Lehrsatz 7). Sind α, β, γ . . . diese Winkel, so sind die Ebenenwinkel der gegebenen Ecke: $2R-\alpha$, $2R-\beta$, $2R-\gamma$, also ihre Summe $2nR$ weniger einer Grösse, die keine vollen vier Rechte beträgt, so dass diese Summe der Ebenenwinkel jedenfalls kleiner als $2n$ Rechte aber grösser als $2n-4$ Rechte ist.

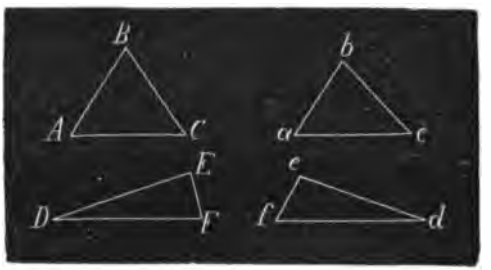
Zusatz. Für die dreikantige Ecke und fürs sphärische Dreieck ist $n=3$. Also: „Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks wird immer grösser als zwei und kleiner als sechs Rechte sein."

VIII. Definitionen.

Die folgenden Betrachtungen enthalten die Lehre von der Congruenz und Symmetrie der Raumgebilde.

Definitionen. Wie zwei Gebilde in der Ebene, so werden auch zwei Gebilde im Raume, die auf einander gelegt sich vollständig decken würden, congruent genannt. Es ist auch ohne weiteres klar, dass bei congruenten Raumgebilden, alle Flächen, welche sie begrenzen oder bilden, einzeln verglichen sich decken, dass alle Stücke d. h. Linien und Winkel (zwischen Linien und Ebenen) in derselben Reihenfolge gleich sind. Indessen lässt sich nicht wie in der Ebene auch im Raume diese Bedingung umkehren, d. h. man kann nicht sagen, dass wenn die Stücke in gleicher Reihenfolge gleich sind, die Raumgebilde auch congruent sein müssen. Schon bei Gebilden in der Ebene ergibt sich hier ein Unterschied. Bei den congruenten Dreiecken ABC und abc z. B. (Fig. 275)

Fig. 275.



wo $AB=ab$, $BC=bc$, $AC=ac$ sein soll, ist nicht allein die Reihenfolge der gleichen Linien und Winkel dieselbe, sondern auch die Anordnung; sie liegen so, dass in beiden Figuren von zwei entsprechenden Stücken AB und ac zu dem nächsten Winkel A und a, Seite AC und ac in demselben Sinne weiter gegangen wird. Bei den ebenfalls congruenten Dreiecken DEF und def, wo $DE=de$, $EF=ef$, $DF=df$, ist dies jedoch nicht der Fall, wenn auch die Reihenfolge, $DE=de$, Winkel $E=e$ u. s. w. dieselbe ist, so ist doch die Anordnung bei einem Dreiecke die umgekehrte, wie bei dem andern, d. h. wenn von Punkt D nach E in einem Sinne (hier von links nach rechts) vorgeschritten wird, so wird von d nach e im umgekehrten Sinne (von rechts nach links) vorgeschritten. Der Erfolg für die Deckung der Dreiecke ist der, dass das letztere Paar DEF und def nur zur Deckung gebracht werden kann, wenn man das eine mit seiner Ebene umwendet. Da eine Ebene, die umgekehrt wird, ihre ursprüngliche Lage deckt, so ist dies immer möglich. Bei Raumgebilden ist dies aber nicht der Fall. Dieselben decken sich nur, wenn alle Stücke in derselben Reihenfolge und Anordnung gleich sind. Ist die Anordnung bei einem Gebilde aber die umgekehrte von der des andern, so findet keine Deckung statt, — wir nennen die Gebilde dann symmetrisch*). Ueber Congruenz und Symmetrie ergeben sich sogleich folgende Wahrheiten:

A) „Wenn alle Stücke zweier Raumgebilde in gleicher Reihenfolge gleich sind, so sind sie entweder congruent oder symmetrisch."

B) „Wenn bei drei Gebilden alle Stücke in gleicher Reihenfolge gleich sind, so müssen zwei davon wenigstens congruent sein."

C) „Sind zwei Gebilde A und B einem dritten C symmetrisch, so sind A und B congruent."

*) Beispiele von symmetrischen Gebilden sind die beiden Hände, ein Körper und sein Spiegelbild, u. s. w.

IX. Lehrsätze.

Diese Lehrsätze betreffen die Congruenz und Symmetrie der körperlichen Ecken und sphärischen Dreiecke. Selbstverständlich sind aber die Sätze:

A) „Sind zwei sphärische Dreiecke congruent oder symmetrisch, so sind es auch die zugehörigen Ecken."

B) „Sind zwei sphärische Dreiecke congruent, so sind es auch ihre Polardreiecke."

Wir werden uns daher begnügen, die Sätze auf die sphärischen Dreiecke zu beziehen, um so mehr, da diese Sätze denen von der Congruenz der ebenen Dreiecke fast völlig analog sind.

Lehrsatz 11. „Zwei sphärische Dreiecke sind congruent oder symmetrisch, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des einen den entsprechenden Stücken des andern gleich sind."

Beweis. Offenbar ist das Dreieck ABC (Fig. 276) vollständig bestimmt, wenn Winkel B, Seite AB und BC gegeben sind, da dann die Punkte A und O,

Fig. 276.

also auch der zwischen ihnen liegende Bogen des grössten Kreises gegeben ist. Jedes Dreieck, wo diese Stücke denen des gegebenen bei gleicher Anordnung gleich sind, wird ihm also congruent sein. Sind aber Stücke ab, b und bc entsprechend denen des gegebenen Dreiecks gleich, aber die Anordnung die entgegengesetzte, so ist das zu abc symmetrische Dreieck mit ABC congruent, also abc und ABC symmetrisch.

Lehrsatz 12. „In gleichschenkligen sphärischen Dreiecken sind die Winkel an der Grundlinie gleich."

Beweis. Er wird ganz wie bei ebenen Dreiecken geführt. Sei $AC = BC$ (Fig. 277). Halbire Winkel C durch

Fig. 277.

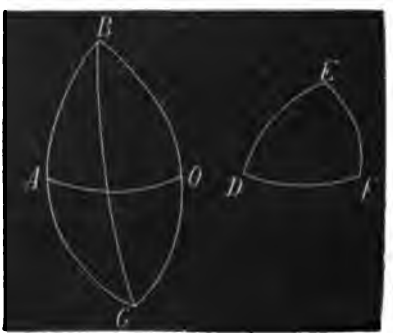
Bogen CD, so sind nach dem vorigen Satze, die Dreiecke ACD und BCD symmetrisch, also Winkel $A = B$.

Zusatz. Es folgt auch hieraus, dass $AD = DB$, und CD auf AB senkrecht ist, ganz wie bei ebenen Dreiecken.

Lehrsatz 13. „Wenn in zwei sphärischen Dreiecken die entsprechenden Seiten gleich sind, so sind sie congruent, wenn die Anordnung dieselbe, symmetrisch, wenn sie entgegengesetzt ist."

Beweis wird ebenfalls wie bei ebenen Dreiecken geführt. Sei $AB = DE$, $BO = EF$, $AO = DF$ (Fig. 278). Ist die Anordnung nicht dieselbe, so lege die

Fig. 278.



Dreiecke so aneinander, dass D in A, F in O, E in G, also nicht auf derselben Seite von AO mit B falle. Ist die Anordnung dieselbe, so nehme hierbei statt DEF das symmetrische Dreieck von DEF; zieht man BG, so sind ABG und OBG gleichschenklige Dreiecke, Winkel ABO also gleich AGO, und da die einschliessenden Seiten (in umge-

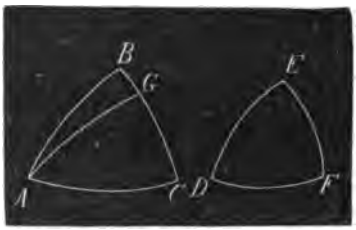
Digitized by Google

kehrter Anordnung gleich sind, Dreieck ABO symmetrisch AGO. Also ABO ist entweder DOF oder dem symmetrischen Dreiecke von DEF symmetrisch, im letzteren Falle werden ABO und DEF congruent sein.

Lehrsatz 14. „Wenn in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen entsprechend gleich sind, die Gegenwinkel der andern aber nicht zusammen zwei Rechte betragen, so sind die Dreiecke congruent oder symmetrisch."

Beweis. Sei $AB = DE$, $AC = DF$ (Fig. 279), Winkel $C = F$, Winkel $A + D$

Fig. 279.



ungleich zwei Rechten, (dies ist also der Fall wenn beide spitz oder beide stumpf sind). Ist die Anordnung dieselbe, so legt man die Dreiecke so aufeinander, dass die Winkel F und C zusammenfallen, ist die Anordnung bei beiden entgegengesetzt, so nimmt man statt DEF das diesem symmetrische Dreieck. Setzen wir das erste voraus, so fällt dann D auf A, und E in die Richtung von BC. Fällt es nicht in B sondern in G, so ist Dreieck ABG gleichschenklig, Winkel $ABG = AGB$, d. h. $ABG + AGC = 2R$, oder, da Winkel $AGC = E$, $B + E = 2R$. Ist dies nicht der Fall, so müssen also B und G zusammenfallen.

Die übrigen Sätze von der Congruenz ergeben sich leicht aus folgender Betrachtung. Seien P und Q zwei Dreiecke, P' und Q' ihre Polardreiecke. Sind letztere congruent, so sind es auch die ersteren. Die letzteren aber sind congruent z. B. wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind, und da die Seiten des Polardreiecks die Winkel des gegebenen zu zwei Rechten ergänzen und umgekehrt, so sieht man, dass in diesem Falle zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite in den ursprünglichen Dreiecken gleich sind. Also:

Lehrsatz 15. „Zwei sphärische Dreiecke sind congruent oder symmetrisch, wenn entsprechend zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite gleich sind. Ebenso so ergibt sich aus Lehrsatz 13. und 14.

Lehrsatz 16. „Zwei sphärische Dreiecke sind congruent oder symmetrisch, wenn entsprechend die drei Winkel gleich sind."

Lehrsatz 17. „Zwei sphärische Dreiecke sind congruent oder symmetrisch, wenn entsprechend zwei Winkel und die Gegenseite des einen gleich sind, die Gegenseiten des andern sich aber nicht zum Halbkreise ergänzen."

Anmerkung. Man bemerke, dass es bei der Congruenz der sphärischen Dreiecke einen Satz mehr wie bei den ebenen, nämlich den Lehrsatz 16. gibt, dass also hierbei immer mit der in Satz 14. und 17. enthaltenen Beschränkung aus der Gleichheit dreier entsprechenden Stücke die Congruenz oder Symmetrie der Dreiecke folgt. Bei den ebenen Dreiecken ist nämlich die Gleichheit dreier Winkel darum keine ausreichende Bedingung weil ein Winkel von den beiden andern zu zwei Rechten ergänzt wird, also durch dieselben gegeben ist, somit die drei Winkel nur zwei Stücke repräsentiren. Bei sphärischen Dreiecken aber, wo die Summe der Winkel zwischen 2 und 6 Rechte betragen kann (Lehrsatz 10. Zusatz) ist dies nicht der Fall. Der Satz in der ebenen Geometrie, dass zwei Seiten und der Gegenwinkel der Grösseren zur Bestimmung des Dreiecks völlig ausreichen, findet dagegen in der sphärischen Geometrie kein Analogon. Bemerken wir noch, dass auch die Aehnlichkeit der ebenen Dreiecke nichts Entsprechendes in Bezug auf die Dreiecke, welche auf einer Kugelfläche liegen, findet.

IX. Aufgaben.

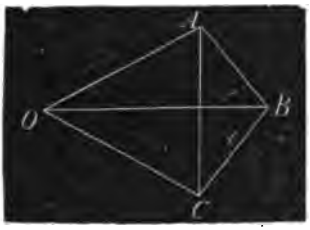
Diese Aufgaben bezwecken aus drei gegebenen Stücken einer körperlichen Ecke (sphärischen Dreiecks) die übrigen durch Construction in der Ebene zu finden. Es reichen nach den eben gegebenen Sätzen diese Stücke mit der in Satz 14. und 17. gegebenen Beschränkung nämlich immer zur Construction des Dreiecks hin.

Aufgabe 1. „In einer dreikantigen Ecke sind die Kantenwinkel gegeben. Die Ebenenwinkel zu finden."

Vorbereitung. Sei $OABC$ (Fig. 281) die Ecke und der zu bestimmende Kantenwinkel OA. Legt man durch den beliebigen Punkt A von OA, AB in Ebene OAB, AC in Ebene OAC senkrecht, so ist BAC der Kantenwinkel; da

Digitized by Google

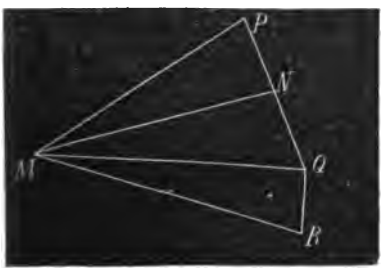
Fig. 280.



aber die Winkel AOB und AOC bekannt sind, so sind auch die Längen AB, AC, OB, OC bekannt, also wenn man BC zieht, die drei Seiten des Dreiecks ABC und somit Winkel $BAC = OA$. Also:

Auflösung. Lege in der Ebene die Winkel $NMP = AOC$, $NMQ = AOB$, $QMR = BOC$ (Fig. 281) nebeneinander.

Fig. 281.



Nehme N beliebig auf MN und ziehe Linie PQ senkrecht auf MN bis zu MP und MQ, mache $MR = MP$ und ziehe RQ. Bilde ein Dreieck, das PN, NQ, QR zu Seiten hat, der QR gegenüberliegende Winkel ist dann der Ebenenwinkel OA.

Aufgabe 2. „In einer dreikantigen Ecke sind zwei Kantenwinkel und der eingeschlossene Ebenenwinkel gegeben. Die übrigen Stücke zu finden."

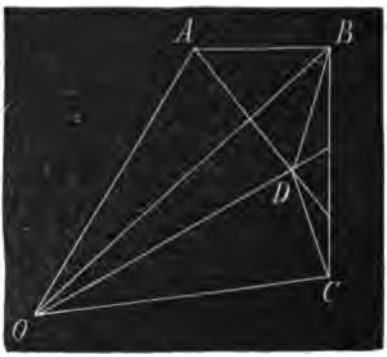
Vorbereitung. Es handelt sich eben nur um den dritten Kantenwinkel, da dann die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt ist. Seien BOA, COA, OA (Fig. 280) die gegebenen Stücke. Nimmt man wieder A beliebig auf OA, und zieht AB und AC senkrecht auf OA in den Ebenen OAB und OAC, so ist Winkel $CAB = OA$, CA und AB gegeben, ebenso OB und OC. In Dreieck CAB sind nun zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel also auch die dritte Seite BC bekannt; in Dreieck BOC sind somit alle drei Seiten, also auch der Winkel BOC bekannt. Dies ist aber der gesuchte Kantenwinkel. Also:

Auflösung. Mache (Fig. 281) Winkel $NMP = AOC$, $NMQ = AOB$, ziehe PQ senkrecht auf MN. Construire ein Dreieck, das PN, NQ zu Seiten und zum eingeschlossenen Winkel den gegebenen Ebenenwinkel AO hat. Construire ferner ein Dreieck, dessen Seiten MQ, $MR = MP$ und QR gleich der dritten Seite des eben gewonnenen Dreiecks sind. Der Gegenwinkel von QR, QMR ist dann der gesuchte Kantenwinkel.

Aufgabe 3. „In einer dreikantigen Ecke sind gegeben zwei Kantenwinkel und der dem einen gegenüberliegende Ebenenwinkel. Die übrigen Stücke zu finden."

Vorbereitung. Seien gegeben die Kantenwinkel BOA, BOC (Fig. 282) und der Ebenenwinkel OA. Zieht man BD

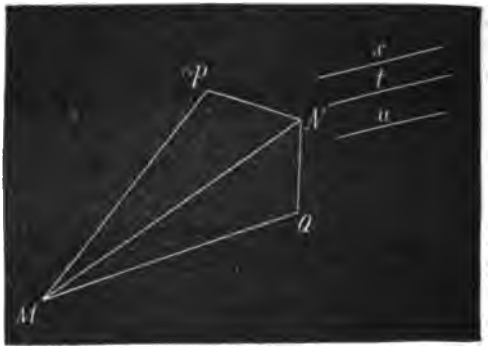
Fig. 282.



senkrecht auf Ebene OAC, BA und BC senkrecht bezüglich auf OA und OC, so stehen auch DA und DC bezüglich auf OA und OC senkrecht, (da z. B. OA auf BD und BA also auf Ebene BDA mithin auf DA senkrecht stehen). Winkel BAD ist also dem gegebenen Ebenenwinkel OA, Winkel BCD dem gesuchten OC gleich. Nun ist in Dreieck BAD bekannt BA und Winkel BAD, folglich auch BD und AD. In Dreieck BCD sind jetzt bekannt BD und BC, folglich auch Winkel $BCD = OC$ und CD. Somit kann der zweite Ebenenwinkel bestimmt werden. In Viereck $BODC$ sind nun alle vier Seiten bekannt, die Winkel bei A und C aber sind Rechte, aus diesen Bestimmungen ist das Viereck leicht zu construiren. Also:

Auflösung. Mache (Fig. 283) Winkel $PMN = AOB$, $QMN = BOC$, fälle von N aus Loth NP auf MP und NQ auf MQ. Bilde ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse NP und wovon ein schiefer Winkel gleich OA ist. Wir bezeichnen mit s die diesem Winkel gegenüberlie-

Fig. 283.



gende, mit t die anliegende Kathete. Bilde ein rechtwinkliges Dreieck, das NQ zur Hypotenuse und s zu einer Kathete hat. Der gegenüberliegende Winkel ist dann der gesuchte Kantenwinkel OC. Sei u die andere Kathete. Bilde dann ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich MP und t sind (Fig. 284), über der Hypotenuse MR desselben ein zweites rechtwinkliges Dreieck, das auch MR zur Hypotenuse, und zu der durch R gehenden Kathete die Linie u hat. Ist MSR dieses Dreieck, so ist PMS der

Fig. 284.

dritte Kantenwinkel unserer Ecke. Der dritte Ebenenwinkel wird wie oben gefunden.

Determination. Es ergeben sich übrigens durch diese Construction zwei Lösungen. Wie leicht zu sehen, kann man nämlich statt des Winkels OC auch seinen Nebenwinkel nehmen.

Die drei noch übrigen Aufgaben:

Aufgabe 4. „Eine dreikantige Ecke aus den drei gegebenen Ebenenwinkeln zu finden."

Aufgabe 5. „Aus zwei Ebenenwinkeln und dem dazwischen liegenden Kantenwinkel."

Aufgabe 6. „Aus zwei Ebenenwinkeln, und dem, dem einen gegenüberliegenden Kantenwinkeln zu finden."

erledigen sich leicht auf folgende Weise:

Die Nebenwinkel der gegebenen Stücke sind Bestimmungsstücke der Supplementarecke, aus denen sich mittels einer der drei ersten Aufgaben die übrigen Stücke der Supplementarecke ergeben, und die Nebenwinkel von diesen sind dann die gesuchten Stücke der ursprünglichen Ecke.

14) Von den Polyedern.

I. Definitionen.

Ein völlig von Ebenen begrenzter Körper wird Polyeder genannt. Da sich Ebenen immer in graden Linien schneiden, so ist jedes Polyeder von Vielecken begrenzt. Die Seiten dieser Vielecke, deren jede immer zu zweien Vielecken gehören, werden Kanten genannt. Eine Anzahl von wenigstens drei Kanten muss immer in einer Ecke zusammenstossen, und es ist auch klar, dass jede Kante zu zwei Ecken gehört. Die Polyder werden nach der Anzahl der Grenzflächen bezeichnet, also Tetraeder, Hexaeder, Octaeder u. s. w., Vierflächner, Sechsflächner, Achtflächner u. s. w. Ausserdem unterscheidet man namentlich noch:

Die Pyramiden, welche entstehen, wenn man eine beliebige Ecke durch irgend eine Ebene durchschneidet. Dieselbe schneidet die Ecke in einem Vielecke von so viel Seiten, als erstere Kanten hat, und je zwei dieser Kanten bilden mit einer Vieleckseite ein Dreieck. Eine Pyramide ist also von einem Vieleck und soviel Dreiecken, als dies Seiten hat, und welche gemeinschaftliche Spitze haben, begrenzt.

Digitized by Google

Man theilt nach der Gestalt des Vielecks die Pyramiden somit in dreiseitige, vierseitige u. s. w.

Die Prismen entstehen, wenn zwischen je zwei auf einander folgenden von einer Anzahl paralleler Linien eine Ebene gelegt, alle diese Ebenen aber durch zwei parallele Ebenen durchschnitten werden. Diese beiden letztern bilden, wie sogleich zu sehen, congruente Vielecke, und zwischen ihnen befinden sich als Grenzflächen soviel Parallelogramme, als die Vielecke Seiten haben. Je nach der Gestalt der Vielecke, theilt man auch die Prismen in dreiseitige, vierseitige u.s.w.

II. Aufgabe und Lehrsätze.

Beziehungen zwischen der Anzahl und Beschaffenheit der Ecken, Flächen und Kanten eines Polyeder zu finden.

Auflösung. Wir bezeichnen mit f die Anzahl der Flächen, mit e die der Ecken, mit k die der Kanten eines Polyeder.

Nehmen wir ferner an, dass unter den f Flächen, A Dreiecke, B Vierecke, C Fünfecke, D Sechsecke u. s. w., sowie unter den e Ecken α dreikantige, β vierkantige, γ fünfkantige, δ sechskantige u. s. w. seien, so würde sein:

1) $f = A + B + C + D + \ldots$

2) $e = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots$

Da in den A Dreiecken, den B Vierecken u. s. w. sich bezüglich $3A$, $4B$, $5C$ Kanten befinden, jede Kante aber zu zwei Flächen gehört, so hat man ferner:

3) $2k = 3A + 4B + 5C + 6D + \ldots$

und da Aehnliches auch für die Beziehung der Kanten zu den Ecken gilt:

4) $2k = 3\alpha + 4\beta + 5\gamma + 6\delta + \ldots$

5) $2k - 2f = A + 2B + 3C + 4D + \ldots$

6) $2k - 2e = \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \ldots$

Es folgt hieraus, dass die Ausdrücke:

$A + 3C + 5E + \ldots$ und $\alpha + 3\gamma + 5\varepsilon + \ldots$

immer grade Zahlen sein müssen, oder wenn man die jedenfalls graden Zahlen

$2C + 4E + \ldots$, $2\gamma + 4\ldots$

bezüglich abzieht, dass auch:

$A + C + E + \ldots$, $\alpha + \gamma + \varepsilon + \ldots$

grade sind. D. h.

Lehrsatz 1. „In jedem Polyeder ist die Anzahl derjenigen Flächen, welche eine ungrade Seitenzahl, und derjenigen Ecken, welche eine ungrade Kantenzahl haben, immer eine grade."

Ausser den Relationen 1 — 4 ist aber noch folgende von grosser Wichtigkeit.

Denken wir uns zunächst eine Anzahl von Vielecken, welche, ohne einen Raum völlig zu begrenzen, nach allen Richtungen ohne Unterbrechung mit einander zusammenhängen, mithin eine gebrochene Fläche bilden. Man wird dann von einer Peripherie dieser gebrochenen Fläche sprechen können und darunter diejenigen Kanten verstehen, die nur nach einer Richtung hin Vielecke begrenzen. Nimmt man von dieser gebrochenen Fläche von der Peripherie aus ein Vieleck weg, so wird eine ähnliche gebrochene Fläche entstehen, in der die Anzahl f der Grenzflächen um 1 kleiner ist. Da hierbei auch eine Anzahl Kanten und die zwischen je zweien liegenden Ecken verschwinden, die beiden äussersten zu den weggenommenen Kanten gehörigen Ecken aber bleiben, so ist die Anzahl der verschwindenden Kanten um Eins grösser als die der verschwindenden Ecken, und bei der neuentstandenen Fläche also der Ausdruck: $f + e - k$ der nämliche wie bei der alten. Indem man nun so fortfährt, immer eine Fläche von der Peripherie aus wegzunehmen, gelangt man schliesslich, ohne dass sich $f + e - k$ ändert, bis auf ein Vieleck. Da bei einem solchen nun die Anzahl der Ecken der der Kanten gleich, die der Flächen aber gleich Eins ist, so ist bei diesem Vieleck, und folglich bei allen gebrochenen Flächen, welche die oben gegebene Bedingung erfüllen:

$$f + e - k = 1.$$

Eine solche Fläche entsteht nun unter andern dann, wenn man von einem beliebigen Polyeder eine Grenzfläche wegnimmt. Da nun hierbei die Anzahl der Ecken und Kanten dieselbe bleibt, die der Flächen sich aber um Eins vermindert, so ist bei dem Polyeder

7) $f + e - k = 2.$

Dies gibt den wichtigen Satz:

Lehrsatz 2. „In jedem Polyeder ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen um zwei grösser als die der Kanten."

Aus der Formel 7) in Verbindung mit 6) ergibt sich noch:

8) $2f = 4 + \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta + \ldots$

und aus 7) und 5):

9) $2e = 4 + A + 2B + 3C + 4D + \ldots$

Scholion. Der Lehrsatz heisst nach seinem Erfinder der Eulersche, der hier gegebene Beweis rührt von Cauchy her. Es ergibt sich aber auch eine Beziehung für die Kantenwinkel. Ist

Digitized by Google

nämlich n die Anzahl der Seiten von einer Fläche, so ist die Anzahl der zugehörigen Polygon- oder Kantenwinkel $2n-4$ Rechte, und somit, da A die Anzahl der Flächen ist, wo $n=3$, B die, wo $n=4$ ist, u. s. w. so hat man für die Summe aller Kantenwinkel:

$2(3A+4B+5C+\ldots)-4(A+B+C)$

Rechte, d. h. wegen Formel 1) und 3) $(4k-4f)$ Rechte, oder wegen Formel 7): $4(e-2)$ Rechte. Also:

Lehrsatz 3. „In jedem Polyeder beträgt die Summe aller Kantenwinkel viermal soviel Rechte als die um zwei verminderte Anzahl der Ecken beträgt."

II. Definition und Lehrsätze.

Definition. Regelmässiges Polyeder heisst ein solches, worin alle Flächen congruent, alle Kanten, Ecken, Kantenwinkel und Ebenenwinkel untereinander gleich sind.

Es folgt aus dem Umstande, dass alle Kanten und Kantenwinkel gleich sind, dass die Grenzflächen regelmässige Vielecke sind.

Wenn zwischen den regelmässigen Vielecken und Polyedern sonach eine gewisse Analogie stattfindet, so erstreckt dieselbe sich nicht so weit, dass es wie regelmässige Vielecke von beliebiger Seitenanzahl, auch regelmässige Polyeder von beliebiger Flächenanzahl gebe. Vielmehr gilt der folgende

Lehrsatz 4. „Es kann nicht mehr als fünf regelmässige Polyeder geben."

Beweis. Da die Ecken des Polyeder wenigstens drei Kanten haben müssen, so werden in einer solchen wenigstens drei regelmässige Vielecke zusammenstossen. Nehmen wir an diese Vielecke seien Dreiecke so wird jeder Kantenwinkel dem Winkel eines gleichseitigen Dreiecks gleich sein, also 60 Grad betragen. Wären die Ecken sechskantige, so betrüge die Summe der Kantenwinkel derselben $360° = 4\,R$, was dem Satze 7. des vorigen Abschnittes widerstreitet. Es können also, wenn die Flächen Dreiecke sind, nur drei, vier oder fünfkantige Ecken stattfinden.

Seien die Flächen Vierecke, also der Polygon- oder Kantenwinkel 90° so sind schon vierkantige Ecken unmöglich, da $4 \cdot 90 = 4\,R$ ist.

Bei regelmässigen Fünfecken, wo der Polygonwinkel 180° beträgt, wäre zwar $3 \cdot 108 = 324$ kleiner, dagegen $4 \cdot 108$ schon grösser als 4 R, also vierkantige Ecken unmöglich.

Bei Sechsecken, deren Polygonwinkel $\frac{4}{3}\,R = 120°$ beträgt, wäre schon

$$3 \cdot 120 = 360,$$

also sind selbst dreikantige Ecken unmöglich, um so mehr ist dies bei Siebenecken u. s. w. der Fall.

Bei den regelmässigen Polyedern können also nur folgende Flächen und Ecken vorkommen:

1) Die Flächen sind Dreiecke, die Ecken dreikantig,
2) die Flächen sind Dreiecke, die Ecken vierkantig,
3) die Flächen sind Dreiecke, die Ecken fünfkantig,
4) die Flächen sind Vierecke, die Ecken dreikantig,
5) Die Flächen sind Fünfecke, die Ecken dreikantig.

Scholion. Es ist nun leicht, mittels der in I. gegebenen Formeln, die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten zu ermitteln, für jeden der Fälle, wenn man dies wirkliche Vorhandensein des entsprechenden Polyeders zunächst noch fraglich lässt.

In Fall 1), 2) und 3), ist nämlich:

$$B = C = D = \ldots = 0, \quad A = f,$$

also nach Formel 3):

$$2k = 3f.$$

In Fall 1) ist:

$$\beta = \gamma = \delta \ldots = o, \quad \alpha = e,$$

also nach Formel 4): $2k = 3e$.

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit $f+e-k=2$ geben:

$$k = 6,$$

also $$f = 4, \quad e = 4.$$

Im Fall 2) ist:

$$\alpha = \gamma = \delta \ldots = 0, \quad \beta = e,$$

also die Formeln 3), 4) und 7) geben:

$$2k = 3f, \quad k = 2e,$$

$$\frac{2}{3}k + \frac{k}{2} - k = 2,$$

d. h.: $$k = 12, \quad f = 8, \quad e = 6.$$

In Fall 3) wo:

$$\alpha = \beta = \delta \ldots = 0, \quad \gamma = e$$

ist, hat man:

$$2k = 3f, \quad 2k = 5e,$$

$$\frac{2}{3}k + \frac{2}{5}k - k = 2,$$

d. h. $$k = 30, \quad f = 20, \quad e = 12.$$

Digitized by Google

Im Fall 4) ist:

$$A = C = D = 0, \quad B = f,$$

also nach Formel 3): $k = 2f$.

Im Falle 5):

$$A = B = D = 0, \quad C = f,$$

also: $2k = 5f$.

Zu dieser Formel kommt in beiden Fällen ganz wie im Falle 1): $2k = 3e$.

Man hat also in Fall 4) die Gleichungen:

$$k = 2f, \; 2k = 3e, \; \frac{k}{2} + \frac{2}{3}k - k = 2,$$

d. h.: $k = 12, \; f = 6, \; e = 8$

und im Falle 5:

$$2k = 5f, \; 2k = 3e, \; \frac{2}{5}k + \frac{2}{3}k - k = 2,$$

also: $k = 30, \; f = 12, \; e = 20$

Die fünf regelmässigen Polyeder haben also folgende Beschaffenheit:

1) 4 Dreiecke, 4 dreikantige Ecken und 6 Kanten:
Der Körper ist ein Tetraeder.

2) 8 Dreiecke, 6 vierkantige Ecken und 12 Kanten:
Der Körper ist ein Octaeder.

3) 20 Dreiecke, 12 fünfkantige Ecken und 30 Kanten:
Der Körper ist ein Ikosaeder.

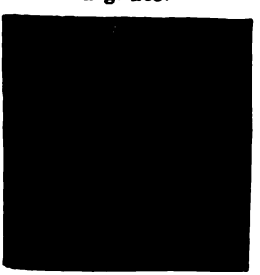
4) 6 Vierecke, 8 dreikantige Ecken und 12 Kanten:
Der Körper ist ein Hexaeder (auch Cubus oder Würfel).

5) 12 Fünfecke, 20 dreikantige Ecken und 30 Kanten:
Der Körper ist ein Dodekaeder.

Lehrsatz 5. „Die regelmässigen Polyeder von der eben angezeigten Beschaffenheit sind in der That vorhanden."

Beweis. A) Das Tetraeder. Man kann aus den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks *ABC* (Fig. 285) mit der Seite desselben als Radien drei Kugelflächen schlagen, deren Schnittpunkt *D*, mit *A*, *B*, *C* verbunden, offenbar noch 3 gleichseitige Dreiecke giebt, deren Seiten alle gleich sind. *A*, *B*, *C*, *D* sind dann dreikantige und congruente Ecken, in welchen, da alle Kantenwinkel gleich sind, dies auch mit den Ebenenwinkeln stattfindet, (da gleichen Kantenwinkeln gleiche Ebenenwinkeln gegenüberliegen).

Fig. 285.



B) Das Octaeder. Aus dem Mittelpunkte *O* eines Quadrates *ABCD* (Fig. 286) wird ein Loth *OE* auf der Ebene

Fig. 286.

desselben errichtet, von *A* aus mit Halbmesser *AB* in Ebene *ADE* ein Kreis geschlagen, der *OE* in *E* schneidet, und *AE*, *BE*, *CE*, *DE* gezogen. Diese Linien sind alle unter sich gleich; zieht man nämlich Loth *EG* auf *AB* und verbindet *OG*, so sind die Dreiecke *AGO* und *BGO* wie leicht zu sehen, congruent,

($OA = OB$, $OG = OG$.
Winkel $OGA = OGB = R$),

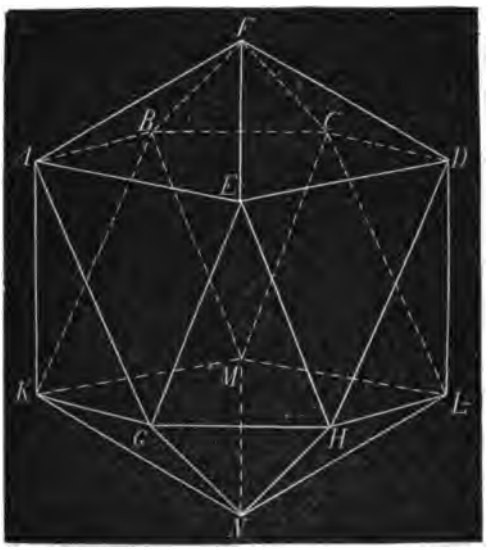
also auch Dreieck $AEG \cong BEG$ und $AE = BE$; Gleiches gilt von den andern Seiten.

Da die dreiseitigen Ecken bei *ABCD* sonach congruent sind, werden alle vier Ebenenwinkel bei *AE*, *BE*, *CE*, *DE* gleich sein. Bei *E* entsteht eine vierkantige Ecke, deren Ebenenwinkel die eben genannten, und deren Kantenwinkel den Winkeln *EAB*, *EBA* u. s. w. gleich sind. Errichtet man also auf der andern Seite von *ABCD* eine *ABCD* gleiche Flächenverbindung *ABCDF*, so hat man 6 vierkantige congruente Ecken, in denen 8 gleichseitige Dreiecke zusammentreffen.

Digitized by Google

C) Das Icosaeder. Ganz ähnlich wie bei dem vorigen Polyeder, zeigen wir, dass sich über dem regelmässigen Fünfecke *ABCDE* (Fig. 287) eine fünfkantige Ecke *FABCDE* errichten lasse, so dass die Kanten *FA*, *FB* u. s. w. den Seiten des Fünfecks, die Ebenenwinkel *AF*, *BF*, *CF*, *DF*, *EF* aber unter sich gleich

Fig. 287.

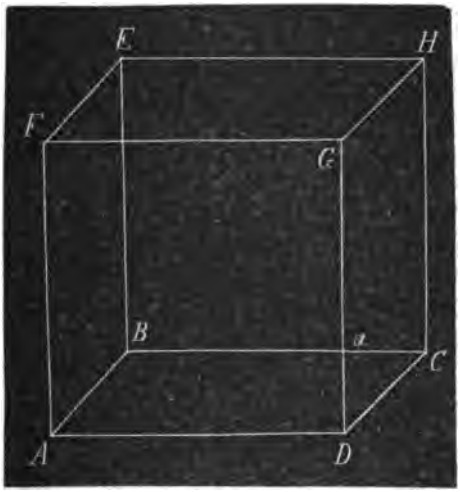


sind. Da die zwei Ebenen die sich in *E* schneiden so gegen einander geneigt sind, wie zwei Ebenen der Ecke bei *F*, so kann man bei *E* noch 3 regelmässige Dreiecke *EGA*, *EGH*, *EGD* derart hinzufügen, dass eine *F* congruente Ecke entsteht, wodurch auch bei *D* und *A* noch, wie *AEF* und *BEF*, gegen einander und gegen eine von diesen letzteren Ebenen geneigten Dreiecke entstehen. Indem man noch Linien *BK* und *CL* zieht und über *BC* ein gleichseitiges, ebenso gegen *FBC* geneigtes Dreieck wie die andern Dreiecke gegen einander errichtet, und *KE*, *LE* zieht, so ist leicht zu sehen, dass ein Ring von 10 Dreiecken um die Grundfläche der Pyramide *ABCDEF* errichtet ist, so dass bei *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* congruente fünfkantige Ecken entstehen. Auch zeigt sich, dass dieser Ring sich selbst in den zwei verschiedenen Lagen, wo *ABCDE* und *KMLHG* auf einander gelegt werden, decken muss. (Es sind in beiden Lagen die zusammenfallenden Kanten und Ecken gleich.) Daraus folgt, dass *KMLHG* ein ebenes Fünfeck ist, über welches eine *ABCDEF* congruente Pyramide errichtet werden kann, so dass man 12 fünfkantige congruente Ecken hat, wozu 20 regelmässige Dreiecke gehören.

D) Das Hexaeder. Es ist sogleich zu sehen, dass über einem Quadrate *ABCD* (Fig. 288), rechtwinklig auf der Ebene desselben vier andere errichtet werden können, welche ein Prisma bilden, wo die *ABCD* parallele Ebene durch je eine Seite *EF*, *FG*, *GH*, *HE* dieser vier Quadrate gebildet wird. Es ist der durch dieselben gebildete Ring nämlich in umgekehrter Lage sich selbst congruent, und daher *EFGH* ein Quadrat. Man hat also sechs Quadrate, welche 8 dreikantige Ecken mit rechten Kanten- und Ebenenwinkeln bilden.

E) Das Dodecaeder. In einer Ecke *A* (Fig. 289) des regulären Fünfecks *ABCDE* werden an die Kanten *AB* und *AE* zwei congruente Fünfecke gelegt, und so auch die andern Kanten und Ecken besetzt, so dass *A*, *B*, *C*, *D*, *E* dreikantige Ecken werden, deren Kantenwinkel und folglich auch Ebenenwinkel unter einander gleich sind; man sieht dann, dass z. B. in *P* zwei Fünfecke zusammentreffen, die so gegen einander geneigt sind, wie zwei der in *A* zusammenstossenden, während die Kantenwinkel *APG* und *APH* gleich den Kantenwinkeln bei *A* sind. Es ist also die Ecke *P* der Ecke *A* congruent und da Aehnliches für die Ecken *Q*, *R* u. s. w. gilt,

Fig. 288.



so lässt sich leicht zeigen, dass wenn man an diese Punkte noch 5 Fünfecke so legen kann, dass ein der Verbindung der über *ABCDE* errichteter congruenter Ring entsteht, wobei die Ecken bei *G*, *H* u. s. w, denen bei *A*, *B* congruent sind, Dieser Ring schliesst auf der anderen Seite also auch in einem *ABCDE* congruenten Fünfeck ab, und mit diesem hat man 12 Fünfecke und 20 dreikantige congruente Ecken.

15) Ausmessung der Polyeder.

I. Definitionen.

Wir haben oben schon die Definitionen der Prismen und Pyramiden gegeben. Prismen waren demnach von einer Anzahl Parallellogramme und zwei parallelen und congruenten Vielecken begrenzt. Die letzteren nennen wir Grundflächen, die Parallelogramme Seitenflächen, die nicht in den Grundflächen liegenden Kanten Seiten, eine senkrechte Grade von einer Grundfläche zur andern heisst Höhe. Stehen die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht, so heisst das Prisma ein grades; sind die Grundflächen ebenfalls Parallelogramme, so heisst der Körper Parallele-

Fig. 289.

Digitized by Google

pipedon; sind alle Grenzflächen Rechtecke, so ist das Parallelepipedon ein rechtwinkliges. Eine Pyramide wird begrenzt von einer Anzahl Dreiecke, von denen je zwei Seiten eine Ecke bilden, und einem Vieleck. Die Dreieckseiten, welche die Ecke bilden, treffen in einem Punkte zusammen, der die Spitze der Pyramide heisst, die Kanten dieser Ecke heissen Seiten der Pyramide, das Vieleck, welches sie durchschneidet Grundfläche. Legt man durch eine Pyramide eine der Grundfläche parallele Ebene, welche also wie leicht zu sehen, ein der Grundfläche ähnliches Vieleck abschneidet, so heisst das zwischen beiden Vielecken liegende Pyramidenstück abgestumpfte Pyramide. Eine Senkrechte, welche von der Spitze auf die Grundfläche gefällt wird, heisst Höhe der Pyramide. Höhe der abgestumpften Pyramide heisst die Senkrechte zwischen beiden Grundflächen.

II. Definition und Lehrsatz.

Definition. Zwei Körper haben gleichen körperlichen Inhalt, wenn sie sich in congruente Stücke zerlegen lassen. Wenn man von einem Punkte innerhalb eines völlig geschlossenen Körpers nach allen Ecken desselben Linien zieht, so wird derselbe eine Pyramide, und eine Pyramide von beliebig viel Seiten lässt sich in eine Anzahl dreiseitiger Pyramiden verwandeln, wenn man die Grundfläche in Dreiecke theilt, und von der Spitze der Pyramide nach allen Winkelspitzen derselben Linien zieht. Es lassen sich also schliesslich alle Körper von gleichem Inhalt in congruente dreiseitige Pyramiden zerlegen. Ist jedoch der Körper zum Theil oder ganz von krummen Flächen begrenzt, so werden die Grundflächen dieser Pyramiden unendlich klein, und es ist daher in diesem Falle die Definition des gleichen Inhalts zweier Körper so zu verstehen, dass von den Körpern sich Pyramiden abtheilen lassen, deren Inhaltssumme mit wachsender Anzahl derselben sich auf jede Grenze dem Inhalt der Körper nähert, während die Pyramiden, in die der eine Körper zerfällt, denen, worin der andere zerfällt, entsprechend congruent werden.

Der folgende Satz, der das genaue Analogon eines Satzes in der ebenen Geometrie bildet, liegt den Untersuchungen über Flächengleichheit und über Ausmessung der Körper zu Grunde.

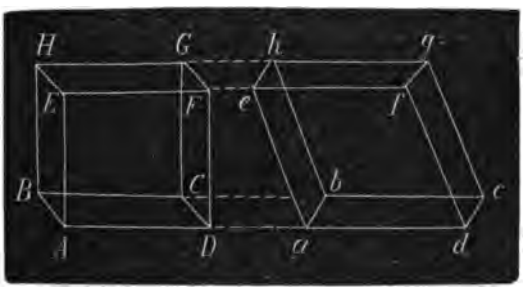
Lehrsatz 1. „Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen körperlichen Inhalt."

Um diesen Satz zu beweisen, ist jedoch von einem speciellen Falle auszugehen:

A) „Parallelepipeda mit congruenter Grundfläche und gleicher Höhe, welche so gelegt werden können, dass je zwei parallele Seitenflächen in dieselbe Ebene fallen, haben gleichen Inhalt."

Beweis. Seien *ABCD*, *abcd* congruente Grundflächen (Fig. 290). Da

Fig. 290.



die Höhen gleich sind, fallen die andern Grundflächen *EFGH*, *efgh* offenbar in eine Ebene; selbstverständlich sind sie untereinander und den andern Grundflächen congruent.

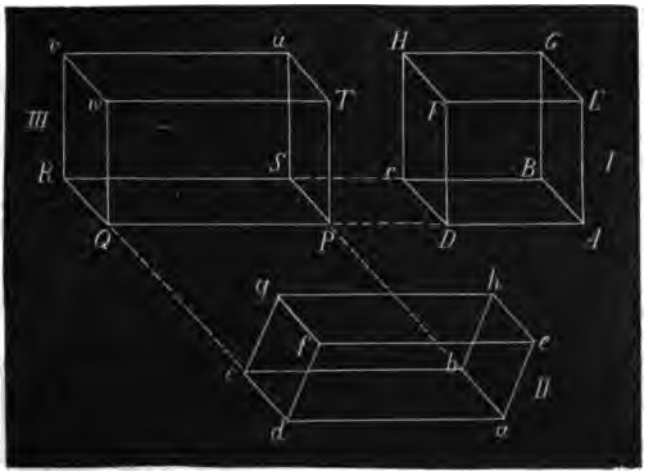
Die Parallelepipeda sind ferner so gelegt, dass die Seitenflächen *ADEF* und *adef* in eine, *BCGH* und *bcgh* in eine andere (der ersteren parallele) Ebene fallen. Untersuchen wir jetzt die Körper *AaeEhHBb* und *DdfFgGCc*, so sind in denselben je zwei Seiten entsprechend gleich, nämlich z. B. $AE = DF$, *Aa*, *Dd* u. s. w. wie leicht zu sehen, auch sind diese Seiten parallel, und daher alle von ihnen gebildeten Ecken (die sämmtlich dreikantig sind) z. B. *A* und *a* entsprechend congruent wegen Gleichheit der Kantenwinkel; es sind somit die eben benannten Körper selbst congruent. Zieht man sie nun nach einander von dem ganzen Körper *AdfEHgcB* ab, so bleiben

als Reste unsere Parallelepipeda. Dieselben sind also in der That gleich an Inhalt. Wir heben jetzt die dritte Bedingung des Satzes *A* auf.

B) „Parallelepipeda von congruenter Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt."

Beweis. Mögen I) *ABCDEFGH* und II) *abcdefgh* (Fig. 291) die angegebenen Eigenschaften haben, so zeigt die Figur,

Fig. 291.

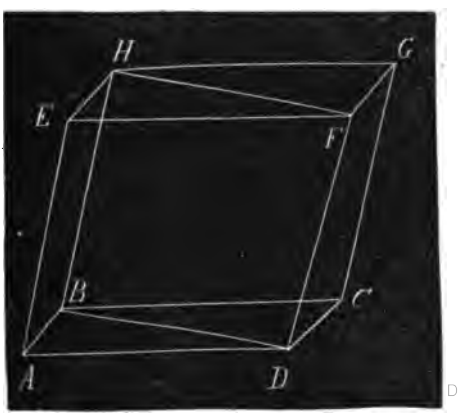


wie sich immer, wenn man *ABCD* und *abcd* in eine Ebene legt ein drittes Parallelepipedon III) *PQRSTwvw* finden lässt, welches mit I) die Seitenflächen *AG* und *CF*, mit II) die Seitenflächen *af* und *bg* gemein hat, und übrigens congruente Grundfläche und gleiche Höhe mit I) und II) hat. Es geschieht dies, wenn man die entsprechenden Seitenflächen verlängert und die Schnittlinien zwischen je zwei *PT*, *uS*, *uQ*, *Rv* als Seiten eines Parallelepipedons III) betrachtet; es ist also III) mit I) und II) an Inhalt gleich, mithin auch die letzteren untereinander.

C) „Jedes Parallelepipedon lässt sich in zwei congruente dreiseitige Prismen zerlegen."

Beweis. Ziehe zu den Grundflächen des Parallelepipedons *ABCDEFGH* (Fig. 292) die Diagonalen (*BD* und *HF*); diese Linien sind parallel (denn Winkel *ABD* = *EHF*, und je ein Schenkel derselben *AB* und *EH* parallel, also auch die andern Schenkel). Lege durch *DB* und *HF* eine Ebene, so dass zwei drei-

Fig. 292.



Digitized by Google

seitige Prismen *ABDFHE* und *BCDFHG* entstehen. Bei diesem sind die dreikantigen Ecken *A* und *G*, *DABH* und *HFGD* n. s. w. congruent (die Kantenwinkel sind gleich), da auch die entsprechenden Seiten gleich sind, decken sich die Prismen, womit unser Satz bewiesen ist. Hieraus folgt dann:

D) „Dreiseitige Prismen von congruenter Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich."

Jetzt lässt sich leicht unser Lehrsatz 1. beweisen. Denn wenn die Grundflächen beliebiger Parallelepipeda gleich sind, so lassen sie sich auf irgend eine Art in congruente Dreiecke zerlegen; zieht man durch deren Winkelspitzen Parallelen mit den Seiten der Prismen, so werden diese in ebensoviel dreiseitige Prismen verwandelt, von denen nach dem eben bewiesenen Satze *D*) je 2 gleichen Inhalt haben, was somit von den ganzen Prismen gilt.

III. Lehrsätze.

Es ist aber nöthig, Aehnliches auch für die Pyramiden zu beweisen. Da in solche und nicht in Prismen alle Körper getheilt werden können.

Lehrsatz 2. „Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel der Grundfläche geschnitten, so wird eine kleinere Pyramide abgeschnitten, deren Grundfläche sich zu der der gegebenen verhält, wie die Quadrate der Höhen."

Beweis. Sei in *abcg* (Fig. 293), *hkl* parallel der Grundfläche, so ist offenbar $hkl \sim abc$, da die Seiten beider Figuren entsprechend parallel sind, also:

Fig. 293.

$$abc : hkl = ab^2 : hk^2,$$

sind aber *gn* und *gm* die Höhen, so ist, wenn man *mk* und *na*, *mk* und *nb* zieht,

Dreieck $gmk \sim gna$,

und da *mk* und *mk* bezüglich mit *na* und *nb* sind, auch Dreieck $kmk \sim anb$, also:

$$\frac{gn}{na} = \frac{gm}{mk}, \quad \frac{na}{ab} = \frac{mk}{kk},$$

beide Gleichungen multiplicirt, geben:

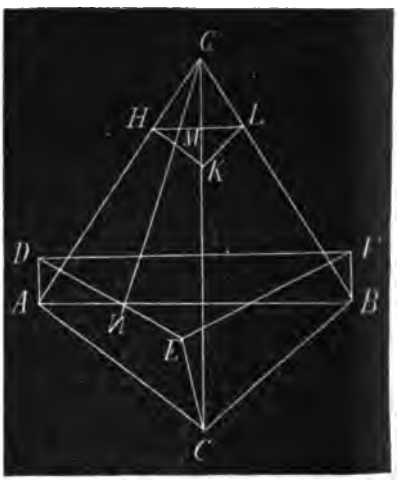
$$\frac{gn}{ab} = \frac{gm}{kk}, \quad \frac{gn^2}{gm^2} = \frac{ab^2}{kk^2} = \frac{abc}{hkl},$$

was zu beweisen war.

Lehrsatz 3. „Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe haben gleichen körperlichen Inhalt."

Beweis. Die Pyramiden *ABCG* (Fig. 294) und *abcg* (Fig. 293) mögen die ver-

Fig. 294.



langten Eigenschaften haben; macht man $GM = gm$, und legt Ebene *HKL* durch die erste Pyramide, so ist nach vorigem Satze:

$$\frac{ABC}{HKL} = \frac{GN^2}{GM^2} = \frac{gn^2}{gm^2} = \frac{abc}{hkl}$$

und, da $ABC = abc$, ist auch $HKL = hkl$. Theilt man nun in beiden Pyramiden die Höhen in eine gleiche Anzahl von Theilen, deren jeder gleich *AD* sei und legt durch die Theilpunkte Ebenen parallel der Grundfläche. Zieht man durch die Winkelspitzen jeder so entstandenen Schnittfläche aber senkrechte Linien bis zur nächsten wie *AD*, *CE*, *BF* so entstehen dreiseitige Prismen und die gan-

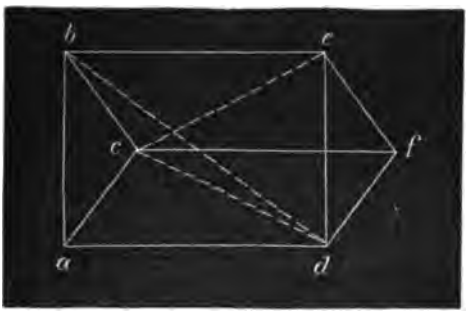
sen Pyramiden werden in ein Netz solcher Prismen wie *ABCDEF* eingehüllt, deren Höhen gleich sind, und deren Grundflächen nach der Spitze hin, abnehmen. Jede Grundfläche eines solchen Prismas *HKL* in *ABCG* ist der entsprechenden *hkl* in *abcg* nach dem vorigen Satze gleich, es sind also auch je zwei Prismen, da Grundfläche und Höhe gleich sind, einander gleich, und folglich der ganze Körper, welcher *ABCG* einhüllt, dem *abcg* einhüllenden. Der Inhalt dieser Körper nähert sich aber mit der Abnahme der Höhen der einzelnen Prismen und mit der daraus folgenden Zunahme ihrer Anzahl bis auf jede Grenze dem Inhalte der Pyramiden selbst, und mithin sind auch diese unter einander gleich.

Lehrsatz 4. „Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, welches mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat."

Beweis. Es genügt, diesen Satz an einer dreiseitigen Pyramide zu beweisen, da jede andere sich in dreiseitige von gleicher Höhe zerlegen lässt, wenn man die Grundfläche in Dreiecke theilt, und von der Spitze der Pyramide Linien nach den Winkelspitzen dieser Dreiecke zieht. Ist nun jede dieser dreiseitigen Pyramiden der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe, so ist die ganze Pyramide auch der dritte Theil des Prisma, welches gleiche Höhe und die Summe der Dreiecke zur Grundfläche, also mit der gegebenen Pyramide gleiche Grundfläche hat.

Sei nun *abcd* die gegebene dreiseitige Pyramide (Fig. 295). Ergänze Dreieck *abd* zum Parallelogramm *abed* und ziehe

Fig. 295.



ce, so hat man eine zweite Pyramide *bedc*, welche mit *abcd* gleiche Grundfläche (Dreieck *abd* $\cong$ *ebd*) und Höhe (das von *c* auf die Grundfläche gefällte Loth) hat. Zieht man noch *cf* parallel *ad* und legt Ebene *fde* parallel *abc* hindurch, so sind *cfeb* und *cfda* Parallelogramme, also $ef = bc$, $df = ac$, auch war $ed = ba$, also Dreieck *edf* $\cong$ *abc*, und wenn man diese Dreiecke bezüglich als Grundflächen der Pyramide *defc* und *abcd* betrachtet, so haben diese auch gleiche Höhen, nämlich das zwischen beiden parallelen Ebenen errichtete Loth. Die ganze Figur *abcdef* zerfällt also in drei Pyramiden, welche gleichen Inhalt haben. Offenbar aber ist *abcdef* ein dreiseitiges Prisma, welches mit der gegebenen Pyramide *abcd* die Grundfläche *abc* und die Höhe gemein hat. Somit ist unser Satz bewiesen.

Zusatz. „Symmetrische Körper haben gleichen Inhalt."

Beweis. Immer wird sich in jedem derselben ein Punkt finden lassen, von dem man nach allen Ecken Linien ziehen kann, so dass die Körper in Pyramiden getheilt werden, wovon die entsprechenden der einzelnen Körper gleiche Grundfläche und Höhe haben.

IV. Definition und Lehrsätze.

Definition. Obgleich als Einheit des körperlichen Maasses jeder beliebige Körper bestimmt werden kann, gibt man dieser Einheit doch eine Beziehung zum Längenmaasse, und wählt dazu denjenigen Würfel, dessen Seite gleich der Längeneinheit, dessen Seitenflächen also gleich der Flächeneinheit sind. Daher die Bezeichnungen Cubikfuss, Cubikzoll u. s. w., als Maasseinheiten des körperlichen Maasses, worunter Würfel verstanden werden, deren Seite einen Fuss, Zoll u. s. w. lang ist.

Lehrsatz 5. „Jedes Prisma enthält an körperlichem Inhalt soviel körperliche Einheiten, als das Product der Flächeneinheiten der Grundfläche in die Längeneinheiten der Höhe beträgt." — Abgekürzt lautet dieser Satz: „Der Inhalt eines Prisma ist gleich dem Product aus Grundfläche und Höhe."

Digitized by Google

Beweis. Es genügt diesen Satz für ein rechtwinkliges Parallelepipedon zu beweisen, da jedes andere Prisma gleich einem solchen von gleicher Grundfläche und Höhe ist.

Sei *abcdefgh* (Fig. 296) ein solches. Nehmen wir an, die Seiten desselben ständen zur Linieneinheit in einem rationalen Verhältnisse, so lässt sich immer ein Theil der letztern, etwa der $s$te

Fig. 296.

finden, der in allen drei anstossenden Seiten des Parallelepipedons eine ganze Anzahl von Malen enthalten ist. Dies ist, wenn die Verhältnisse aller Seiten zur Linieneinheit nicht rational sind, zwar nicht genau, aber doch bis auf einen beliebig klein zu machenden Fehler der Fall, wie dies bei dem entsprechenden Satze vom Parallelogramm bereits ausgeführt ist, dass selbst bei irrationalen Verhältnissen die jetzt zu machenden Folgerungen bis auf einen beliebig klein zu machenden Fehler d. h. bis auf jede Grenze der Genauigkeit, also völlig richtig sind. Enthalten nun die zusammenstossenden Seiten *ab*, *ad*, *ae* diesen $s$ten Theil der Längeneinheit bezüglich n, p, q mal, theilt man dieselben in soviel Theile, und zieht durch alle Theilpunkte Parallelen mit den Seiten, so entstehen über der Grundfläche *abcd*, np Würfel, über diesen ebensoviel u. s. w, im ganzen soviel Systeme von np Würfeln, als *ae* Theile hat, also q, so dass die Anzahl dieser Würfel npq ist. Was nun die Grösse eines solchen Würfels betrifft, so hat ein jeder $\frac{1}{s}$ der Längeneinheit zur Seite. Denkt man sich nud einen der Körpereinheit gleichen Würfel, und theilt jede Seite desselben in s Theile, so ist, da auch dieser Würfel ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit gleichen Seiten ist, nach dem Obigen die Körpereinheit in $s \cdot s \cdot s$ Theile getheilt, und jeder davon beträgt somit $\frac{1}{s^3}$ von der Körpereinheit. Somit ist unser Parallelepipedon in npq Theile getheilt, deren jeder $\frac{1}{s^3}$ der Körpereinheit ist, und es enthält dieselbe $\frac{npq}{s^3} = \frac{n}{s} \cdot \frac{p}{s} \cdot \frac{q}{s}$ mal. Die Seiten enthielten bezüglich den $s$ten Theil der Linieneinheit n, p, q mal, also die Linieneinheit selbst $\frac{n}{s}$, $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$ mal. Durch Multiplication dieser Zahlen entsteht aber diejenige, welche den Körperinhalt des Parallelepipedons ausdrückt. Ferner ist $\frac{q}{s}$ die Anzahl der Längeneinheit, welche die Höhe *ae*, und $\frac{n}{s} \cdot \frac{p}{s}$ die Anzahl der Flächeneinheit der Grundfläche *abcd*, womit unser Satz erwiesen ist.

Lehrsatz 6. „Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Products aus Grundfläche und Höhe."

Beweis. Die Pyramide ist nämlich der dritte Theil des Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

Lehrsatz 7. „Der Inhalt der abgestumpften Pyramide ist gleich dem Inhalte von drei vollständigen, welche gleiche Höhe mit der gegebenen, als Grundflächen aber bezüglich die beiden Grundflächen der gegebenen, und die

mittlere Proportionale zwischen Beiden haben.

Beweis. Sei *abcdef* (Fig. 297) die abgestumpfte Pyramide und *kk* ihre Höhe. Wir ergänzen sie zur vollständigen Pyramide, deren Höhe *gk* sein möge, und setzen $abc = G$, $def = g$, $kk = H$, $gk = K$, so ist: Pyramide $defg = \frac{1}{3} Kg$, Pyramide $abcg = \frac{1}{3}(K+H)G$, also die abgestumpfte Pyramide, deren körperlichen Inhalt wir mit J bezeichnen:

$$J = \tfrac{1}{3}[(K+H)G - Kg].$$

Es handelt sich darum, die Grösse K zu bestimmen. Offenbar verhalten sich die ähnlichen Figuren *abc* und *def* wie die Quadrate der Höhen *gk* und *gk*. Dies ist im Beweise zu Lehrsatz 3. bereits ausgeführt, also:

Fig. 297.

$$\frac{G}{g} = \frac{(H+K)^2}{K^2} \text{ oder } K(\sqrt{G} - \sqrt{g}) = H\sqrt{g},$$

$$K = \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}, \quad H + K = \frac{H\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Diese Werthe in den von J eingesetzt, geben:

$$J = \frac{H}{3} \frac{\sqrt{G^3} - \sqrt{g^3}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}.$$

Man hat aber:

$$\sqrt{G^3} - \sqrt{g^3} = (\sqrt{G} - \sqrt{g})\ (\sqrt{G^2} + \sqrt{Gg} + \sqrt{g^2}) = (G + \sqrt{Gg} + g),$$

d. h.:

$$J = \frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g).$$

Offenbar stellen bezüglich:

$$\frac{HG}{3}, \quad \frac{Hg}{3}, \quad \frac{H\sqrt{Gg}}{3}$$

die Inhalte dreier vollständigen Pyramiden dar, welche bezüglich G, g und die mittlere Proportionale von G und g zur Grundfläche, alle drei aber H zur Höhe haben, wodurch unser Satz bewiesen ist.

An diese Entwicklungen knüpfen wir noch:

V. Definition und Lehrsatz.

Definition. Polyeder heissen ähnlich, wenn in derselben Anordnung alle entsprechenden Seiten dasselbe Verhältniss haben, alle entsprechenden Kanten- und Ebenenwinkel aber gleich sind.

Lehrsatz 8. „Die Grundflächen ähnlicher Pyramiden verhalten sich wie die Quadrate der Höhen, die Pyramiden selbst wie die Würfel der Höhen."

Beweis. Seien *abcd*, *ABCD* (Fig. 298) die Pyramiden. Da die Ecken *d* und *D* congruent sind, so lassen sich die Pyramiden so auf einander legen, dass diese Ecken zusammenfallen, und *abc* in die Lage von *FGH* fällt. *FGH* und *ABC* werden dann parallel, da *FG* parallel *AB*, *FH* parallel *AC*, die Figuren also in den Ebenen zweier Winkel mit parallelen Schenkeln liegen. Fällt man Loth *DE* auf *ABC*, welches *FGH* in *K* schneidet, so hat man auch die Höhe $FK = de$ der Pyramide *abcd*.

Nun ist $ABC \sim FGH$, also:

$$\frac{ABC}{FGH} = \frac{AB^2}{FG^2},$$

Dreieck $DAB \sim DFG$,

also:

$$\frac{DA}{DF} = \frac{DE}{DK} = \frac{AB}{FG},$$

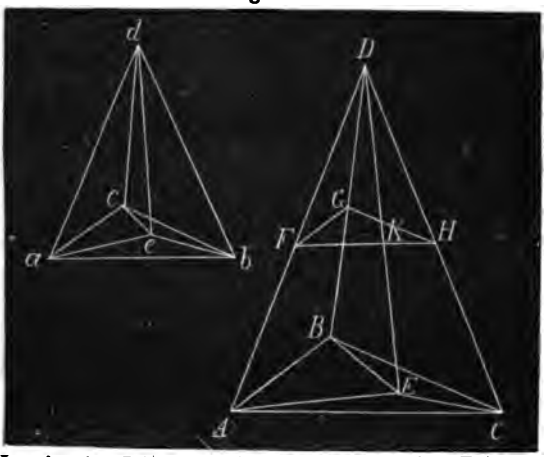
also:

$$\frac{ABC}{FGH} = \frac{DE^2}{DK^2} \text{ oder } \frac{ABC}{abc} = \frac{DE^2}{de^2},$$

womit der erste Theil des Satzes be-

Digitized by Google

Fig. 298.



wiesen ist. Nun ist der Inhalt der Pyramiden bezüglich:

$$\tfrac{1}{3} ABC \cdot DE \text{ und } \tfrac{1}{3} abc \cdot de,$$

also, wenn wir dieselben mit J und j bezeichnen:

$$\frac{J}{j} = \frac{ABC \cdot DE}{abc \cdot de} = \frac{DE^2 \cdot DE}{de^2 \cdot de} = \frac{DE^3}{de^3},$$

was der zweite Theil unseres Satzes war.

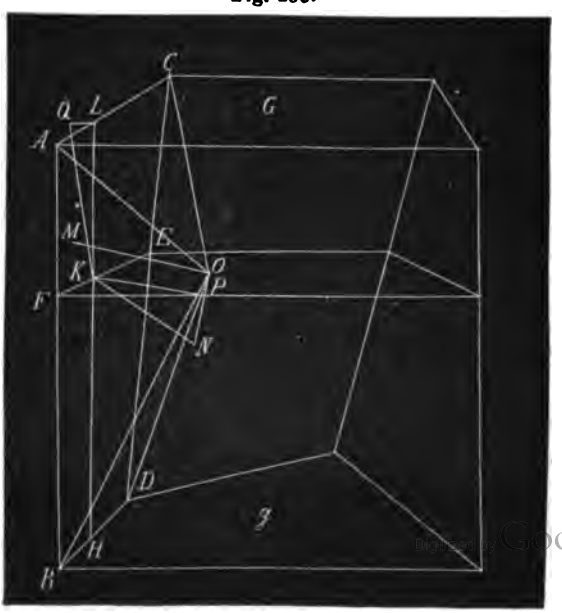
VI. Lehrsatz.

Der folgende Lehrsatz gibt für eine allgemeinere Art Polyeder die Inhaltsbestimmung.

Lehrsatz 9. „Jeder Polyeder, der zwischen zwei parallelen Grundflächen liegt, welche alle Ecken enthalten, ist an Inhalt zwei Pyramiden gleich, welche mit ihm gleiche Höhe haben, und deren Grundflächen bezüglich das arithmetische Mittel zwischen den Grundflächen des Polyeders und der doppelte Mittelschnitt, d. h. derjenige ebene Schnitt welcher alle Seiten halbirt, sind."

Beweis. Sei das Polyeder gleich S, G und g (Fig. 299) die Grundflächen;

Fig. 299.



Digitized by Google

halbirt man zwei Seiten AB und CD und legt durch die Halbirungspunkte eine Ebene parallel den Grundflächen, die den Körper im Vieleck γ schneidet, so wird dasselbe alle Seiten in gleichem Verhältnisse schneiden, und da zwei davon halbirt werden, so geschieht dies auch mit allen übrigen, so dass γ der Mittelschnitt ist. Aus einem Punkte O innerhalb γ ziehen wir nun Grade nach allen Eckpunkten des Polyeders, so dass dasselbe in eine Anzahl von Pyramiden getheilt wird, die je eine Seitenfläche und zwei davon bezüglich die beiden Grundflächen des Polyeders zu Grundflächen haben. Diese beide letzteren haben offenbar zur Höhe die des Polyeders, so dass, wenn h diese Höhe ist, man für den Inhalt der Summe dieser beiden Pyramiden hat:

$$\frac{h}{3} \cdot \frac{G+g}{2},$$

was der Inhalt einer Pyramide ist, die h zur Höhe und die arithmetische Mitte von G und g zur Grundfläche hat.

Von den übrigen Pyramiden hat jede ein Trapez z. B. $ABCD$ zur Grundfläche und das aus O auf $ABCD$ gefällte Loth OM zur Höhe; der Inhalt ist also:

$$\tfrac{1}{3} OM \cdot ABCD.$$

Nun ist der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ gleich der Höhe LH desselben multiplicirt mit der Mittellinie EF, also dass man für die Pyramide hat:

$$\tfrac{1}{3} OM \cdot EF \cdot LH.$$

Legt man nun durch O eine Ebene parallel mit $ABCD$, und zieht durch den Schnittpunkt K von EF und LH, und auf EF senkrecht KN, und KP in Ebene γ parallel mit OM, beide bis zu der mit $ABCD$ parallelen Ebene, so ist auch $KN = OM$, zieht man ferner ebenfalls auf EF senkrecht KQ (senkrecht auf G, g und γ) bis zur Ebene G, so sind KQ, KL, KP, KN auf EF senkrecht, liegen also in einer Ebene, ferner

Winkel $QKP = R$ und $LKN = R$,

woraus dann folgt:

Winkel $QKL = PKN$

und da die Winkel LQK und KNP rechte sind,

Dreieck $QKL \sim NKP$,

also:

$$\frac{QK}{KL} = \frac{NK}{KP}$$

und

$$QK \cdot KP = NK \cdot KL,$$

oder da:

$$QK = \frac{h}{2}, \quad NK = OM, \quad KL = \frac{HL}{2}$$

ist:

$$h \cdot KP = OM \cdot LH,$$

und es ist der Inhalt der Pyramide, welche $ABCD$ zur Grundfläche hat, somit

$$\tfrac{1}{3} h \cdot EF \cdot KP.$$

KP aber ist gleich dem von O auf EF gezogenen Lothe, also $EF \cdot KP$ gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks OEF, so dass man für die Pyramide hat:

$$\frac{2}{3} h \cdot OEF.$$

Es ist nun zu sehen, dass die Summe aller Pyramiden, welche zur Grundfläche eine der Seitenflächen von S haben, gleich dem Producte von $\frac{1}{3} h$ in die Summe der Dreiecke, welche O zur Spitze und eine der Seiten von γ zur Grundfläche haben, die Summe dieser Dreiecke ist aber offenbar γ selbst, so dass $\frac{1}{3} h\gamma$ die Summe dieser Pyramiden, also der Inhalt des ganzen Polyeders ist:

$$J = \frac{h}{3} \cdot \frac{G+g}{2} + \frac{h}{3} \cdot 2\gamma,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

16) Ueber die von krummen Oberflächen begrenzten Körper.

I. Definitionen.

Jede krumme Oberfläche, in der man durch jeden Punkt eine Grade ziehen kann, so dass alle diese Graden parallel sind, nennt man eine Cylinderfläche oder Cylindermantel. Der Körper, welcher von einer Cylinderfläche und zwei parallelen Ebenen begrenzt wird, heisst Cylinder. Diese beiden parallelen Ebenen werden seine Grundflächen genannt. Jede auf der Cylinderfläche befindliche Grade heisst Seite des Cylinders. — Da die Fläche zwischen zwei einander unendlich nahen Seiten des Cylinders als eben gedacht werden kann, ist der Cylinder als ein Prisma von unendlich viel Seiten aufzufassen, und aus diesem Grunde sind wie bei dem Prisma die beiden Grundflächen congruente Figuren. Eine Cylinderfläche kann man sich entstanden denken, indem eine grade Linie längs einer gegebenen Curve sich selbst parallel dahingeführt wird. — Sind die Grundflächen des Cylinders Kreise, so heisst derselbe Kreiscylinder. Stehen die Seiten auf der Grundfläche senkrecht, so heisst der Cylinder grade. Ein grader Kreiscylinder kann, wie einleuchtet, entstanden

gedacht werden, indem man ein Rechteck um die eine fest gedachte Seite desselben dreht, die beiden auf der festen senkrechten Seite geben die Grundflächen, die der festen parallelen Seite die Cylinderfläche.

II. Definitionen.

Jede krumme Oberfläche, in der man durch jeden Punkt eine Grade ziehen kann, welche durch einen festen Punkt in dieser Oberfläche geht, heisst Kegelfläche oder Kegelmantel, der feste Punkt heisst Spitze. Legt man durch einen Kegelmantel eine Ebene, so heisst der zwischen ihr und dem Kegelmantel bis zur Spitze befindliche Körper Kegel, die Ebene, welche ihn begrenzt, seine Grundfläche. Jede auf der Kegelfläche befindliche Grade wird Seite des Kegels genannt.

Zwei einander unendlich nahe Seiten des Kegels schliessen ein Stück der Kegelfläche ein, das man als eben betrachten kann, und somit ist der Kegel als eine Pyramide zu betrachten, deren Seitenzahl unendlich gross ist, somit gelten die für die Pyramide gegebenen Betrachtungen auch für ihn. Legt man also eine der Grundfläche parallele Ebene durch den Kegel, wodurch dann ein abgestumpfter Kegel entsteht, so wird diese Ebene eine der Grundfläche ähnliche Figur aus dem Kegel herausschneiden. — Man kann sich eine Kegelfläche auch entstanden denken, indem man eine grade Linie längs einer gegebenen Curve so dahin führt, dass sie immer durch denselben Punkt geht.

Ist die Grundfläche des Kegels ein Kreis, so heisst er Kreiskegel. Geht das von der Spitze eines Kreiskegels auf die Grundfläche gefällte Loth (also die Höhe des Kegels) durch den Mittelpunkt derselben, so heisst der Kreiskegel ein grader. Ein grader Kreiskegel kann entstanden gedacht werden, indem man ein rechtwinkliges Dreieck um eine feste Kathete dreht; die andere Kathete beschreibt dann die Grundfläche des Kegels, die Hypotenuse den Mantel. Da jede Seite des Kegels von dieser Hypotenuse gebildet wird, so folgt hieraus auch, dass die Seiten des graden Kreiskegels alle gleich sind.

III. Aufgaben.

Aufgabe 1. „Den körperlichen Inhalt eines Cylinders zu bestimmen."

Auflösung. Da ein Cylinder als Prisma betrachtet werden kann, so gilt die Formel für dasselbe auch hier. Ist also g die Grundfläche, h die Höhe, so ist $J = gh$ die Formel für den Cylinder. Hat derselbe zur Grundfläche einen Kreis mit Radius r, so ist $g = \pi r^2$ (siehe den Artikel: Quadratur), also:

$$J = \pi r^2 h.$$

Aufgabe 2. „Den körperlichen Inhalt eines Kegels zu finden."

Auflösung. Ist g die Grundfläche, h die Höhe, so hat man wie bei der Pyramide: $J = \frac{1}{3} gh$, und wenn die Grundfläche ein Kreis mit Radius r ist:

$$J = \tfrac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Aufgabe 3. „Den körperlichen Inhalt des abgestumpften Kegels zu finden."

Auflösung. Sind G, g die Grundflächen, h die Höhe, so ist, wie bei der abgestumpften Pyramide:

$$J = \tfrac{1}{3} h (G + \sqrt{Gg} + g).$$

Sind aber die Grundflächen Kreise, und ihre Radien bezüglich r und ϱ, so ist:

$$G = \pi r^2,\ g = \pi \varrho^2,\ \sqrt{Gg} = \pi r \varrho,$$

also:

$$J = \tfrac{1}{3} \pi h (r^2 + r\varrho + \varrho^2).$$

Aufgabe 4. „Den Mantel eines graden Cylinders zu finden."

Auflösung. Sind AB, CD (Fig. 300), einander unendlich nahe liegende Seiten des Cylinders, die hier also der Höhe gleich sind, so stehen dieselben auf der Grundfläche und mithin auf den als grade zu denkenden Linien AC und BD senkrecht, so dass $ACBD$ ein Rechteck ist, dessen Flächeninhalt $h \cdot AC$ sein wird, wo h die Höhe des Cylinders ist; addirt man alle, so entstehen unendlich kleine Rechtecke $ABDC$, $CDFE$ u. s. w., und man erhält also für den Mantel M:

$$M = h(AC + CE + \ldots)$$

also wenn

$$u = AC + CE \ldots,$$

d. h. den Umfang der Grundfläche bezeichnet:

$$M = hu.$$

Für den graden Kreiscylinder ist:

$$u = 2\pi r,$$

also:

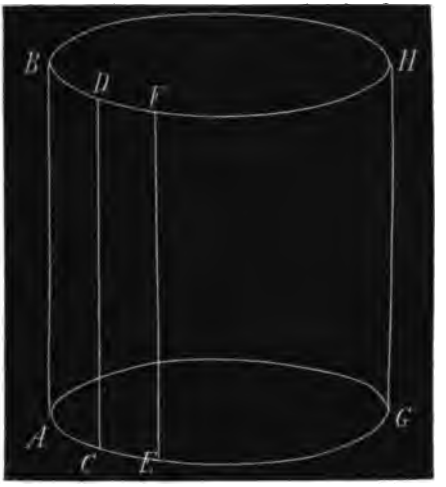
$$M = 2\pi r h.$$

Aufgabe 5. „Den Mantel eines graden Kreiskegels zu finden."

Auflösung. Betrachte man das von zwei Seiten AO und CO (Fig. 301) und einem Theile AC der Grenzcurve der Grundfläche gebildete, als eben anzunehmende kleine Dreieck, so ist dies recht-

Digitized by Google

Fig. 300.



winklig. Denn sei OG die Höhe, so ist GC ein Radius des die Grundfläche bildenden Kreises, also OG und GC auf OA senkrecht, so dass CA auf der Ebene OGC und mithin auf OC senkrecht steht; ist also s die Seite des Kegels, so ist:

$$\text{Dreieck } ACO = \tfrac{1}{2} AO \cdot s,$$

und wenn man den ganzen Mantel M in dergleichen Dreiecke theilt:

$$M = \frac{s}{2}(AE + CE + \ldots)$$

oder:

$$M = \frac{s}{2} u.$$

Wenn u die Peripherie des Grundkreises ist. Aber $u = 2\pi r$ und somit:

Fig. 301.

$$M = \pi r s.$$

Es ist auch wenn h die Höhe des Kegels ist,

$$s = \sqrt{h^2 + r^2},$$

also auch

$$M = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$

Aufgabe 6. „Den Mantel eines abgestumpften graden Kreiskegels zu finden."

Auflösung. Sei die Seite desselben $Aa = s$ (Fig. 302), die Seite des voll-

Fig. 302.

ständigen Kegels $AC = S$, so ist der Mantel M offenbar gleich der Differenz der Kegelmäntel von CAB und Cab, also wenn r und ϱ die Radien der Kreise AB und ab sind:

$$M = 2\pi(rS - \varrho(S - s)).$$

Es ist aber offenbar:

Digitized by Google

$$\frac{S}{S-s}=\frac{r}{\varrho},$$

also:

$$S=\frac{rs}{r-\varrho},$$

und

$$S-s=\frac{\varrho s}{r-\varrho},$$

d. h.:

$$M=ns(r+\varrho)=n(r+\varrho)\sqrt{h^2+(r-\varrho)^2}.$$

Dies giebt den Satz:

„Der Mantel eines abgestumpften graden Kreiskegels ist gleich der Summe der Mäntel der beiden vollständigen Kegel, welche mit ihm gemeinschaftliche Seite und bezüglich die beiden Grundflächen desselben zu Grundflächen haben."

IV. Definitionen.

Schneidet man eine Kugel durch zwei parallele Ebenen, so heisst das zwischen ihnen liegende Stück der Kugelfläche Zone, und das entsprechende Stück der Kugel selbst wird auch wohl „körperliche Zone" genannt. Die Senkrechte zwischen beiden Ebenen heisst „Höhe der Zone".

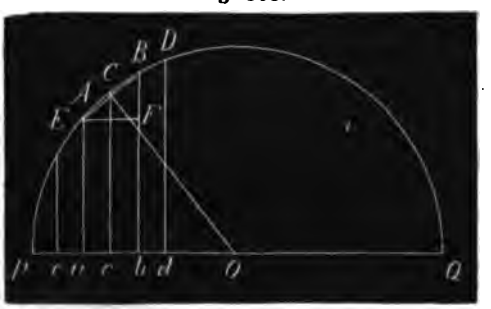
Eine Ebene schneidet von der Kugel ein Stück ab, das man Kugelsegment nennt. Geht diese Ebene durch den Mittelpunkt, so wird das Segment zur Halbkugel. Das Stück der Kugelfläche, welches eine solche Ebene abschneidet, wird Kalotte genannt. Legt man durch alle Punkte der Peripherie einer solchen Schnittebene Linien, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, so entsteht ein Körper, der von einer graden Kreiskegelfläche, die ihre Spitze im Mittelpunkte der Kugel hat und von einer Kalotte begrenzt, also aus einem Segment und einem Kegel zusammengesetzt ist. Derselbe heisst Kugelsector.

V. Aufgaben.

Aufgabe 7. „Den Flächeninhalt einer Zone oder Kalotte zu finden."

Auflösung. Im Halbkreise dessen Mittelpunkt O (Fig. 303) ist, ziehe man auf dem Durchmesser PQ senkrecht aA

Fig. 303.



und bB nach der Peripherie, und Cc durch die Mitte der Sehne AB, nach der Mitte c von ab und CO, so ist auch Cc auf PQ senkrecht. Denken wir uns nun den Halbkreis um Durchmesser PQ gedreht, so beschreibt die Peripherie desselben eine Kugelfläche, Linie AB aber den Mantel eines abgestumpften graden Kreiskegels, dessen Flächeninhalt sein wird, da Aa, Bb die Radien der Grundflächen sind, während AB die Seite ist:

$$\pi AB(Aa+Bb)=2\pi AB\cdot Cc.$$

Es ist aber Dreieck $ABF \backsim COc$ (sie haben beiden einen rechten Winkel und Winkel cCO ergänzt ACc zum Rechten, ist also gleich BAF), daher:

$$\frac{AB}{AF}=\frac{CO}{Cc},$$

also:

$$AB\cdot Cc=AF\cdot CO=ab\cdot CO,$$

also für unsern Kegelmantel erhalten wir $2\pi\cdot ab\cdot CO$. Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für alle diejenigen Kegelmäntel, welche durch die an einandergrenzenden Sehnen EA, AB, BD ... gebildet werden. Nehmen diese Sehnen an Grösse ab, so nähert sich ihre Summe dem Bogen ED und die durch ihre Fortbewegung erzeugte Oberfläche der Zone, welche cd zur Höhe hat. Zu gleicher Zeit aber werden CO und die entsprechenden Linien, welche aus den Mitten der andern Sehnen nach O gezogen sind, sich alle dem Radius der Kugel r nähern. Wir haben also für die Summe aller dieser abgestumpften Kegel, oder für die Zone mit Höhe cd:

Digitized by Google

$$2\pi re s + 2\pi r ab + 2\pi r bd = 2\pi r \cdot ed,$$

oder wenn wir den Flächeninhalt der Zone mit z, ihre Höhe mit h bezeichnen:

$$z = 2\pi r h.$$

Hätten wir die Sehnen DB, BA, AE u. s. w. bis P fortgesetzt, so wäre anstatt der Zone die Kalotte mit Höhe Pd entstanden. Bezeichnet man also unter Höhe h einer Kalotte die Strecke, welche von der Grundfläche zur Kugelfläche geht, senkrecht auf der Grundfläche steht, und verlängert durch den Mittelpunkt gehen würde. So ist wenn C den Flächeninhalt der Kalotte bezeichnet, auch:

$$C = 2\pi r h.$$

Sei jetzt F der Flächeninhalt der Kugelfläche. Die halbe Kugelfläche ist offenbar als Kalotte zu denken, deren Höhe gleich r ist, also:

$$\frac{F}{2} = 2\pi r^2 \text{ und } F = 4\pi r^2.$$

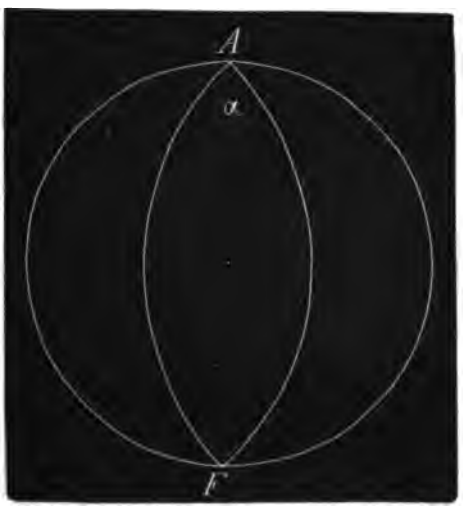
Aufgabe 8. „Den Flächeninhalt eines sphärischen Zweiecks zu finden."

Auflösung. Sei AF (Fig. 304) das Zweieck, so ist sogleich zu sehen, das dasselbe so oft in der Kugelfläche enthalten sein wird, als der Winkel α den die beiden Halbkreise des Zweiecks mit einander machen in vier Rechten enthalten sind, ist also z der Inhalt des Zweiecks, so hat man:

$$\frac{z}{F} = \frac{\alpha}{360},$$

d. h.
$$z = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}.$$

Fig. 304.



Der Winkel α muss hier in Graden gegeben sein. Geben wir denselben in Theilen von π, d. h. drücken wir ihn durch den entsprechenden Bogen b eines Kreises aus, dessen Radius eins ist, so hat man:

$$\frac{b}{\alpha} = \frac{\pi}{180}, \text{ oder } \alpha = \frac{180 b}{\pi},$$

d. h.:

$$z = 2r^2 b.$$

Aufgabe 9. „Den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks zu finden."

Auflösung. Sei ABC (Fig. 305) das Dreieck. Ergänzt man die Bogen BC und AC zu Halbkreisen, indem man BD und AD zieht, so ist

$$\text{Dreieck } ADB \cong ECF.$$

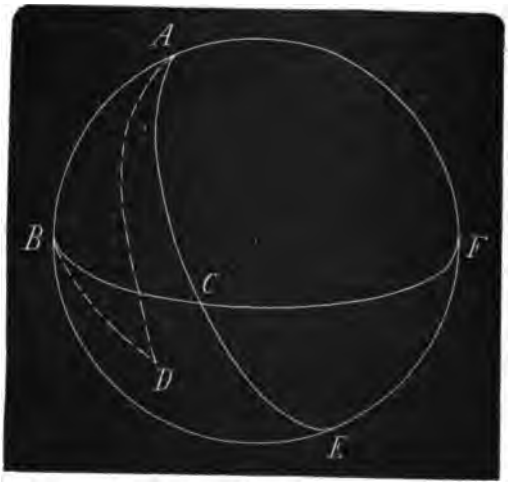
Denn offenbar ist Winkel $ECF = BCA$ als Scheitelwinkel und dieser gleich BDA als Winkel desselben Zweiecks $CAED$, ferner $BD = CF$, $AD = CE$, da sie bezüglich dieselben Bogen BC und CA zum Halbkreise ergänzen.

Sei nun Dreieck $ABC = \triangle$, und bezeichnen wir die Winkel bei A, B, C bezüglich durch α, β, γ, so ist:

$$\text{Zweieck } ABEC = \frac{F\alpha}{360},$$

Digitized by Google

Fig. 305.



$$\text{Zweieck } BAFC = \frac{F\beta}{360},$$

und

$$CEF + BCA = \frac{F\gamma}{360},$$

da die Summe dieser beiden Dreiecke gleich dem Zweieck $CABD$ ist.

Nun bilden die Figuren:

$$ABEC + BAFC \text{ und } CEF + BCA$$

offenbar die Halbkugel vermehrt um zwei $\triangle$, es ist somit:

$$\frac{F}{360}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{F}{2} + 2\triangle,$$

woraus sich ergibt:

$$\triangle = \frac{F}{4}\,\frac{(\alpha+\beta+\gamma-180)}{180},$$

oder, wenn man für F den Werth setzt:

$$\triangle = \frac{\pi r^2(\alpha+\beta+\gamma-180)}{180}.$$

Die Winkel sind hier in Graden ausgedrückt. Sind a, b, c dieselben Winkel im Bogenmaass, d. h. in Theilen von π, so ist:

$$\alpha = \frac{180\,a}{\pi},\quad \beta = \frac{180\,b}{\pi},\quad \gamma = \frac{180\,c}{\pi},$$

also:

$$\triangle = r^2(a+b+c-\pi).$$

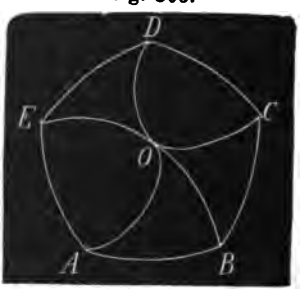
Offenbar ist die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ immer grösser als 180°, und $a+b+c$ grösser als π. Diesen Ueberschuss pflegt man auch den sphärischen Excess zu nennen, und man hat den Satz:

„Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks ist gleich dem Producte des Excesses in das Quadrat des Radius der Kugel."

Aufgabe 10. „Den Flächeninhalt eines sphärischen n-Ecks zu finden."

Auflösung. Sei $V = ABCDE$ (Fig. 306) das n-Eck. Zieht man von einem Punkte innerhalb des Vielecks O nach

Fig. 306.



den Eckpunkten grösste Kreise, so zerfällt dasselbe in n Dreiecke, die Summe ihrer Flächeninhalte wird nach dem obigen sein:

$$V = r^2(m + m_1 + m_2 + \ldots - n\pi).$$

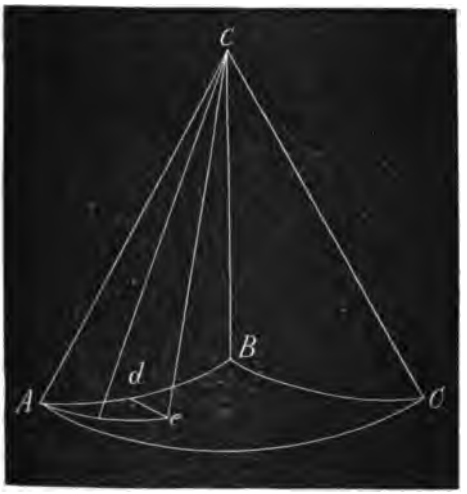
Die Grössen $m, m_1, m_2 \ldots$ drücken die Winkel dieser Dreiecke im Bogenmaass aus. Offenbar besteht aber diese Winkelsumme aus den Winkeln unsers Vielecks und den Winkeln um O, welche 360° oder im Bogenmaass 2π betragen. Ist also A die Summe aller Winkel des Vielecks im Bogenmaass, so haben wir:

$$V = r^2(A - (n-2)\pi).$$

Aufgabe 11. „Den körperlichen Inhalt eines Kugelsectors zu finden."

Auflösung. Legt man durch den Mittelpunkt der Kugel *C* (Fig. 307) eine beliebige Kegelfläche, so wird von dieser und der Kugelfläche ein Körper abgeschnitten, den wir in unendlich kleine Theile wie *AedC* theilen, wo der Theil der Kugelfläche *Aed* als eben und *AedC* als eine Pyramide zu betrachten ist. Offenbar steht der Radius *AC* auf der Grundfläche *Aed* senkrecht. Denn legt

Fig. 307.



der Kugelsector, so ist derselbe einer man durch *A* zwei grösste Kreise, so ist *AC* deren Halbmesser, beide Kreislinien stehen auf *AC* senkrecht, mithin auf die von den unendlich kleinen Bogen *Ae* und *Ad* begrenzte als eben zu denkende Fläche, die in die Ebene *Aed* fällt. Es ist also der Radius *r* der Kugel als Höhe aller unendlich kleinen Pyramiden zu denken in die *ABCO* zerfällt, und mithin ihre Inhaltssumme, oder der Körper $ABCO = \frac{1}{3}r \cdot ABO$. Sei jetzt *S* der

Fig. 308.

Digitized by Google

der eben berechnten Körper, dessen Grundfläche ABC eine Kalotte bildet, sei h deren Höhe so war $ABD = 2\pi rh$, also:

$$S = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Auch die Halbkugel ist ein solcher Körper, wo die Höhe der zugehörigen Kalotte gleich r ist, also der Inhalt der Halbkugel $\frac{2}{3}\pi r^3$, und der der ganzen Kugel, die wir mit K bezeichnen wollen:

$$K = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Scholion. Denken wir uns um eine Kugel (Fig. 308) einen graden Cylinder beschrieben, und eine Pyramide mit gleicher Höhe, so ist wenn r der Radius der Kugel ist, $2r$ die Höhe dieser Körper, r der Radius ihrer Grundfläche. Es ist also der Inhalt des Cylinders: $2\pi r^3 = \frac{6}{3}\pi r^3$, und der des Kegels $\frac{2}{3}\pi r^3$ daraus folgt: „dass sich Kegel, Kugel und Cylinder verhalten wie die Zahlen 1, 2 und 3." Dieser Satz rührt schon von Archimedes her.

Fig. 309.

Aufgabe 12. „Den körperlichen Inhalt eines Kegelsegments zu finden."

Auflösung. Es ist offenbar von dem Kugelsector einen Kegel abzuziehen, dessen Höhe $OB = r - h$ (Fig. 309) ist, wo h die Höhe der zugehörigen Kalotte bedeutet. Der Radius CB der Grundfläche dieses Kegels ist gegeben durch die Gleichung:

$$CB^2 = r^2 - (r-h)^2.$$

Es ist also wenn wir mit s das Segment bezeichnen:

$$s = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{\pi}{3}(r-h)[r^2 - (r-h)^2],$$

d. h. da

$$(r-h)[r^2-(r-h)^2] = (r-h)h(2r-h) = h(2r^2 - 3rh + h^2)$$

ist:

$$s = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r-h).$$

Raumpendel.

1) Einleitung.

Man versteht unter Raumpendel eine mathematische Pendelvorrichtung, also einen schweren Punkt der von einen andern gegebenen Punkt einen constanten Abstand hat, und sich unter Einfluss der Schwere und einer Anfangsgeschwindigkeit im Uebrigen frei um denselben bewegen kann. Der schwere Punkt ist also gezwungen während der ganzen Bewegung auf einer Kugeloberfläche zu bleiben, kann aber auf derselben jede Stelle einnehmen, während das gewöhnliche Pendel in einer Ebene, also der schwere Punkt in einem gegebenen grössten Kreise bleibt.

Das Problem vom Raumpendel kann nur sehr mangelhaft ohne Anwendung der elliptischen Funktionen behandelt werden. Es soll hier zunächst diese elementare Behandlung gezeigt, dann aber die vollständige mittels der elliptischen Funktionen gegeben werden, von welcher Theorie dieses Problem grade eine der einfachsten und lehrreichsten Anwendungen gibt. —

Nimmt man bei der Behandlung des Raumpendels auf die Drehung der Erde um ihre Axe Rücksicht, so hat man das Foucault'sche Pendel, dessen Theorie dann hier folgen soll.

2) Elemenntare Behandlung des Raumpendels.

Ist die Gleichung der Kugel auf welcher sich der schwere Punkt bewegt:

$$1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

also der Aufhängungspunkt, Anfangspunkt der Coordinaten, so sind die Bewegungsgleichungen:

$$2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\lambda x}{a}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\lambda y}{a},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{\lambda z}{a},$$

wo die Axe der z in der Richtung und im Sinne der Schwere genommen, g die Beschleunigung der Schwere ist. Ein Integral gibt leicht der Satz von den lebendigen Kräften. Multiplicirt man die 3 Gleichungen 2) nämlich bezüglich mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ addirt und integrirt, so kommt wenn s die Bogenlänge ist:

3) $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = C + 2gz.$$

Die Constante C ist aus dem Anfangszustande zu bestimmen. Ein zweites Integral ergibt sich, wenn man die erste Gleichung 2) mit y die zweite mit x multiplicirt, subtrahirt und integrirt, nämlich:

4) $$xdy - ydx = c'dt.$$

Die Gleichungen 1), 3) und 4) reichen zur Lösung des Problems aus.

Die Gleichung 3) nimmt nämlich die Gestalt an:

$$(a^2 - z^2)\,[(c + 2gz)\,dt^2 - dz^2] = z^2dz^2 + c'^2dt^2,$$

also:

7) $$dt = \frac{\pm a dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)\,(c + 2gz) - c'^2}}.$$

Das Zeichen + ist zu nehmen, wenn der schwere Punkt im Fallen, das Zeichen −, wenn er im Steigen ist.

Diese Gleichung gibt z als Funktion von t. Offenbar ist der Werth ein elliptisches Integral erster Ordnung. — Es kommt jetzt noch darauf an die Horizontalprojection des bewegten Punktes zu finden.

Führen wir Polarcoordinaten an, und zwar sei

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2 - z^2,$$

also r das von dem Orte des bewegten Punktes auf die durch den Anfangspunkt gehende Vertikallinie gefällte Loth, φ der Winkel dieses Lothes mit der Axe der x, also: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Es nimmt also Gleichung 4) die Gestalt an:

8) $$r^2 d\varphi = c'dt,$$

also:

9) $$= d\varphi = \frac{c'dt}{a^2 - z^2} = \frac{ac'dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)\,(c + 2gz) - c'^2}},$$

wo immer das obere Zeichen genommen ist.

Dieses elliptische Integral dritter Ordnung giebt φ als Funktion von z oder t. Um c' zu bestimmen, zerlegen wir die Anfangsgeschwindigkeit in zwei Componenten m und n, m stehe senkrecht auf der Vertikalebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten und den bewegten Punkt geht, die andere n liege in dieser Ebene. Die Horizontalprojection der Anfangsgeschwindigkeit besteht dann ebenfalls aus zwei Componenten, von denen eine nach r gerichtet, die andere auf dieser Linie senkrecht ist, und diese letztere ist mit m offenbar identisch, während sie auch durch den Anfangswerth von $r\frac{d\varphi}{dt}$ ausgedrückt werden kann. Ist aber k die Anfangsgeschwindigkeit selbst, die immer tangential an die Kugel wirkt, α der Winkel, den sie mit der Senkrechten auf die durch den Anfangspunkt und den bewegten Punkt gelegte Vertikalebene macht, so ist

5) $$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2gz.$$

Differenziren wir noch Gleichung 1) so kommt:

6) $$xdx + ydy = -zdz$$

und durch Addition der Quadrate von 4) und 6):

$$(x^2 + y^2)\,(dx^2 + dy^2) = z^2dz^2 + c'^2dt^2,$$

für $x^2 + y^2$ und $dx^2 + dy^2$ aber setzen wir aus 1) und 8) ein, und erhalten:

$$m = k\cos\alpha,$$

also:

$$r\frac{d\varphi}{dt} = k\cos\alpha,$$

und wegen Gleichung 8):

$$c' = rk\cos\alpha.$$

Es sei noch e der Anfangswerth von z, so ist:

$$r = \sqrt{a^2 - e^2},$$

also:

10) $$c' = k\sqrt{a^2 - e^2}\cos\alpha.$$

Um die Integration, so weit dies in elementarer Weise geschehen kann, wirklich auszuführen, nehmen wir an, dass der schwere Punkt sich nur sehr wenig von der Vertikallinie entferne.

Sei ϑ der Winkel, den die durch Anfangspunkt und bewegten Punkt gehende Linie (Pendelrichtung) mit der Richtung der Schwere macht. Nehmen wir ferner die Anfangsgeschwindigkeit als horizontal an, so ist $\alpha = 0$, und

Digitized by Google

$$c' = \lambda\sqrt{a^2 - e^2}.$$

Der Anfangswerth von ϑ sei ϑ_0. Es ist $z = a\cos\vartheta$ und der Anfangswerth von z wird $e = a\cos\vartheta_0$. — Wir vernachlässigen jetzt die höheren Potenzen von ϑ, ϑ_0 und k von der dritten an und erhalten:

$$z = a - \frac{a\vartheta^2}{2},\quad e = a - \frac{a\vartheta_0^2}{2}.$$

Es ist nach Gleichung 5)

$$k^2 = c + 2ge,$$

d. h.:

$$c = k^2 - 2ga + ga\vartheta_0^2,\quad c' = ka\vartheta_0.$$

Die Formel 7) wird also:

$$11)\quad dt = \pm\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{\vartheta d\vartheta}{(\vartheta_0^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \beta^2)},$$

wo gesetzt ist:

$$\frac{k^2}{ga} = \beta^2.$$

Diese Gleichung ist leicht zu integriren. Wir setzen:

$$2\vartheta^2 - \vartheta_0^2 - \beta^2 = (\vartheta_0^2 - \beta^2)u$$

und erhalten:

$$dt = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

d. h.:

$$t + c_1 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\arccos u.$$

Für $\vartheta = \vartheta_0$ wird $u = 1$ und $t = 0$, also: $c_1 = 0$, und:

$$t = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\arccos u,$$

woraus sich ergibt:

$$u = \cos\left(2t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$$

und

$$12)\qquad \vartheta^2 = \vartheta_0^2\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2 + \beta^2\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2.$$

Es ist mithin ϑ eine periodische Funktion von t, deren Periode $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ ist. Für die halbe Periode ist $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ und $\vartheta^2 = \beta^2$, und für die ganze Periode $\vartheta^2 = \vartheta_0^2$.

„Ein Beobachter also, der sich mit der Vertikalebene, in welcher sich das Pendel befindet gleichzeitig fortbewegt, wird letzteres zwischen den beiden Richtungen schwingen sehen, die mit der Vertikalen die Winkel ϑ_0 und β machen. Die Zeit in der dies geschähe, wäre $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$, und in der Mitte dieser Zeit, wäre der Winkel ϑ gegeben durch die Formel:

$$\vartheta^2 = \frac{\vartheta_0^2 + \beta^2}{2}.$$

Es ist jetzt der Winkel φ zu bestimmen. Aus Gleichung 8) ergibt sich:

$$d\varphi = \frac{x\vartheta_0 dt}{a\vartheta^2} = \frac{\vartheta_0\beta\sqrt{\frac{g}{a}}\,dt}{\vartheta^2}$$

und wenn man für ϑ^2 seinen Werth setzt:

$$13)\qquad d\varphi = \vartheta_0\beta\sqrt{\frac{g}{a}}\,\frac{dt}{\vartheta_0^2\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2 + \beta^2\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2}.$$

Wir setzen $v = \operatorname{tg}\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$ und erhalten:

$$d\varphi = \frac{\vartheta_0\beta dv}{\vartheta_0^2 + \beta^2 v^2},\quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta v}{\vartheta_0}.$$

Die Constante ist darum gleich Null, weil für $v = 0$ auch $\varphi = 0$ ist. Man erhält nun:

$$14)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta}{\vartheta_0}\operatorname{tg}\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

Digitized by Google

Es wird also φ einem vielfachen von π gleich, wenn t ein solches von $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ ist.

In der Mitte der Zeitintervalle zwischen zwei solchen Werthen ist $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$,

so dass dann die Vertikallinie, in welcher sich das Pendel befindet auf ihrer Anfangsrichtung senkrecht steht

Suchen wir noch die Bewegung der Projection des Punktes auf die Horizontalebene.

Es war $r^2 d\varphi = ka\vartheta_0 dt$. — Setzt man hier aus 13) den Werth von $\frac{dt}{d\varphi}$ so kommt:

15) $$r^2 = a^2\left[\vartheta_0^2 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2 + \beta^2 \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right)^2\right]$$

und die Lösung der Aufgabe ist in den Gleichungen 14) nnd 15) enthalten. Eliminiren wir t, so haben wir die Gleichung der Curve, welche die Projection des schwingenden Punktes auf die Horizontalebene beschreibt in Polarcoordinaten, nämlich:

$$r^2 = \frac{a^2\vartheta_0^2\beta^2}{a^2\sin\varphi^2 + \beta^2\cos\varphi^2}.$$

Offenbar die Gleichung einer Ellipse. Setzt man wieder:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so kommt:

$$\frac{y^2}{a^2\beta^2} + \frac{x^2}{a^2\vartheta_0^2} = 1,$$

so dass $a\vartheta_0$, $a\beta$, die Halbaxen sind. Sie liegen in zwei auf einander senkrechten Vertikalebenen, von die, in welcher sich $a\vartheta_0$ befindet, durch den Anfangspunkt der Bewegung geht. Auch geben noch die Gleichungen 14) und 15):

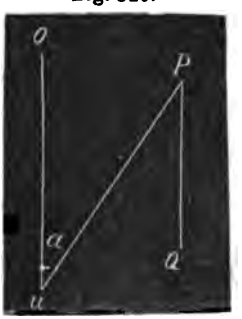
$$x = \pm a\vartheta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right), \quad y = \pm a\beta \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{a}}\right).$$

3) Das Foucault'sche Pendel.

Es soll nunmehr ein Pendel betrachtet werden, welches sich ohne Anfangsgeschwindigkeit bewegt. Es würde dasselbe, wie selbstverständlich, immer in derselben Vertikalen schwingen, wenn nicht auf die Drehung der Erde um ihre Axe hierbei Rücksicht genommen würde, durch welche der Aufhängepunkt kein unbeweglicher mehr ist.

Die Gesetze der Bewegung eines solchen Pendels mit Rücksicht auf die Axendrehung der Erde, sind zuerst im Jahre 1851 von Foucault auf experimentalem Wege festgestellt worden.

Fig. 310.



Sei u (Fig. 310) der Mittelpunkt der Erde, uO die Erdaxe, P die Zenithrichtung des Ortes, wo das Pendel angebracht ist. Es wird dann Winkel $OuP = a$ die Poldistanz, also das Complement der geographischen Breite des fraglichen Ortes sein. In P ist das freischwingende Pendel PQ angebracht. Es soll die veränderliche Lage des Punktes Q in Bezug zur Meridianebene bestimmt werden. — Wir betrachten P als Anfangspunkt zweier Coordinatensysteme, das eine soll drei im Raume festen Axen parallel, das andere fest in der Erde sein.

Die Coordinaten des ersten Systems seien u in der Richtung der Erdaxe im Sinne der Schwere, v senkrecht darauf in der anfänglichen Meridianebene nach der Erdaxe zugerichtet, w senkrecht auf der Ebene von u und v entgegengesetzt gerichtet gegen die Drehung der Erde. Die beweglichen Axen seien, x in der Zenithrichtung, Pu im Sinne der Schwere, y senkrecht darauf in der momentanen

Meridianebene nach der Erdaxe hin gerichtet, s senkrecht auf der Ebene, xy entgegengesetzt der Drehung der Erde.

Sei t die vom Anfang der Bewegung an verflossene Zeit, T die Dauer eines Sternentages, setzten wir ferner $\frac{2\pi}{T} = m$.

Es machen dann die Axen s und w den Winkel mt, da die Bewegung der Meridianebene eine gleichmässige ist, und in Zeit T 2π beträgt. Es ist dann, wenn wir den Winkel zwischen u und x u. s. w. bezüglich mit (u, x), (u, y) ... bezeichnen:

$$(u, x) = a,\ (u, y) = R + a,\ (u, s) = R.$$

$$\cos(v, x) = \cos mt \sin a,\quad \cos(v, y) = \cos mt \cos a,\quad \cos(v, z) = -\sin mt$$
$$\cos(w, x) = \sin mt \sin a,\quad \cos(w, y) = \sin mt \cos a,\quad \cos(w, z) = \cos mt.$$

Woraus sich dann ergibt:

$$x = u \cos a + v \cos mt \sin a + w \sin mt \sin a$$
$$y = -u \sin a + v \cos mt \cos a + w \sin mt \cos a$$
$$z = -v \sin mt + w \cos mt.$$

Diese Gleichungen sind zu differenziiren:

$$\frac{dx}{dt} = \cos a \frac{du}{dt} + \cos mt \sin a \frac{dv}{dt} + \sin mt \sin a \frac{dw}{dt} - mv \sin mt \sin a + mw \cos mt \sin a,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin a \frac{du}{dt} + \cos mt \cos a \frac{dv}{dt} + \sin mt \cos a \frac{dw}{dt} - mv \sin mt \cos a + mw \cos mt \cos a,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\sin mt \frac{dv}{dt} + \cos mt \frac{dw}{dt} - mv \cos mt - mw \sin mt.$$

Und durch abermaliges Differenziiren:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos a \frac{d^2u}{dt^2} + \cos mt \sin a \frac{d^2v}{dt^2} + \sin mt \sin a \frac{d^2w}{dt^2} - 2m \sin a \sin mt \frac{dv}{dt}$$
$$+ 2m \sin a \cos mt \frac{dw}{dt} - m^2 v \sin a \cos mt - m^2 w \sin a \sin mt = \cos a \frac{d^2u}{dt^2}$$
$$+ \cos mt \sin a \frac{d^2v}{dt^2} + \sin mt \sin a \frac{d^2w}{dt^2} + 2m \sin a \frac{dz}{dt}$$
$$+ m^2 \sin a (x \sin a + y \cos a),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\sin a \frac{d^2u}{dt^2} + \cos mt \cos a \frac{d^2v}{dt^2} + \sin mt \cos a \frac{d^2w}{dt^2} - 2m \cos a \sin mt \frac{dv}{dt}$$
$$+ 2m \cos a \cos mt \frac{dw}{dt} - m^2 v \cos mt \cos a - m^2 w \sin mt \cos a = -\sin a \frac{d^2u}{dt^2}$$
$$+ \cos mt \cos a \frac{d^2v}{dt^2} + \sin mt \cos a \frac{d^2w}{dt^2} + 2m \cos a \frac{dz}{dt}$$
$$+ m^2 \cos a (x \sin a + y \cos a),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\sin mt \frac{d^2v}{dt^2} + \cos mt \frac{d^2w}{dt^2} - 2m \cos mt \frac{dv}{dt} - 2m \sin mt \frac{dw}{dt} + m^2 v \sin mt$$
$$- m^2 w \cos mt = -\sin mt \frac{d^2v}{dt^2} + \cos mt \frac{d^2w}{dt^2} - 2m \left(\sin a \frac{dx}{dt} + \cos a \frac{dy}{dt}\right) + m^2 z.$$

Zerlegt man nun mittels dieser Hülfeformeln die nach u, v, w stattfindenden Geschwindigkeitszuwachse nach den Axen x, y, z, so ergibt sich:

Nach x:

$$\cos a \frac{d^2u}{dt^2} + \cos mt \sin a \frac{d^2v}{dt^2} + \sin mt \sin a \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} - 2m \sin a \frac{dz}{dt}$$
$$- m^2 \sin a (x \sin a + y \cos a).$$

Nach y:

$$-\sin a \frac{d^2u}{dt^2} + \cos mt \cos a \frac{d^2v}{dt^2} + \sin mt \cos a \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - 2m \cos a \frac{dz}{dt}$$
$$- m^2 \cos a (x \sin a + y \cos a).$$

Digitized by Google

Nach z:

$$-\sin mt\frac{d^2v}{dt^2}+\cos mt\frac{d^2w}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}+2m\left(\sin a\frac{dx}{dt}+\cos a\frac{dy}{dt}\right)-m^2z.$$

Es sind nun folgende Kräfte thätig.

A) Die durch die Drehung der Erde hervorgebrachte Centrifugalkraft.

Denken wir uns die Punkte P und Q zunächst frei von einander, so nimmt P an der Drehung der Erde Theil. Da es aber auf die relative Bewegung von Q in Bezug auf P, und die Meridianebene in der sich P befindet, ankommt, so kann man statt dessen die relative Bewegung substituiren, die Q von P entfernt, diese wird in dem auf die Erdaxe senkrechten Kreise stattfinden, die zugehörige Centrifugalkraft ist also ebenfalls senkrecht auf derselben. Da jedenfalls anzunehmen ist, dass die Punkte P und Q demselben Ortsmeridian angehören, so ist die in P wirkende Centrifugalkraft der angenommenen in Q gleich gerichtet. Die erstere aber macht mit den Axen der x und y bezüglich die Winkel $R+a$ und $2R-a$. Ist also K ihre Grösse, so sind ihre nach den Axen x und y genommenen Coponenten bezüglich:

$$-K\sin a \text{ und } K\cos a,$$

ist r der Radius der Erde, also $r\sin a$ der Radius des Kreises in welchem die Drehung des Punktes erfolgt, so ist:

$$K=\frac{4\pi^2 r\sin a^2}{T^2}.$$

B) Die nach der Richtung der x wirkende Schwere.

C) Die von P nach Q gerichtete Spannung, die wir mit U bezeichnen.

Sei $PQ=l$ die Länge des Pendels, so sind wenn x, y, z die Coordinaten sind, die Componenten von U nach den Axen der x, y, z bezüglich:

$$\frac{Ux}{l},\ \frac{Uy}{l},\ \frac{Uz}{l}.$$

D) Mit diesen Kräften kann man noch verbinden den Luftwiderstand, $-W$, den wir aber wegen der geringen relativen Geschwindigkeit von Q der relativen Geschwindigkeit dieses Punktes proportional nehmen, so dass derselbe zu Componenten nach den Axen der x, y, z hat:

$$-W\frac{dx}{dt},\ -W\frac{dy}{dt},\ -W\frac{dz}{dt}.$$

Aus diesen Entwicklungen erhält man nun die Gleichungen der relativen Bewegung des Punktes Q.

1) $$\frac{d^2x}{dt^2}-2m\sin a\frac{dz}{dt}-m^2\sin a(x\sin a+y\cos a)=-K\sin a+g+\frac{Ux}{l}-W\frac{dx}{dt},$$

2) $$\frac{d^2y}{dt^2}-2m\cos a\frac{dz}{dt}-m^2\cos a(x\sin a+y\cos a)=-K\cos a+\frac{Uy}{l}-W\frac{dy}{dt},$$

3) $$\frac{d^2z}{dt^2}+2m\left(\frac{dx}{dt}\sin a+\frac{dy}{dt}\cos a\right)-m^2z=\frac{Uz}{l}-W\frac{dz}{dt}.$$

Um die Integration auszuführen, berücksichtigen wir jetzt, dass bei kleinen Schwingungsweiten $x=l$ gesetzt werden, dass ferner $m=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}$ und $\frac{dz}{dt}$ gegen $g=31$ nur sehr klein sind, dass man daher $m\frac{dz}{dt}$ und m^2 gegen g vernachlässigen kann. Wir führen ferner statt g die reducirte Schwere $G=g-K\sin a$ ein und setzen $n=m\cos a$. Die erste Gleichung wird dann:

$$-U=G$$

und indem wir diesen Werth unter Berücksichtigung der gemachten Annahmen in die zweite und dritte Gleichung einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2n\frac{dz}{dt}=-K\cos a-\frac{Gy}{l}-W\frac{dy}{dt}$$

Digitized by Google

oder wenn wir setzten:

$$y_1 = y + \frac{lK\cos\alpha}{g}$$

4) $$\frac{d^2y_1}{dt^2} = 2n\frac{dz}{dt} - \frac{Gy_1}{l} - W\frac{dy_1}{dt}$$

und

5) $$\frac{d^2z}{dt^2} + 2n\frac{dy_1}{dt} = -\frac{Gz}{l} - W\frac{dz}{dt}.$$

Der Ausdruck $n\frac{dz}{dt}$ ist der Symmetrie wegen in Gleichung 4) beibehalten worden.

Die beiden linearen Gleichungen 4) und 5) lassen sich leicht auflösen. Wir ersetzen sie durch das System:

$$\frac{dy_1}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

$$\frac{dy'}{dt} = 2nz' - \frac{Gy_1}{l} - Wy'$$

$$\frac{dz'}{dt} = -2ny' = \frac{Gz}{l} - Wz'$$

Gemäss der gewöhnlichen Methode für die Auflösung linearer Gleichungen ist zu setzen, wenn α, β, γ Constanten sind:

$$z' = \alpha z, \quad y_1 = \beta z, \quad y' = \gamma z,$$

woraus dann folgt:

$$\beta\frac{dz}{dt} = \gamma z, \quad \frac{dz}{dt} = \alpha z,$$

$$\gamma\frac{dz}{dt} = \left(2n\alpha - \frac{\beta G}{l} - W\gamma\right)z$$

$$\alpha\frac{dz}{dt} = \left(-2n\gamma - \frac{G}{l} - W\alpha\right)z$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{2n\alpha - \frac{\beta G}{l} - W\gamma}{\gamma} = -\frac{2n\gamma + \frac{G}{l} + W\alpha}{\alpha},$$

d. h.:

$$\gamma = \alpha\beta, \quad \alpha^2\beta = 2n\alpha - \frac{\beta G}{l} - W\alpha\beta, \quad \alpha^2 = -2n\alpha\beta - \frac{G}{l} - W\alpha.$$

Setzt man den aus der dritten Gleichung sich ergebenden Werth von β:

$$\beta = -\frac{\frac{G}{l} + W\alpha + \alpha^2}{2n\alpha}$$

in die zweite ein, so hat man:

$$-\frac{\alpha}{2n}\left(\frac{G}{l} + W\alpha + \alpha^2\right) = 2n\alpha + \frac{G\left(\frac{G}{l} + W\alpha + \alpha^2\right)}{2nl\alpha} + \frac{W}{2n}\left(\frac{G}{l} + W\alpha + \alpha^2\right).$$

Setzt man noch $k^2 = \frac{G}{l}$, so nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$(\alpha^2 + W\alpha + k^2)^2 = -4n^2\alpha^2,$$

oder:

$$\alpha^2 + (W \mp 2ni)\alpha + k^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{-W}{2} \pm ni + \sqrt{\left(\frac{W}{2} \mp ni\right)^2 - k^2}.$$

Wir schon früher dürfen wir uns aber auch hier die Vernachlässigung von n^2 gestatten. Zugleich wollen wir die kleinen Ausdrücke nW und W^2, (W wurde ebenfalls als sehr klein angenommen), weglassen. Dies gibt:

Digitized by Google

$$\alpha = -\frac{W}{2} \pm (n \pm h)\,i,$$

wo die doppelten Vorzeichen so zu verstehen sind, dass jedes der beiden ersten mit jedem der beiden letzten verbunden werden kann, sich somit vier Werthe von α ergeben. Man hat nun:

$$\beta = -\frac{h^2 + W\alpha + \alpha^2}{2n\alpha} = \mp\frac{2nac}{2n\alpha} = \mp i;$$

wo das obere oder untere Zeichen dem Zeichen von n in dem Werthe von α entspricht.

Es ist ferner:

$$\gamma = \alpha\beta = \pm\frac{Wi}{2} + n \pm h.$$

Woraus sich dann folgendes Schema ergibt:

$$\alpha_1 = -\frac{W}{2} + (n+h)i, \quad \beta_1 = -i, \quad \gamma_1 = n + h + \frac{Wi}{2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{W}{2} + (n-h)i, \quad \beta_2 = -i, \quad \gamma_2 = n - h + \frac{Wi}{2},$$

$$\alpha_3 = -\frac{W}{2} - (n+h)i, \quad \beta_3 = i, \quad \gamma_3 = n + h - \frac{Wi}{2},$$

$$\alpha_4 = -\frac{W}{2} - (n-h)i, \quad \beta_4 = i, \quad \gamma_4 = n - h - \frac{Wi}{2}.$$

Man hat nun die Auflösung unserer Gleichungen durch die Formeln:

$$\frac{dz}{dt} = \alpha z,$$

$$z = e^{\alpha t}.$$

Oder vielmehr wenn man alle vier Werthe von α einführt:

$$z = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 e^{\alpha_3 t} + A_4 e^{\alpha_4 t}$$

hiersu kommen dann:

$$z' = \alpha e^{\alpha t},$$

und mit Berücksichtigung aller Werthe von α:

$$z' = \alpha_1 A_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 A_2 e^{\alpha_2 t} + \alpha_3 A_3 e^{\alpha_3 t} + \alpha_4 A_4 e^{\alpha_4 t}$$

ebenso:

$$y_1 = \beta_1 A_1 e^{\alpha_1 t} + \beta_2 A_2 e^{\alpha_2 t} + \beta_3 A_3 e^{\alpha_3 t} + \beta_4 A_4 e^{\alpha_4 t}$$

$$y' = \gamma_1 A_1 e^{\alpha_1 t} + \gamma_2 A_2 e^{\alpha_2 t} + \gamma_3 A_3 e^{\alpha_3 t} + \gamma_4 A_4 e^{\alpha_4 t}.$$

Wo die A willkürliche Constanten sind. Mit Einführung der Werthe für die übrigen Constanten, und einer Substitution für die A zur Vermeidung des Imaginären erhält man:

6) $z = e^{-\frac{Wt}{2}} [C_1 \cos(n+h)t + C_2 \sin(n+h)t + C_3 \cos(n-h)t + C_4 \sin(n-h)t].$

Wo gesetzt wurde:

$$C_1 = (A_1 + A_3), \quad C_2 = i(A_1 - A_3),$$
$$C_3 = (A_2 + A_4), \quad C_4 = i(A_2 - A_4).$$

Durch diese Substitutionen ergibt sich dann:

7) $y_1 = e^{-\frac{Wt}{2}} [-C_2 \cos(n+h)t + C_1 \sin(n+h)t - C_4 \cos(n-h)t + C_3 \sin(n-h)t].$

Wosu dann noch kommen:

Digitized by Google

$$8)\quad x' = e^{-\frac{Wt}{2}}\left[\left(-\frac{W}{2}C_1+(n+h)C_2\right)\cos(n+h)t-\left(\frac{W}{2}C_2+(n+h)t\right)\sin(n+h)t\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{W}{2}C_3+(n-h)C_4\right)\cos(n-h)t-\left(\frac{W}{2}C_4+(n-h)C_3\right)\sin(n-h)t\right],$$

$$9)\quad y' = e^{-\frac{Wt}{2}}\left[\left(\frac{W}{2}C_2+(n+h)C_1\right)\cos(n+h)t+\left(-\frac{W}{2}C_1+(n+h)C_2\right)\sin(n+h)t\right.$$
$$\left.+\left(\frac{W}{2}C_4+(n-h)C_3\right)\cos(n-h)t+\left(-\frac{W}{2}C_3+(n-h)C_4\right)\sin(n-h)t\right].$$

Die Gleichungen 8) und 9) ergeben sich entweder direct oder durch Differenziiren von 6) und 7). Zur Bestimmung der vier Constanten bemerken wir zunächst, dass im Anfange der Bewegung die Geschwindigkeit also sowohl y' als x' der Null gleich ist. Dies gibt mittels der Gleichungen 8) und 9):

$$0 = -\frac{W}{2}C_1+(n+h)C_2-\frac{W}{2}C_3+(n-h)C_4,$$
$$0 = -\frac{W}{2}C_2+(n+h)C_1+\frac{W}{2}C_4+(n-h)C_3.$$

Mögen noch η und ζ die Anfangswerthe von y_1 und z sein. Die Gleichungen 6) und 7) ergeben dann:

$$\zeta = C_1+C_3, \quad \eta = -C_2-C_4.$$

Die letzten vier Gleichungen geben:

$$0 = -\frac{W}{2}\zeta - n\eta + h(2C_2+\eta)$$
$$0 = -\frac{W}{2}\eta + n\zeta + h(2C_1-\zeta),$$

woraus dann folgt:

$$C_2 = \frac{\frac{W}{2}\zeta+(n+h)\eta}{2h}, \quad C_1 = \frac{\frac{W}{2}\eta-(n-h)\zeta}{2h}$$
$$C_4 = -\frac{\frac{W}{2}\zeta+(n-h)\eta}{2h}, \quad C_3 = \frac{-\frac{W}{2}\eta+(n+h)\zeta}{2h}.$$

Woraus dann die Werthe von y_1 und z sich ergeben:

$$10)\quad y_1 = e^{-\frac{Wt}{2}}\left(\eta\cos nt\cos ht+\frac{W\zeta+2n\eta}{2h}\sin nt\sin ht+\zeta\sin nt\cos ht\right.$$
$$\left.+\frac{W\eta-2n\zeta}{2h}\cos nt\sin ht\right),$$

$$11)\quad z = e^{-\frac{Wt}{2}}\left(\zeta\cos nt\cos ht-\frac{W\eta-2n\zeta}{2h}\sin nt\sin ht-\eta\sin nt\cos ht\right.$$
$$\left.+\frac{W\zeta+2n\eta}{2h}\cos nt\sin ht\right).$$

Sei jetzt (Fig. 311) PS die Zenithlinie, SPT die Merianebene des Ortes, PQ die Lage des Pendels, $PQ = l$. Möge Ebene PTQ mit der Verlängerung von PTS den Winkel ϑ machen, und sei Winkel $QPT = \varphi$, Winkel $SPT = \alpha$. Es ist dann offenbar:

$$x = l\sin\varphi\sin\vartheta, \quad y = l\sin\varphi\cos\vartheta\cos\alpha - l\cos\varphi\sin\alpha.$$

Was den Winkel α anbetrifft, so bestimmen wir ihn derart, dass

Digitized by Google

$$\frac{K\cos\alpha}{G} = \sin\alpha$$

ist, es wird dann α nur sehr klein sein,

Fig. 311.

da $\frac{K\cos\alpha}{G}$ ebenfalls sehr klein war, und da nun der Ausweichungswinkel φ ebenfalls nur klein ist, werden $l\cos\varphi\sin\alpha$ und $l\sin\varphi\cos\vartheta\cos\alpha$ nur um eine Grösse dritter Ordnung von $l\sin\varphi\cos\vartheta$ und $l\sin\alpha$ abweichen. Da man nun hat:

$$y_1 = y + l\sin\alpha,$$

so ist auch:

$$y_1 = l\sin\varphi\cos\vartheta,$$
$$z = l\sin\varphi\sin\vartheta.$$

Sind φ_1, ϑ_1 die Anfangswerthe von φ und ϑ, so ist:

$$\eta = l\sin\varphi_1\cos\vartheta_1,$$
$$\zeta = l\sin\varphi_1\sin\vartheta_1$$

und somit:

$$12)\quad \sin\varphi\cos\vartheta = e^{-\frac{Wt}{2}}\sin\varphi_1\Big[\cos(nt-\vartheta_1)\Big(\cos kt + \frac{W}{2k}\sin kt\Big) + \frac{n}{k}\sin(nt-\vartheta_1)\sin kt\Big],$$

$$13)\quad \sin\varphi\sin\vartheta = e^{-\frac{Wt}{2}}\sin\varphi_1\Big[-\sin(nt-\vartheta_1)\Big(\cos kt + \frac{W}{2k}\sin kt\Big) + \frac{n}{k}\cos(nt-\vartheta_1)\sin kt\Big].$$

Diese Gleichungen geben den Ausweichungswinkel φ, von PT aus gezählt, welche Linie mit der Zenithrichtung nur einen kleinen Winkel α macht, und den Winkel ϑ, welchen die durch PT und das Pendel gelegte Ebene mit der Meridianebene macht.

Führen wir aber statt des Winkels ϑ, den Winkel $\tau = \vartheta_1 - \vartheta$ ein, welchen die momentane durch PT gehende Schwingungsebene mit ihrer anfänglichen Richtung macht, so erhalten wir, wenn wir die Gleichungen 12) und 13) bezüglich mit $\cos\vartheta_1$ und $\sin\vartheta_1$ multipliciren und addiren:

$$14)\quad \sin\varphi\cos\tau = e^{-\frac{Wt}{2}}\sin\varphi_1\Big[\Big(\cos kt + \frac{W}{2k}\sin kt\Big)\cos nt + \frac{n}{k}\sin nt\sin kt\Big]$$

und wenn wir 12) und 13) bezüglich mit $\sin\vartheta_1$ und $\cos\vartheta_1$ multipliciren und subtrahiren:

$$15)\quad \sin\varphi\sin\tau = e^{-\frac{Wt}{2}}\sin\varphi_1\Big[\Big(\cos kt + \frac{W}{2k}\sin kt\Big)\sin nt - \frac{n}{k}\cos nt\sin kt\Big].$$

Also:

$$16)\quad \operatorname{tg}\tau = \frac{\operatorname{tg} nt - \dfrac{n\operatorname{tg} kt}{k + \dfrac{W}{2}\operatorname{tg} kt}}{1 + \dfrac{n\operatorname{tg} nt\operatorname{tg} kt}{k + \dfrac{W}{2}\operatorname{tg} kt}}.$$

Erhebt man 14) und 15) ins Quadrat und addirt so kommt:

$$17)\quad \sin\varphi = e^{-\frac{Wt}{2}}\sin\varphi_1\sqrt{\Big(\cos kt + \frac{W}{2k}\sin kt\Big)^2 + \frac{n^2}{k^2}\sin kt^2}$$

Digitized by Google

oder wenn man wie schon früher n^2 nnd W^2 vernachlässigt:

$$18) \qquad \sin\varphi = e^{-\frac{Wt}{2}} \sin\varphi_1 \left(\cos ht + \frac{W}{2h}\sin ht\right),$$

und unter gleicher Annahme gibt die Formel 16):

$$19) \qquad \operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg} nt - \frac{n \operatorname{tg} ht}{h + \frac{W}{2}\operatorname{tg} ht} \cdot \frac{1}{(\cos nt)^2}.$$

Hier sind jedoch die Werthe auszuschliessen, die nt oder ht gleich einem ungraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ machen, Was die letztere anbetrifft, so geben sie wegen des kleinen W noch Formel 18) solche Werthe von φ, welche der Null nahe kommen, und in diesem Falle ist eine Messung des Winkels τ überhaupt unthunlich. — Die Formel 18) bestätigt das gewöhnliche Pendelgesetz, dass die Schwingungsdauer gleich $\frac{2\pi}{h} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, also der Wurzel aus der Pendellänge proportional ist. Wenn man in den Gleichungen 16) oder 19) noch das kleine n vernachlässigt, so kommt: $\tau = nt$, also folgendes Gesetz:

„Die Schwingungsebene des Pendels dreht sich in gleichmässiger Bewegung um die feste Linie PT, welche in der Meridianebene liegt, und der Richtung der Schwere sehr nahe ist."

Eine vollständige Drehung wird in der Zeit:

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{T}{\cos a} = \frac{T}{\sin b},$$

wo b die Breite des Ortes, T die Dauer eines Sternentages ist. Man hat also das zweite Gesetz:

„Unter verschiedenen Breiten sind die Zeiten, in welchem eine vollständige Drehung erfolgt dem Cosinus der Breite proportional."

Unter dem Pole ist also die Schwingungsdauer 24 Stunden, im Aequator unendlich gross, d. h. das Pendel bleibt immer in derselben Schwingungsebene für Berlin ist $b = 52° 30'$, $\sin b = 0{,}793$, für Paris ist $b = 48° 50'$, $\sin b = 0{,}753$. Die Dauer einer Drehung ist also für Berlin:

$$\frac{24}{0{,}793} \text{ Stunden} = 30 \text{ Stunden},$$

für Paris:

$$\frac{24}{0{,}753} \text{ Stunden} = 31 \text{ Stunden } 52 \text{ Minuten}.$$

Für den Fall wo $nt = \frac{\pi}{2}$ oder gleich $\frac{3\pi}{2}$ ist. würde das Weglassen von n sich nicht rechtfertigen. In diesem Falle aber ist: $\operatorname{tg} nt = \infty$, also nach Formel 16):

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{h + \frac{W}{2}\operatorname{tg} ht}{n \operatorname{tg} ht}.$$

Wegen des sehr kleinen n kann man $\operatorname{tg}\tau = \infty$, also τ bezüglich gleich $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ setzen, so dass man auch in diesem Falle abgekürzt $t = nt$ setzen kann.

Die Grösse n war gleich: $\frac{2\pi}{T}\cos a$, also:

$$n = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\cos a = 0{,}00073 \cos a.$$

Was den Winkel α betrifft, so war:

$$\sin\alpha = \frac{K\cos a}{G} = \frac{4\pi^2 r \sin a \cos a}{GT^2} = \frac{2\pi^2 r \sin 2a}{GT_1},$$

also:

$$\sin\alpha = 0{,}0000073 \sin a,$$

woraus sich dann im Maximum α ein Werth von weniger als 2 Secunden ergibt, so dass in jedem Falle, die Linie PT als die Zenithrichtung betrachtet werden kann. Bemerkenswerth ist es, dass bei Vernachlässigung des mit n multiplicirten Gliedes die Lage der Schwingungsebene von der Einwirkung des Luftwiderstandes unabhängig wird.

4) Theorie des gewöhnlichen Raumpendels unter Anwendung der elliptischen Funktionen.

Weierstrass hat gezeigt, dass dieses wie ähnliche der Mechanik entnommene Probleme sich leichter vollständig lösen lassen, wenn man rechtwinklige Coordinaten beibehält, als wenn von den in Abschnitt 2) gegebenen Formeln mit

Digitized by Google

Polarcoordinaten ausgegangen wird, wie dies sonst auch bei der vollständigen Auflösung geschah.

Gehen wir daher von den in Abschnitt 2) entwickelten Formeln aus:

1) $$\frac{dx^2+dy^2+ds^2}{dt} = c+2gz,$$

2) $$xdy - ydx = c'dt,$$

3) $$dt = \frac{-adz}{\sqrt{(a^2-z^2)(c+2gz)-c'^2}}$$

wir setzen:

$$Z = (a^2-z^2)(c+2gz) - c'^2 = -2g(z-\alpha)(z-\beta)(z+\gamma).$$

Die Gleichung $Z=0$ hat drei Wurzeln α, β, $-\gamma$. Von diesen wird eine $-\gamma$, nothwendig negativ und absolut genommen grösser als a sein. Denn für

$$z = -a \text{ ist } Z = -c'^2,$$

und für

$$z = -\infty \text{ ist } Z = +\infty,$$

so dass in diesen Grenzen Z wenigstens einmal verschwinden muss.

Was die Wurzeln α und β anbetrifft, so ist:

$$\frac{dZ}{dz} = 2g(a^2-z^2) - 2z(c+2gz) = 2ga^2 - 2cz - 6gz^2.$$

Damit dieser Ausdruck gleich Null sei, ist zu setzen:

$$z = -\frac{c}{6g} \pm \sqrt{\frac{c^2}{36g^2}+\frac{a^2}{3g}}.$$

Von diesen Wurzeln ist die eine positiv, die andere negativ, so dass die Gleichung $Z=0$ ein positives Maximum und ein negatives Minimum hat. Im Uebrigen ist Z negativ, wenn z grösser als a ist, und wird positiv sein so lange z zwischen α und β liegt, also sind α und β entweder negativ oder kleiner als a. Es muss aber eine der Wurzeln, also α, wenn wir hiermit immer die grösseste bezeichnen, positiv sein, da das Maximum von Z positiv ist. Die andere β kann positiv oder negativ sein. Durch Vergleich der beiden Formen von Z aber erhält man:

$$\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta = a^2,$$

also, wenn β negativ und gleich $-\beta_1$ ist:

$$\alpha\gamma - \beta_1\gamma + \alpha\beta_1 = a^2.$$

Wäre nun β_1 grösser als a, und zwar $= a+\nu$, so erhielte man:

$$-\nu\gamma + a^2 + a\nu = a^2,$$

welches, da γ grösser als α ist, jedenfalls einen Ausdruck geben würde, der kleiner als a^2 ist, und dies ist unmöglich, da α kleiner als a ist. Es muss also, mag β negativ oder positiv sein, dieser Ausdruck vom Vorzeichen abgesehen, kleiner als α werden. In Gleichung 3) ist der Nenner gleich $\sqrt{Z}$. Dieser Ausdruck aber ist nur reell, so lange z zwischen β und α liegt, und z kann somit diese Grenzen nicht überschreiten. — Wir setzen jetzt:

$$w = \frac{\alpha - z}{\alpha - \beta}, \quad k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma},$$

dann wird w immer in den Grenzen Null und Eins liegen, und auch k ein ächter Bruch sein. Führt man auch in Z den Ausdruck W ein, so ergibt sich:

$$Z = 2g(\alpha-\beta)^2(\alpha+\gamma)w(1-w)(1-k^2w).$$

Die Gleichung 3) gibt nun:

$$dt = \frac{adw}{\sqrt{2g(\alpha+\gamma)w(1-w)(1-k^2w)}}$$

und hieraus ergibt sich bekanntlich:

4) $$w = sn^2\left(\frac{\sqrt{\alpha-\beta}\sqrt{g}}{k\sqrt{2}}(t-t_0)\right),$$

wo das Gudermannsche Zeichen

$$sn u = \sin amu$$

gewählt, und k der Modul ist, t_0 ist derjenige Werth von t, für welchen $w=0$, also $z=\alpha$ ist.

Es ist ferner identisch:

$$\frac{d(x+yi)}{x+yi} = \frac{xdx+ydy+i(xdy-ydy)}{x^2+y^2}$$

und wnnn man mittels der Gleichung 2) und der Gleichungen:

$$x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad xdx+ydy+zdz = 0$$

substituirt:

5) $$dlg(x+yi) = \frac{-zdz+ic'dt}{a^2+z^2}.$$

Da z immer kleiner als a ist, so wird der Nenner rechts nie gleich Null.

Wir setzen nun:

$$a = +\alpha - (\alpha-\beta)w_1, \quad -a = +\alpha - (\alpha-\beta)w_2$$

wo w_1 und w_2 Constanten sind, von denen die erstere negativ, die letztere positiv sein wird; dann ist:

$$z - a = -(\alpha-\beta)(w-w_1)$$

und

$$z + a = -(\alpha-\beta)(w-w_2).$$

Google

Die Gleichung 5) giebt nun augenblicklich:

$$6) \qquad d\lg(x+yi) = \tfrac{1}{2}\frac{dz+\frac{ic'}{a}dt}{z+a} + \tfrac{1}{2}\frac{dz-\frac{ic'}{a}dt}{z-a}.$$

Wir setzen noch:

$$4w(1-w)(1-k^2w) = W,$$

also:

$$Z = \tfrac{1}{2}g(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)^2 W$$

für $z=a$ wird $w=w_1$, und für $z=-a$, $w=w_2$. Berücksichtigen wir, dass für $z=\pm a$, $Z=-c'^2$ wird, und setzen wir den entsprechenden Werth von W gleich W_1 so erhalten wir:

$$-c'^2 = \tfrac{1}{2}g(\alpha+g)(\alpha-\beta)^2 W_1,$$

also:

$$7) \qquad d\lg(x+yi) = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{w_1}{w}}\right)\frac{dw}{w-w_1} + \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{w_1}{w}}\right)\frac{dw}{w-w_2}$$

$\sqrt{w_1}$ ist imaginär. Welcher der beiden Werthe zu nehmen sei darüber kann kein Zweifel entstehen, da dieser Werth mit ic' in Bezug auf das Zeichen übereinstimmen muss.

Wir setzen nun:

$$u = \frac{\sqrt{(\alpha-\beta)g}}{k\sqrt{g}}(t-t_0),$$

und erhalten:

$$w = sn^2u, \quad W = 4\,sn^2u\,cn^2u\,dn^2u,$$

offenbaa ist w_1 immer negativ, w_2 positiv grösser als Eins. Beide Ausdrücke aber sind, abgesehen vom Vorzeichen kleiner als $\frac{1}{k^2}$.

Setzen wir also:

$$w_2 = sn^2(K+iv_2) = \frac{cn^2iv_2}{dn^2iv_2} = \frac{1}{dn^2(v_2,k')},$$

wo k' das Complement des Moduls k ist. In den Ausdrücken, wo der Modul nicht genannt ist, wird immer k als solcher vorausgesetzt.

Während v_2 zwischen Null und K' liegt, wird $dn(v_2,k')$ zwischen 1 und k liegen, so dass v_2 immer als eine positive Grösse, welche kleiner als K' ist, bestimmt werden kann.

Es sei nun:

$$w_1 = sn^2(iK'+iv_1) = \frac{-cn^2(v_1,k')}{k^2sn^2(v_1,k')}.$$

Dieser Ausdruck wird gleich Null für $v_1=+K'$ und gleich $-\infty$ für $v_1=0$, also ist auch v_1 eine Grösse, von der man annehmen kann, dass sie immer zwischen Null und K' liege.

Es ist nun ferner:

$$W_1 = 4sn^2(iK'+iv_1)\,cn^2(iK'+iv_1)\,dn^2(iK'+iv_1)$$
$$= 4sn^2(K+iv_2)\,cn^2(K+iv_2)\,dn^2(K+iv_2),$$

oder:

$$W_1 = \frac{-4\,dn^2(v_1,k')\,cn^2(v_1,k')}{k^4sn^6(v_1,k')} = \frac{-4k'^2sn^2(v_2,k')\,cn^2(v_2,k')}{dn^6(v_2,k')}.$$

Woraus sich eine Relation zwischen v_1 und v_2 ergibt, nämlich:

$$\frac{dn(v_1,k')\,cn(v_1,k')}{sn^3(v,k')} = \frac{k^2k'sn(v_2,k')\,cn(v_2,k')}{dn^3(v_2,k')}.$$

Da nun $dw = 2\,sn\,cn\,dn\,du$ ist, so gibt die Gleichung 7):

Digitized by Google

8) $d\lg(x+yi) = d\lg\sqrt{w-w_1} + d\lg\sqrt{w-w_2} + \frac{sn u_2\, cn u_2\, dn u_2\, du}{sn^2 u_2 - sn^2 u} - \frac{sn u_1\, cn u_1\, dn u_1\, du}{sn^2 u_1 - sn^2 u}$,

wo gesetzt ist:

$$u_2 = K + iv_2, \quad u_1 = K' + iv_1.$$

Mit Hülfe der bekannten Formel:

$$\int_0^x \frac{sn a\, cn a\, dn a\, da\, dx}{sn^2 a - sn^2 x} = \frac{-x\,\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{H(a+x)}{H(a-x)}.$$

Wo H und Θ die von Jacobi eingeführten Funktionen sind, erhält man:

$$\lg(x+yi) = \lg C + \lg\sqrt{(w-w_1)(w-w_2)} + u\frac{\Theta'(u_1)}{\Theta(u_1)} - u\frac{\Theta'(u_2)}{\Theta(u_2)} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{H(u_2+u)\,H(u_1-u)}{H(u_2-u)\,H(u_1+u)}.$$

Sei noch x_0, y_0 die Werthe von x, y, für $t = t_0$, also für $u = 0$ und

$$\frac{\Theta(u_2)}{\Theta(u_1)} - \frac{\Theta(u_2)}{\Theta(u_2)} = Ai.$$

Berücksichtigen wir ferner die Formeln:

$$\sqrt{(w-w_1)(w-w_2)} = \sqrt{(sn^2 u - sn^2 u_1)(sn^2 u - sn^2 u_2)}$$

$$sn_2 z - sn_2 a = \frac{2k'K}{\pi k}\,\frac{H(a+z)\,H(a-z)}{\Theta^2(a)\,\Theta^2(z)},$$

also:

$$\sqrt{(w-w_1)(w-w_2)} = \frac{2k'K}{\pi k}\,\frac{\sqrt{H(u+u_1)\,H(u+u_2)\,H(u_1-u)\,H(u_2-u)}}{\Theta(u_1)\,\Theta(u_2)\,\Theta^2(u)},$$

so ergibt sich:

I) $$\frac{x+yi}{x_0+y_0 i} = e^{Aui}\,\frac{\Theta^2(0)\,H(u_2+u)\,H(u_1-u)}{H(u_2)\,H(u_1)\,\Theta^2(u)}.$$

Wir bemerken noch, dass wie man leicht durch Einsetzen der Werthe von u_1 und u_2 ersieht, A eine reelle Zahl ist. Die Gleichung in Verbindung mit:

II) $$z = \alpha - (\alpha-\beta)\,w = \alpha - (\alpha-\beta)\,sn^2 u$$

löst die Aufgabe vollständig und es ist:

$$u = \frac{\sqrt{g(\alpha-\beta)}}{k\sqrt{2}}(t-t_0), \quad Ai = \frac{\Theta'(u_1)}{\Theta(u_1)} - \frac{\Theta'(u_2)}{\Theta(u_2)}.$$

Trennt man in der Formel I) das Reelle vom Imaginären, so ergeben sich für x und y Ausdrücke von der Form:

$$x = p\cos Au - q\sin Au, \quad y = p\sin Au + q\cos Au,$$

wo p, p, ebenso wie z periodische Funktionen von u mit derselben Periode sind.

Sind jetzt p, q, zwei neue Axen in der Ebene der x, y, so ist klar aus den gegebenen Ausdrücken, dass diese Axen sich um die der z mit constanter Geschwindigkeit drehen, und der schwingende Punkt hat in Bezug auf die Axen p, q, z eine periodische Bewegung.

Raute (Rhombus).

Ein Parallellogramm, dessen Seiten alle gleich sind, ohne dass die Winkel wie beim Quadrate Rechte sind.

Reaction, Gegenwirkung (Mechanik).

So wird im Allgemeinen die dynamische Wirkung genannt, welche ein Punkt

oder Körper B auf einen andern A ausübt, wenn man die Wirkung, welche A auf B ausübt, als Action bezeichnet. Der Hauptsatz der Mechanik als physikalische Wissenschaft ist die Gleichheit der Action und Reaction. Dieser Satz lautet:

„Wenn ein Punkt oder Körper A auf einen andern B eine Einwirkung α ausübt, so ist die Einwirkung von B auf A gleich $-\alpha$, d. h. dem absoluten Werthe nach der ersteren gleich, aber der Richtung nach ihr entgegengesetzt."

Reaction der Flüssigkeiten (Hydrodynamik).

Wenn durch eine Oeffnung eines gefüllten Gefässes ein Theil der Flüssigkeit ausfliesst, so muss dies natürlich eine Rückwirkung auf den Druck der Flüssigkeit gegen die Gegenwände ausüben, d. h. denselben vermindern. Diese Verminderung wird eben Reaction genannt. Setzt der Druck das Gefäss, wenn die Oeffnung geschlossen ist, in Gleichgewicht, so muss nach derem Eröffnen eine Bewegung des Gefässes erfolgen, und zwar, da ein in der Ausflussrichtung befindlicher Druck beseitigt wird, in der dem Ausflusse entgegengesetzten Richtung. Dieses Prinzip liegt den Reactionsrädern zu Grunde. Die Reaction der ausfliessenden Flüssigkeit ist sehr leicht zu berechnen, wenn die Oeffnung nur klein ist. Befinde sie sich in der Höhe h unter dem Spiegel der Flüssigkeit, sei v die Geschwindigkeit des Ausflusses, F der Querschnitt der Oeffnung und q das Ausflussquantum, v_1 die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche, so ist nach einer bekannten Formel:

$$v^2 - v_1^2 = 2gh$$

wo g die Beschleunigung der Schwere ist und wie leicht zu sehen

$$q = Fv.$$

Ist noch s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so wird:

$$q\gamma = Fv\gamma$$

das Gewicht der in der Zeiteinheit ausströmende Masse, und nach der in technischen Schriften üblichen Annahme der Masseneinheit

$$\frac{q\gamma}{g} = \frac{Fv\gamma}{g},$$

diese Masse selbst sein. Es wird also eine Verminderung des Druckes oder eine Reaction stattfinden, deren absolute Grösse:

$$\frac{Qv\gamma}{g} = \frac{Fv^2\gamma}{g}$$

sein wird, wofür auch gesetzt werden kann:

$$\frac{F\gamma}{g}(v_1^2 + 2gh).$$

Im Falle, dass die Flüssigkeit auf gleicher Höhe erhalten wird, ist h constant, in jedem andern Falle veränderlich.

Die Richtung der Reaction ist wie schon gesagt der des ausfliessenden Strahles entgegengesetzt, dessen Richtung ihrerseits von der Richtung abhält, welche die Axe der als cylindrisch anzunehmenden Oeffnung hat. Bei grössere Dimensionen der Oeffnung und nicht cylindrischer Durchbohrung treten natürlich Modificationen ein.

Reactionsrad (s. Wasserrad).

Reactionsturbine (s. Turbine).

Rechenknecht.

Ein Verzeichniss der Vielfachen gewisser Zahlen, um Multiplicationen mit denselben leicht ausführen zu können. Der Division dient in ähnlicher Weise der sogenannte „umgekehrte Rechenknecht". Wir wissen den Erfinder dieses Namens leider nicht anzuführen.

Rechenkunst gleichbedeutend mit Arithmetik. — Im weiteren Sinne bezeichnet dies Wort die Lehre von den Zahlen überhaupt, sie enthält also die Arithmetik im engeren Sinne, die Algebra und Analysis in sich.

Im engeren Sinne werden mit dem Worte Rechenkunst die Elemente der Lehre von den Rechnungsoperationen verstanden. — Im engsten Sinne bezeichnet dies Wort das eigentliche Zifferrechnen, also die Anwendung des decadischen Systems entweder nur auf unbenannte Zahlen, oder als praktische Rechenkunst die Anwendung auf die im gewöhnlichen und Geschäftsleben vorkommenden Grössen und Rechnungen.

Rechenmaschine.

Ein Apparat zur mechanischen Ausführung von Zahlenrechnungen. Man kann in dies Gebiet die Rechenpfennige, Rechenstäbchen u. s. w. mit aufnehmen. In neuerer Zeit aber ist wiederholentlich versucht worden, zu diesem Zwecke grössere und künstliche Maschinen zu construiren, welche die Rechnung vollführen, und nur das Stellen der Ziffern und das der verlangten Rechnung angemessene Drehen verlangen.

Digitized by Google

Solche Maschinen erfanden Pascal, Leibnitz, L'Epine und andere. Eine der neuesten rührt von Babbage her, sie ist ausschliesslich dem Berechnen von Tafeln, d. h. dem Interpoliren gewidmet, dagegen sorgt sie zugleich für Satz und Druck der ausgeführten Tafeln, so dass die von der menschlichen Thätigkeit unzertrennlichen Fehler hierbei ausgeschlossen sind.

Rechenprobe.

Ein Verfahren, welches von der Richtigkeit einer ausgeführten Rechnung überzeugen soll. Selbstverständlich kann man sowohl bei Buchstaben als bei Zahlenrechnungen Proben anwenden. Die einfachste Probe ist die Wiederholung der ausgeführten Rechnung in veränderter Weise z. B. bei Additionen das Addiren von oben nach unten, wenn man vorher von unten nach oben addirt hat. Vorzuziehen würde allerdings noch das Nachrechnen durch einen Andern sein, natürlich nur dann, wenn man sich von der Gewissenhaftigkeit des letztern überzeugt hat. Auch können die Ausführungen der einfachen Operationen durch die entsprechenden entgegengesetzten Operationen, also die Addition durch die Subtraction, die Multiplication durch die Division und umgekehrt, geprüft werden. — Bei längeren und complicirteren Rechnungen macht sich aber das Bedürfniss fühlbar, auf eine kürzere Weise die Richtigkeit zu prüfen. — Wenn jede Rechnung als die Auflösung einer oder mehrerer Gleichungen offenbar betrachtet werden kann, so kann jede Folge aus den gegebenen Gleichungen als Probeformel dienen. Man berechnet nämlich beide Seiten der so gebildeten Probegleichung, und im Falle der Richtigkeit der Rechnung müssen dieselben übereinstimmen. Sind z. B. die drei Winkel eines Dreiecks aus den drei gegebenen Seiten etwa mittels der bekannten Formel:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

und der entsprechenden für $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ gewannen, so gibt die Formel

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ},$$

welche eine identische Folge dieser Gleichungen ist, eine passende Probe. Es ist aber bei der Bildung der Probeformeln nöthig mit Vorsicht zu verfahren. Dieselben müssen nämlich Folgerungen nicht bloss aus einzelnen Theilen der ausgeführten Rechnung, sondern aus sämmtlichen sein, weil sonst die bei der Bildung der Probegleichung übergangene, auch in keiner Weise geprüft werden. Sind z. B. eine Seite a und die Winkel α, β mithin auch γ eines Dreiecks gegeben, und handelt es sich darum die beiden andern Seiten b und c zu finden, so hat man bekanntlich:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta},\quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

also:

$$b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha},\quad c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Eine identische Folge der gegebenen Gleichung ist nun allerdings die folgende:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Setzt man aber hier die Werthe ein, so würde die Identität beider Glieder nur einen kleinen Theil der Rechnung prüfen. Denn welche Werthe auch in den Ausdrücken von b und c den Grössen $\sin\beta$ $\sin\gamma$ und $\sin\alpha$ gegeben wird, immer wird die Gleichung

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

identisch. Diese Formel verbürgt also nicht, dass die sinus in der Tafel richtig aufgeschlagen seien, sondern nur, dass die Additionen und Subtractionen, welche die logarithmische Rechnung erfordert nicht fehlerhaft sind. Dagegen wäre die Formel:

$$a=b\cos\gamma+c\cos\beta$$

eine gute Probeformel, da im Falle die Sinus falsch genommen sind, die so ermittelten Werthe von b und c diese Gleichung nicht verificiren würden.

Bei sehr langen Rechnungen ist es gut, Abschnitte zu machen, in welchem man den bereits ausgeführten Theil der Rechnung durch Proben verificirt, um nicht unnützer Weise mit dem etwa falschen Resultate weiter zu rechnen.

Wenn keine Probe eine vollständige Garantie gewährt, insofern als auch entweder die Proberechnung einen Fehler enthalten und dieser mit dem in der wirklichen Rechnung ausgeübten sich compensiren kann, oder auch die Rechnungsfehler möglicher Weise bei richtig ausgeführter Proberechnung eine Compensation bewirken, so ist dieser Fall doch bei guten Probeformeln ein sehr unwahrscheinlicher. Indess wird doch bei langwierigen Rechnungen, die aus

Digitized by Google

sehr viel einzeln zu prüfenden Theilen bestehen und auf deren Genauigkeit viel ankommt, wie z. B. bei der Berechnung von Tafeln, wo mit der Anzahl der Proben, sich auch die Wahrscheinlichkeit einer solchen Compensation steigert, nur die wiederholte Ausführung der Rechnung, wo möglich durch einen Andern und in anderer Weise, erforderlich sein. Insofern auch hier noch Irrthümer unterlaufen können, hat man in neuester Zeit die Berechnung durch Maschinen versucht, (s. Rechenmaschine) wo allerdings die in der Zerstreutheit des Ausführenden liegende Fehlerquelle vermieden ist. Eine gewisse Probe für Tafeln gewähren die Bildungen von Differenzreihen. Da man nämlich die in allen Tafeln enthaltenen Zahlen, (wenigstens insofern sie nach dem Taylorschen Satze zu entwickelnde Funktionen geben), in gewissen Grenzen als arithmetische Reihen höherer Ordnung betrachten kann, so wird man durch Bildung der ersten, zweiten Differenzreihe u. s. w. endlich zu einer Reihe gelangen, welche constante (oder vielmehr erst in grösseren Zwischenräumen, sich ändernde) Zahlen enthält, und für diejenigen Glieder, wo in den entsprechenden Differenzen eine plötzliche Aenderung eintritt, ist ein Fehler anzunehmen. Indess prüft diese Methode nie die letzte Ziffer, welche Schwankungen ausgesetzt ist, die sich jedoch nur auf eine oder einige Einheiten erstrecken. Ist also nicht die äusserste Genauigkeit erforderlich, so reicht diese Probe schon aus. Proben, ob sie nun mehr oder minder sicher sein, sind bei jeder Rechnung auch der unbedeutendsten nöthig, indem ohne dieselben keinerlei Bürgschaft übernommen werden kann. Eine ungeprüfte Rechnung ist eben so gut als gar keine, und namentlich bei längeren Rechnungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend wo gefehlt sei, viel grösser, als die dass dies nicht geschehen sei.

Eine gewisse Bürgschaft für richtiges Rechnen gewähren die sogenannte Neuner-, Eilfer- und andere Proben, welche auf den Elementen der Theorie der Congruenzen beruhen. Bekanntlich ist jede Zahl der Summe ihrer Ziffern nach dem Modul 9 congruent, d. h. beide Zahlen geben durch 9 divdiirt denselben Divisionsrest. Ist daher eine Rechnung richtig, d. h. sind beide Seiten einer Gleichung identisch und ersetzt man die einzelnen Glieder durch ihre Ziffernsumme, so müssen dieselben nach Modul 9 gleichen Rest geben. In der Ausführung dieses Satzes besteht die Neunerprobe.

Es bilden sich aus ihr für die vier Spezies folgende Regeln. Statt Summen und Differenzen nimmt man von den Ziffernsummen der einzelnen Glieder die Reste nach 9 und addirt bezüglich subtrahirt sie und bildet dann wieder den Rest nach 9. Statt der Producte nimmt man das Product der Reste der Ziffernsummen der einzelnen Faktoren. Kommen Divisionen vor, so werden die Nenner weggeschafft und wie oben verfahren.

Beispiel. Es soll gefunden werden:

$$835674 \times 27385 + 21836 - 10735.$$

Dieser Ausdruck ist gleich:

$$22884943591.$$

Bildet man nun die Ziffernsummen der einzelnen Zahlen und lässt immer die vielfachen von Neun weg, was schon während der Rechnung geschehen kann, so erhält man:

für	835674	6
für	27385	7
also für	835674×27385	
oder für	$6 \cdot 7$	6
für	21836	2
für	10735	7

also für die ganze zu berechnende Formel:

$$6 + 2 - 7 = 1.$$

Die Ziffernsumme des Resultates

$$22884943591$$

hat ebenfalls 1 zum Rest, so dass die Richtigkeit desselben insoweit feststeht, als die Neunerprobe eine Garantie zu bieten vermag. Auf denselben Grundsätzen, jedoch dem Verfahren nach etwas complicirter, ist die Eilferprobe. Addirt man von rechts an alle in den ungraden Stellen befindlichen Ziffern, und zieht die Summe der in den graden Stellen befindlichen davon ab, so hat die so gebildete Zahl denselben Rest nach Modul 11 als die gegebene Zahl. Mit den so gebildeten Probezahlen ist also ganz wie bei der Neunerprobe mit den Ziffernsummen zu verfahren.

Nehmen wir wieder das obige Beispiel, so sind die Probezahlen:

von 835674

oder von $4 + 6 + 3 - (7 + 5 + 8)$

gleich -7 oder gleich $+4$.

von 27385 gleich -5 oder $+6$,

also vom Producte der beiden Zahlen oder von 24 ist die Probezahl 2.

Für die Zahlen 21836 und 10735 erhält man bezüglich:

1 und 10,

so dass man im ganzen hat:

$$2+1-10=-7 \text{ oder } +4.$$

Die Probezahl von 22584943591 ist ebenfalls $+4$.

Die Vereinigung beider Proben würde allerdings schon die Richtigkeit des Resultats sehr wahrscheinlich machen. Indessen bewegt sich die praktische Anwendbarkeit dieser Proben aus dem Grunde in sehr engen Schranken, als ja die meisten wissenschaftlichen Zahlenrechnungen mit abgekürzten Decimalbrüchen erfolgen, und abgekürzt ausgeführt werden, mithin die beiden Seiten der Gleichungen nur auf eine gewisse Anzahl von Stellen, nicht aber, wie dies die Neuner- und Eilferprobe verlangen, völlig übereinstimmen. Auf solche Rechnungen also findet von diesem Verfahren, durchaus keine Anwendung statt, dasselbe beschränkt sich namentlich auf kaufmännische und andere im gewöhnlichen Leben vorkommende Rechnungen, wo es dann von einigem Nutzen sein mag.

Rechnende Astronomie.

Derjenige Theil der Astronomie, welcher die Bahnen der Planeten und Kometen und ihre, so wie der Fixsterne am Himmel finden lehrt. Sie wird in die sphärische und die theorische Astronomie eingetheilt, von denen sich die erstere hauptsächlich mit den Fixsternen, die letztere mit den Planeten und Kometen beschäftigt (vergleiche die entsprechenden Artikel).

Rechtläufig (Astronomie).

So heisst ein Planet oder Komet, der sich von Westen nach Osten (von der Erde aus gesehen) bewegt. Die Bewegung in umgekehrter Richtung heisst rückläufig. Die wahre Bewegung aller Planeten ist rechtläufig, die der Kometen ist, bei einigen rückläufig bei andern rechtläufig.

Reciprocität. (Geometrie. Prinzip der Polarität oder des Dualismus).

Diesem Prinzip zu Folge entspricht denjenigen Sätzen, welche von der Lage, von den Linien und Punkten handelt, immer ein anderer Satz, worin diese Elemente mit einander vertauscht, d. h. die Linien durch Punkte, die Punkte aber durch Linien ersetzt sind, z. B. dem bekannten Satz aus der Geometrie der Lage.

„Sind zwei Dreiecke so beschaffen, dass wenn man die entsprechenden Ecken des einen, mit denen des andern verbindet, sich die drei Verbindungslinien in einem Punkte schneiden, so müssen die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Seiten auf einer Graden liegen,“

steht ein anderer Satz gegenüber:

„Sind zwei Dreiecke so beschaffen und gelegt, dass die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten in einer Graden liegen, so müssen die Verbindungslinien der entsprechenden Eckpunkte sich in einem Punkte schneiden.“

Man sieht, dass in solchen Sätzen dem Schnittpunkte zweier Graden, die Verbindungslinie zweier Punkte entspricht. Auch im Raume finden dergleichen Reciprocitätsbeziehungen statt.

Namentlich entsprechen sich hier die Ebene und der durch einen gegebenen Punkt gehende Strahl, so dass dem Schnitte zweier Ebenen der von zwei Strahlen gebildeten Ebene entspricht und umgekehrt.

Dies Prinzip lässt sich auf verschiedene Wege ableiten. Beschränken wir uns hier auf die Ebene, so folgert man es gewöhnlich aus den Eigenschaften von Pol und Polare. (Siehe den Artikel: neuere Geometrie.

Da nämlich in Bezug auf jeden gegebenen Kegelschnitt eine jede grade Linie einen Pol und jeder Punkt eine Polare hat, so rechtfertigt sich die Beziehung der Reciprocität aus den Sätzen:

„Wenn gewisse Punkte in einer Graden legen, so schneiden sich ihre Polaren in einem Punkte, dem Pole dieser Graden,“

und:

„Wenn gewisse Linien sich in einem Punkte schneiden, so liegen ihre Pole in einer graden, der Polare dieses Punktes.“

Diese Sätze zeigen nämlich, indem man Punkt und Linie immer als Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt auffasst, wie die Elemente „Punkt und Linie“ vertauscht werden können.

Wenn man zu jedem Punkte irgend einer Curve sich die Polare denkt, so hüllen alle diese Linien eine andere Curve ein. Beide Curven heissen „reciproke Polaren“ offenbar nämlich ist ihre Entstehungsweise aus einander eine gegenseitige. Aus dem Dualitätsprinzip lassen sich nun leicht aus der Eigenschaft einer Curve polare Eigenschaften der andern finden. Dies ist namentlich für die Kegelschnitte wichtig, deren re-

Digitized by Google

ciproke Polaren wieder Kegelschnitte sind. Somit lassen sich den Sätzen, die sich auf Lage von Linien und Punkten in den Kegelschnitten beziehen, andere polare Sätze in Bezug auf dieselben Curven entgegenstellen z. B. dem Satze:

„Die drei Punkte in deren jedem ein Paar Gegenseiten eines in eine Curve zweiter Ordnung beschriebenen Sechsecks sich schneiden, liegen in einer und derselben Graden,"

steht der polare Satz gegenüber:

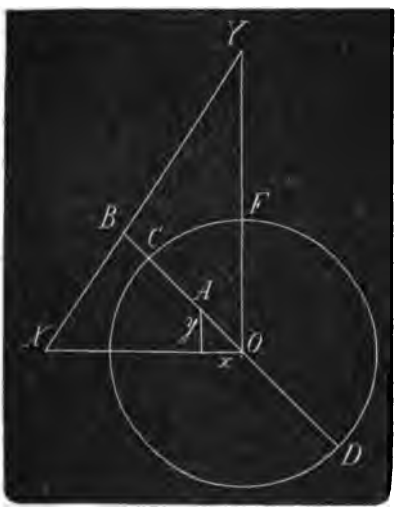
„Die drei Diagonalen, deren jede ein Paar Gegenpunkte eines um eine Curve zweiter Ordnung beschriebenen Sechsecks verbindet, schneiden sich in einen Punkt."

Nach der Entstehungsweise reciproker Curven entsprechen sich nämlich immer ein Punkt in der Peripherie und eine Tangente, also den Ecken des eingeschriebenen Vielecks entsprechen die Seiten des umschriebenen und umgekehrt.

Um die Gleichungen zweier reciproken Polaren zu beziehen, schlägt Plücker, (siehe dessen Werke analytische geometrische Entwicklungen und Systeme der analytischen Geometrie) folgendes Verfahren ein:

Sei aus dem Anfangspunkt der Coordinaten O (Fig. 312) ein Kreis geschlagen, dessen Radius der Einheit gleich sei.

Fig. 312.



Sei A ein beliebiger Punkt, dessen Coordinaten x und y sein, XY die Polare dieses Punktes in Bezug auf den Kreis. Indem wir einen Kreis als den einfachsten aller Kegelschnitte als diejenige Curve annehmen, auf welche die reciproken Polaren bezogen sind.

Es ist dann, da B, C, A, D harmonische Punkte, aber $CO = OD = 1$ ist:

$$1 + AO : 1 - AO = 1 + BO : BO - 1,$$

d. h.

$$BO = \frac{1}{AO}.$$

Nun ist offenbar:

$$\frac{BO}{XO} = \frac{x}{AO}, \quad \frac{BO}{YO} = \frac{y}{AO},$$

d. h.:

$$XO = \frac{1}{x}, \quad YO = \frac{1}{y}.$$

Man kann nun die Werthe

$$\frac{1}{XO} \text{ und } \frac{1}{YO}$$

als Coordinaten der Linie XY betrachten, d. h. man nimmt als Bestimmungsstücke dieser Linie die umgekehrten (reciproken) Werthe der Abschnitte, welche sie auf beiden Axen vom Anfangspunkte der Coordinaten bildet. Dergleichen Coordinaten nennt Plücker Liniencoordinaten, und setzt sie den gewöhnlichen rechtwinklichen, die er Punktcoordinaten nennt, gegenüber. Man hat nun den Satz:

I. „Ein Punkt und seine Polare haben dieselben Coordinatenwerthe, wenn der erstere auf Punkt-, der letztere auf Liniencoordinaten bezogen ist."

Findet nun zwischen einer stetigen Reihe von Punkten, eine Beziehung statt, so wird dieselbe Beziehung auch für die Polaren dieser Punkte gelten, und wenn die Punkte also irgend eine Curve bilden, deren Gleichung $f(x, y) = 0$ ist, so gilt die Gleichung für die Einhüllungscurve der Polaren, d. h.:

II. „Zwei reciproke Polaren haben dieselbe Gleichung, jedoch ist die eine auf Punkt-, die andere auf Liniencoordinaten bezogen."

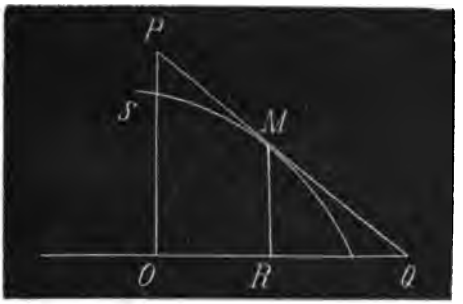
Liegen Punkte in einer Graden, so schneiden sich ihre Polaren in einem Punkte, der also als die Einhüllungscurve dieser Graden zu betrachten ist. Da nun die Gleichung einer Graden in Punktcoordinaten linear ist, so folgt:

III. „Eine lineare Gleichung in Liniencoordinaten kommt immer einem Punkt zu."

Es soll noch eine in Punktcoordinaten gegebene Curve in Liniencoordinaten ausgedrückt werden.

Wir bezeichnen die ersteren mit u und v, die letzteren mit x und y. Es

Fig. 318.



ist, wenn OQ (Fig. 313) die Richtung der Axe der x, OP die der y bedeutet, PQ eine Tangente an den Punkt M ist:

$$OQ = OR + RQ = x - y\frac{dx}{dy}$$

$$OP = OS + SP = y - x\frac{dy}{dx},$$

also:

$$\frac{1}{u} = x - y\frac{dx}{dy}, \quad \frac{1}{v} = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Sei die Gleichung die eines Kegelschnittes:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1,$$

so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xb}{ya},$$

also:

$$\frac{1}{u} = x + \frac{y^2 a}{xb} = \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)\frac{a}{x} = \frac{a}{x}$$

$$\frac{1}{v} = y + \frac{x^2 b}{ya} = \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)\frac{b}{y} = \frac{b}{y},$$

woraus sich dann ergibt:

$$x = au, \quad y = vb,$$

und indem man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

einsetzt:

$$au^2 + bv^2 = 1,$$

d. h. die Gleichung ist wieder zweiter Ordnung, und da diese Gleichung zugleich die der reciproken Polare in Punktcoordinaten ist, so ist die reciproke Polare eines Kegelschnitts, bezogen auf einen, durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts gehenden Kreis wieder ein solcher, und gleichzeitig mit dem gegebenen eine Ellipse oder Hyperbel, mit gemeinschaftlichem Mittelpunkt, wobei ausserdem die Axen der einen Curve die reciproken Werthe von denen der andern sind. Beide Kegelschnitte sind somit ähnlich und ihre Axen stehen auf einander senkrecht.

Die reciproke Polare einer Curve höherer Ordnung kann nicht mehr von derselben Ordnung sein; da sie aber in Linieucoordinaten eine Gleichung von demselben Grade hat, so theilt man die Curven überhaupt in Curven der zweiten, dritten u. s. w. Klasse, je nach dem Grade ihrer Gleichung in Linieucoordinaten, so dass jede Curve zur Klassenzahl, dieselbe Zahl hat, welche ihre reciproke Polare zur Ordnungszahl hat. Da nun die Ordnungszahl einer Curve unter andern anzeigt, wie oft eine gegebene Grade diese Curve schneidet, (die imaginären Schnittpunkte natürlich mitgerechnet) jedem Schnittpunkte aber eine Berührungslinie in Bezug auf die Polare entspricht, so zeigt die Klassenanzahl an, wie viel Tangenten sich von einem Punkte aus an die Curve ziehen lassen. — Für die Kegelschnitte stimmen diese beiden Zahlen überein, sie betragen nämlich 2.

Näheres über diese Theorie enthalten namentlich die schon angeführten Werke von Plücker, ferner die von Monge, Poncelet (von Letzterem sind die Abhandlungen in den *Comptes rendues*, in Lionvilles und Crelles Journal namentlich die des letztern Journals *Mémoires sur la théorie des polaires reciproques* zu beachten) auch Carnots *Géometrie de position* enthält Einschlagendes. Hier gestattet der Raum nicht, weiter auf diesen Gegenstand einzugehen.

Reciprocitätsgesetz (Zahlenlehre).

Dieses Gesetz, das von Legendre herrührt, und von Gauss als *theorema fundamentale* bezeichnet wird, bezieht sich, wie es ursprünglich hingestellt worden

ist, auf die quadratischen Reste und lehrt die Frage, wann eine Primzahl a in Bezug auf eine andere b quadratischer Rest ist, auf die Frage zurückführen, wann b in Bezug auf a quadratischer Rest ist. Der erste, der diesen Satz bewiesen hat, ist Gauss. Seine Beweise sind theils in den *disquisitiones arithmeticae*, theils in den Schriften der Göttinger Gesellschaft enthalten. Einer dieser Beweise so wie einer von Dirichlet ist in dem Artikel „quadratischer Rest", Abschnitt 12–14) enthalten, wo man das Theorem selbst aufsuchen möge. Es sind aber später ähnliche Gesetze für cubische und biquadratische Reste, (dieses von Gauss, jenes von Jacobi) aufgefunden und auf verschiedene Weise bewiesen worden. Namentlich ist hierbei auf einen Beweis von Eisenstein hinzuweisen (siehe Crelle Bd. 28 u 29), der alle drei damals bekannten Gesetze aus derselben Quelle, den trigonometrischen und elliptischen Functionen, ableitet. Zu bemerken ist jedoch, dass diese Gesetze sich nicht mehr auf beliebige, sondern nur auf die complexen Primzahlen beziehen (siehe den Artikel: complexe Zahl). Kummer hat ein allgemeines Reciprocitätsgesetz für Reste jeden Grades aufgestellt. Hierbei aber nehmen die von ihm in die Arithmetik eingeführten „idealen Primzahlen" die Stelle der gewöhnlichen oder der complexen ein. Die Fundamente dieser Theorie gibt der Artikel: ideale Factoren. Vergleiche übrigens Kummers in den Abhandlungen der Berliner Akademie enthaltenen Aufsätze:

„Theorie der idealen Primfactoren (1857)" und:

„Ueber das allgemeine Reciprocitätsgesetz."

Reciproke Gleichung. (Algebra).

Eine Gleichung, wo die Coefficienten der von der Mitte gleich weit entfernten Glieder übereinstimmen. Eine solche lässt sich mittels einer quadratischen Gleichung auf die halbe Gradzahl reduciren. (Vergleiche den Artikel: Quadratische Gleichung, Abschnitt 9).

Reciproker Werth (umgekehrter Werth).

Der reciproke Werth der Zahl a wird die Zahl $\frac{1}{a}$ genannt. Mit Hülfe einer Tafel der reciproken Werthe der Zahlen lässt sich jede Division in eine Multiplication verwandeln. Eine solche Tafel gibt der Artikel: Quotient.

Rectascension (Astronomie, auch grade Aufsteigung).

So heisst die Entfernung des Declinationskreises eines Gestirnes auf dem Aequator gemessen vom Frühlingspunkte (aufsteigenden Knoten). Die Rectascension wird entgegengesetzt der scheinbaren Bewegung des Himmels von Null bis 360° gezählt. Rectascensionen und Declinationen geben ein auf den Aequator bezogenes Coordinatensystem für den Himmel, und bestimmen also die Orte der Gestirne. (Vergleiche den Artikel: Astronomie.)

Rectification der Curven (Geometrie).

So wird die Verwandlung eines gegebenen Curvenbogens in eine Grade, oder was mit dieser Aufgabe identisch ist, die Berechnung der Länge dieses Bogens genannt. Wie auch die Rectification der Curven begründet werde, man ist immer genöthigt dieselbe auf den Satz zu stützen, dass eine Bogenlänge mit der von seinen Eckpunkten aus beschriebenen und aus Sehnen bestehenden gebrochenen Linie zusammenfalle, wenn die Länge jeder dieser Sehnen sich der Null nähert.

Ehe wir zum Beweise dieses Satzes und zur Aufstellung der allgemeinen Rectificationsformeln mit Hülfe der Infinitesimalrechnung schreiten, wollen wir jedoch einige auf elementarem Wege ausführbare Rectificationen geben.

Beginnen wir mit der gewöhnlichen Parabel, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten:

$$y^2 = 2px,$$

wo der Anfangspunkt in den Scheitelpunkt der Parabel fällt, und die Axe der x zugleich die Hauptaxe der Parabel ist. Zieht man von beliebigen einander sehr nahen Punkten der Parabel N, N_1, N_2 ... (Fig. 314) Lothe auf die Axe der x, und denkt sich dem angegebenen Prinzip zufolge, die Sehnen ON, NN_1, N_1N_2 als mit den entsprechenden parabolischen Bogen zusammenfallend, so ist, wenn

$$OM_s = x_s,\ N_sM_s = y_s,$$

$$OM_{s-1} = x_{s-1},\ N_{s-1}M_{s-2} = y_{s-1}$$

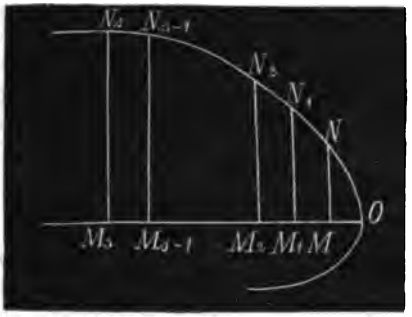
gesetzt wird, offenbar:

$$N_{s-1}N_s = \sqrt{(x_s - x_{s-1})^2 + (y_s - y_{s-1})^2}.$$

Hieraus erhält man für den ganzen Bogen:

Digitized by Google

Fig. 314.



$$ON_s = \sum_{t=0}^{t=s-1} \sqrt{(x_t - x_{t-1})^2 + (y_t - y_{t-1})^2},$$

wo $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ zu setzen ist. Wegen der Gleichung der Parabel ist nun:

$$x_t = \frac{y_t^2}{2p},$$

also, wenn man dies einsetzt:

$$ON_s = \frac{1}{2p} \sum_{t=0}^{t=s-1} \sqrt{(y_t^2 - y_{t-1}^2)^2 + 4p^2 (y_t - y_{t-1})^2}$$

$$= \frac{1}{2p} \sum_{t=0}^{t=s-1} (y_t - y_{t-1}) \sqrt{(y_t + y_{t-1})^2 + 4p^2},$$

wofür man auch setzen kann, da der Unterschied von y_t und y_{t-1} verschwindend klein, also: $y_t + y_{t-1} = 2y_{t-1}$ ist:

$$ON_s = \frac{1}{p} \sum_{t=0}^{t=s-1} (y_t - y_{t-1}) \sqrt{p^2 + y_{t-1}^2}.$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir die von Euler herrührende Methode des Rationalmachens an, d. h. wir setzen:

$$\sqrt{p^2 + y_{t-1}^2} = y_{t-1} + u_{t-1}.$$

oder:

$$p^2 = 2u_{t-1} y_{t-1} + u_{t-1}^2,$$

woraus sich ergibt:

$$y_{t-1} = \frac{p^2 - u_{t-1}^2}{2u_{t-1}}, \quad y_t = \frac{p^2 - u_t^2}{2u_t}, \quad \sqrt{p^2 + y_{t-1}^2} = \frac{p^2 + u_{t-1}^2}{2u_{t-1}},$$

$$y_t - y_{t-1} = \frac{p^2 (u_{t-1} - u_t) + u_t u_{t-1} (u_{t-1} - u_t)}{2u_t u_{t-1}},$$

oder mit Berücksichtigung des verschwindend kleinen Unterschieds zwischen u_t und u_{t-1}:

$$(y_t - y_{t-1}) \sqrt{p^2 + y_{t-1}^2} = \frac{(u_{t-1} - u_t)(p^2 + u_{t-1}^2)^2}{4u_{t-1}^2}.$$

Digitized by Google

Ueber das Gesetz, nach welchem y_t aus y_{t-1} oder u_t aus u_{t-1} entsteht, war keine bestimmte Annahme gemacht, und es war dies auch nicht nöthig, da vorausgesetzt, dass die entsprechenden Ordinaten einander unendlich nahe liegen, in jedem Falle die Summe der Sehnen ON_s mit Bogen ON_s zusammenfällt. Bestimmen wir jetzt dies Gesetz so, dass $u_t = \varrho u_{t-1}$ sein soll, wo ϱ eine Constante ist. Es darf dann der Bedingung gemäss ϱ nur um eine verschwindende Grösse von der Einheit abweichen und man hat:

$$u_1 = \varrho p, \quad u_2 = \varrho^2 p, \ldots u_t = \varrho^t p;$$

wegen der Gleichung

$$\sqrt{p_2 + y^2_{t-1}} = (y_{t-1} + u_{t-1})$$

ist nämlich, da $y_0 = 0$ war, $u_0 = p$, also:

$$ON_s = \frac{1}{p} \sum_{t=0}^{t=s-1} \frac{\varrho^{t-1}(1-\varrho)(p^2 + \varrho^{2(t-1)} p^2)^2}{4\varrho^{3(t-1)} p^2},$$

oder wenn man diesen Ausdruck vereinfacht:

$$ON_s = \frac{(1-\varrho)p}{4} \sum_{t=0}^{t=s-1} \frac{(1+\varrho^{2(t-1)})^2}{\varrho^{2(t-1)}}.$$

Diese Summe zerfällt in die von drei andern:

$$ON_s = \frac{(1-\varrho)}{4} p \left\{ \sum_{t=0}^{t=s-1} \varrho^{-2(t-1)} + 2 \sum_{t=0}^{t=s-1} \varrho^{2(t-1)} + 2 \sum_{t=0}^{t=s-1} (1) \right\}.$$

Die beiden ersten Reihen sind geometrische.

Als Summen ergeben sich bezüglich:

$$\frac{\varrho^2(1-\varrho^{-2s})}{1-\varrho^{-2}} = \frac{1-\varrho^{2s}}{\varrho^{2s-4}(1-\varrho^2)}$$

und

$$\frac{\varrho^{-2}(1-\varrho^{2s})}{1-\varrho^2} = \frac{\varrho^{2s}-1}{\varrho^2(\varrho^2-1)} = \frac{1-\varrho^{2s}}{\varrho^2(1-\varrho^2)},$$

während die Summe der dritten Reihe gleich s ist; man erhält also:

$$ON_s = \frac{p}{4} \frac{1-\varrho^{2s}}{\varrho^2(1+\varrho)} \left(1 + \frac{1}{\varrho^{2s-6}}\right) + \frac{p(1-\varrho)s}{2}.$$

Es ist nun: $u_s = \varrho^s p$, also:

$$\varrho^s = \frac{u_s}{p}, \quad s = \frac{\lg u_s - \lg p}{\lg \varrho}.$$

Da aber ϱ nur unendlich wenig von der Einheit abweicht, ist zu setzen:

$$\varrho^{2s-6} = \varrho^{2s} = \frac{u_s^2}{p^2},$$

$$1 + \varrho = 2, \quad \varrho^2 = 1, \quad \lg \varrho = \varrho - 1,$$

also:

$$ON_s = \frac{1}{8} \left(p^3 u_s^{-2} - \frac{u_s^2}{p} \right) = \frac{p}{2} \lg \frac{u_s}{p},$$

wo also zu setzen ist:

$$u_s = \sqrt{p^2 + y_s^2} - y_s$$

Digitized by Google

und somit:

$$u_s^{-1} = \frac{\sqrt{p^2 + y_s^2} + y_s}{p^2},$$

woraus dann folgt:

$$ON_s = \tfrac{1}{2} y \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} + \frac{p}{2} \log\left(\frac{y}{p} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\right),$$

wo y für y_s gesetzt ist. — Für den Brennpunkt der Parabel ist $y = p$, also:

$$ON_s = \frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{p}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$$

Diese Formel stellt also die Länge des parabolischen Bogens vom Scheitelpunkte bis zu der durch den Brennpunkt gehenden Ordinate vor.

Es ist zu erkennen, dass diese Methode im Wesentlichen nichts anders ist, als die in der Integralrechnung angewandte. Gleiches lässt sich aber wohl von allen Methoden sagen, welche die durch Integralrechnung gewonnenen Resultate auf elementarem Wege darstellen sollen

Die Rectification des Kreises führt unmittelbar auf die Quadratur desselben zurück. Vergleiche hierüber den Artikel Quadratur (geometrische). Im Uebrigen sind Kreis und Parabel die einzigen Kegelschnitte, deren Rectification in Form von Functionen, die nicht durch Integrale definirt sind, gelingt, und sonach leuchtet es ein, dass überhaupt nur in seltenen Fällen algebraische Curven sich in Form bekannter Functionen rectificiren lassen.

Von den transcendenten Curven, wo dies möglich ist, merken wir besonders die Cycloide, Epicycloide und Hypocycloidc. Ueber diesen Gegenstand ist das Nöthige in dem Artikel: Radlinien enthalten. Hierbei bemerken wir noch, dass sich Epicycloiden und Hypocycloiden bilden lassen, welche algebraische Curven von beliebig hohen Graden sind. Dies ist nämlich der Fall wenn der feste und der erzeugende Kreis Radien haben, die in einem rationalen Verhältnisse stehen (vergl. hierüber den Abschnitt 3) des Artikels: Radlinie). So gelingt es unendlich viel algebraische Curven die rectificirbar sind, zu finden.

Wegen ihrer historischen Wichtigkeit betrachten wir noch die Rectification der Neill'schen Parabel, deren Gleichung ist:

$$ay^3 = x^2$$

auf elementare Weise. Es ist diese Curve nämlich, wie es scheint, nächst dem Kreise die erste, bei der es gelungen ist, sie zu rectificiren.

Ganz wie bei der Apollonischen Parabel gelangen wir zu der Formel:

$$ON_s = \sum_{t=0}^{t=s-1} \sqrt{(x_t - x_{t-1})^2 + (y_t - y_{t-1})^2}$$

wo $x_0 = y_0 = 0$ ist, Woraus sich denn mittels der Gleichung der Curve ergibt:

$$ON_s = \sum_{t=0}^{t=s-1} \sqrt{(x_t - x_{t-1})^2 + \frac{1}{a}(x_t^{\frac{1}{3}} - x_{t-1}^{\frac{1}{3}})^3},$$

oder wenn man setzt $x_t = z_t^3$:

$$ON_s = \sum_{t=0}^{t=s-1} \sqrt{(z_t^3 - z_{t-1}^3)^2 + \frac{1}{a}(z_t^3 - z_{t-1}^3)^3}$$

$$= \sum_{t=0}^{t=s-1} (z_t - z_{t-1}) \sqrt{(z_t + z_{t-1})^2 + \frac{1}{a}(z_t^2 + z_t z_{t-1} + z_{t-1}^2)^3},$$

oder mit Berücksichtigung des verschwindend kleinen Unterschiedes von z_t und z_{t-1}:

Digitized by Google

$$ON_s = \sum_{t=0}^{t=s-1} (z_t - z_{t-1}) \sqrt{4z^2_{t-1} + \frac{9}{a} z^4_{t-1}}$$

$$= 2\sum_{t=0}^{t=s-1} z_{t-1}(z_t - z_{t-1}) \sqrt{1 + b^2 z^2_{t-1}},$$

wo $\frac{9}{4a} = b^2$ gesetzt ist. Es kann nämlich die Grösse a immer als positiv angenommen werden, weil im entgegengesetzten Falle die Substitution $x_1 = -x$ dieselbe positiv machen würde.

Ganz wie im vorigen Falle wendet man die Euler'sche Substitution an:

$$\sqrt{1 + b^2 z^2_{t-1}} = bz_{t-1} + u_{t-1}$$

und erhält:

$$z_t - z_{t-1} = \frac{(1-u_t^2)u_{t-1} - (1-u^2_{t-1})u_t}{2bu_{t-1}u_t} = \frac{(u_{t-1} - u_t)(1 + u_{t-1}u_t)}{2bu_{t-1}u_t},$$

$$\sqrt{1 + b^2 z^2_{t-1}} = \frac{1 + u^2_{t-1}}{2u_{t-1}},$$

woraus sich dann mit Rücksicht auf den verschwindenden Unterschied von u_{t-1} und u_t ergibt:

$$ON_s = \frac{1}{4b^2} \sum_{t=0}^{t=s-1} \frac{(u_{t-1} - u_t)(1 + u^2_{t-1})^2 (1 - u^2_{t-1})}{u^4_{t-1}}$$

$$= \frac{1}{4b^2} \sum_{t=0}^{t=s-1} (u_{t-1} - u_t) \left\{ u_{t-1}^{-4} + u_{t-1}^{-2} - 1 - u^2_{t-1} \right\}.$$

Es ist nun dieselbe Substitution wie bei der apollonischen Parabel zu machen, nämlich:

$$u_t = \varrho u_{t-1},$$

oder da

$$z_0 = 0, \quad u_0 = 1 \text{ ist}, \quad u_t = \varrho^t,$$

also:

$$ON_s = \frac{1-\varrho}{4b^2} \sum_{t=0}^{t=s-1} \left\{ \varrho^{-3(t-1)} + \varrho^{-(t-1)} - \varrho^{t-1} - \varrho^{3(t-1)} \right\}.$$

Die Summe zerlegt sich also in vier geometrische Reihen, und man erhält für dieselbe:

$$\frac{\varrho^3(1-\varrho^{-3s})}{1-\varrho^{-3}} + \frac{\varrho(1-\varrho^{-s})}{1-\varrho^{-1}} - \frac{\varrho^{-1}(1-\varrho^s)}{1-\varrho} - \frac{\varrho^{-3}(1-\varrho^{3s})}{1-\varrho^3}$$

$$= \frac{(\varrho^{3s}-1)(1-\varrho^{3s-9})}{\varrho^{3s-6}(\varrho^3-1)} + \frac{(\varrho^s-1)(1-\varrho^{s-3})}{\varrho^{s-2}(\varrho-1)},$$

oder mit Berücksichtigung, dass die Zahlen 2, 3, 6, 9 gegen s verschwinden:

$$ON_s = \frac{1-\varrho}{4b^2} \left\{ \frac{(\varrho^{3s}-1)^2}{\varrho^{3s}(1-\varrho^3)} + \frac{(\varrho^s-1)^2}{\varrho^s(1-\varrho)} \right\} = \frac{(\varrho^s-1)^2}{4b^2\varrho^s} \left\{ \frac{(\varrho^{2s}+\varrho^s+1)^2}{3\varrho^{2s}} + 1 \right\},$$

oder mit Berücksichtigung des Werthes von $\varrho^s = u_s$:

Digitized by Google

$$ON_s = \frac{(u_s - 1)^2}{12b^2 u_s^2}((u_s^2 + u_s + 1)^2 + 3u_s^2)$$

$$= \frac{(u_s - 2 + u_s^{-1})}{12b^2}((u_s + 1 + u_s^{-1})^2 + 3),$$

wo zu setzen ist

$$u_s = \sqrt{1 + b^2 x_s} - b\sqrt{x_s},$$

also:

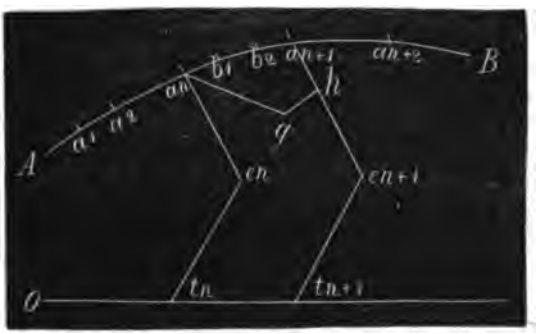
$$u_s^{-1} = \sqrt{1 + b^2 x_s} + b\sqrt{x_s}$$

sonach ergibt sich schliesslich:

$$ON_s = \frac{2}{3b^2}\sqrt{(1 + b^2 x_s)^3} - 1) = \frac{8a}{27}\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{9x_s}{4a}\right)^3} + 1\right\}.$$

2) Wir geben jetzt die allgemeinen Formeln zur Rectification der Curven. Sei AB (Fig. 315) der Bogen einer beliebigen Curve, die wir der Allgemeinheit wegen als doppelt gekrümmt annehmen, $a_1, a_2 \ldots, a_n \ldots$ Punkte auf derselben zwischen A und B, und seien je zwei auf einander folgende Punkte durch eine Sehne verbunden, so ist die Länge einer solchen Sehne a_n, a_{n+1} aus den Coordinaten der Endpunkte zu bestimmen. Es seien

Fig. 315.



$$Ot_n = x_n, \quad t_n e_n = y_n, \quad e_n a_n = z_n$$

die Coordinaten von a_n,

$$Ot_{n+1} = x_{n+1}, \quad t_{n+1} e_{n+1} = y_{n+1}, \quad e_{n+1} a_{n+1} = z_{n+1}$$

die von a_{n+1}, ferner $a_n g$ und gk bezüglich parallel den Axen der x und y gezogen, so ist:

$$a_n g = x_{n+1} - x_n, \quad gk = y_{n+1} - y_n, \quad k a_{n+1} = z_{n+1} - z_n,$$

und

$$a_n a_{n+1}^2 = (x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 + (z_{n+1} - z_n)^2.$$

Es wird also der Werth der gebrochenen Linie

$$A a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots B$$

dargestellt sein durch die Summe:

$$\sum_{n=0}^{n=s} \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2 + (z_{n+1} - z_n)^2},$$

Digitized by Google

wo $a_s = B$ der letzte Eckpunkt der gebrochenen Linie, $a_0 = A$ der erste ist. Denkt man sich die Anzahl der Punkte a zunehmend und einander näher rückend, so nähert sich dieser Ausdruck einer ganz bestimmten Grenze S, welche durch das Integral gegeben ist:

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Die Grenzen α und β sind die den Punkten A und B entsprechenden Werthe von x. Nach den Eigensshaften solcher Ausdrücke, (vergleiche den Artikel: (analytische) Quadraturen) ist dies Integral unabhängig von dem Gesetze, durch welches die Zwischenräume der Punkte $a_1, a_2 \ldots$ verbunden sind, vorausgesetzt, dass alle diese Punkte auf der Curve AB liegen, und die Entfernungen je zweier nächsten Punkte verschwindend klein sind; unter diesen Bedingungen ist also S die Grenze jeder gebrochenen Linie, deren Eckpunkte auf der Curve AB liegen. Es lässt sich nun zeigen, dass alle diese Curven nicht allein gleiche Länge haben, sondern auch völlig zusammenfallen. Das Stück einer solchen Linie zwischen a_n und a_{n+1} ist nämlich gleich:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Denke man sich einerseits die grade Linie $a_n a_{n+1}$, und die Linie $a_n b_1 b_2 \ldots a_{n+1}$, wo $b_1 b_2 \ldots$ Punkte der Curve sind, so stellt das Integral beide Linien dar; diese haben also gleiche Länge. Da nun von zwei gleichen Linien, die gemeinschaftliche Eckpunkte haben, von denen eine eine grade ist, die andere mit ihr zusammenfallen muss, so liegen auf der verschwindend kleinen Graden $a_n a_{n+1}$ auch die Punkte $b_1 b_2 \ldots$, und da diese ganz beliebig zwischen a_n und a_{n+1} auf der Curve genommen waren, so sehen wir, dass die Grenze S eine Linie vorstellt, auf der sich alle Punkte von der Curve AB befinden, mithin diese Curve selbst. Es ist also die allgemeinste Rectificationsformel in rechtwinkligen Coordinaten:

1) $$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Bei einer einfach gekrümmten Linie erhält man $z = 0$, also:

2) $$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Führt man Polarcoordinaten ein, setzt man also im Falle einer einfach gekrümmten Linie:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$
$$dx = -r\sin\vartheta\, d\vartheta + \cos\vartheta\, dr$$
$$dy = \quad r\cos\vartheta\, d\vartheta + \sin\vartheta\, dr,$$

woraus sich ergibt:

$$dx^2 + dy^2 = r^2 d\vartheta^2 + dr^2,$$

so hat man:

3) $$S = \int_a^b \sqrt{1 + r^2 \frac{d\vartheta^2}{dr^2}}\, dr = \int_g^h \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\vartheta^2}}\, d\vartheta,$$

wo a und b die Anfangswerthe von r, g, h die entsprechenden Werthe von ϑ sind. Bei doppelt gekrümmten Linien ist:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$dx = -r\sin\vartheta\, d\vartheta + \cos\vartheta\, dr$$
$$dy = -r\sin\vartheta\sin\varphi\, d\varphi + r\cos\vartheta\cos\varphi\, d\vartheta + \sin\vartheta\cos\varphi\, dr$$
$$dz = \quad r\sin\vartheta\cos\varphi\, d\varphi + r\cos\vartheta\sin\varphi\, d\vartheta + \sin\vartheta\sin\varphi\, dr,$$

also:

Digitized by Google

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin\vartheta^2 d\varphi^2 + dr^2$$

somit:

4) $$S = \int_a^b \sqrt{1 + r^2 \frac{d\vartheta^2}{dr^2} + r^2 \sin\vartheta^2 \frac{d\varphi^2}{dr^2}}\, dr.$$

3) Von diesen Formeln sind einige Beispiele zu geben:

Die Gleichung einer Parabel höherer Ordnung ist:

$$y^n = p^{n-m} x^m.$$

Man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m p^{n-m} x^{m-1}}{n y^{n-1}} = \frac{m}{n} p^{1-\frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n}-1},$$

also mit Hülfe der Formel 2) des vorigen Abschnittes:

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2} p^{2\left(1-\frac{m}{n}\right)} x^{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}}\, dx,$$

wo $\alpha = 0$ gesetzt ist.

Es ist ersichtlich, dass die Integration nicht in jedem Falle gelingt. In Abschnitt 1) haben wir die Fälle $n = 2$, $m = 1$, und wo $n = 2$, $m = 3$ war, bereits behandelt.

Setzt man allgemein:

$$x^{2\left(\frac{m}{n}-1\right)} = z,$$

so kommt:

$$S = \int \frac{\sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2} p^{2\left(1-\frac{m}{n}\right)} z}\, dz}{z^{1-\frac{1}{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}}},$$

ein Integral, welches sich leicht berechnen lässt, wenn $\frac{1}{2\left(\frac{m}{n}-1\right)}$ eine ganze Zahl ist. Sei somit

$$\frac{1}{2\left(\frac{m}{n}-1\right)} = k,$$

also:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2k} = \frac{2k+1}{2k}.$$

In diesem Falle hat die Parabel also eine Gleichung von der Form:

$$y^{2k} = \frac{x^{2k+1}}{p},$$

dieselbe wird rectificirt durch den Ausdruck:

$$S = \int \sqrt{1 + \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^2 p^{-\frac{1}{k}} z}\, z^{k-1} dz.$$

Setzen wir noch:

Digitized by Google

$$\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^2 p^{-\frac{1}{k}} = g \quad \text{und} \quad \sqrt{1+g^2} = u,$$

so kommt:

$$S = \int 2u^2 \frac{(u^2-1)^{k-1}}{g^k}\, du$$

und die Integration gelingt immer in einfachster Weise in Form einer ganzen algebraischen Funktion von u. Die Neillsche Parabel ist offenbar der einfachste Fall und entspricht dem Werthe von k gleich Eins.

Setzt man dagegen:

$$\frac{1}{\frac{m}{n}-1} = 2k-1, \quad \frac{m}{n} = \frac{2k}{2k-1},$$

wo k ebenfalls eine ganze Zahl ist, so hat man:

$$S = \int \frac{\sqrt{1+\frac{4k^2}{(2k-1)^2} p^{-\frac{2}{2k-1}} z^{2k-1}}\, dz}{z^{1-\frac{2k-1}{2}}},$$

oder wenn man:

$$\sqrt{z} = v, \quad \frac{4k^2}{(2k-1)^2} p^{-\frac{2}{2k-1}} = h$$

setzt:

$$S = \int 2\sqrt{1+hv^2}\, v^{2(k-1)}\, dv.$$

Dieses Integral enthält Arcus und Logarithmen, ist aber in jedem Falle zu berechnen. Der einfachste ist wieder der, wo $k=1$ ist, und entspricht der apollonischen Parabel. Da übrigens die Gleichung der Parabel in dem hier betrachteten Falle die Form annimmt:

$$y^{2k-1} = p^{-1} x^{2k},$$

so sieht man, dass alle Parabeln von der Form:

$$y^s = \frac{x^{s+1}}{p}$$

rectificirbar sind, wenn s eine beliebige ganze Zahl ist.

Die Gleichung der Kettenlinie ist:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

woraus sich dann ergibt:

$$S = \frac{1}{2}\int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx,$$

also, wenn man die Grenzen 0 und x einführt:

$$S = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der für den Flächeninhalt der Kettenlinie:

$$F = \int y\, dx = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

so sieht man, dass

$$F = aS,$$

also der Flächeninhalt der Bogenlänge proportional ist. Wie beim Kreise, bilden also auch hier Quadratur und Rectification dasselbe Problem.

Um auch Anwendungen der Polarcoordinaten zu zeigen, betrachten wir die Archimedische Spirale, deren Gleichung ist:

$$r = a\vartheta.$$

Die Formel 3) gibt:

$$S = a\int_0^{\vartheta} \sqrt{1+\vartheta^2}\, d\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{2}a\vartheta\sqrt{1+\vartheta^2} + \tfrac{1}{2}a\lg\left(\vartheta+\sqrt{1+\vartheta^2}\right).$$

Google

Die logarithmische Spirale hat zur Gleichung:

$$r = e^{a\vartheta}$$

und ergibt:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = ae^{a\vartheta},$$

$$S = \sqrt{1+a^2}\int_0^{\vartheta} e^{a\vartheta}\,d\vartheta,$$

also:

$$S = \frac{\sqrt{1+a^2}}{2}(e^{a\vartheta}-1).$$

Von den doppelt gekrümmten Curven untersuchen wir diejenige, deren Gleichungen sind:

$$y = ax^n, \quad z = bx^m.$$

Die Projectionen der Curve auf die drei Coordinatenebenen sind Parabeln höherer Ordnung.

Man hat:

$$dy = nax^{n-1}\,dx, \quad dz = mbx^{m-1}\,dx,$$

also:

$$S = \int \sqrt{1 + n^2a^2x^{2(n-1)} + m^2b^2x^{2(m-1)}}\,dx.$$

Die Integration gelingt z. B., wenn $n = 2$, $m = \frac{3}{2}$ ist. Die Gleichungen der Curven sind dann $y = ax^2$, $z = bx^{\frac{3}{2}}$, die Projection auf die xy Ebene ist in diesem Falle eine apollonische, die auf die xz Ebene eine Neillsche Parabel. Man hat dann:

$$S = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2 + \frac{9}{4}b^2x}\,dx.$$

Man gelangt bei der Integration zu einem algebraischen Ausdruck um einen Logarithmus vermehrt.

In manchen Aufgaben betrachtet man auch doppelt gekrümmte Linien, welche durch Umwickeln einfach gekrümmter auf gewissen Flächen entstanden sind. Es ist hierbei zweckmässig, den Bogen der einfach gekrümmten Erzeugungslinie zu bestimmen, der natürlich dem der doppelt gekrümmten gleich sein muss.

Sei z. B. $x^2 + y^2 = a^2$ die Gleichung eines Umdrehungscylinders, $y_1 = x_1 \operatorname{tg}\mu$ die einer Graden. Indem man letztere um den Cylinder wickelt, erhält man $y_1 = z$, und die Länge der Graden zwischen den Ordinaten y_1 und y_2 ist:

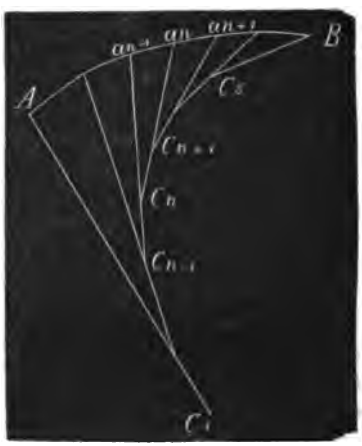
$$\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \frac{y_1-y_2}{\sin\mu}.$$

Sind z_1 und z_2 die entsprechenden Werthe von z auf dem Cylinder, so ist die Bogenlänge der Schraubenlinie somit gleich $\frac{z_1-z_2}{\sin\mu}$.

4) Was die Auffindung rectificirbarer Curven anbetrifft, so ist zunächst zu merken, dass die Evolute einer beliebigen Curve, welche eine Gleichung in endlicher Form hat, rectificirt werden kann. Sei AB (Fig. 316) ein einfach gekrümmter Curvenbogen,

$$\ldots a_{n-1}c_{n-1},\ a_nc_n\ldots$$

Fig. 316.



eine Schaar auf einander folgender Normalen, $\ldots c_{n-1}, c_n \ldots$ die Krümmungsmittelpunkte, so dass man also hat:

$$a_{n-1}c_{n-1} = a_nc_{n-1}\ldots,$$

so ist offenbar:

$$a_1c_1 - a_1c_2 = c_1c_2,\ a_2c_2 - a_2c_3 = c_1c_3\ldots$$

$$a_{s-1}c_{s-1} - a_sc_s = c_{s-1}c_s,$$

also durch Addition aller dieser Gleichungen erhält man:

$$a_1c_1 - a_sc_s = c_1c_2 + c_2c_3 + \ldots + c_{s-1}c_s.$$

Digitized by Google

Die Curve $c_1 c_2$ ist nun die Evolute der Curve AB, und der Bogen der ersteren ist also gleich der Differenz derjenigen Krümmungsradien der letzteren, welche dem Anfangs- und Endpunkte des Evolutenbogens entsprechen. Seien r und r_0 diese Krümmungsradien, σ der Evolutenbogen und berücksichtigen wir, dass wir den Krümmungsradius als positiv betrachten, wenn er nicht zwischen der Abscissenaxe und Curve fällt, so ist in unserem Falle $a_1 c_1 = -r_0$, $a_n c_n = -r$, also:

$$\sigma = r - r_0,$$

aber wenn ds das Bogenelement von AB, und l der Winkel der Tangente mit der Axe der x ist, somit der der Normale mit der Axe der y, so hat man:

$$\text{Winkel } a_{n-1} c_{n-1} a_n = dl,$$

$$r = \frac{ds}{dl}, \quad r_0 = \frac{ds_0}{dl_0} \quad \sigma = \frac{ds}{dl} - \frac{ds_0}{dl_0}.$$

Man hat aber:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \operatorname{tg} l = \frac{dy}{dx},$$

also:

$$\frac{dl}{\cos l^2} = d\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad dl = \frac{1}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} d\frac{dy}{dx},$$

$$\sigma = \frac{ds^2}{dx^2} \frac{1}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)} - C,$$

wo C der Anfangswerth von $\frac{ds}{dl}$ ist.

Beispiel. Für eine Ellipse oder Hyperbel ist:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1,$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{ay}, \quad ds = \frac{dx\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}}{ay},$$

$$d\frac{dy}{dx} = -\frac{bdx(ay^2 + bx^2)}{a^2y^3} = \frac{-b^2dx}{ay^3},$$

$$\sigma = \frac{-(a^2y^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2b^2} - C.$$

Ist die Curve eine Parabel, hat man also:

$$y^2 = 2px,$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad d\frac{dy}{dx} = \frac{-pdy}{y^2}$$

$$ds = \frac{dy}{p}\sqrt{p^2 + y^2},$$

also:

$$\sigma = \frac{-(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} - C.$$

Die Evolute der Parabel ist bekanntlich die Neillsche Parabel, und diese Rectificationsform würde mit der oben gegebenen übereinstimmen, wenn den Constanten dieselbe Gestalt gegeben wäre.

Euler hat aber auch ein allgemeineres Verfahren angegeben, um solche Curven aufzufinden, deren Rectification in endlicher Form gelingt. Sei

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

so erhält man:

$$y = \int pdx = px - \int xdp$$

und

$$S = \int \sqrt{1+p^2}\, dx = x\sqrt{1+p^2} - \int \frac{xpdp}{\sqrt{1+p^2}};$$

indem man nun setzt:

$$\int xdp = q, \quad \int \frac{xpdp}{\sqrt{1+p^2}} = r,$$

erhält man:

$$1) \quad x = \frac{dq}{dp}, \qquad 2) \quad y = px - q,$$

$$3) \quad S = x\sqrt{1+p^2} - r.$$

Ferner hat man:

$$\frac{dq}{dp} = x, \quad \frac{dr}{dp} = \frac{xp}{\sqrt{1+p^2}},$$

also, indem man x eliminirt:

$$pdq = dr\sqrt{1+p^2},$$

woraus sich ergibt:

$$4) \qquad p = \frac{dr}{\sqrt{dq^2 - dr^2}}.$$

Sind also p und r zwei beliebige Functionen einer neuen Variablen u, so ist p mittels der Gleichung 4), x, y und s mittels der Gleichung 1), 2) und 3) gegeben. Eliminirt man u, so hat man die Gleichung der Curve und ihre Bogenlänge, ohne dass eine Integration nöthig ist.

Durch die Formel:

$$S = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

ist jede Rectification auf eine Quadratur zurückgeführt. Denkt man sich nämlich eine zweite Curve, deren Gleichung:

$$z^2 = 1 + \frac{dy^2}{dx^2}$$

Digitized by Google

wo x und s die Coordinaten der neuen Curve sind, so ist der Flächeninhalt der letzteren gleich der Bogenlänge der ersteren. Die älteren Mathematiker aber haben sich viel mit dem umgekehrten Probleme beschäftigt, Curven zu finden, deren Quadratur sich auf die Rectification einer andern Curve zurückführen liess, da ihnen, freilich mit Unrecht, von beiden Problemen das der Rectification als das einfachere galt.

Ist zwischen s und x eine Gleichung gegeben, welche die in Rede stehende Curve vorstellt, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1},$$

also:

$$y = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

und das ist die Gleichung derjenigen Curve, deren Rectification auf die Quadratur der gegebenen führt. Es ist also nöthig, dass eine zweite Quadratur sich in endlicher Form ausführen lasse.

Beispiel. Sei $s^2 = 2px$, also die Curve eine apollonische Parabel, so ist:

$$y = \int \sqrt{2px - 1}\, dx = \frac{1}{3p}\sqrt{(2px-1)^3},$$

also:

$$9p^2y^2 = (2px-1)^3.$$

Dies ist diejenige Curve, deren Bogenlänge dem Flächeninhalt der Parabel gleich ist; setzt man noch:

$$x - \frac{1}{2p} = x',$$

so erhält man:

$$9y^2 = 8px^3.$$

Die Curve ist also die Neillsche Parabel. Um Curven zu finden, deren Quadratur auf eine Rectification zurückgeführt werden kann, braucht man nur das Integral $\int \sqrt{s^2 - 1}\, dx$ in ähnlicher Weise wie vorhin das Integral $\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ zu behandeln.

Da nämlich:

$$\int \sqrt{s^2 - 1}\, dx = y,$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

aber auch:

$$v = x\sqrt{s^2 - 1} - \int \frac{xs\,ds}{\sqrt{s^2 - 1}}.$$

Setzen wir noch:

$$\int \frac{xs\,ds}{\sqrt{s^2 - 1}} = w,$$

so ist:

1) $$y = x\sqrt{s^2 - 1} - w;$$

da man noch hat:

2) $$dw\sqrt{x^2 - 1} = xs\,ds$$

so kann man w und s als Funktion einer neuen Unbekannten u beliebig annehmen, die Gleichung 2) gibt dann x, und die Gleichung 1) y dazu. Wird aus diesen beiden Gleichungen u eliminirt, und aus den Werthen für x und x ebenfalls u eliminirt, so stellt die erstere Gleichung diejenige Curve vor, deren Bogenlänge dem Flächeninhalte gleich ist, welcher durch die zweite Curve bestimmt wird.

Beispiel. Sei

$$w = u^2, \quad s = au;$$

die Gleichung 2) gibt:

$$2u\sqrt{a^2u^2 - 1} = xa^2u$$

oder:

$$a^4x^2 = 4(a^2u^2 - 1).$$

Eliminirt man u, so ergibt sich:

$$a^4x^2 = 4a^2s^2 - 4.$$

Die Gleichung stellt eine Hyperbel vor, deren beide Axen in einem ganz bestimmten Verhältnisse stehen.

Die Gleichung 1) gibt:

$$y = x\sqrt{a^2u^2 - 1} - u^2,$$

also, wenn man u eliminirt:

$$y = \frac{a^2x^2}{4} - \frac{1}{a^2}.$$

Die Curve stellt eine apollonische Parabel vor. Indessen ist es nicht, wie hier allerdings der Fall ist, nöthig, dass sich die bezügliche Quadratur und Rectification wirklich ausführen lasse.

Reduction.

Zurückführung eines complicirteren Ausdrucks oder Problems auf etwas Einfacheres. Gleichungen höherer Ordnung sucht man auf solche einer niederen Ordnung oder auf Wurzeln, d. h. auf binomische Gleichungen zu reduciren, Integrale, welche irrationale Ausdrücke enthalten, auf solche mit rationalen Ausdrücken, Differenzialgleichungen auf Quadraturen, partielle Differenzialgleichungen auf gewöhnliche, Integrale, welche eine Quadratwurzel von einem Ausdrucke dritter oder vierter Ordnung enthalten, werden auf die canonische Form der elliptischen Integrale reducirt u. s. w. Somit ist das

Wort Reduction gleichbedeutend mit dem, was man gewöhnlich „Auflösung einer Aufgabe“ nennt. Denn da jede Aufgabe ein Problem vollständig definiren muss, so kann es sich nur darum handeln, die durch dieselbe gegebenen Grössen in möglichst einfacher Form, d. h. so viel als möglich reducirt zu erlangen

Reduction der Beobachtungen.

Ein Verfahren, welches beabsichtigt, die Beobachtungen von denjenigen bekannten Fehlern zu befreien, welche ihnen aus verschiedenen Umständen angeheftet sind. Dergleichen Umstände sind z. B. Unvollkommenheit der Instrumente. Dieselbe wird bis zu einem gewissen Grade aufgehoben, vermittels vervielfältigter Beobachtungen, und Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dieselben [siehe den Artikel: Quadrate (Methode der kleinsten)]. Oft kommt es auch vor, dass ein Instrument einen constanten und bekannten Fehler hat, dies ist z. B. bei einer Uhr der Fall, welche gleichmässig aber einige Minuten vor oder nach geht. Es ist leicht ersichtlich, wie dieser Fehler in jeder Rechnung durch entsprechende Addition oder Subtraction aufgehoben werden kann. — Den Beobachtungen durch Fernröhre klebt ein Fehler an, welcher von der Refraction der Luft herrührt. Da der Einfluss derselben wenigstens annäherungsweise bekannt ist, so sind die entsprechenden Beobachtungsfehler durch Anwendung von Refractionstafeln zu verbessern.

Reduction der Winkel auf den Horizont.

Bei geodätischen Aufnahmen kommt es darauf an, die Horizontalprojection von Linien, Punkten und Winkeln zu ermitteln. Sind also z. B. Winkel zu messen, welche die vom Auge des Beobachters ausgehenden Strahlen mit einander machen, welche nach zweien nicht in derselben Horizontalebene liegenden Punkten gerichtet sind, so kommt es darauf an, deren Horizontalprojection zu berechnen Die sehr einfache Rechnung gehört in die Geodäsie. Es ist hierbei zu bemerken, dass beim Gebrauch des Theodoliten die Projection der entsprechenden Winkel unmittelbar gefunden wird, die Reduction auf den Horizont also nur beim Gebrauch des Spiegelsectanten nöthig ist.

Reductionsrechnung (praktische Rechenkunst).

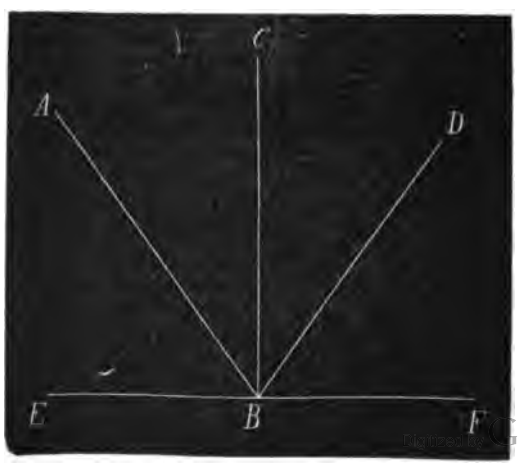
Die Verwandlung der Münzen, Maasse und Gewichte der verschiedenen Länder in einander, so wie die Zurückführung der höheren und niederen Einheiten, z. B. Centner, Pfunde, Lothe, der einen auf die anderen.

Reflector gleichbedeutend mit Spiegeltelescop.

Reflexion, Zurückwerfung, Spiegelung (Optik.)

Die Veränderung im Gange eines Lichtstrahles, welche durch den Einfluss spiegelnder Flächen (Reflexionsflächen) bewirkt wird. Ist *EF* (Fig. 317) die Re-

Fig. 317.



Digitized by Google

flexionsfläche, welche eben oder krumm sein kann, *AB* ein einfallender Lichtstrahl, *BC* das im Punkte *B*, wo derselbe einfällt, auf die Fläche errichtete Loth, also wenn dieselbe krumm ist, die Normale, *BD* der reflectirte Strahl, so heisst Winkel *ABC*: Einfallswinkel, *DBC* Reflexionswinkel. „Beide liegen in einer Ebene und sind gleich." Dies ist das Reflexionsgesetz, auf welchem die Theorie der Spiegelung beruht (vergleiche im Uebrigen den Artikel: Licht).

Das Reflexionsgesetz lässt sich aus der Annahme beweisen, dass die Lichterscheinungen durch ein elastisches Fluidum, den Aether, hervorgebracht werden. Insofern die Wärmeerscheinungen denselben, und der Schall in der Wellenbewegung der Luft einen ähnlichen Ursprung hat, so findet auch in diesen beiden Gebieten das Reflexionsgesetz Anwendung. Beim Schall bringt es die Erscheinung des Wiederhalls hervor. Die Zurückwerfung eines vollständig elastischen Körpers von einem anderen Körper ist ebenfalls durch das Reflexionsgesetz bestimmt, und wird zuweilen auch als Reflexion bezeichnet.

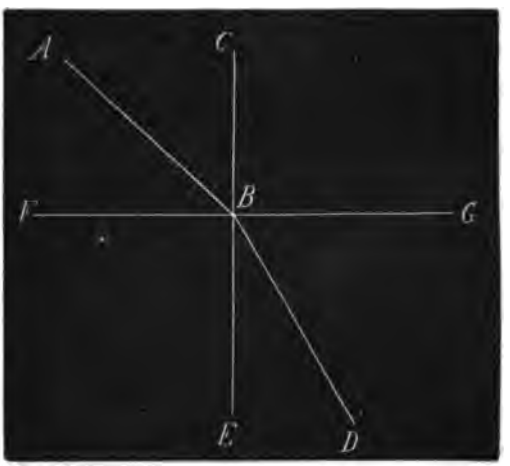
Refractor.

Ein auf das Prinzip der Brechung beruhendes Fernrohr im Gegensatz zum Reflector oder Spiegeltelescop (siehe den Artikel: Telescop).

Refraction, Brechung (Optik).

Die Eigenschaft der Lichtstrahlen, beim Uebergang von einem Medium ins andere ihre Richtung zu ändern. Ist *AB* (Fig. 318) der einfallende Strahl, *FG* die Grenzfläche beider Medien, welche eben oder

Fig. 318.



krumm sein kann, so heisst Loth *BC* auf *FG* das Einfallsloth, ist *BE* seine Verlängerung, *BD* der gebrochene Strahl, so nennt man *ABC* den Einfallswinkel, *DBE* den Brechungswinkel. Das Brechungsgesetz, welches von Snellius (Mitte des 16. Jahrhunderts) herrührt, lautet nun:

„Das Verhältniss der Sinus des Einfalls- und des Brechungswinkel ist constant."

Dies Gesetz gilt aber nur für einfach brechende Mittel; was die doppelt brechenden, die Begründung und Ausführung des Brechungsgesetzes anbetrifft, so vergleiche man den Artikel: Licht, da es unzweckmässig wäre, die hier nöthigen Betrachtungen von den optischen Gegenständen zu isoliren. Auch bei Wärme und Schall findet sich die Erscheinung der Refraction.

Regel-de-tri, Regula-de-tri (praktische Rechenkunst).

Das Verfahren, welches man anwendet um von vier Grössen, von denen je zwei gleich benannt sind, und deren Verhältniss dem der beiden andern gleich ist, die eine zu finden.

Z. B. Sei die Aufgabe zu lösen:

9 Pfund kosten 6 Thaler, was kosten 11 Pfund.

Auflösung, Ist x der Preis der 11 Pfund, so sind offenbar die Verhältnisse: $\frac{11 \text{ Pfund}}{9 \text{ Pfund}}$ und $\frac{x \text{ Thlr.}}{6 \text{ Thlr.}}$ gleich, also:

Digitized by Google

$$\frac{11}{9} = \frac{x}{6},$$

d. h.:

$$x = \frac{6 \cdot 11}{9} = \frac{2 \cdot 11}{3} = \frac{22}{3};$$

man erhält also $7\frac{1}{3}$ Thaler.

Dieser Aufgabe liegt die Annahme zu Grunde, dass der Preis in demselben Verhältniss zunimmt wie die Waare. Bei andern Aufgaben handelt es sich darum, Grössen zu ermitteln, die in dem Maasse abnehmen, als andere gegebene zunehmen. Dies ist z. B. bei folgender Aufgabe der Fall:

9 Arbeiter vollenden eine gewisse Arbeit in 12 Tagen. In wieviel Zeit würden 15 Arbeiter mit derselben fertig werden.

Auflösung. Da in demselben Maasse, wo die Arbeiterzahl wächst, sich die nöthige Zeit vermindert, hat man:

$$\frac{15 \text{ Arbeiter}}{9 \text{ Arbeiter}} = \frac{12 \text{ Tage}}{x \text{ Tage}},$$

also:

$$x = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{9 \cdot 4}{5} = \frac{36}{5},$$

und die Anzahl der Tage ist $7\frac{1}{5}$.

Die erstere Aufgabe wird direct, die letztere indirect genannt, und man theilt daher die Regel-de-tri in eine directe und indirecte (umgekehrte) ein.

Beide hier gegebenen Beispiele gehören der einfachen Regel-de-tri an, welcher gegenüber man auch eine zusammengesetzte hat. Dieselbe besteht darin, dass die drei Glieder der Proportion, aus welcher das vierte gefunden werden soll, nicht unmittelbar gegeben sind, sondern durch andere Proportionen erst gefunden werden müssen. Z. B.:

Wenn 8 Arbeiter, die täglich 9 Stunden arbeiten, in 19 Tagen einen Garten umgraben, der 12 Ruthen lang und 8 Ruthen breit ist, wie lang ist derjenige Garten, der bei einer Breite von 20 Ruthen von 24 Arbeitern, die täglich 11 Stunden arbeiten, in 36 Tagen umgegraben wird.

Auflösung. Indem man zunächst nur die Arbeiter und die Länge des Gartens berücksichtigt, hat man:

8 Arbeiter arbeiten einen 12 Ruthen langen Garten um, wie lang ist der, den 24 Arbeiter umgraben?

Das Verhältniss ist ein directes, also:

$$\frac{24}{8} = \frac{x}{12}, \quad x = \frac{12 \cdot 24}{8}.$$

Werden jetzt nur die Arbeitstage berücksichtigt.

Um $\frac{12 \cdot 24}{8}$ Ruthen Länge umzugraben, werden 19 Tage gebraucht, wie lang ist der Garten, der in 36 Tagen umgegraben wird?

Das Verhältniss ist wieder ein directes:

$$\frac{36}{19} = \frac{x}{\frac{12 \cdot 24}{8}}$$

$$x = \frac{12 \cdot 24 \cdot 36}{8 \cdot 19}.$$

Es wird jetzt die Breite berücksichtigt. Zu $\frac{12 \cdot 24 \cdot 36}{8 \cdot 19}$ Ruthen Länge gehören 8 Ruthen Breite. Wie viel Ruthen Länge gehören (bei gleicher Arbeitszeit und Arbeiterzahl) zu 20 Ruthen Breite?

Das Verhältniss ist offenbar indirect, also:

$$\frac{8}{20} = \frac{x}{\frac{12 \cdot 24 \cdot 36}{8 \cdot 19}}$$

$$x = \frac{8 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 36}{8 \cdot 19 \cdot 20}.$$

Es sind noch die Arbeitsstunden zu berücksichtigen. — $\frac{8 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 36}{8 \cdot 19 \cdot 20}$ Ruthen Länge werden bei täglich 9 Stunden Arbeitszeit umgegraben, wieviel wenn die Arbeitszeit 11 Stunden beträgt?

Das Verhältniss ist nun direct, also:

$$\frac{11}{9} = \frac{x}{\frac{8 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 36}{8 \cdot 19 \cdot 20}}$$

$$x = \frac{11 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 36}{9 \cdot 8 \cdot 19 \cdot 20},$$

also, wenn gehoben wird:

$$x = \frac{11 \cdot 12 \cdot 24}{19 \cdot 5} = \frac{3168}{95}.$$

Der Garten hat $\frac{3168}{95} = 33\frac{33}{95}$ Ruthen Länge. — Es ist nun leicht ersichtlich, wie man ohne Aufsetzen aller dieser Proportionen zum Ziele gelangt, indem man ansetzt:

$$\frac{12 \cdot 24}{8} \cdot \frac{36}{19} \cdot \frac{8}{20} \cdot \frac{11}{9},$$

d. h. indem man immer den zuerst gefundenen Ausdruck als Glied einer Proportion betrachtet, und mit zwei anderen gleich

benannten, in der Aufgabe enthaltenen Glieder verbindet.

Ein anderes Verfahren, diesen Ansatz zu bilden, ergibt sich durch folgende, bei jedem Regel-de-tri-Exempel anzuwende Schlusskette.

8 Arbeiter machen einen Graben von 12 Ruthen Länge, also ein Arbeiter einen solchen von $\frac{12}{8}$ Ruthen Länge und 24 Arbeiter einen solchen von $\frac{12 \cdot 24}{8}$ Ruthen. Es wäre so, wenn dieselben täglich 9 Stunden arbeiteten; bei einer Stunde Arbeitszeit könnte der Garten nur $\frac{12 \cdot 24}{8 \cdot 9}$ Ruthen, bei 11 Stunden Arbeitszeit aber $\frac{12 \cdot 24 \cdot 11}{8 \cdot 9}$ Ruthen haben. Dies fände statt bei 19 Tagen Arbeit; bei einem Tage Arbeit würden $\frac{12 \cdot 24}{8 \cdot 9 \cdot 19}$ Ruthen, und in 36 Tagen $\frac{12 \cdot 24 \cdot 36}{8 \cdot 9 \cdot 19}$ Ruthen umgegraben. Dies jedoch nur, wenn der Garten 8 Ruthen breit ist, wäre er eine Ruthe breit, so kann die Länge 8 mal grösser, also: $\frac{12 \cdot 24 \cdot 36 \cdot 8}{8 \cdot 9 \cdot 19}$, da er aber 20 Ruthen breit ist, so muss sie 20 mal kleiner, also: $\frac{12 \cdot 34 \cdot 36 \cdot 8}{8 \cdot 9 \cdot 19 \cdot 20}$ sein. Dies ist der vorige Ansatz. Die letztere Methode empfiehlt sich dadurch, dass sie bei gleicher Kürze doch während des ganzen Verfahrens den Ausführenden nöthigt, sich der Begründung bewusst zu bleiben, wodurch Schlussfehler eher vermieden werden als bei der leicht mechanisch werdenden Proportionsrechnung.

Uebrigens ist es klar, dass wenn die ganze Schlussfolge nur in Gedanken geschieht, der Ansatz durch allmäliges Einreihen aller Zahlen in dasselbe Bruchschema geschieht, und nicht wiederholte Ansätze nöthig sind.

Dem Regel-de-tri-Verfahren ordnen sich die meisten Rechnungen des praktischen Lebens, namentlich auch die Aufgabe der gemeinen Zinsrechnung unter.

Regenerator (Maschinenkunde).

Eine Einrichtung bei der Ericsons'chen calorischen Maschine (siehe den Artikel: Wärme) aus einer Reihe von Drahtnetzen bestehend, durch welche die warme Luft beim Austritt strömt, um einen möglichst grossen Theil der Wärme an dies Geflecht abzugeben, welche beim nächsten Kolbenspiel zur Erwärmung der eintretenden Luft benutzt wird. Auch bei Dampfmaschinen hat man wohl ähnliche Einrichtungen versucht, jedoch haben sich dieselben hier wie dort nicht bewährt, unter Andern wegen der bedeutenden Kraft, welche dazu erforderlich ist, die Luft oder den Dampf durch ein solches Geflecht zu treiben.

Regula cöci (Arithmetik).

Eine Aufgabe der unbestimmten Analytik. Sie besteht darin, dass eine gegebene ganze Zahl in eine Anzahl von ganzen Theilen vertheilt werden soll, die mit gewissen Zahlen multiplicirt, eine Produktensumme von gegebener Grösse bieten.

Beispiel. Jemand kauft hundert Stück Vieh, Ochsen, Schweine und Schafe für zusammen 3200 Thaler. Wenn der Preis eines Ochsen, nun 50 Thaler, der eines Schweines 20 und eines Schafes 12 Thaler ist, wie viel Stück von jeder Art waren darunter?

Auflösung. Unter x die Anzahl der Ochsen, unter y die der Schweine, und unter z die der Schafe verstanden, hat man die Gleichungen:

$$1) \qquad x + y + z = 100$$

$$2) \qquad 50x + 20y + 12z = 3200,$$

berechnet man z aus der ersten Gleichung und setzt es in die zweite ein, so hat man:

$$1200 + 38x + 8y = 3200$$

oder:

$$38x + 8y = 2000$$

d. h.:

$$3) \qquad 19x + 4y = 1000.$$

Diese Gleichung wird am bequemsten gelöst mittelst der Hülfsgleichung:

$$19x_1 + 4y_1 = 1,$$

wofür sich leicht durch Versuchen (oder durch Kettenbrüche siehe den Artikel: unbestimmte Aufgabe) die Lösung ergibt:

$$x_1 = -1, \quad y_1 = 5$$

und es ist leicht zu sehen, dass die Producte dieser Zahlen mit 1000 zugleich auch Auflösungen der Gleichung 3) sind, also:

$$x = -1000, \quad y = 5000.$$

Es ist dies jedoch nur ein System von Auflösungen. Alle solche ergeben sich aus den Formeln:

$$x = -1000 + 4n, \quad y = 5000 - 19n$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

Digitized by Google

Es ist ersichtlich, dass die mit n multiplicirten Theile in Gleichung 3) sich heben. Gleichung 1) gibt nun:

$$s = -3900 + 15n.$$

Diese Formeln geben natürlich an sich unendlich viel Werthe von x, y, z. Der gegebenen Aufgabe gemäss tritt aber eine Beschränkung ein. Es darf nämlich keine dieser Zahlen negativ sein. Damit dies in Bezug auf s nicht stattfinde, muss n wenigstens gleich 260 sein. In diesem Falle ist auch x positiv. Damit aber y positiv sei, kann der höchste Werth von n, 263 nicht übersteigen.

Es bleiben also nur die Werthe

$$n = 260, 261, 262, 263$$

übrig. Man erhält denselben entsprechend:

$x = 40$	$y = 60$	$s = 0$
44	41	15
48	22	30
52	3	45.

Der Ausdruck Regula cöci kommt vielleicht daher, weil die Aufgaben von den Erfindern durch Versuche gelöst worden.

Regula falsi (Règles des fausses positions) (Rechenkunst).

Diese Verfahrungsart scheint der Vorgänger der Algebra zu sein. Sie dient dazu, einen Theil derjenigen Aufgaben, welche zu Gleichungen ersten Grades führen, in der Weise zu lösen, dass man von willkürlichen Annahmen für die Werthe der gesuchten Zahlen ausgeht, um durch Verbesserung derselben die wahren Werthe zu ermitteln. Die Weise des Verfahrens und die Grenze seiner Anwendbarkeit werden folgende Beispiele zeigen.

Beispiele 1. Eine Summe von 62 rheinischen Gulden soll theils in Gulden theils in Thalern bezahlt werden, so dass im Ganzen 44 Geldstücke zu verwenden sind.

Auflösung. Beständen die 44 Stücke alle in Gulden, so wäre ihr Werth 44 Gulden. Dieser Werth ist also um 18 Gulden zu vermehren. Ersetzt man ein Guldenstück durch einen Thaler, so wird die Summe um $\frac{1}{4}$ Gulden (7 Gulden gleich 4 Thaler) vermehrt. Es sind also so viel Gulden durch Thaler zu ersetzen, als die Zahl $\frac{1}{4}$ in 18 enthalten ist, d. h. $\frac{4 \cdot 18}{3} = 24$ Thaler sind anzuwenden, wo dann noch 20 Gulden übrig bleiben.

Beispiel 2. Ein Vater vertheilt unter seine drei Söhne 2000 Thaler derart, dass der älteste doppelt so viel als die beiden andern zusammen und ausserdem noch 200 Thaler, der nächstfolgende aber doppelt so viel als der jüngste erhält. Wieviel bekommt Jeder?

Auflösung. Wir nehmen willkürlich an, dass der jüngste Sohn 100 Thaler bekäme; es würde dann der zweite 200 und der älteste 800 Thaler erhalten, dies gäbe aber statt 2000 Thaler nur eine Summe von 1100 Thalern. Da der älteste Sohn 200 Thaler vorweg bekömmt, so sind nur 1800 Thaler zu vertheilen. Da nun bei unserer Annahme 900 Thaler vertheilt worden sind, so werden 1800 erschöpft, wenn, abgesehen von den 200, welche der älteste vorweg erhielt, jeder das doppelte empfängt. Es erhält also der jüngste 200, der mittlere 400 und der älteste 1400.

Bei diesen Aufgaben ist nur eine willkürliche Annahme zu machen. Man nennt daher das betreffende Verfahren einfache Regula falsi. Die mehrfache Regula falsi tritt ein, wenn mehr als eine Annahme zu machen ist. Wir geben davon ebenfalls ein Paar Beispiele.

Beispiel 3. Ein Spieler wird gefragt, wie viel Geld er noch übrig habe. Seine Antwort lautet: Der Ueberschuss der fünffachen Anzahl meiner Goldstücke über 30 ist gleich dem Ueberschuss der doppelten Anzahl derselben über 6. Wie viel Goldstücke hat er noch?

Auflösung. Angenommen er hätte 20 Goldstücke. Der Ueberschuss von $5 \cdot 20$ über 30 ist 70. Der Ueberschuss von $2 \cdot 20$ über 6 ist dagegen 34. Man hat also einen Fehler gemacht, der $70 - 34$ oder 36 beträgt.

Nehmen wir jetzt an, er hätte 19 Goldstücke. Der Ueberschuss von $5 \cdot 19$ über 30 ist 65, der von $2 \cdot 19$ über 6 ist 32. Der Fehler beträgt also 33.

Lässt man also die Anzahl der Goldstücke um Eins abnehmen, so vermindert sich der Fehler um $36 - 33$ oder 3. Damit derselbe also von 36 auf Null sinke, d. h. kein Fehler vorhanden sei, muss die Anzahl der Goldstücke um $\frac{36}{3}$ oder 12 sinken. Anfänglich war 20 angenommen, also die richtige Anzahl ist $20 - 12$ oder 8.

Beispiel 4. Ein Vater wird nach dem Alter seines Sohnes gefragt. Die Antwort lautet: Ich selbst bin dreimal älter als mein Sohn, war aber vor zehn Jahren fünfmal älter. Wie alt ist der Sohn?

Auflösung. Sei der Sohn 24 Jahr

Digitized by Google

alt, so wird der Vater 72 Jahr alt sein. Vor zehn Jahren wäre dann der Sohn 14, der Vater aber 62 Jahr alt gewesen. 62 ist aber nicht das fünffache von 14, sondern von dieser Zahl 70 um 8 verschieden. Ist nun der Sohn 23 Jahr, so ist der Vater 69, vor zehn Jahren sind die bezüglichen Alter 13 und 59, die letztere Zahl ist von $5 \cdot 13 = 65$, um 6 verschieden. Jedes Jahr, welches man dem Sohne abzieht, vermindert also den Fehler um 2, so dass, damit derselbe von 8 auf Null sinke, 4 Jahre abzuziehen sind. Das wirkliche Alter des Sohnes ist also 20, das des Vaters 60 Jahr.

Die einfache Regula falsi ist nur anwendbar, wenn die Formel, welche die Auflösung gibt, nur aus Produkten und Quotienten entsteht. In Beispiel 2) ist deshalb die abzuziehende Zahl 200 vor der Anwendung der Regel entfernt worden. Die Anwendung der mehrfachen Regula falsi erfordert, dass die Aenderungen der Fehler den Aenderungen, welche man dem Werthe der unbekannten Grösse gibt, proportional ist. Dies ist der Fall, wenn die Aufgabe auf eine Gleichung erster Ordnung führt, und die erstere in einer passenden Gestalt gegeben ist. Immer nämlich nimmt eine Gleichung erster Ordnung die Gestalt an:

$$n = ax + b.$$

Setzt man nun für x die fehlerhaften Werthe α und β, und seien μ, ν die entsprechenden Werthe der rechten Seite der Gleichung, so ist:

$$\mu = a\alpha + b, \quad \nu = a\beta + b,$$

also, wenn man diese Gleichung abzieht:

$$\mu - \nu = a(\alpha - \beta),$$

$\mu - \nu$ ist aber die Aenderung des Fehlers, welcher im ersten Falle $n - \mu$ im letztern $n - \nu$ war, und diese Aenderung steht zu der in der Wahl der Unbekannten $\alpha - \beta$ somit wirklich in einem constanten Verhältnisse.

Man versteht aber zuweilen unter Regula falsi auch diejenigen Methoden, welche man bei der Auflösung höherer Gleichungen anwendet, und welche darin besteht, dass man statt der Unbekannten auf irgend eine Weise, durch Versuche oder Schlüsse, zunächst einen nicht sehr von ihr entfernten Werth findet und diesen durch Näherungsmethoden verbessert. Bei dieser Bezeichnung wäre also z. B. die Newtonsche Näherungsmethode eine Art der Regula falsi. Jedoch ist diese Ausdrucksweise nicht allgemein üblich.

Regulator.

Eine an Uhren und Maschinen anzubringende Vorrichtung, um der Bewegung derselben die nöthige Gleichmässigkeit zu geben. Was die so wichtigen Regulatoren der Uhren anbetrifft, so bestehen dieselben entweder in einem Pendel oder in einer Feder. Der erstere ist offenbar nur bei unbeweglich angebrachten Uhren anzuwenden. Vermöge der Gleichzeitigkeit der Pendel und Federschwingungen, wird auch dem Gange der Uhr Gleichmässigkeit verliehen. Siehe über das Nähere den Artikel: Uhr.

Im Uebrigen sind die Regulatoren der Dampfmaschinen, welche aus einem Centrifugalpendel (siehe diesen) bestehen, von besonderer Wichtigkeit. Auch bei Wassersäulmaschinen sind Regulatoren nöthig. Und in gewisser Weise sind die Bremsevorrichtungen bei Locomotiven hierher zu rechnen.

Reibung (Friction, Mechanik).

1) Einleitung.

Diejenige Kraft, welche durch die Einwirkung zweier sich berührender Körper entsteht, in der Berührungsebene und in der Richtung wirkt, welche der Bewegung der Körper entgegengesetzt ist. Die Reibung herrscht bei Ruhe und Bewegung der Körper. Im letzteren Falle ist ihre Einwirkung immer verzögernd, im ersteren Falle bewirkt sie, dass eine geringe hinzutretende Kraft, den Körper noch nicht in Bewegung versetzt, sondern, dass das Gleichgewicht erst dann aufgehoben wird, wenn diese Kraft grösser als diejenige ist, mit welcher die Reibung einwirkt. In keinem Falle also kann durch die Reibung Bewegung geschaffen, sondern nur eine solche vernichtet werden. Dagegen kann die Reibung indem sie gewisse Componenten der wirkenden Kräfte ganz oder theilweise aufhebt, die Bewegungsrichtung ändern. Dies macht sie in der praktischen Maschinenlehre zu einem wichtigen Mittel der Uebertragung von Bewegungen.

Es ist ein bekannter mechanischer Satz, dass wenn zwei Körper sich berühren, ihre Einwirkungen auf einander immer normal auf der Berührungsebene geschehen. Insofern nun die Reibung aber in der Berührungsebene selbst stattfindet, hat man hier scheinbar eine Ausnahme von diesem fundamentalen Satze, indess auch nur eine scheinbare. Denn berücksichtigen wir, dass die Körper weder vollkommen glatt, noch vollkommen fest

Digitized by Google

sind, so ist es klar, dass bei der Berührung kleine, dem idealen Gesetze, welches die Oberflächen dieser Körper bestimmt, widersprechende Erhebungen und Vertiefungen sich vorfinden oder bilden. Also z. B. wenn zwei Rollen sich berühren, so finden sich auf den cylindrischen Oberflächen derselben kleine Wölbungen oder Gruben, welche demselben die vollkommene Cylindergestalt nehmen, und auch eine vollkommene Berührung unmöglich machen. Man kann sich die Sache so vorstellen, als wenn die Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern Körpers dringen, wodurch vermöge der Undurchdringlichkeit ein Widerstand gegen die Bewegung hervorgebracht wird. Indess ist es nicht nöthig, die Reibung so materiell aufzufassen, wenn man an die Stelle der Undurchdringlichkeit sich Abstossungen und Anziehungen denkt, welche das Vorschreiten hemmen, und überwunden werden müssen. Bei diesen Widerständen spielen indess nicht bloss die Theile des Körpers eine Rolle, sondern auch die Imponderabilien, namentlich die Wärme, insofern die Reibung von Wärmeentwickelung begleitet ist, und zwar haben die Versuche der neuesten Zeit gezeigt, dass diejenige lebendige Kraft, welche bei der durch Reibung bewirkten Verzögerung verloren geht, sich als Wärme, d. h. als Zunahme der lebendigen Kraft der Aetherschwingungen ganz oder beinahe ganz wieder vorfindet. Insofern muss sogar diejenige Arbeit, welche zur Ueberwindung der Widerstände, welche der Körper selbst darbietet, verbraucht wird, als sehr gering angeschlagen werden, weil nach dem Gesetze der lebendigen Kräfte sonst ein dieser Arbeit gleiches Quantum lebendiger Kraft ganz verloren gehen muss. Diese Thatsache deutet auf eine weniger materielle Natur der Reibung, als man derselben gewöhnlich zu geben pflegt, hin.

2) Arten der Reibung.

Man stellt zunächst die Reibung der Ruhe die Reibung der Bewegung gegenüber. Die erstere ist derjenige Widerstand, welcher überwunden werden muss, ehe der Körper zur Bewegung gelangen kann, die letztere ist der bei der Bewegung selbst eintretende Widerstand. — Jedoch ist auch nach der Art der Bewegung ein Unterschied zu machen. Wie die Bewegungen eines (festen) Körpers auf einem andern in gleitende und rollende getheilt oder zerlegt werden können, so unterscheidet man auch eine gleitende und eine rollende oder wälzende Reibung. Die gleitende Reibung ist also die, welche sich einstellt, wenn ein Körper sich gleitend, d. h. derart bewegt, dass alle seine Punkte gleiche und parallele Geschwindigkeiten haben. Die rollende, die, welche stets stattfindet, wenn ein Körper rollt, d. h. eine drehende Bewegung um den jedesmaligen Berührungspunkt oder die Berührungslinie beschreibt, oder was dasselbe ist, wenn der auf beiden sich berührenden Körpern vom Berührungspunkte zurückgelegte Weg gleich ist. Wenn beide Bewegungen gleichzeitig vorkommen, so finden offenbar auch beide Reibungsarten statt. Neben diesen Reibungsarten betrachtet man oft noch die Zapfenreibung (Axenreibung), welche entsteht, wenn ein cylindrischer Zapfen sich in seinem Lager dreht. Indess ist dies offenbar nur ein besonderer Fall der gleitenden Reibung.

3) Gesetze der gleitenden Reibung.

Nur von der gleitenden Reibung sind einige genauere Gesetze, die jedoch auf empirischem Wege ermittelt sind, bekannt. Dieselben lauten:

1) Die Reibung nimmt mit der Rauhigkeit zu. — Sie wird also durch Schmieren vermindert, weil hierdurch die Vertiefungen ausgefüllt werden. Oel, Fett, Seife sind gute Schmieren. Dagegen vermehren dieselben die Adhäsion, welche zwischen den sich unmittelbar berührenden Punkten der Körper stattfindet, indem sie die Anzahl dieser Berührungspunkte vermehren. Diese Adhäsion ist jedoch meist viel kleiner als der aufgehobene Theil der Reibung, und unterscheidet sich übrigens von der letzteren wesentlich, indem sie andern Gesetzen gehorcht. Namentlich ist sie von der Grösse der Berührungsfläche abhängig, und von dem Drucke unabhängig, kann aber in der Regel gegen die Reibung vernachlässigt werden.

2) Die Grösse der Reibung ist proportional dem nach der gemeinschaftlichen Normale gerichteten Drucke, welcher zwischen beiden sich reibenden Körpern stattfindet.

3) Sie ist unabhängig von der Grösse der sich berührenden Flächen. — Es wird nämlich wenn die Berührungsfläche zunimmt, zwar die Anzahl der sich reibenden Theile vermehrt, gleichzeitig aber der Druck jedes Theiles in demselben Maasse vermindert.

Digitized by Google

4) Die Reibung bewegter Körper ist von der Geschwindigkeit unabhängig.

5) Dagegen ist die Reibung der Ruhe nicht dieselbe als die der Bewegung und zwar ist fast immer die erstere die grössere.

6) Findet zugleich Gleiten und Wälzen statt, so ist fast immer die wälzende Reibung so klein, dass sie gegen die gleitende vernachlässigt werden kann.

7) Die Zapfenreibung ist kleiner als die gewöhnliche gleitende.

Diese Gesetze sind jedoch nur annähernd richtig, wie sie denn, wie schon bemerkt, nur als Erfahrungssätze gelten können. Der Abschnitt 5) wird die Modification, der sie erliegen, angeben.

4) Vom Reibungscoefficienten, dem Reibungswinkel und Reibungskegel.

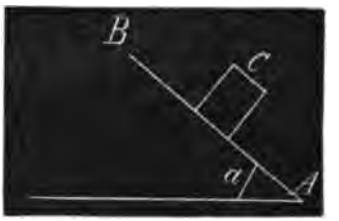
Nach dem zweiten und dritten der obigen Gesetze, ist, wenn N der Normaldruck, R die Grösse der Reibung, d. h. diejenige Kraft, welche nöthig ist um die Reibung zu überwinden,

$$\varphi = \frac{R}{N}$$

eine constante Grösse, d. h. sie ist nur von dem Stoffe und dem Zustande der Körper, welche sich gegeneinander reiben, abhängig, keinesweges aber von ihrem Drucke gegeneinander oder von dem Bewegungszustande. Der Ausdruck φ heisst: „Reibungscoefficient." Derselbe ist für die verschiedenen Materien besonders zu ermitteln, und zwar auf experimentalem Wege.

Wenn ein Körper C (Fig. 319) sich auf einer schiefen Ebene AB befindet,

Fig. 319.



die um den Winkel α gegen den Horizont geneigt ist, so ist, wenn G das Gewicht von C ist, $G \cos \alpha$ der Normaldruck, also $\varphi G \cos \alpha$ die Grösse der Reibung, welche der Kraft $G \sin \alpha$, den der Körper C zum Sinken treibt, entgegenwirkt. Es kann also erst dann Hinabsinken von C eintreten, wenn $G \sin \alpha$ grösser als $\varphi G \cos \alpha$, d. h. wenn

$$\operatorname{tg} \alpha > \varphi$$

ist. Setzen wir

$$\operatorname{tg} \lambda = \varphi$$

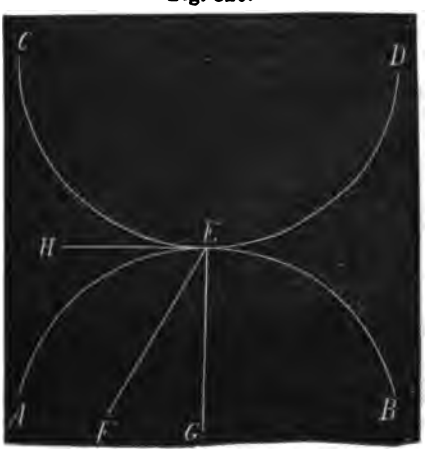
so erhalten wir den Winkel λ, dessen Tangente gleich dem Reibungscoefficienten ist. Derselbe wird „Reibungswinkel" genannt. Wir haben mithin den Satz:

„Damit ein Körper allein unter Einfluss der Schwere auf einer schiefen Ebene sinkt, muss deren Neigung gegen den Horizont grösser als der Reibungswinkel sein."

Die Beobachtung des Reibungswinkels gibt ein bequemes Mittel zur Bestimmung des Reibungscoefficienten.

Wenn zwei Körper AB und CD (Fig. 320), auf welche die Schwere allein wirkt,

Fig. 320.



Digitized by Google

schief gegen einander gedrückt werden, und $FF = D$ die Grösse dieses Druckes ist, so zerlegt er sich in einen normalen Theil EG, und einen tangentialen EH, wie auch die Körper begrenzt seien. Sei α der Winkel zwischen dem gegebenen und dem normalen Drucke, also:

$$EG = D\cos\alpha, \quad EH = D\sin\alpha.$$

Die Reibungsgrösse ist also $qD\cos\alpha$, und es wird erst dann das Gleichgewicht gestört, wenn $D\sin\alpha$ grösser als $qD\cos\alpha$ oder $\operatorname{tg}\alpha$ grösser als q wird, also wenn α den Reibungswinkel übersteigt. Ist FEG der Reibungswinkel, und denkt man sich FE um die Normale EG gedreht, so entsteht ein Rotationskegel, welcher „Reibungskegel" genannt wird. Seine Oberfläche umfasst alle Richtungen, in welchen die Reibung grade dem Hinabgleiten noch Widerstand leistet.

5) Reibungsversuche und Reibungstafeln.

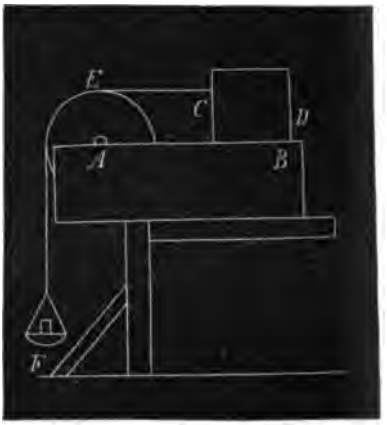
Zur Ermittelung der gleitenden Reibung für verschiedene Materien hat man einen auf horizontaler Bahn gleitenden Schlitten angewendet. Ein Seil, welches über eine feste Rolle gezogen ist, wird durch ein Gewicht in Bewegung gesetzt (Fig. 321). Unterlage und Schlitten werden mit abgeglätteten Schichten von den zu untersuchenden Substanzen bekleidet. Ist G nun das Gewicht des Schlittens, P das Gewicht, welches zum fortziehen nöthig ist, so wird qG die Reibung sein, also die Acceleration wird sein:

$$p = g\frac{P - qG}{P + G},$$

wo g die Beschleunigung der Schwere ist, hieraus ergibt sich dann:

$$q = \frac{P}{G} - \frac{P+G}{G}\,\frac{p}{g}.$$

Fig. 321.



Wird nun während der Zeit t der Weg s zurückgelegt, so ist:

$$s = \tfrac{1}{2}pt^2,$$

mithin

$$q = \frac{P}{G} - \frac{P+G}{G}\,\frac{2s}{gt^2}.$$

Wie die Formel bei Anwendung einer schiefen Ebene zu modificiren ist, wird man leicht erkennen. Dergleichen Versuche haben Coulomb und Morin angestellt. — Um die Zapfenreibung zu ermitteln, wendet Hirn folgenden Apparat an, der von ihm „Reibungswaage" genannt wird. Der Zapfen C (Fig. 322) wird durch eine Maschine fortwährend umgedreht, das Zapfenlager D ist mit einem gleicharmigen Hebel ADB verbunden, und wird mittels der Gewichte P und Q auf den Zapfen gedrückt. Der Zapfendruck erzeugt also eine Reibungsgrösse

$$q(P+Q).$$

Fig. 322.

Dies ist die Kraft, mit welcher Hebel und Lager umgedreht werden würde, wenn nicht durch ein auf der einen Seite hinzutretendes Gewicht das Gleichgewicht hergestellt, also die horizontale Lage erhalten würde, es ist also z. B. P grösser als Q zu nehmen.

Es wirkt nun 1) an einem Hebelarme r, der gleich dem Zapfenhalbmesser CD ist, die Reibung $q(P+Q)$, 2) an dem Arme $CA=a$ die Gewichtsdifferenz $P-Q$, so dass man hat:

$$qr(P+Q)=a(P-Q),$$

also:

$$q=\frac{P-Q}{P+Q}\,\frac{a}{r}.$$

Die neuesten Versuche über gleitende Reibung sind von Bochet mit Eisenbahnwagen auf Eisenbahnschienen angestellt. Das Gleiten wurde durch Festkeilen der Räder oder durch besondere Vorrichtungen (Schuhe) bewirkt. Dieselben waren mit verschiedenen Substanzen überzogen, und ein Federdynamometer mass die der gleitenden Reibung gleiche Zugkraft der in Schlitten umgewandelten Wagen. Diese Untersuchungen bestätigen zwar die Proportionalität zwischen Reibung und Druck, ergaben aber, dass die erstere nicht völlig von der Grösse, der sich berührenden Flächen und der Geschwindigkeit unabhängig sei. Bochet kommt zu folgender empirischen Formel:

$$q=\frac{k-\gamma}{1+\alpha v}+\gamma,$$

wo v die Geschwindigkeit, k der Werth von q für sehr kleine, γ der für sehr grosse Geschwindigkeit ist. α ist ein Erfahrungscoefficient, der etwa 0,3 zu setzen ist, wenn v in Metern, dagegen gleich 0,094 wenn v in Fussen gegeben ist. Der Reibungscoefficient nimmt sonach mit wachsender Geschwindigkeit ab, doch ist er bei Geschwindigkeiten, die nicht grösser als ein Fuss sind, nahezu als constant zu betrachten, γ ist offenbar stets kleiner als k. Wichtig ist es, dass bei grosser Glätte der Stoffe mässigem Drucke und gehörig angewandter Schmiere γ bei allen Stoffen sich demselben Werth nähert.

Auch den Satz, dass die Reibung der Ruhe grösser als die der Bewegung sei, findet Bochet nur bestätigt, wenn Holz oder Leder auf benetzten oder geschmierten Eisenschienen gleitet. In diesem Falle aber ist die erstere Reibungsart doppelt so gross als die letztere.

Für verschiedene Stoffe findet Bochet folgende Resultate, wo überall v in Metern ausgedrückt ist:

a) für trocknes weiches Holz, bei wenigstens zehn Kilogramm Druck auf den Quadratcentimeter:

$$q=\frac{0{,}30}{1+0{,}3v}+0{,}30.$$

b) Für trocknes hartes Holz unter derselben Bedingung:

$$q=\frac{0{,}30}{1+0{,}3v}+0{,}25.$$

c) Für halbpolirtes Eisen, bei mehr als 300 Kilogramm Druck:

$$q=\frac{0{,}15}{1+0{,}3v}+0{,}15.$$

d) Für halbpolirtes Eisen bei einem Drucke von 100 bis 300 Kilogramm wenn es trocken ist, ferner bei wenigstens 20 Kilogramm, wenn es geschmiert oder ganz polirt ist, endlich auch für harziges Holz mit reinem Wasser benetzt unter demselben Drucke:

$$q=\frac{0{,}175}{1+0{,}3v}+0{.}075.$$

e) Für Holz mit Fett geschmiert, polirt und unter wenigstens 20 Kilogramm Druck:

$$q=\frac{0{,}10}{1+0{,}3v}+0{,}06.$$

Die folgenden Reibungstafeln sind nach den älteren Versuchen gefunden, und gelten daher auch nur unter der Beschränkung, dass die Geschwindigkeit gering ist:

Digitized by Google

Reibungscoefficienten der Ruhe.

	Trocken.	mit Wasser	mit Olivenöl	mit Schweinefett	mit Talg	polirt u. fettig	fettig u. benetzt
Holz auf Holz, kleinster Werth	0,30	0,65	—	—	0,14	0,30	—
mittlerer „	0,50	0,68	—	0,21	0,19	0 35	—
grösster „	0,70	0,71	—	—	0,25	0 40	—
Holz auf Metall	0,60	0,65	0,10	0,12	0,12	0,10	—
Metall auf Metall, kleinster Werth	0,15	—	0,11	—	—	0,15	—
mittlerer „	0,18	—	0,12	0,10	0,11	—	—
grösster „	0,24	—	0,16	—	—	—	—
Hanf auf Holz, kleinster Werth	0,5	—	—	—	—	—	—
mittlerer „	0,63	0,87	—	—	—	—	—
grösster „	0,80	—	—	—	—	—	—
Sohlenleder auf Holz oder Gusseisen, hochkantig	0,43	—	0,62	0,12	—	—	—
flach	0,63	—	0,80	0,13	—	—	0,27
Lederriemen über Trommeln, von Holz	0,47	—	—	—	—	—	—
„ Metall	0,54	—	—	—	—	0,28	0,38
Stein auf Stein (glatt) (Ziegel), kleinster Werth	0,67	—	—	—	—	—	—
grösster „	0,75	—	—	—	—	—	—
Stein auf Schmiedeeisen kleinster Werth	0,42	—	—	—	—	—	—
grösster „	0,49	—	—	—	—	—	—
Harthols auf Stein	0,64	—	—	—	—	—	—

Reibungscoefficienten der Bewegung.

	Trocken	mit Wasser	mit Olivenöl	mit Schweinefett	mit Talg	Schweinefett und Graphit	reine Wagenschmiere	trockne Seife.	fettig
Holz auf Holz, kleinster Werth	0,20	—	—	0,06	0,06	—	—	0,14	0,06
mittlerer „	0,36	0,25	—	0,07	0,07	—	—	0,15	0,12
grösster „	0,48	—	—	0,07	0,08	—	—	0,16	0,15
Holz auf Metall, kleinster Werth	0,20	—	0,05	0,07	0,06	—	—	—	0,10
mittlerer „	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08	0,08	0,10	0,20	0,14
grösster „	0,62	—	0,08	0,08	0,10	—	—	—	0,16
Metall auf Metall, kleinster Werth	0,15	—	0,06	0,07	0,07	0,06	0,12	—	0,11
mittlerer „	0,18	0,31	0,07	0,09	0,09	0,08	0,15	0,20	0,13
grösster „	0,24	—	0,08	0,11	0,11	0,09	0,17	—	0,17
Hanfseil, auf Holz	0,45	0,33	—	—	—	—	—	—	—
„ Eisen	—	—	0,05	—	0,19	—	—	—	—
Flaches Sohlenleder auf Holz oder Metall, roh	0,54	0,36	0,16	—	0,20	—	—	—	—
geklopft	0,30	—	—	—	—	—	—	—	—
fettig	—	0,25	—	—	—	—	—	—	—
Hochkantiges trocken	0,34	0,31	0,14	—	0,14	—	—	—	—
fettig	—	0,24	—	—	—	—	—	—	—

Digitized by Google

Coefficienten der Zapfenreibung.

	Trocken.	fettig und benetzt	geschmiert und benetzt	Oel, Talg oder Schweinefett: in gewöhnlicher Art.	Oel, Talg oder Schweinefett: gut unterhalten.	weiche u. gereinigte Wagenschmiere	Schweineschmalz mit Graphit	fettig
Glockengut auf Glockengut .	—	—	—	0,097	—	—	—	—
„ „ Gusseisen . .	—	—	—	—	0,049	—	—	—
Schmiedeeisen auf Glockengut	0,25	0,189	—	0,075	0,054	0,090	0,111	—
Schmiedeeisen auf Gusseisen	—	—	—	0,075	0,054	—	—	—
Gusseisen	—	0,137	0,079	0.075	0,054	—	—	0,137
Gusseisen auf Glockengut . .	0,194	0,161	—	0,075	0,054	0,065	—	0,166
Schmiedeeisen auf Guajakholz	0,188	—	—	0,12	—	—	—	—
Gusseisen auf Guajakholz . .	0,185	—	—	0,100	0,092	—	0,109	0,140
Guajak auf Gusseisen	—	—	—	0,116	—	—	—	0,153
Guajak auf Guajak	—	—	—	—	0,070	—	—	—

6) Arbeit der Reibung.

Legt ein Körper gleitend den Weg s zurück, und ist N der Normaldruck, so ist qNs diejenige mechanische Arbeit, welche zur Ueberwindung der Reibung nöthig ist. Diese heisst „Arbeit der Reibung". Ist die Unterlage beweglich, s_1 der Weg des gleitenden Körpers, s_2 der der Unterlage, so ist $s = s_1 - s_2$ zu setzen, also der relative Weg zu nehmen. Der Ausdruck qNs ist dann die Arbeit der Reibung für beide Körper zusammen. Denn der schneller gehende Körper beansprucht die Arbeit qNs_1, der langsamere gewinnt bei Zurücklegung des Weges durch die Reibung der Arbeit qNs_2, so dass $qN(s_1 - s_2)$ die Gesammtarbeit ist.

Bei der Zapfenreibung sei R der Druck zwischen dem Zapfen und dem Lager, r der Halbmesser des Zapfens. Die Reibung selbst ist gleich qR, und der zugehörige Weg ist der Umfang des Zapfens $2\pi r$. Die Arbeit während der Umdrehung ist also:

$$2\pi qRr.$$

Werden in einer Minute n Umdrehungen gemacht, so ist die in der Secunde verbrauchte Arbeit:

$$\frac{2\pi nqRr}{60} = 0{,}105\, nqrR,$$

d. h. „die Arbeit der Reibung ist proportional der Umdrehungszahl, dem Zapfenhalbmesser, dem Zapfendrucke und dem Reibungscoefficienten."

Die ersten drei Grössen sind also bei rotirenden Maschinen so gering zu nehmen, als es der Zweck der Maschine und die Erforderniss der Festigkeit gestattet. Die Arbeit der Reibung wird aber vermindert, wenn man die Zapfenlager durch Frictionsräder ersetzt.

Welle AB (Fig. 323) ruht mit ihrem Zapfen C auf den Umfängen EH und $E'H'$, der um D und D' drehbaren Räder. Ist R der Druck der Welle, so erhält man die Pressungen:

$$N = N' = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}},$$

wo $\alpha = DCD'$ ist. Die Reibung bewirkt, dass die Räder mit dem Zapfen umlaufen, und es entstehen dabei in D und D' die Reibungen qN und qN', deren Summe ist:

$$M = \frac{qR}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

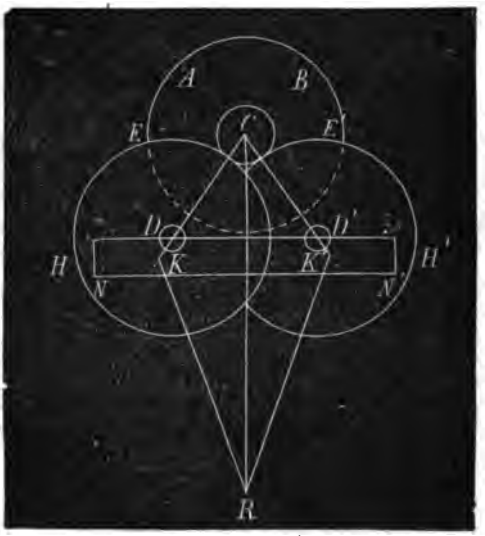
Seien $DE = a$, $D'E' = a_1$ die Radhalbmesser, $DK = D'K' = r_1$ die Zapfenhalbmesser, so muss am Umfange der Räder oder an dem des Zapfens C zu ihrer Ueberwindung die Kraft:

$$\frac{r_1}{a_1} M = \frac{r_1}{a_1} \frac{qR}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

wirken, während dieselbe qR war, wenn Zapfen C unmittelbar in einer Pfanne ruht. — Mit Vernachlässigung der Gewichte der Frictionsräder verhalten sich also die Arbeiten der Reibung in beiden Fällen wie

Digitized by Google

Fig. 323.



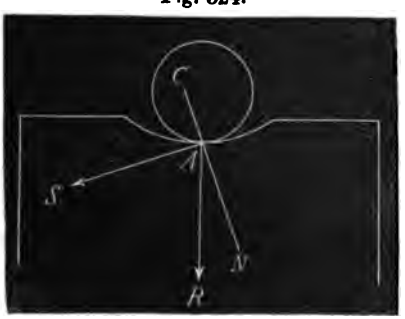
$$\frac{r_1}{a_1 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Brächte man nur ein Frictionsrad an, so wäre α gleich Null und das Verhältniss gleich $\frac{r_1}{a_1}$ zu setzen.

7) Unterschied zwischen der Reibung der Zapfen in alten und neuen Lagern.

In einem alten, also ausgelaufenen Zapfenlager ruht der Zapfen nur in einem Punkte A (Fig. 324) während er in einem

Fig. 324.



neuen, in allen Punkten des Lagers ruht. Im ersteren Falle ist die Reibung geringer als im letzteren. Sei R der Mitteldruck, welcher sich in eine Normalkraft N zerlegt, aus der tangential die Reibung qN entsteht, und in eine Tangentialkraft S; man hat also, wenn sich beide Kräfte ins Gleichgewicht setzen sollen

$$S = qN$$

und da $R^2 = N^2 + s^2$ ist:

$$R = N\sqrt{1+q^2},$$

hieraus folgt der Normaldruck:

$$N = \frac{R}{\sqrt{1+q^2}}$$

und die Reibung:

$$F = \frac{qR}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Ist noch λ der Reibungswinkel also:

$$q = \operatorname{tg} \lambda,$$

so hat man:

$$F = R \sin \lambda.$$

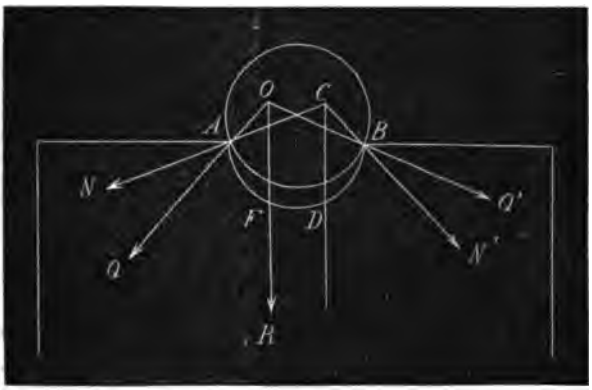
Wenn der Zapfen im Zustande der Ruhe ist, so liegt er in demjenigen Punkte auf, durch welchen der mittlere Druck geht. Findet nun Bewegung statt, so wird er so weit in die Höhe steigen, bis die Kraft zum Herabgleiten der Reibung gleich wird, d. h. er hebt sich um den Winkel λ im Lager in der der Bewegung entgegengesetzten Richtung. Fände dies Fortrücken nicht statt so wäre die Reibung gleich

$$qR = q \operatorname{tg} \lambda,$$

da die Richtung des Druckes normal gerichtet wäre. Die wirkliche Reibung

$R \sin \lambda$ hat also zu der hier angenommenen das Verhältniss $\cos \lambda : 1$. — Gewöhnlich ist nun λ so klein, dass $\cos \lambda$ der Einheit gleich gesetzt werden kann, also der Einfluss der Hebung des Zapfens zu vernachlässigen ist. — Zuweilen wendet man statt der kreisförmigen oder vielmehr cylindrischen Lager dreiseitig prismatische an. Sei ADB (Fig. 325) ein solches, und liege der Zapfen in A

Fig. 325.



und B auf. Seien Q und Q' die in A und B wirkenden Kräfte in welche sich der Druck zerlegt, N und N' bezüglich die normalen Theile, so wirken tangential die Reibungen:

$$\varphi N \text{ und } \varphi N',$$

für die man aus den eben angegebenen Gründen auch setzen kann $Q \sin \lambda$ und $Q' \sin \lambda$; die Gesammtreibung hat also die Grösse $(Q + Q') \sin \lambda$. Sei Winkel $ACB = \alpha$, und R der Mitteldruck, welcher in O angreift, C der Schnittpunkte, der Normaldrucke N und N', so ist:

$$\text{Winkel } QOR = ACD - CAO = \frac{\alpha}{2} - \lambda$$

$$\text{Winkel } Q'OR = BCD + CBO = \frac{\alpha}{2} + \lambda,$$

also: $Q'OQ = \alpha$.

Hieraus ergibt sich:

$$Q = \frac{R \sin\left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha},$$

$$Q' = \frac{R \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \lambda\right)}{\sin \alpha},$$

also die Gesammtreibung:

$$F = \frac{R \sin \lambda}{\sin \alpha}\left[\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \lambda\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \lambda\right)\right]$$

oder:

$$F = \frac{R \sin 2\lambda}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Ist, wie fast immer, λ nur klein, so kann man $\sin 2\lambda = 2 \sin \lambda$ setzen, wo man dann erhält:

$$F = \frac{R \sin \lambda}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Also das Verhältniss der Reibungen bei cylindrischen und dreiseitigen Lagern ist gleich $\cos \frac{\alpha}{2} : 1$.

Sei das Lager jetzt neu und kreisförmig in welchem Falle also der Zapfen in allen Punkten aufliegt.

Man kann dann annehmen, dass der Druck sich auf alle Punkte des Lagers gleichmässig vertheilt.

Sei $R = CD$ wieder der Gesammtdruck (Fig. 326), Winkel $NCD = N'CD$, so kommt auf jeden der Punkte N und N' $\frac{1}{n}$ des Gesammtdruckes, wenn man annimmt, dass der Zapfen überhaupt in n Punkten aufliegt, und ganz wie bei dreiseitigen Lagern, findet man für die Reibung in N und N' zusammen:

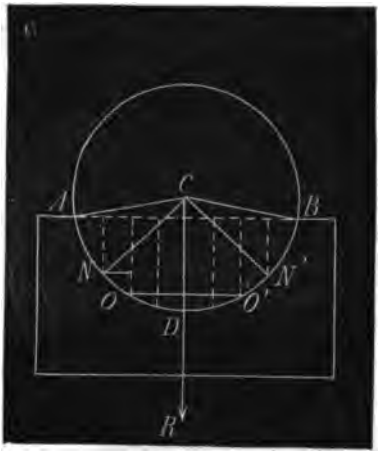
$$\frac{R}{n} \frac{\sin 2\lambda}{\cos NCD}.$$

Nimmt man an, dass die Sehne AB in n gleiche Theile getheilt sei und durch die Theilpunkte Vertikallinien nach der Peripherie gezogen sind, welche in den Punkten N, N', O, O' ... dieselbe schneiden, so ist offenbar:

$$\cos NCD = \cos ONT = \frac{NP}{NO} = \frac{AB}{nNO},$$

Digitized by Google

Fig. 326.



wenn man nämlich n sehr gross und aus diesem Grunde NO mit der Tangente in N zusammenfallend denkt. Der Gesammtdruck auf das Lager ist also:

$$\Sigma \frac{R}{n} \frac{n \cdot NO}{AB} \sin 2\lambda,$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle Bogenelemente NO auf einer Seite von CR erstreckt. Es ist aber hierfür zu setzen:

$$\frac{R \sin 2\lambda}{AB} \Sigma NO = \frac{R \sin 2\lambda \, \widehat{AOD}}{AB},$$

unter $\widehat{AOD}$ den Bogen verstanden.

Ist noch Winkel $ACB = \alpha$, r der Radius des Zapfens, so hat man:

$$AB = 2r \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \widehat{AOD} = \frac{r\alpha}{2},$$

also die Gesammtreibung ist dann:

$$F = \frac{R\alpha \sin 2\lambda}{4 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Will man noch annähernd $\sin 2\lambda = 2 \sin \lambda$ setzen so kommt:

$$F = \frac{R\alpha \sin \lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Je tiefer der Zapfen im Lager ruht, desto grösser ist die Reibung. Für sehr flach aufliegende Zapfen ist zu setzen:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

also:

$$F = R \sin \lambda$$

ganz wie bei alten Lagern.

8) **Näherungswerthe für Zapfendruck und Zapfenreibung.**

In der Regel wird der Zapfendruck R durch zwei Seitenkräfte, welche auf einander senkrecht stehen, P und Q, ausgedrückt; man hat daher:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Da bei complicirten Werthen von P und Q oft R eine zur Berechnung und namentlich zu weiteren Schlüssen höchst ungeeignete Form annehmen kann, hat Poncelet versucht, diesen Ausdruck auf einen Näherungswerth von linearer Form zurückzuführen, der hier angeführt werden muss, da er öfters angewandt wird.

Setzen wir zu dem Ende

$$\frac{Q}{P} = x, \quad R = P\sqrt{1 + x^2},$$

indem wir annehmen, dass Q kleiner als P ist. Es soll nun gesetzt werden:

$$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x + y,$$

wenn wir dann $\sqrt{1 + x^2}$ mit $\mu + \nu x$ identificiren, so ist der Fehler:

$$y = 1 - \frac{\mu + \nu x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

und dieser ist im Durchschnitt möglichst klein zu nehmen. Die äussersten Grenzen von x, welche in Betracht kommen, sind 0 und 1, die entsprechenden Werthe von y also:

$$y = 1 - \mu, \quad y = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}.$$

Offenbar sind dies die grössten positiven Werthe des Fehlers, wenn beide Werthe nämlich positiv sind.

Auch hat derselbe ein negatives Maximum, welches man findet, indem man setzt:

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$(M + \nu x) X = \nu(1 + x^2), \text{ also } x = \frac{\nu}{\mu},$$

wozu der Werth:

$$y = 1 - \sqrt{\mu^2 + \nu},$$

gehört.

Damit nun weder ein zu grosser positiver, noch ein zu grosser negativer Fehler entstehe, bestimmen wir μ und ν so, dass die Fehler, welche $x = 0$, $x = 1$ und $x = \frac{\mu}{\nu}$ entsprechen, einander gleich sind, (der letztere mit umgekehrten Vorzeichen), also, dass man hat:

Digitized by Google

$$1-\mu = 1-\frac{\mu+\nu}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu^2+\nu^2}-1.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\nu = \mu(\sqrt{2}-1) \text{ und } \mu = \frac{2}{1+\sqrt{4-2\sqrt{2}}},$$

also:

$$\mu = 0{,}96, \quad \nu = 0{,}40;$$

es ist also, indem man den Fehler y ausser Acht lässt:

$$\sqrt{1+x^2} = 0{,}96 + 0{,}40\,x,$$

d. h.:

$$R = 0{,}96\,P + 0{,}40\,Q,$$

Offenbar ist der grösste zu begehende Fehler:

$$y = 1-\mu = 0{,}04.$$

Diese Methode ist nur anwendbar, wenn man weiss, dass eine der beiden Seitenkräften P und Q immer die grössere ist. Ist dies nicht der Fall, so setzt man:

$$\sqrt{1+x^2} = \mu(1+x),$$

wo dann der Fehler

$$y = 1-\frac{\mu(1+x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist, aber x alle Werthe zwischen 0 und unendlich annehmen kann, für welche Werthe von x der Fehler jedesmal:

$$y = 1-\mu$$

wird. Für den grössten negativen Fehler ist $x = \frac{\nu}{\mu} = 1$, also derselbe wird:

$$y = 1-\mu\sqrt{2}.$$

Aus demselben Grunde wie oben, wird gesetzt:

$$\mu\sqrt{2}-1 = 1-\mu,$$

also:

$$\mu = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 0{,}825$$

und man hat:

$$R = 0{,}825\,(P+Q).$$

Der Fehler ist in diesem Falle höchstens 0,17, liesse man Q ganz ausser Acht, so erhielte man:

$$\sqrt{1+x^2} = 1+y$$

und der Fehler y wäre gleich

$$\sqrt{1+x^2}-1.$$

Damit dieser Ausdruck höchstens gleich 0,04 ist, darf $\sqrt{1+x^2}$ nicht mehr als 1,04, betragen. Aus der Gleichung:

$$\sqrt{1+x^2} = 1{,}04$$

aber ergibt sich:

$$x^2 = 0{,}08, \quad x = 0{,}3.$$

Ist also x immer kleiner als 0,3, so ist es gerathener $R = P$ zu setzen. Eben so ist, wenn man weiss, dass x grösser als 0,2 ist:

$$\sqrt{P^2+Q^2} = 0{,}888\,P + 0{,}490\,Q$$

ein besserer Werth, da, wie leicht zu übersehen, der grösste Fehler nur 0,02 in diesem Falle beträgt. — Von den hier gegebenen Werthen ist also nur der zweite immer anwendbar, während die übrigen drei verlangen, dass $x = \frac{Q}{P}$ gewisse Bedingungen erfüllt.

9) Reibung bei stehenden Zapfen und Spitzzapfen.

Oft namentlich bei stehenden Zapfen findet eine Reibung auf die Basis desselben statt, welche als gleitende Reibung zu betrachten, somit auch für dieselbe der entsprechende Reibungscoefficient zu nehmen ist. Es ist die Arbeit dieser Reibung zu ermitteln.

Der Druck R vertheile sich auf alle Punkte der Basis gleichmässig. Theilen wir also die letztere in gleiche Sectoren ACB, BCD u. s. w. (Fig. 327), die sich

Fig. 327.

als Dreiecke betrachten lassen, wenn die Sehnen sehr klein genommen werden. In allen Punkten eines solchen Dreiecks wirken dann die Reibungen parallel, also die Mittelkraft von allen im Schwerpunkte des Dreiecks, welcher um $\frac{2}{3}r$ vom Mittelpunkt entfernt ist, wenn $r = CA$ der Radius der Basis ist. Sei n die

Anzahl der Sectoren ACB, so wirken also alle Mittelkräfte der Peripherie $abde$, deren Radius $Ca = \frac{2}{3}\nu$ ist, und jede dieser Kräfte ist gleich $\frac{qR}{n}$. Sie haben alle gleiches statistisches Moment, und die Summe derselben ist: $\frac{2}{3}\nu\frac{qR}{n}\cdot n$, also wenn M die Grösse des Reibungsmomentes ist, so hat man: $M = \frac{2}{3}qR\nu$. — Ist die Basis ein Ring (Fig. 328), so sind

Fig. 328.

statt der Dreiecke Trapeze $AA'B'B$ zu nehmen. Sei Radius $CA = \nu$, $CA' = \nu_1$. Die Entfernung Ca des Schwerpunktes eines solchen Trapezes vom Mittelpunkt gibt die bekannte Formel:

$$Ca = \frac{2}{3}\frac{\nu^3 - \nu_1^3}{\nu^2 - \nu_1^2},$$

und man erhält somit für das Moment der Gesammtreibung:

$$M = \frac{2}{3}qR\frac{\nu^3 - \nu_1^3}{\nu^2 - \nu_1^2},$$

oder wenn man den mittleren Halbmesser $\frac{\nu + \nu_1}{2} = \varrho$, und die Breite des Ringes $\nu - \nu_1 = b$ setzt:

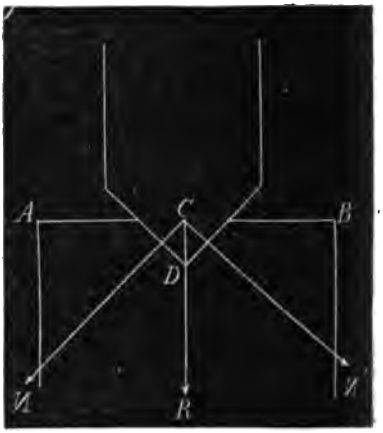
$$M = qR\left(\varrho + \frac{b^2}{12\varrho}\right).$$

Was die Arbeit der Reibung A anbetrifft, so ist also für eine Umdrehung, wo der zurückgelegte Bogen gleich 2π ist, zu setzen bezüglich:

$$A = \frac{2}{3}\pi qRr \text{ und } A = 2\pi qR\left(\varrho + \frac{b^2}{12\varrho}\right).$$

Sei jetzt der Zapfen conisch zugespitzt. Der Axendruck R zerlegt sich dann in zwei Normalkräfte N und N' (Fig. 329) die übrigens zusammen grösser als R sind. Es wird also hierbei die Reibung vermehrt.

Fig. 329.



Sei Winkel $ADC = \vartheta$ der halbe Scheitelwinkel des Kegels, so ist

$$2N\sin\vartheta = R.$$

Dieselbe vertheilt sich gleichmässig auf die Kegelfläche ADB. Theilt man dieselbe in unendlich kleine Dreiecke ADE, so wird der Schwerpunkt eines solchen Dreiecks A' in der Entfernung

$$A'D = \frac{2}{3}AD$$

von der Spitze fallen, und der Halbmesser

$$A'C' = \frac{2}{3}AC$$

sein. Ist also $CA = r$ der Radius des Zapfens beim Eintritt in die Pfanne, so erhalten wir das Reibungsmoment

$$M = \frac{2}{3}\frac{qRr}{\sin\vartheta},$$

oder da $r = a\sin\vartheta$, wenn $DA = a$ die Seite des Kegels ist:

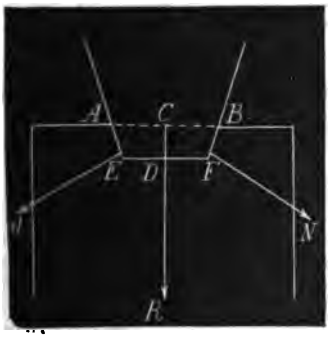
$$M = \frac{2}{3}qRa.$$

Diese Arbeit ist also der Kegelseite proportional. Bei geringem Eintauchen kann die Reibung kleiner sein als wenn der Zapfen eben wäre. — Oft läuft der Zapfen in einen abgestumpften Kegel aus, für diesen Fall findet Reibung am Mantel und an der Abstumpfungsfläche statt. Ist r der Halbmesser, CA an der Eintrittsstelle (Fig. 330), r_1 der Halbmesser DE an der Basis, und ϑ wieder der halbe Scheitelwinkel, so geben ähnliche Betrachtungen:

$$M = \left(r^2 - \frac{r^3 + r_1^3}{a\sin\vartheta}\right)\frac{2}{3}\frac{qR}{r^2}$$

Digitized by Google

Fig. 330.



Jedoch ist hierbei der Seitendruck N so stark, dass nach längerem Gebrauch der Pfanne nur der Druck auf die Basis übrig bleibt, man also hat:

$$M = \tfrac{2}{3} q R r_1.$$

Es gibt auch Zapfen mit abgerundeter Basis. Ist die Pfanne halbkugelförmig, so gibt eine nach den hier angewandten Prinzipien auszuführende Rechnung, wenn r der Kugelradius ist:

$$M = \frac{q\pi}{2} R r,$$

und wenn die Pfanne keine volle Halbkugel sondern eine Calotte bildet, r_1 der Radius an der Eintrittsstelle, r der der Kugel ist, annäherungsweise:

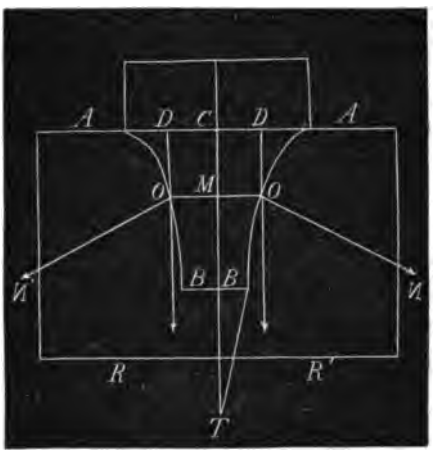
$$M = \tfrac{2}{3}\left[1 + 0{,}3\left(\frac{r}{r}\right)^2\right] q R r_1.$$

10) Antifrictionszapfen.

Nimmt man den Axendruck R eines stehenden Zapfens dem Querschnitte proportional, und ist G der Inhalt der Vertikalprojection $ADDA$ der Reibungsfläche $ABBA$ (Fig. 331), so ist der Vertikaldruck auf die Flächeneinheit (Quadratzoll):

$$R' = \frac{R}{G}.$$

Fig. 331.



Ist ferner α der Neigungswinkel eines Flächenelements O gegen die Axe des Zapfens CT, so ist der Normaldruck für die Flächeneinheit in Punkt O:

$$N' = \frac{R'}{\sin\alpha},$$

und somit die entsprechende Reibung:

$$F' = \frac{qR'}{\sin\alpha} = \frac{qR}{G\sin\alpha}.$$

Das Moment dieser Reibung aber ist, wenn mit y der Halbmesser MO des Querschnittes bezeichnet wird:

$$F'y = \frac{qRy}{G\sin\alpha};$$

es ist aber $\frac{y}{\sin\alpha}$ gleich der Tangentenlänge OT, also auch:

$$F'y = \frac{qR}{G} OT.$$

Setzen wir nun voraus, dass das Moment an allen Stellen dasselbe sei, damit gleichmässiges Abnutzen stattfinde, so ist die Bedingung zu erfüllen, dass die Tangentenlänge OT constant sei. Man erhält, wenn man dieser Bedingung ge-

nügt, eine Curve AOB (Zuglinie genannt), aus deren Rotation um die Axe CT die entsprechende Zapfenform hervorgeht. Die Entstehung der Zuglinie lässt sich auch so veranschaulichen: Sei der schwere Punkt A an dem Faden AC (Fig. 332) be-

Fig. 332.

festigt, rückt das Ende C dieses Fadens auf der Graden CX fort, so wird Punkt A die Curve beschreiben. Um sie zu construiren zieht man AC senkrecht auf CX und gleich der Fadenlänge. Nimmt man α nahe an A, und macht $\alpha\alpha' = AC$, auf $\alpha\alpha'$ nimmt man β nahe an α, und zieht $\beta\beta' = AC$ u. s. w., die Punkte $A, \alpha, \beta \ldots$ gehören der Zuglinie an. Auch lässt sich leicht ihre Gleichung bestimmen. CX sei die Axe der x, CA die der y, $AC = a$. Sei $BD = y$, $DC = x$ die Coordinaten eines Punktes B der Curve, so ist:

$$\sin BXD = -\frac{dy}{ds}$$

und $BD = BX \sin BXD$, d. h.:

$$y = -\frac{a dy}{ds},$$

d. h.: $$y^2(dx^2 + dy^2) = a^2 dy^2,$$

$$\frac{(a^2 - y^2)dy^2}{y^2} = dx^2,$$

also:

$$x = \int \frac{dy}{y}\sqrt{a^2 - y^2},$$

also integrirt:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Die Constante wird nämlich Null, da für $x = 0$, $y = a$ ist. Diese Gleichung kann man auch schreiben:

$$a + \sqrt{a^2 - y^2} = y\, e^{\frac{\sqrt{a^2 + y^2} - x}{a}}.$$

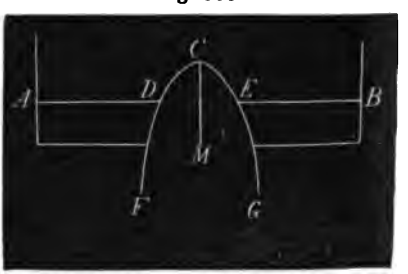
Der grösste Reibungshalbmesser $r = CA$ ist hier (Fig. 331) gleich der constanten Tangente CA, somit das Reibungsmoment qRr von der Länge des Zapfens unabhängig. Diese Construction wird auch bei Hähnen (Antifrictionshähne) anwendbar.

11) Einfluss der Spitzen und Schneiden auf die Reibung.

Um die Axenreibung zu vermindern, werden die Zapfen durch spitze Stifte oder scharfe Schneiden gestützt. Es ist klar, dass wenn die Spitze oder Schärfe eine absolute wäre, kein messbarer Reibungsweg vorhanden, also die Arbeit der Reibung verschwinden müsste. Indess bringt die Elasticität der Körper ein Eindrücken und Abstumpfen hervor, wodurch eine reibende Fläche entsteht, auch tritt bei längerem Gebrauche ein Abreiben ein, also die Spitze verwandelt sich dauernd in eine Fläche, und dann ist die Arbeit der Reibung nach dem Obigen zu beurtheilen. Daher ist diese Methode, die Reibung zu vermindern hauptsächlich bei Instrumenten üblich, die entweder nur ab und zu im Gebrauche sind, wie ein Wagen, oder nur geringe Arbeiten vollbringen z. B. Boussolen, Uhren u. s w. — Nach Coulomb ist die Reibung auf Spitzen stärker als der Druck und von der Convergenz der Zuspitzung abhängig, auch ist die Härte der Stifte natürlich in Betracht zu bringen. Bei Granat ist die Reibung kleiner, wie bei Bergkrystall, bei Glas noch grösser und bei Stahl noch mehr. Aehnliches findet bei Schneiden statt.

Die Nadel AB habe am Stifte FCG (Fig. 333) die Spitze DCE von der Höhe

Fig. 333.



$CM = h$ und dem Halbmesser $DM = r$ eingedrückt. Das Volum $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ des entsprechenden Kegels sei dem Drucke R proportional, also:

$$\pi r^2 h = 3\mu R,$$

wo μ eine zu bestimmende Constante ist,

Digitized by Google

sei der Winkel DCE (Convergenz der Zuspitzung) gleich α, so ist $h = r \cot \frac{\alpha}{2}$, und

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\mu R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\pi}},$$

woraus sich dann ergibt:

$$\varphi R r = \varphi \sqrt[3]{\frac{3\mu}{\pi}} \sqrt[3]{R^4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

d. h.:

„Die Reibung auf dem Stifte verhält sich wie die Cubikwurzel der Tangente des halben Convergenzwinkels und wie die Potenz $\frac{4}{3}$ des Dreiecks."

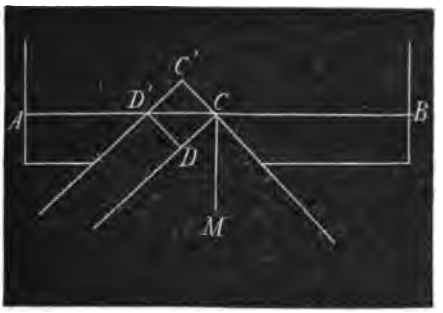
Liegt ein Balken AB (Fig. 334) auf einer scharfen Kante CC', ist wieder α der Convergenzwinkel DCM, l die Länge CC' der Schneide, R der Druck, so erhält man auf ähnliche Art:

$$\varphi R r = \sqrt{\frac{(R \operatorname{tg} \alpha)^2}{l}}.$$

12) Rollende Reibung.

Es ist klar, dass auch die rollende Reibung wächst, wenn der Druck zunimmt und abnimmt, wie der Durchmesser des rollenden Körpers wächst.

Fig. 334.



Jedoch ist das Gesetz, wonach dies geschieht, noch nicht hinreichend untersucht. Nach Coulomb verhält sich indess die rollende Reibung umgekehrt wie der Halbmesser, und direct wie der Druck.

Ist also R der Druck, r der Halbmesser, f ein zu ermittelnder Reibungscoefficient, so ist die Reibung:

$$F = \frac{fR}{r}.$$

Ist r in preussischen Zollen gegeben, so hat man:

Für Walzen aus Pockenholz $f = 0{,}0184$
„ „ „ Ulmenholz $f = 0{,}0311$,

für gusseiserne Räder auf gleichen Schienen bei 20 Zoll Durchmesser:

$f = 0{,}0178$ nach Rittinger
$f = 0{,}0187$ nach Weissbach,

bei Rädern von 38 Zoll Durchmesser:

$f = 0{,}019$ bis $0{,}021$ nach Pambour.

Die Formel $F = \frac{fR}{r}$ setzt voraus, dass die Kraft F, welche die Reibung überwinden soll, an dem Walzenhalbmesser r wirke. Wenn sie aber am Hebelarm ϱ wirkt, so hat man:

$$F_1 = \frac{r}{\varrho} F = \frac{fR}{\varrho}.$$

Der Druck Q eines Cylinders ACB (Fig. 335) findet auf einer Basis AO statt, welche als eben zu denken ist. Es findet eine Drehung um die durch O gehende Cylinderseite statt. In A wirkt die Kraft Q, in B die Kraft F. Beide wirken also entsprechend auf die Hebelarme OM (senkrecht auf Q), und ON (senkrecht auf F). Sei $ON = a$, $OM = f$, so ist also, damit Gleichgewicht stattfindet, zu setzen:

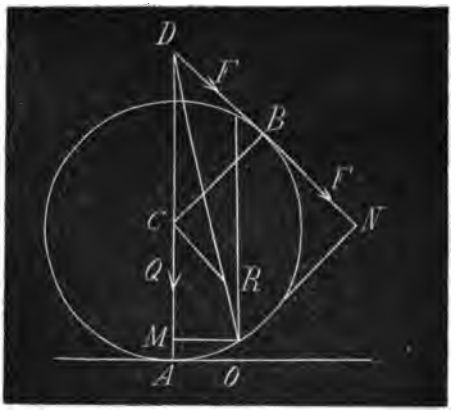
$$Fa = Qf$$

und man erhält also als Reibungsgrösse

$$F = \frac{Qf}{a}.$$

Die Punkte O und A sind im Uebrigen als zusammenfallend zu betrachten, wo OA unendlich klein ist. In der That allerdings bewirkt der Druck, dass AO und f kleine endliche Grössen sind, also f eine durch die Erfahrung zu bestimmende endliche Linie und diese ist dann der sogenannte Reibungscoefficient. Jedoch kommt dies wenigstens für die Grösse der Linie $ON = a$, nicht in Be-

Fig. 335.



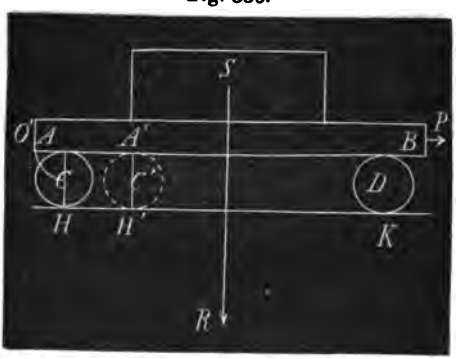
tracht, auch kann der Druck Q auf A mit dem Gesammtdruck R auf O vertauscht werden. Man hat also:

$$F = \frac{fR}{a};$$

wirkt die Kraft also horizontal, so ist $a = r$, wirkt sie im obersten Punkte K der Walze $a = 2r$.

Eine oft vorkommende Anwendung der rollenden Reibung bietet die horizontale Fortbewegung eines schweren Körpers ASB auf Walzen C und D (Fig. 336). — Sei P die erforderliche Kraft, r der Radius der Walze, R die Last, f und f_1 die Reibungscoefficienten der Walzen in Bezug auf die Unterlage HK und den zu bewegenden Körper AB, so ist nach dem Obigen $a = 2r$, also:

Fig. 336.



$$P = (f + f_1)\frac{R}{2r}.$$

Was die Wege der Walzen anbetrifft, so möge die Walze AH sich um den Bogen AO drehen, also auch um einen diesem Bogen gleichen Weg AA' vorwärts gehen, so kommt der Punkt O' von AB mit O in Berührung, dessen Entfernung AO von A gleich AA' ist. Der Körper ABS ist also um $OA' = 2AA'$ weiter geschoben. D. h.:

„Der fortschreitende Weg der Walzen ist gleich dem halben Wege des fortgeschobenen Körpers."

Es sind also die abgelaufenen Walzen stets durch neue zu ersetzen.

13) Reibung biegsamer Körper.

Wenn ein völlig biegsamer Körper, also ein Seil auf einem festen Körper aufliegt, so ist der Fall wo der letztere scharfe Kanten hat von dem Fall zu unterscheiden, wo er continuirlich gekrümmt ist. Finde zunächst ersteres statt. Sei das Seil über die Kante O (Fig. 337) gelegt, und auf der einen Seite durch die Last Q, auf der andern durch die Kraft P gespannt. Beide Kräfte üben

Fig. 337.

einen Druck auf C aus, dessen Richtung nach statischen Gesetzen den Winkel ACP halbirt. Sei Winkel $DCP = \alpha$, so geben die Kräfte P und Q eine nach der Richtung des Druckes R genommene Componente, und eine senkrechte auf dieser Richtung. Die erstere ist

$$R = (P + Q) \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Es wirkt dann entgegengesetzt der Bewegung also in Richtung PC eine Reibung, welche dem Drucke proportional ist.

Sei μ der Reibungscoefficient, so wird die Reibungsgrösse sein:

$$F = \mu (P + Q) \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Fände keine Reibung statt, so wäre, damit Gleichgewicht stattfinden soll, $P = Q$ zu setzen. Es ist also im Falle des Gleichgewichts Q um so viel grösser als P hier zu nehmen, als die Reibung beträgt, man hat also: $P = Q + F$ zu setzen, und somit:

$$F = \mu (2Q + F) \sin \frac{\alpha}{2},$$

woraus sich ergibt:

$$F = \frac{2\mu Q \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \mu \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$P = Q \frac{1 + \mu \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \mu \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Es ist nun klar, dass wenn zwei Kanten vorhanden sind, und die Nebenwinkel der Kantenwinkel α, α_1 sind, man erhält:

$$P' = P \frac{1 + \mu \sin \frac{\alpha_1}{2}}{1 - \mu \sin \frac{\alpha_1}{2}} = Q \frac{\left(1 + \mu \sin \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \mu \sin \frac{\alpha_1}{2}\right)}{\left(1 - \mu \sin \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \mu \sin \frac{\alpha_1}{2}\right)},$$

wo P' die in der zweiten Kante wirkende Kraft, P die in der ersten stattfindende Spannung ist. So erhält man, wenn ein Seil über n Kanten gespannt ist, $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ die entsprechenden Winkel, P und Q die an den äussersten Kanten wirkenden Kräfte sind:

$$P = Q \frac{\left(1 + \mu \sin \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \mu \sin \frac{\alpha_1}{2}\right) \ldots \left(1 + \mu \sin \frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)}{\left(1 - \mu \sin \frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \mu \sin \frac{\alpha_1}{2}\right) \ldots \left(1 - \mu \sin \frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)}$$

und wenn alle Kantenwinkel gleich sind:

$$P = Q \left\{ \frac{1 + \mu \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \mu \sin \frac{\alpha}{2}} \right\}^n.$$

Man kann den Körper mit n Kanten jetzt durch eine Curve ersetzen, für die man sich n Sehnen denkt, die immer so sich legen lassen, dass sie gleiche Winkel α bilden, und n ins Unendliche wachsen lässt. Ist dann α der Winkel den die erste und die letzte dieser Sehnen, d. h. die tangential an der Curve wirkenden Kräfte P und Q mit einander machen, so ist $\alpha = \frac{\alpha}{n}$, und da mit wachsendem n,

Google

$$\sin\frac{\alpha}{2n}=\frac{\alpha}{2n}$$

zu nehmen ist, so erhält man:

$$P=Q\left\{\frac{1+\frac{\mu\alpha}{2n}}{1-\frac{\mu\alpha}{2n}}\right\}^n\cdot x.$$

Bekanntlich sind aber die Grenzwerthe:

$$\lim\left(1+\frac{\mu\alpha}{2n}\right)^n=e^{\frac{\mu\alpha}{2}},$$

$$\lim\left(1-\frac{\mu\alpha}{2n}\right)^n=e^{-\frac{\mu\alpha}{2}},$$

also:

$$P=Qe^{\mu\alpha}.$$

Die Formel gilt also, welches die Gestalt der Curve oder vielmehr der Körper auch ist, um welche das Seil gespannt ist. Das Verhältniss von Kraft und Last $\frac{P}{Q}$, ist also nur von dem Winkel abhängig, welche ihre Richtungen, oder was dasselbe ist, die Tangente oder Normale in den Angriffspunkten mit einander machen. Bei einem Kreise übt also die Grösse des Radius gar keinen Einfluss auf die Reibung aus.

Reihe.

1) Allgemeines.

Unter Reihe ist im Allgemeinen jede Verbindung von Ausdrücken zu verstehen, welche einem gewissen Gesetze gemäss gebildet sind. Diese Ausdrücke heissen Glieder der Reihe. Jedes Glied hat eine bestimmte Stellenzahl, es ist dies nämlich diejenige ganze Zahl, welche anzeigt, das wievielte Glied man betrachte.

Das Gesetz einer Reihe kann die einzelnen Glieder als unmittelbare Functionen der Stellenzahl ergeben, wie dies z. B. mit der Reihe, $a, ax, ax^2 \ldots ax^{n-1}$ der Fall ist, wo das $n$te Glied durch die Formel ax^{n-1} ausgedrückt wird. Es kann aber auch dies Gesetz in involventer Art gegeben sein, indem man jedes Glied als Function eines oder einer Anzahl von vorhergehenden ausdrückt. Sind $a_0, a_1 \ldots a_n$ die $n+1$ ersten Glieder der vorher hingeschriebenen Reihe, so lässt sich deren Gesetz auch unter der Form

$$a_n=a_{n-1}\cdot x$$

schreiben. Es ist dann allerdings nöthig, dass man das erste Glied der Reihe kennt. Ist nämlich $a_0=a$, so gibt unsere Formel sogleich:

$$a_1=ax,\ a_2=ax^2\ldots$$

Wäre das Gesetz einer Reihe dagegen gegeben durch die Formel:

$$a_n=aa_{n-1}+ba_{n-2},$$

so müsste man zwei Glieder kennen, um alle übrigen bestimmen zu können.

Es ist eine wichtige Aufgabe in der Differenzenrechnung, dergleichen involvente Gesetze in evolute umzugestalten, d. h. das $n$te Glied als Function der Stellenzahl n auszudrücken. — Was die Stellenzahl anbetrifft, so kann dieselbe auch Null oder eine negative ganze Zahl sein. Betrachtet man z. B. die Reihe $ax^{-n}\ldots ax^{-3}, ax^{-2}, ax^{-1}, a, ax, ax^2\ldots ax^n$ von welcher der mit a beginnende Theil mit der oben gegebenen übereinstimmt, so ist es zweckmässig zu setzen:

$$a=a_0,\ ax=a_1\ldots ax^n=a_{n-1}.$$

Man beginnt also die Reihe nicht mit dem ersten, sondern mit dem Nullten Gliede. Um die vor a stehenden Glieder von den übrigen zu unterscheiden, setzt man aber:

$$ax^{-1}=a_{-1},\ ax^{-2}=a_{-2}\cdots$$

$$ax^n=a_{-n}$$

und es ist leicht zu sehen, dass auch bei dieser Bezeichnung das oben gegebene Gesetz: $a_s=aa_{s-1}$ richtig bleibt.

Eine Reihe ist endlich, wenn man sie aus einer bestimmten Anzahl Gliedern bestehen lässt; sie ist unendlich, wenn man bei keinem bestimmten Gliede abbricht. Offenbar kann man jede Reihe, wenn anders das Bildungsgesetz kein beschränktes ist, welches nur für gewisse Grenzen von n gilt, als unendlich betrachten. Die zuletzt gegebene Reihe kann nach zwei Richtungen hin unendlich genommen werden, d. h. man kann unbegrenzt von a_0 bis a_∞ und bis $a_{-\infty}$ fortschreiten. — Es kann aber vorkommen, dass die Glieder einer Reihe sich mit wachsendem n der Null nähern. Dies ist z. B. mit der Reihe $a, ax, \ldots ax^n$, der Fall wenn n kleiner als 1 ist. Solche Reihen wurden früher convergent genannt, solche, wo dies nicht der Fall ist, also

z. B. die obigen, wenn x grösser als 1 ist, divergent. Wir werden jedoch gleich sehen, dass man diese Ausdrücke jetzt in einem etwas andern Sinne nimmt.

Eine sehr wichtige Aufgabe ist es, die Summe einer Reihe vom ersten Gliede bis zu einem gewissen zu finden, also zu bestimmen den Ausdruck:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}.$$

Offenbar kann in dieser Reihe n jeden Werth haben, also auch unendlich gross werden. In diesem Falle ist S_n der Werth einer unendlichen Reihe. Im Allgemeinen nun wird S_n veränderlich sein mit der Anzahl n der Glieder, jedoch kann es vorkommen, dass dieser Ausdruck sich mit wachsendem n einer bestimmenten von n unabhängigen Grenze nähert, und Reihen wo dieses stattfindet, werden im Gegensatz zu der so eben gegebenen Bedeutung dieses Wortes convergent genannt, während alle anderen Reihen divergent heissen.

Die Summe einer convergenten unendlichen Reihe:

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

ist also eine bestimmte von der Anzahl der genommenen Glieder unabhängige und somit endliche Grösse, und zwar die feste Grenze, der sich

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

mit wachsendem n nähert. Divergente unendliche Reihen haben nur insofern eine Summe, als es möglich ist, die endliche Reihe

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

zu summiren und dann n gleich unendlich zu setzen. Diese Summe wird aber von n abhängig bleiben und deshalb mit wachsendem n S_n entweder unendlich gross oder schwankend werden. Sei x eine positive Zahl und grösser als 1, so wird ax^n mit wachsendem n unendlich sein, also auch der Werth von S_n. Betrachtet man dagegen die Reihe, welche aus dem Bildungsgesetz $a_n = -a_{n-1}$ entsteht. Ist z. B. $a_0 = 1$, so hat man:

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Ist hier n grade, so ist offenbar $S_n = 1$ ist n ungrade $S_n = 0$. Wenn n also auch ins Unendliche wächst, so wird die Reihe immer einen der Werthe 1 oder 0 haben, jedoch ist es fraglich welcher, wenn man nicht die Beschaffenheit der Zahl n kennt.

Die Theorie der Convergenz der Reihen ist von der grössten Wichtigkeit, und wird in dem Folgenden näher darauf einzugehen sein. Hier bemerken wir nur Einiges über diesen Gegenstand.

Sei:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n$$
$$S(n+\lambda) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$
$$+ a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+\lambda};$$

soll nun die Reihe convergiren, so muss S_n von n unabhängig, also $S_{(n+\lambda)} = S_n$ werden, woraus sich ergibt:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+\lambda} = 0.$$

Damit also Convergenz stattfinde, muss die Summe der Glieder von a_{n+1} bis zu einem beliebigen $a_{n+\lambda}$ (wo λ auch unendlich sein kann) sich der Null nähern, wenn n wächst, und diese Bedingung ist offenbar nothwendig und ausreichend. Setzt man dagegen für λ eine bestimmte Zahl z. B. $\lambda = 1, 2 \ldots$, so erhielte man:

$$a_{n+1} = 0, \quad a_{n+1} + a_{n+2} = 0$$

und diese Bedingungen sind für die Convergenz der Reihe zwar nothwendig aber keineswegs ausreichend, da aus ihnen nicht folgt, dass $S_n = S_{(n+\lambda)}$ für jeden Werth von λ sei. Also aus der Bedingung, dass die Glieder einer Reihe sich mit wachsendem n einzeln der Null nähern, ist keinesweges völlig zu erkennen, ob diese Reihe convergire. Es kann nämlich die Summe von unendlich vielen solcher Glieder doch eine endliche von der Anzahl abhängige Grösse sein. Dagegen ist die Bedingung, dass die Summe

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

ins Unbegrenzte mit wachsendem n sich der Null nähere, völlig ausreichend für die Convergens. Denn in diesem Falle hat man für wachsendes n:

$$\lim S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$= a_0 + a_1 + a_2 \ldots;$$

der nach a_n folgende Theil verschwindet nämlich, und:

$$\lim S_p = a_0 + a_1 + \ldots + a_p$$
$$= a_0 + a_1 + a_2 \ldots$$

Digitized by Google

da auch der nach a_p folgende Theil verschwindet. Man hat also $\lim S_n = \lim S_p$, d. h. die Reihe ist unabhängig von dem Gesetze, nach welchem die Gliederzahl zunimmt, und folglich convergent.

Die Reihen sind nach der Beschaffenheit ihrer Glieder zunächst einzutheilen in solche mit reellen und complexen Gliedern. Da aber die letzteren in zwei Reihen zerfallen, von denen die erste ganz, die letztere bis auf einen Factor i reell ist, so lässt sich die Betrachtung derselben immer auf die der Reihen mit reellen Gliedern zurückführen. — Bei den Reihen mit reellen Gliedern ist es noch wichtig, diejenigen, deren Glieder alle dasselbe Zeichen haben von denen zu unterscheiden, deren Zeichen wechselt. Indess ist auf diese Gegenstände später zurückzukommen.

Wenden wir uns zunächst zu einigen elementaren Betrachtungen.

2) Von der geometrischen Reihe.

Die schon vorhin betrachtete Reihe:

$$S_n = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^{n-1}$$

wird geometrische genannt. Das Gesetz derselben:

$$a_n = a_{n-1}x, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = x$$

lässt sich so in Worte fassen:

„Der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder ist einer gegebenen Gröste x gleich. Dieser Ausdruck x wird gewöhnlich Exponent genannt, wir wollen ihn, um keine Verwechselung mit dem Potenzexponenten herbeizuführen als „Index der Reihe" bezeichnen."

Die geometrische Reihe lässt sich wenn n beliebig ist, leicht summiren. Man hat offenbar:

$$S_n = a + x(a + x + ax^2 + \ldots + ax^{n-2}).$$

In der Klammer steht genau die obige Reihe mit Ausschluss des letzten Gliedes. Es ist also der Werth des Ausdruckes in der Klammer gleich $S_n - ax^{n-1}$, also:

$$S_n = a + x(S_n - ax^{n-1})$$

d. h.:

$$S_n = \frac{a - ax^n}{1-x} = \frac{ax^n - a}{x-1}.$$

Lässt man n ins Unendliche wachsen, so hat man

$$S = a + ax + ax^2 + \ldots .$$

Es ist klar, dass diese unendliche Reihe bei reellem x nur convergiren kann, wenn x abgesehen vom Vorzeichen kleiner als 1 ist. Ist x nämlich grösser als 1, so werden die einzelnen Glieder mit wachsendem n bis ins Unendliche zunehmen. Wenn $x = 1$ ist, gibt die Reihe:

$$S_n = 1 + 1 + 1 \ldots = n,$$

also die Summe wird mit wachsendem n unendlich, während sie für $x = -1$, wie schon oben gezeigt wurde zwischen den Werthen Null und Eins schwankt.

Ist aber x kleiner als 1, so wird x^n sich der Null, also jedenfalls der gefundene Werth von S_n sich dem Werthe $\frac{a}{1-x}$ nähern; es findet immer Convergenz statt. Dasselbe findet statt, wenn x imaginär, der Modul von x aber kleiner als Eins ist. Setzt man nämlich $x = re^{\varphi i}$ so wird $x^n = r^n e^{n\varphi i}$ sich immer noch der Null nähern. Ebenso wird, wenn der Modul grösser als 1 ist, die Summe S_n unendlich gross werden.

Ist der Modul gleich 1, also $x = e^{\varphi i}$, so erhält man:

$$S_n = a\frac{1 - e^{n\varphi i}}{1 - e^{\varphi i}},$$

ein Ausdruck, der offenbar von n abhängig ist; also auch in diesem Falle findet Divergenz statt. Die Convergenzbedingung für die geometrische Reihe ist in jedem Falle also die, „dass der Modul des Index kleiner als Eins sein muss, und in diesem Falle ist die Summe der Reihe

$$S = \frac{a}{1-x}."$$

Unter Modul einer reellen Grösse verstehen wir nämlich ihren absoluten Werth.

Gibt man dem Index x in der That einen complexen Werth $re^{\varphi i}$ und setzt $a = 1$, so zerfällt die geometrische Reihe in zwei andere:

$$S_n = T_n + U_n i,$$

wo:

Digitized by Google

$$T_n = 1 + \nu\cos\varphi + \nu^2\cos 2\varphi + \ldots + \nu^{n-1}\cos(n-1)\varphi$$

$$U_n = \quad \nu\sin\varphi + \nu^2\sin 2\varphi + \ldots + \nu^{n-1}\sin(n-1)\varphi$$

ist, während die Summenformel gibt:

$$S_n = \frac{1-\nu^n e^{n\varphi i}}{1-\nu e^{\varphi i}} = \frac{(1-\nu^n e^{n\varphi i})\,(1-\nu e^{-\varphi i})}{(1-\nu\cos\varphi)^2+\nu^2\sin\varphi^2}$$

und wenn man dies in einen reellen und imaginären Theil zerlegt, den ersten gleich T_n, den letztern gleich U_n setzt, so ergibt sich:

$$T_n = \frac{1-\nu\cos\varphi-\nu^n\cos n\varphi+\nu^{n+1}\cos(n-1)\varphi}{1-2\nu\cos\varphi+\nu^2}$$

$$U_n = \frac{\nu\sin\varphi-\nu^n\sin n\varphi+\nu^{n+1}\cos(n-1)\varphi}{1-2\nu\cos\varphi+\nu^2}.$$

Nimmt man an, dass ν kleiner als 1 sei, und n ins Unendliche zunimmt, so erhält man hieraus:

$$T = 1+\nu\cos\varphi+\nu^2\cos 2\varphi+\nu^3\cos 3\varphi+\ldots = \frac{1-\nu\cos\varphi}{1-2\nu\cos\varphi+\nu^2}$$

$$U = \nu\sin\varphi+\nu^2\sin 2\varphi+\ldots = \frac{\nu\sin\varphi}{1-2\nu\cos\varphi+\nu^2}.$$

3) Einige Regeln über die Convergenz der Reihen, welche sich aus der geometrischen Reihe ergeben.

Aus dem blossen Vergleiche einer beliebigen Reihe mit einer geometrischen, ergeben sich gewisse Regeln für die Convergenz und Divergenz derselben. Dieselben lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen.

Wir nehmen zunächst an, sämmtliche Glieder der zu untersuchenden Reihe seien positiv:

I. Eine Reihe ist convergent, wenn das Verhältniss eines Gliedes zum Vorhergehenden mit wachsender Stellenzahl einen Werth annimmt, welcher um eine endliche Grösse kleiner als die Einheit ist; sie ist divergent, wenn dieser Werth grösser als die Einheit ist.

Denn sei

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

die zu untersuchende Reihe, so muss im Falle der Convergenz:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

mit wachsendem n sich der Null nähern. Sei nun

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < 1,$$

so wird, wenn n hinreichend gross ist, immer eine Zahl β vorhanden sein, die zwischen α und 1 liegt, und grösser als $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ist, man hat also:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \beta, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < \beta, \quad \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} < \beta \ldots$$

also:

$$a_{n+1} < \beta a_n, \quad a_{n+2} < \beta^2 a_n, \quad a_{n+3} < \beta^3 a_n.$$

Mithin:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < a_n(1+\beta+\beta^2+\ldots)$$

und da die Reihe sich einer endlichen Grenze $\frac{a_n}{1-\beta}$ nähert, welche Null ist, wenn $a_n = 0$ wird, so wird auch die Reihe links unter der angegebenen Bedingung Null sein. Nun ist

$$a_n < a_{n-p}\beta^p$$

und da für hinreichend grosses β sich β^p der Null nähert, so findet diese Bedingung immer statt. Ist dagegen

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \text{ und } \alpha > 1$$

Digitized by Google

so kann auch β grösser als Eins derart genommen werden, dass man hat

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \beta, \quad \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} > \beta \ldots,$$

also:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots > a_n(1 + \beta + \beta^2 + \ldots)$$

und da die Summe der Reihe rechts stets unendlich gross ist, so findet dies auch mit der Reihe links statt; die letztere wird immer divergiren.

Dies Criterium versagt aber seinen Dienst, wenn man hat:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1;$$

denn die Glieder der Reihe werden sich dann zwar der Gleichheit nähern, ohne dass man jedoch eine geometrische Reihe im Allgemeinen angeben kann, welche eine Grenze der gegebenen Reihe bildet. Jedoch wenn man weiss, dass $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für wachsendes n immer noch grösser als Eins ist, wird die Reihe divergiren, denn man hat dann:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots > a_n(1 + 1 + 1 + \ldots),$$

und der Ausdruck rechts ist unendlich gross.

II. Eine Reihe ist convergent, wenn der Ausdruck $(a_n)^{\frac{1}{n}}$, wo a_n das $n$te Glied der Reihe ist, sich mit wachsendem n einer Grenze nähert, die kleiner als Eins ist.

Offenbar ist nämlich, wenn α diese Grenze ist, und β zwischen Eins und α liegt, für hinreichend grosses α im ersten Falle:

$$a_n^{\frac{1}{n}} < \beta, \quad a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} < \beta, \quad a_{n+2}^{\frac{1}{n+2}} < \beta \ldots$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < \beta^n + \beta^{n+1} + \beta^{n+2} + \ldots,$$

und da die Reihe rechts sich der Null nähert, so ist dies auch mit der Reihe links der Fall. Ist jedoch α grösser als Eins, und β zwischen 1 und α, so hat man:

$$a_n^{\frac{1}{n}} > \beta, \quad a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} > \beta \ldots$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots > \beta^n + \beta^{n+1} + \beta^{n+2} + \ldots$$

und beide Reihen wachsen mit n ins Unendliche. Für α gleich Eins versagt auch dies Criterium seinen Dienst.

Wir wollen diese beiden Criterien auch auf Reihen anwenden, welche nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreiten, also auf die Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Es ist dann:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} x$$

und

$$a_n^{\frac{1}{n}} = a_n^{\frac{1}{n}} x$$

Digitized by Google

und die Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem $\frac{a_{n+1}}{a_n} x$ oder $a_n^{\frac{1}{n}} x$ sich einer Grenze nähern, die kleiner oder grösser als Eins ist, d. h. je nachdem $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oder $a_n^{\frac{1}{n}}$ sich einer Grenze nähern, die grösser oder kleiner als $\frac{1}{x}$ ist.

Mit diesen beiden Criterien verbinden wir noch Folgendes:

III. Eine Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ convergirt, wenn man jedes Glied a_n in 2 Factoren α_n, β_n zerlegen kann, derart, dass die Reihe $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$ convergirt, und β_n für wachsendes n nicht unendlich wird. — Denn in diesem Falle hat man:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \beta(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots),$$

wo β ein Mittelwerth der Grössen β_{n+1}, $\beta_{n+2} \ldots$ u. s w. ist. Wegen der Convergenz der Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ ist aber

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots = 0,$$

also auch

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = 0.$$

Anwendungen dieser Regel folgen später.

4) Arithmetische Reihen und Binomialcoefficienten.

Ehe die Theorie der unendlichen Reihe weiter zu verfolgen ist, soll noch auf einige Reihen mit endlicher Gliederzahl etwas näher eingegangen werden.

Unter einer arithmethischen Reihe erster Ordnung versteht man eine solche, worin die Differenzen zweier auf einander folgenden Glieder constant sind. Das allgemeine Schema einer solchen Reihe ist also, wenn a_0 die Differenz und a_1 das erste Glied ist:

$$a_1,\ a_1 + a_0,\ a_1 + 2a_0 \ldots\ldots a_1 + (n-1)a_0.$$

Eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung ist eine solche, worin die Differenzen je zweier auf einander folgenden Glieder eine Reihe erster Ordnung bilden, oder die zweiten Differenzen (Differenzen je zweier auf einander folgenden Glieder der Differenzenreihe) constant sind.

Allgemein: Eine arithmetische Reihe $n$ter Ordnung ist eine solche, deren Differenzenreihe eine arithmetische Reihe $n-1$ter Ordnung oder deren $n$te Differenzenreihe constant ist.

Die Differenzenreihe einer Reihe zweiter Ordnung sei die obige:

$$a_1,\ a_1 + a_0,\ a_1 + 2a_0 \ldots\ldots a_1 + (n-1)a_0$$

und ausserdem a_2 das erste Glied, so erhält man die Reihe, indem man ein Glied der Summe zweier, dreier Glieder u. s. w. nach und nach zu a_2 addirt, also:

$$a_2,\ a_2 + a_1,\ a_2 + 2a_1 + a_0,\ a_2 + 3a_1 + 3a_0,\ a_2 + 4a_1 + 6a_0,\ \ldots\ldots$$

Ist a_3 das erste Glied einer Reihe dritter Ordnung, so erhält man dieselbe wenn man die Summe der Glieder der Differenzenreihe, also einer Reihe zweiter Ordnung nach und nach zu a_3 addirt.

Es handelt sich jetzt darum, das allgemeine Glied einer Reihe von beliebiger Ordnung und die Summe der Glieder einer solchen Reihe zu finden.

Zu dem Ende gehen wir von gewissen speciellen Reihen aus. Es sei:

$$n_p = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots p},$$

wo p also eine ganze Zahl ist. Die Ausdrücke von dieser Form werden Binomialcoefficienten genannt, weil sie in der Binomialformel vorkommen. Der Ausdruck n_p heisst der $p$te Binomialcoefficient. Offenbar ist auch

$$n_p = 0,$$

Digitized by Google

wenn n eine ganze positive Zahl und kleiner als p ist, da im Zähler dann der Faktor Null vorkommt. Auch hat man:

$$p_p = 1.$$

Es ist ferner:

$$n_1 = n.$$

Nun hat man:

$$n_p - (n-1)_p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1\cdot 2\dots p} - \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-p)}{1\cdot 2\dots p}$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{1\cdot 2\dots p-1}\left(\frac{n}{p} - \frac{n-p}{p}\right),$$

woraus sich augenblicklich ergibt:

1) $$n_p - (n-1)_p = (n-1)_{p-1}.$$

Setzt man $p = 1$, so hat man:

$$1_1 = 1,\ 2_1 = 2 \dots n_1 = n.$$

Die Reihe der Ausdrücke n_1 bildet also eine arithmetische Reihe erster Ordnung.

Für $p = 1$ hat man:

$$n_2 - (n-1)_2 = (n-1)_1,$$

und wenn man für n nach und nach die Zahlen $2, 3 \dots n$ setzt, so ist zu sehen, dass die Reihe:

$$1_2,\ 2_2,\ 3_2 \dots n_2$$

zu Differenzen je zwei auf einander folgender Glieder die Reihe:

$$1_1,\ 2_1,\ 3_1 \dots (n-1)_1,$$

hat, also eine Reihe erster Ordnung ist. Somit bilden die Grössen $1_2, 2_2, 3_2 \dots n_2$ eine Reihe zweiter Ordnung. In derselben Weise zeigt die Formel 1) dass die Ausdrücke:

$$1_2,\ 2_2,\ 3_2 \dots n_2$$

zur Differenzreihe haben die Reihe:

$$1_3,\ 2_3 \dots n_3,$$

also selbst eine Reihe dritter Ordnung bilden.

Allgemein: „Die Reihe der $p$ten Binomialcoefficienten:

$$1_p,\ 2_p,\ 3_p \dots n_p$$

ist eine arithmetische Reihe $p$ter Ordnung."

Zur Summation einer solchen Reihe aber gibt die Formel 1) das Nöthige. Setzen wir in derselben für n nach und nach $2, 3 \dots n$ so ergibt sich:

$$2_p - 1_p = 1_{p-1},\ 3_p - 2_p = 2_{p-1},\ 4_p - 3_p = 3_{p-1} \dots n_p - (n-1)_p = (n-1)_{p-1};$$

und durch Addition aller dieser Gleichungen ergibt sich:

2) $$n_p = 1_{p-1} + 2_{p-1} + 3_{p-1} + \dots + (n-1)_{p-1}.$$

Links ist das Glied -1_p vernachlässigt, was geschehen kann, da rechts der Index $p-1$ wenigstens gleich Eins, also p wenigstens gleich 2 und daher 1_p immer gleich Null ist.

Aus der Formel 2) lässt sich der Werth des $n$ten Gliedes und der Summe einer beliebigen arithmetischen Reihe finden.

Was zunächst die Reihe erster Ordnung

$$a_1,\ a_1 + a_0,\ a_1 + 2a_0,\ a_1 + 3a_0 \dots$$

anbetrifft, so sei N_1 das $n$te Glied, S_1 die Summe der n ersten Glieder, und man hat offenbar:

$$N_1 = a_1 + (n-1)a_0$$

sowie:

$$S_1 = na_1 + (1+2+3+\dots+n-1)a_0.$$

Die in der Klammer enthaltene Summe gibt die Formel 2), wenn man darin $p=2$ setzt, also:

$$S_1 = n_1 a_1 + n_2 a_0.$$

Seien jetzt N_2 und S_2 bezüglich das $n$te Glied und die Summe der n ersten Glieder einer Reihe zweiter Ordnung, wie denn allgemein N_p und S_p $n$tes Glied und Summe einer Reihe $p$ter Ordnung vorstellen sollen.

N_2 wird erhalten, indem man die $n-1$sten Glieder einer Reihe erster Ordnung zu einer willkürlichen Grösse a_2 addirt, und man hat also, wenn man in dem Werthe von S_1 n durch $n-1$ ersetzt:

Digitized by Google

$$N_2 = a_2 + (n-1)_1\, a_1 + (n-1)_2\, a_0.$$

Die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe ist:

$$na_2 + (1+2+3+\ldots+n-1)\, a_1 + [1_2 + 2_2 + \ldots + (n-1)_2]\, a_0,$$

also mit Hülfe der Formel:

$$S_2 = n_1 a_0 + n_2 a_1 + n_3 a_0.$$

Indem man so fortfährt, erhält man ganz allgemein, wie leicht zu sehen:

3) $$N_p = a_p + (n-1)_1\, a_{p-1} + (n-1)_2\, a_{p-2} + \ldots + (n-1)_p\, a_0$$

4) $$S_p = n_1 a_p + n_2 a_{p-1} + n_3 a_{p-2} + \ldots + n_{p+1} a_0.$$

Was die Bedeutung der Grössen

$$a_p,\ a_{p-1},\ a_{p-2} \cdots a_0$$

anbetrifft, so ist a_p das erste Glied der Reihe selbst, a_{p-1} das erste Glied der ersten, a_{p-2} das erste Glied der zweiten, allgemein a_{p-s} das erste Glied der $s$ten Differenzenreihe. Diese Anfangsglieder sind also zu bestimmen, ehe man das allgemeine Glied und die Summe der vorgelegten Reihe finden kann.

An diese Berechnungen sind jetzt noch einige Sätze von Reihen höherer Ordnung zu knüpfen.

Satz I. Alle Binomialcoefficienten, wo n eine ganze Zahl ist, sind auch ganze Zahlen.

Es ist nämlich zunächst

$$n_2 = 1+2+\ldots+n-1$$

gleich einer ganzen Zahl, ferner

$$n_3 = 1_2 + 2_2 + \ldots + (n-1)_2$$

ebenfalls eine solche, da die Summe rechts aus ganzen Zahlen besteht, u. s. w.

Satz II. Die Summe der Glieder mehrerer arithmetischen Reihen von verschiedener oder gleicher Ordnung bilden wieder eine arithmetische Reihe, deren Ordnung der höchsten Ordnung der Partialreihen gleich ist.

Um dies zu beweisen, bemerken wir dass da die $p$ten Differenzen einer Reihe $p$ter Ordnung constant sind, nothwendig die $p+1$ten Differenzen alle gleich Null sein müssen, und dass, wenn die $p+1$ten Differenzen nicht, aber die $p$ten einer Reihe von Ausdrücken alle der Null gleich sind, man nothwendig eine arithmetische Reihe $p$ter Ordnung haben muss. Bestehen nun die Partialreihen aus einer oder mehreren Reihen $p$ter Ordnung und andern von niederer Ordnung, so werden die Differenzenreihen der durch Addition aller dieser entstandenen Reihen gleich der Summe der entsprechenden Differenzenreihen der Partialreihen sein. Bei den Reihen von niederer Ordnung sind die $p$ten Differenzenreihen der Null gleich, es bleiben also nur die von den Reihen $p$ter Ordnung herrührenden constanten Differenzenreihen übrig, deren Gliedersummen wieder eine solche constante Reihe bilden; somit ist die vorgelegte Reihe $p$ter Ordnung.

Satz III. Jede ganze Function $p$ten Grades von n gibt, wenn man für n die Zahlen $1, 2, 3 \ldots n$ setzt eine arithmetische Reihe $p$ter Ordnung.

Denn betrachten wir zwei auf einander folgende Glieder der so gebildeten Reihen:

$$A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + A_2 n^{p-2} + \ldots + A_n$$

$$A_0 (n-1)^p + A_1 (n-1)^{p-1} + A_2 (n-2)^{p-2} + \ldots + A_n,$$

so ist die Differenz derselben gleich:

$$A_0 \left(n^p - (n-1)^p\right) + A_1 \left(n^{p-1} - (n-1)^{p-1}\right) + A_2 \left(n^{p-2} - (n-1)^{p-2}\right) + \ldots$$
$$+ A_{n-1} [n - (n-1)] = A_0 \left(n^{p-1} + n^{p-2}(n-1) + n^{p-3}(n-1)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + (n-1)^{p-1}\right) + A_1 \left(n^{p-2} + n^{p-3}(n-1) + n^{p-4}(n-1)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + (n-1)^{p-2}\right) + \ldots + A_{n-1}.$$

Digitized by Google

Die Glieder der Differenzenreihe sind also um einen Grad niedriger als die ursprüngliche Reihe, somit wird also die zweite Differenzenreihe Functionen von $p-2$ter Ordnung u. s. w., also die $p$te Differenzenreihe Functionen von $p-p$ter Ordnung oder Constanten geben, womit unser Satz bewiesen ist.

Hieraus folgt dann leicht:

Satz IV. Die Producte der Glieder von verschiedenen arithmetischen Reihen bilden eine arithmetische Reihe, deren Ordnung der Summe der Ordnungen der Partialreihen gleich ist.

Nach Formel 3) ist nämlich das allgemeine Glied der Reihe $p$ter Ordnung eine ganze Function $p$ten Grades von n. Multiplicirt man nun die allgemeinen Glieder der Reihen von der Ordnung p, p_1, p_2: so hat man eine ganze Function vom Grade $p+p_1+p_2+\ldots$, also eine arithmetische Reihe von derselben Ordnung.

Hieraus folgt dann namentlich:

„Dass die $p$ten Potenzen einer Reihe erster Ordnung, also z. B. der natürlichen Zahlen eine Reihe $p$ter Ordnung bilden."

Sonach lassen sich auch mittels der Formel 4) diese Reihe summiren.

Sei z. B. zu finden:

$$S_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2,$$

so hat man:

Reihe	0	1	4	9
erste Differenzenreihe		1	3	5
zweite „			2	2

also:

$$a_2 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 2$$

und nach Formel 4):

$$S_2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Sei ferner zu finden:

$$S_3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3$$

Reihe	0	1	8	27	64
erste Differenzenreihe		1	7	19	37
zweite „			6	12	18
dritte „				6	6

$$S_3 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}6$$

$$= \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}[1 + 2n - 4 + \tfrac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)] = \frac{n^2(n-1)^2}{1^2\cdot 2^2}$$

u. s. w.

Es ist übrigens klar, dass eine arithmetische Reihe mit wachsender Gliederzahl bis ins Unendliche wächst, wenn die Differenzen endlich bleiben, also, wenn man diese Gliederzahl unendlich nimmt, in diesem Falle immer divergirt.

5) Binomische Reihe.

Die binomische Reihe ist der Ausdruck von $(a+x)^n$ geordnet nach ganzen positiven Potenzen von x. Wir werden diese Reihe zunächst darstellen, indem wir annehmen, n sei eine ganze positive Zahl, in welchem Falle die Reihe immer bei einem bestimmten Gliede abbricht. — Zunächst sieht man, indem man successive $a+x$ mit sich selbst, 2, 3 u. s. w. mal multiplicirt, dass man einen Ausdruck von der Form erhält:

$$(a+x)^n = a^n + \alpha_1^{(n)} a^{n-1}x + \alpha_2^{(n)} a^{n-2}x^2 + \ldots + \alpha_{n-1}^{(n)} a x^{n-1} + x^n,$$

wo die Coefficienten $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$ ... ganze Zahlen sind.

Digitized by Google

Auch sieht man, dass $\alpha_1^{(n)} = n$ ist. Multiplicirt man nun die eben gefundene Reihe nochmals mit $a+x$, so kommt einerseits:

$$(a+x)^{n+1} = a^{n+1} + \alpha_1^{(n+1)} a^n x + \alpha_2^{(n+1)} a^{n-1} x^2 + \ldots + \alpha_n^{(n+1)} a x^n + x^{n+1}$$

und andrerseits:

$$(a+x)^{n+1} = a^{n+1} + \left(1+\alpha_1^{(n)}\right) a^n x + \left(\alpha_1^{(n)} + \alpha_2^{(n)}\right) a^{n-1} x^2 + \ldots + \left(\alpha_{n-2}^{(n)} + \alpha_{n-1}^{(n)}\right) a^2 x^{n-1} + \left(\alpha_{n-1}^{(n)} + 1\right) a x^n + x^{n+1}.$$

Durch Vergleich der Coefficienten beider Ausdrücke ergibt sich hieraus:

$$\alpha_p^{(n+1)} = \alpha_{p-1}^{(n)} + \alpha_p^{(n)},$$

wo p jeden Werth von Null bis n annehmen kann, und man der Ergänzung wegen setzt:

$$\alpha_0^{(n)} = 1, \quad \alpha_n^{(n)} = 1, \quad \alpha_{n+k}^{(n)} = 0,$$

wenn k eine ganze positive Zahl ist.

Schreiben wir die gefundene Gleichung unter der Form:

$$\alpha_p^{(n+1)} - \alpha_p^{(n)} = \alpha_{p-1}^{(n)}$$

und setzen für n nach einander die Werthe $1, 2 \ldots n-1$, so ergibt sich:

$$\alpha_p^{(2)} - \alpha_p^{(1)} = \alpha_{p-1}^{(1)}, \quad \alpha_p^{(3)} - \alpha_p^{(2)} = \alpha_{p-1}^{(2)}, \quad \alpha_p^{(4)} - \alpha_p^{(3)} = \alpha_{p-1}^{(3)}, \ldots$$

$$\alpha_p^{(n)} - \alpha_p^{(n-1)} = \alpha_{p-1}^{(n-1)}$$

und durch Addition aller dieser Gleichungen:

$$\alpha_p^{(n)} - \alpha_p^{(1)} = \alpha_{p-1}^{(1)} + \alpha_{p-1}^{(2)} + \alpha_{p-1}^{(3)} + \ldots + \alpha_{p-1}^{(n-1)}.$$

Nimmt man an, dass $p-1$ wenigstens gleich 1 ist, so muss $\alpha_p^{(1)}$ immer gleich Null sein, (da $\alpha_{nk}^{(n)} = 0$ war) und man hat:

$$\alpha_p^{(n)} = \alpha_{p-1}^{(1)} + \alpha_{p-1}^{(2)} + \ldots + \alpha_{p-1}^{(n-1)}.$$

Ist zunächst $p = 2$, so hat man:

$$\alpha_1^n = n$$

$$\alpha_2^{(n)} = 1 + 2 + \ldots + n - 1 = n_2$$

(vergleiche Formel 3) des vorigen Abschnittes). Setzt man $p = 3$, so ergibt sich in gleicher Weise:

$$\alpha_3^{(n)} = 1_2 + 2_2 + \ldots + (n-1)_2 = n_3,$$

also indem man so fortfährt, ganz allgemein:

$$\alpha_p^{(n)} = n_p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p}.$$

so dass man hat:

Digitized by Google

1) $$(a+x)^n = a^n + n_1 a^{n-1}x + n_2 a^{n-2}x^2 + \ldots + x^n.$$

Die Reihe bricht offenbar von selbst ab, da die Binomialcoefficienten, n_{n+1}, n_{n+2} ... der Null gleich werden. Auch ist leicht zu sehen, dass die Reihe der Coefficienten eine symmetrische ist, insofern die Ausdrücke:

$$n_s = \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1\cdot 2 \ldots s} \text{ und } n_{n-s} = \frac{n(n-1)\ldots(s+1)}{1\cdot 2 \ldots n-s}$$

einander gleich sind.

Dieser Beweis des binomischen Satzes für ganze Potenzen lässt sich sehr leicht auf den binomischen Satz für Factoriellen übertragen. Unter Factorielle verstehen wir ein Product von Factoren, welche eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. Sei:

$$x(x+p)(x+2p) \ldots [x+(n-1)p] = x^{n|p}.$$

Hier zeigt n die Anzahl der Factoren an, wir nennen n analog dem Ausdrucke für Potenzen, Exponent der Factorielle, während p die Differenz der arithmetischen Reihe ist. Wir wollen jetzt den Ausdruck:

$$(a+x)^{n|p}$$

bestimmen.

Sei n zunächst gleich 2, so ergibt sich:

$$(a+x)^{2|p} = (a+x)(a+x+p) = a(a+p) + 2a\cdot x + x(x+p).$$

Dieser Ausdruck kann auch geschrieben werden:

$$(a+x)^{2|p} = a^{2|p} + 2a^{1|p}x^{1|p} + x^{2|p};$$

multiplicirt man diesen Ausdruck mit $(a+x+2p)$, so kann man dies in folgender Ordnung thun: das erste Glied wird erst mit $a+2p$ und dann mit x, das zweite erst mit $x+p$, das dritte mit a und $x+2p$ multiplicirt, und man erhält:

$$(a+x)^{3|p} = a^{3|p} + 3a^{2|p}x^{1|p} + 3a^{1|p}x^{2|p} + x^{3|p}.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt sich allgemein:

$$(a+x)^{n|p} = a^{n|p} + a_1^{(n)}a^{n-1|p}x^{1|p} + a_2^{(n)}a^{n-2|p}x^{2|p} + \ldots + x^{n|p}.$$

Durch Multiplication mit $a+x+np$ derart, dass man das erste Glied mit $a+np$ und x, das zweite mit $a+(n-1)p$ und $x+p$, das dritte mit $a+(n-2)p$ und $x+2p$ multiplicirt, lassen sich die zwei Formeln herstellen, welche, wie bei den Potenzen die Relation

$$a_p^{(n-1)} - a_p^{(n)} = a_{p-1}^{(n)}$$

geben, so dass man schliesslich das Verfahren, welches so eben für Potenzen angewandt worden ist, zur Bestimmung der Coefficienten wiederholen kann, so dass man hat:

2) $$(a+x)^{n|p} = a^{n|p} + n_1 a^{n-1|p}x^{1|p} + n_2 a^{n-2|p}x^{2|p} + \ldots + x^{n|p}.$$

Dies ist der binomische Satz für Factorielle. Wir kehren zu den Potenzen zurück. Setzt man in Formel 1) noch $a=1$, so ergibt sich:

3) $$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_1 x^2 + n_3 x^3 + \ldots.$$

Wir wollen diese Formel jetzt für den Fall beweisen, wo n eine gebrochene Zahl oder negativ ist. In beiden Fällen wird die Reihe rechts dann niemals abbrechen. Sie ist also eine unendliche Reihe, die wir zuvörderst in Bezug auf ihre Convergenz prüfen.

Da aber im Allgemeinen x negativ oder imaginär sein kann, so sind zunächst einige Regeln über die Convergenz derjenigen Reihen aufzustellen, deren Glieder wechselnde Vorzeichen haben, oder imaginär sind.

Digitized by Google

6) Ueber die Convergenz derjenigen Reihen, deren Glieder wechselnde Vorzeichen haben, oder imaginär sind.

A. Reihen mit wechselnden Vorzeichen.

Satz I. Wenn eine Reihe mit nur positiven Gliedern convergirt, so wird sie auch dann nicht zu convergiren aufhören wenn man die Vorzeichen beliebiger Glieder ändert.

Denn sei: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ die zu betrachtende Reihe, und alle Glieder positiv. Zur Convergenz ist nothwendig und ausreichend, dass

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

sich mit wachsendem n der Null nähert. Wenn man also beliebige Glieder dieser Summe weglässt, so werden die übrigen

$$a_{n+p} + a_{n+p'} + a_{n+p''} + \ldots \text{ kleiner als } a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$$

sein, und folglich mit der letztern Reihe sich der Null nähern. Gibt man nun a_{n+p}, $a_{n+p'}$, $a_{n+p''}$ das negative Zeichen, so hat man:

$$a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p-1} - a_{n+p} + a_{n+p+1} + \ldots + a_{n+p'-1} - a_{n+p'} + \ldots$$

und von dieser Reihe verschwindet sowohl der positive als der negative Theil; es wird also die Reihe, welche von a_0 anfängt und deren Vorzeichen wechseln, immer convergiren.

Indess findet die Convergenz von Reihen mit wechselnden Vorzeichen oft schon dann statt, wenn dieselbe Reihe mit gleichen Vorzeichen genommen, divergirt. Man hat nämlich folgenden Satz.

Satz II. Eine Reihe, deren Vorzeichen abwechselnd positiv oder negativ sind, convergirt immer, wenn die einzelnen Glieder abnehmen und mit wechselnder Stellenzahl sich der Null nähern.

Beweis. Sei $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ die zu untersuchende Reihe, wo a_0, a_1, a_2 ... positiv, $a_0 > a_1 > a_2 \ldots$ und $\lim a_n = 0$ ist.

Setzen wir:

$$S_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2n}$$

$$S_{2n+1} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2n} - a_{2n+1}$$

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots,$$

wo also S die ganze unendliche Reihe vorstellt. Es ist offenbar:

$$S = S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) - (a_{2n+3} - a_{2n+4}) - \ldots$$

$$S = S_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) + (a_{2n+4} - a_{2n+5}) + \ldots$$

Die Ausdrücke in den Klammern sind sämmtlich positiv, und man hat somit:

$$S_{2n+1} < S < S_{2n}.$$

Da nun mit wachsendem n der Unterschied der Reihen S_{2n} und S_{2n+1} d. h. die Grösse a_{2n+1} unter alle Grenzen sinkt, so liegt S zwischen zwei beliebig zu verengenden Grenzen und stellt daher eine bestimmte Grösse vor, so dass der Reihenausdruck für S convergiren muss.

Es ist aber hieran eine wichtige Bemerkung zu knüpfen. Wenn die Reihe

$$\Sigma = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

wo alle Glieder positiv sind, convergirt, so werden auch die beiden Reihen:

$$\Sigma' = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots$$

und

$$\Sigma'' = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$$

Digitized by Google

offenbar jede einzeln convergiren. In diesem Falle kann man die positiven und die negativen Glieder der Reihe S in beliebiger Anordnung schreiben. Immer wird man dieselbe Summe erhalten; man hat also z. B.:

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots = a_0 + a_2 - a_1 + a_4 + a_6 - a_3 + \ldots$$
$$= a_0 + a_2 + a_4 - a_1 + a_6 + a_8 + a_{10} - a_3 + \ldots,$$

denn man kann ja die Reihen immer auf die Form $\Sigma' - \Sigma''$ bringen. Wenn dagegen die beiden Reihen nicht convergiren, so hat man:

$$f_{(n)} = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$$
$$\varphi_{(n)} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1},$$

wo die Werthe von der Gliederzahl n abhängig sind. Es wird also z. B. sein:

$$T = a_0 + a_2 - a_1 + a_4 + a_6 - a_3 + \ldots + a_{4n} + a_{4n+2} - a_{2n+1}$$
$$= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{4n+2} - a_{4n+1} + a_{2n+2} + a_{2n+4} + \ldots + a_{4n},$$

und da der erste Theil der Reihe convergirt, und mit wachsendem n gleich S wird, so erhält man:

$$T = S + a_{2n+4} + a_{2n+4} + \ldots + a_{4n}.$$

Die letztere Reihe nun wird im Allgemeinen nicht gleich Null sein, somit die Reihe T von S verschieden sein. Man sagt in diesem Falle gewöhnlich, die Summe der Reihe hänge von der Anordnung der Glieder ab. Dies ist jedoch im uneigentlichen Sinne zu verstehen, da ja die Anzahl der positiven und negativen Glieder sich ändert, und so die Aenderung der Summe hervorgebracht wird. Wir fassen das Gesagte in folgenden Satz zusammen:

Satz III. Bei einer convergirenden Reihe mit nur positiven Gliedern, können ohne Aenderung der Summe diese Glieder beliebig angeordnet werden. Wechseln die Zeichen der Glieder, so kann dies nur geschehen, wenn die Reihe der positiven und die der negativen Glieder jede für sich einzeln convergiren.

Anmerkung. Es gibt auch Reihen die aus unendlich viel unendlichen Reihen gebildet sind. Also:

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots \\ + a'_0 + a'_1 + a'_2 + \ldots \\ \quad a''_0 + a''_1 + a''_2 + \ldots \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad\quad . \quad . \quad . \end{array}$$

In einer solchen darf ohne Aenderung der Summe nicht im Allgemeinen die Anordnung von Reihe zu Reihe verändert werden, wenn gleich sämmtliche Reihen convergiren, es kann also z. B. eine Aenderung der Anordnung, wie:

$$\begin{array}{l} a_0 + a'_0 + a''_0 + \ldots \\ a_1 + a'_1 + a''_1 + \ldots \\ a_2 + a'_2 + a''_2 + \ldots \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}$$

eine andere Summe hervorbringen. Der Grund ist leicht ersichtlich. Da die Reihe in der ersten Anordnung convergirt, so werden allerdings die Ausdrücke:

$$a_n + a_{n+1} + \ldots,\ a'_n + a'_{n+1} + \ldots$$

mit wachsendem n der Null gleich, ohne dass jedoch auch die Reihe:

$$a_0^{(n)} + a_0^{(n+1)} + \ldots,\ a_1^{(n)} + a_1^{(n+1)} + \ldots$$

gleich Null zu sein brauchen, so dass hier eine Aenderung eintreten kann.

Beispiele zu dem Gesagten werden wir später geben.

B. Reihen mit imaginären Gliedern.

Da man eine Reihe mit complexen Gliedern in einen reellen und einen mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirten Theil zerlegen kann, so braucht man eben nur jeden einzelnen Theil auf seine Convergenz zu prüfen. Indess lässt sich oft die Untersuchung der Convergenz dieser Reihen auf folgenden einfachen Satz zurückführen.

Jede Reihe mit complexen Gliedern convergirt, wenn bei

der Reihe der Moduln der einzelnen Glieder dies stattfindet. — Es lässt sich nämlich die Reihe immer auf die Gestalt bringen:

$$\nu_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + \nu_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) + \nu_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3) + \ldots,$$

welche zerfällt in die beiden

$$\nu_1\cos\varphi_1 + \nu_2\cos\varphi_2 + \nu_3\cos\varphi_3 + \ldots$$
$$i(\nu_1\sin\varphi_1 + \nu_2\sin\varphi_2 + \nu_3\sin\varphi_3 + \ldots).$$

Sehen wir von dem Zeichen der einzelnen Glieder ab, d. h. denken wir uns dieselben positiv, so ist: die Summe sowohl der ersten Reihe als die der zweiten durch i dividirt kleiner als $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots$ und sie werden mit der letzten Reihe convergiren. Wie wir gesehen haben, wird aber durch die wechselnden Vorzeichen diese Convergenz nicht aufgehoben.

7) Die binomische Reihe für negative Zahlen und Brüche.

Wir untersuchen die Reihe:

1) $$f_{(n)} = 1 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + \ldots$$

zunächst auf ihre Convergenz. n soll eine beliebige reelle, x eine beliebige Zahl sein. Wir wissen von dieser Reihe zunächst nur, dass für ganzes positives n dieselbe endlich wird, und in diesem Falle $f(n) = (1+x)^n$ zu setzen ist.

Da x eine complexe Zahl sein kann, so setzen wir $x = \nu e^{\varphi i}$, und untersuchen die Reihe der Moduln, d. h. die Reihe:

$$1 + n_1\nu + n_2\nu^2 + n_3\nu^3 + \ldots,$$

welche für reelles x mit der ersteren zusammenfällt. Dem ersten Kennzeichen des Abschnitts 3) zur Folge wird die Reihe convergiren, wenn mit wachsendem s $\frac{n_{s+1}}{n_s}$ kleiner als $\frac{1}{\nu}$ wird. Nun ist:

$$\frac{n_{s+1}}{n_s} = \frac{n(n-1)\ldots(n-s)}{1\cdot 2\ldots s+1} : \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1\cdot 2\ldots s} = \frac{n-s}{s+1},$$

ein Ausdruck, der sich mit wachsendem s der Einheit nähert.

Es wird also die Reihe convergiren, wenn Eins kleiner als $\frac{1}{\nu}$, d. h. ν kleiner als Eins ist, d. h.:

„Die binomische Reihe convergirt, wenn bei reellem x der absolute Werth dieser Grösse, bei complexem x der Modul von x kleiner als Eins ist."

Ist x reell und grösser als Eins, so wird die Reihe divergiren. Dasselbe findet aber auch bei imaginärem x statt, wenn der Modul grösser als Eins ist. Denn untersucht man die Reihen, in welche $f(n)$ zerfällt:

$$1 + n'_1\nu\cos\varphi + n_2\nu^2\cos 2\varphi + \ldots$$
$$1 + n'_1\nu\sin\varphi + n_2\nu^2\sin 2\varphi + \ldots,$$

so muss die erste Reihe divergiren, wenn: $\frac{n_{s+1}\cos(s+1)\varphi}{n_s\cos s\varphi}$ grösser als $\frac{1}{\nu}$ werden kann, sobald s wächst. Nun ist:

$$\frac{n_{s+1}}{n_s} = 1, \quad \frac{\cos(s+1)\varphi}{\cos s\varphi} = \cos\varphi - \operatorname{tg} s\varphi \sin\varphi$$

und da $\operatorname{tg} s\varphi$ jede beliebige Grösse annehmen kann, so wird dieser Ausdruck nicht kleiner als Eins bleiben. Nehmen wir jetzt an, dass die Reihe convergire, dass also der Modul von x kleiner als Eins sei, und bestimmen die Summe derselben. Man hat:

$$f(n)\cdot f(p) = (1 + n_1x + n_2x^2 + \ldots)(1 + p_1x + p_2x^2 + \ldots);$$

Digitized by Google

wird die Multiplication rechts wirklich ausgeführt, so ist der Faktor von x^m im Producte offenbar:

$$n_m + n_{m-1} p_1 + n_{m-2} p_2 + \ldots + p_m.$$

Nach der im Abschnitt 5) für Factoriellen eingeführten Bezeichnung kann man aber schreiben:

$$n_s = \frac{n^{s|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s},$$

und es ist somit der angegebene Factor:

$$\frac{n^{m|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} + \frac{n^{m-1|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m^1} p^{1|-1} + \frac{n^{m-2|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m^2} \frac{p^{2|-1}}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{p^{m|-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} \left(n^{m|-1} + m \cdot n^{m-1|-1} p^{1|-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} n^{m-2|-1} p^{2|-1} + \ldots + p^{m|-1} \right).$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die Formel 2) des Abschnittes 5) an, so ergibt sich

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} (n+p)^{m|-1} = (n+p)_m,$$

und es ist somit:

$$f(n) \cdot f(p) = 1 + (n+p)_1 x + (n+p)_2 x^2 + (n+p)_3 x^3 + \ldots$$

Die Reihe rechts mit Formel 1) dieses Abschnittes verglichen, gibt die Summe $f(n+p)$; sie wird also ebenfalls convergiren, so lange $f(n)$ und $f(p)$ convergiren, d. h. wenn x kleiner als Eins ist, und man hat, was auch n und p seien:

2) $$f(n) \cdot f(p) = f(n+p).$$

Setzt man in dieser Formel $p = n$, so ergibt sich:

$$f(n) f(n) = [f(n)]^2 = f(2n),$$

also wenn man jetzt $p = 2n$ setzt:

$$f(n) f(2n) = [f(n)]^3 = f(3n)$$

und indem man so fortfährt:

3) $$[f(n)]^s = f(sn),$$

wo n beliebig ist, s aber eine positive ganze Zahl sein muss. Sei somit $n = \frac{q}{s}$, wo q und s ganze positive Zahlen sind, so hat man:

$$\left[f\left(\frac{q}{s}\right) \right]^s = f(q)$$

und wegen des Werthes von q:

$$\left[f\left(\frac{q}{s}\right) \right]^s = (1+x)^q,$$

woraus sich dann ergibt:

$$f\left(\frac{q}{s}\right) = (1+x)^{\frac{q}{s}}$$

d. h.:

„Die Reihe 1 stellt auch dann die $n$te Potenz von $1+x$ dar, wenn n ein beliebiger positiver Bruch ist."

Irrationalzahlen lassen sich als Grenzen der Brüche auffassen, und somit gilt auch für solche unsere Reihe.

Für beliebige negative Zahlen aber beweisen wir sie, indem wir in Formel 2) setzen $p = -n$, und uns n positiv denken, es ist dann:

$$f(n) f(-n) = f(0).$$

Digitized by Google

Da n positiv ist, und für $n = 0$, die Reihe 1) direct $f(0) = 1$ gibt, so hat man:

$$f(-n) = \frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n},$$

womit der binomische Satz auch für negative Zahlen erwiesen ist. Derselbe hat indess, im Falle n keine ganze positive Zahl ist, keine Gültigkeit mehr, wenn x grösser als Eins ist. In die Formel:

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots$$

können wir noch $\frac{x}{a}$ für x setzen und erhalten, wenn wir mit a^n multipliciren:

$$(a+x)^n = a^n + n_1 a^{n-1} x + n_2 a^{n-2} x^2 + \ldots,$$

welches der binomische Satz in seiner allgemeineren Gestalt ist. Diese Reihe gilt so lange also $\frac{x}{a}$ kleiner als Eins, d. h. x kleiner als a ist.

8) Entwickelung transcendenter Funktionen in Potenzreihen.

Die in den Elementen vorkommenden transcendenten Functionen lassen sich gewissermaassen als Grenzfälle von Potenzen betrachten, und es ist daher möglich den binomischen Satz auf sie anzuwenden. Was zunächst die Exponentialgrössen anbetrifft, so ist diese Anwendung bereits in dem Artikel Quantität (Abschnitt 3) gemacht. Wir entwickelten daselbst den Ausdruck $f(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Satze und erhielten, wenn wir n ins Unendliche wachsen liessen, aber als ganze positive Zahl voraussetzten:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

indem sich die Convergenz dieser Reihe für jedes x aus dem Grunde herausstellte, weil

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = \frac{n-s}{s+1} \frac{x}{n} = \frac{1 - \frac{s}{n}}{s+1} x$$

mit wachsendem s sich der Null nähert, da s immer kleiner als n bleibt.

Es ist also dieser Ausdruck ganz unabhängig von dem Gesetze, nach welchem n wächst, und da man somit setzen kann:

$$\frac{x}{n} = \frac{1}{m},$$

wo m wieder als ganze Zahl betrachtet werden kann, welchen ganzen oder gebrochenen Werth auch x habe, so ergibt sich:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx}.$$

Also, wenn man $1 + \frac{1}{n} = e$ setzt, so hat man:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

eine Formel, die sich auch leicht auf negatives x ausdehnen lässt. Es ist nämlich:

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n,$$

und in den Reihen-Ausdrücken für die Grösse rechts verschwinden alle Glieder bis auf das erste, so dass man hat

Digitized by Google

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = e^{-x}.$$

Für imaginäre x aber dient die Formel:

$$e^{\alpha i} = \lim\left(1+\frac{\alpha i}{n}\right)^n$$

als Definition, woraus sich dann wie in dem angeführten Artikel gezeigt worden, die Reihen für cosinus und sinus ergeben. Wir wenden uns jetzt zur Entwickelung der Logarithmen in Reihen. Ist

$$e^x = y,$$

so ist:

$$x = \lg y;$$

dieser Logarithmus von y heisst der natürliche. Um den für irgend eine andere Basis a zu finden, setzt man $a^z = y$, woraus sich dann

$$z = \lg_a y$$

ergibt; da man aber hat:

$$e^{\lg a} = a, \text{ also } e^{z\lg a} = y,$$

so ist

$$\lg y = \lg_a y \lg a \text{ oder } \lg_a y = \frac{\lg y}{\lg a}.$$

Die Berechnung der Logarithmen eines beliebigen Systems lässt sich also auf die des natürlichen Systems zurückführen.

Was diese anbetrifft, so gibt die Gleichung:

$$e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = y$$

den Grenzwerth von y, nämlich:

$$x = \lim n\left(y^{\frac{1}{n}} - 1\right),$$

also wenn man $y = 1+z$ setzt:

$$\lg(1+z) = \lim n\left[(1+z)^{\frac{1}{n}} - 1\right].$$

Aber nach dem binomischen Satze ist:

$$n\left[(1+z)^{\frac{1}{n}} - 1\right] = z + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \ldots$$

Da $\frac{1}{n}$ keine ganze Zahl ist, so wird diese Reihe nur für Werthe von z, welche nicht grösser als Eins sind, convergiren. Da aber n unendlich gross ist, so ist diese Reihe noch direct zu untersuchen; es ist:

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = \frac{\frac{1}{n}-s}{s+1}z.$$

Die Grenze dieses Ausdruckes ist z, und das Kennzeichen, dass z Eins nicht übersteigen kann, trifft auch hier zu. Da in diesem Falle aber die Reihe eine bestimmte Summe hat, so kann man in $\lim n\left[(1+z)^{\frac{1}{n}} - 1\right]$ die Grösse $\frac{1}{n}$ gleich Null setzen, und hat:

Digitized by Google

$$\lg(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots$$

woraus sich auch ergibt:

$$\lg(1-z) = -\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \cdots\right).$$

Beide Reihen geben keine Summe, wenn z grösser als 1 ist. Setzt man $z = 1$, so verlässt uns das eben angewandte Kennzeichen. Die erste Reihe aber gibt in diesem Falle:

$$\lg 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

und diese Reihe muss nach dem vorigen Abschnitte convergiren, da die Glieder abnehmen und abwechselnde Vorzeichen haben. Dagegen wird die zweite Reihe:

$$\lg 0 = -(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots)$$

nicht convergiren, obgleich die Glieder ins Unendliche abnehmen, es ist nämlich bekanntlich $\lg 0 = -\infty$.

Da die eben gegebenen Reihen nur convergiren, wenn z kleiner als 1 ist, so lassen sich mittelst der ersteren nur die Logarithmen der zwischen 1 und 2 und mittels der letzteren nur die der zwischen 0 und 1 liegenden positiven Zahlen berechnen. Auf die letzteren lassen sich aber die Logarithmen aller reellen positiven Zahlen zurückführen, da wenn u grösser als 1 ist, jedenfalls $\frac{1}{u}$ zwischen 0 und 1 liegen wird, und man setzen kann:

$$\lg u = -\lg\frac{1}{u} = -\lg\left(1 - \frac{u-1}{u}\right),$$

woraus sich ergibt:

$$\lg u = \frac{u-1}{u} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{u-1}{u}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{u-1}{u}\right)^3 + \cdots,$$

eine Reihe, die allerdings convergirt, wenn u grösser als Eins ist, aber mit wachsendem u so langsam, dass sie zur numerischen Berechnung nicht zu benutzen ist. Dagegen kann man Reihen für $\lg u$ bilden, deren Convergenz so gar bis auf jeden beliebigen Grad zum Wachsen gebracht werden kann.

Zu dem Ende sei u zunächst grösser als Eins, dann:

$$u = \sqrt[p]{u}^p,$$

wo p eine beliebige ganze Zahl ist. Man hat dann:

$$\lg u = \lg \sqrt[p]{u}^p = p \lg \sqrt[p]{u}$$

und daher:

$$\lg u = \frac{\sqrt[p]{u}-1}{p} - \frac{1}{2p}\left(\sqrt[p]{u}-1\right)^2 + \frac{1}{3p}\left(\sqrt[p]{u}-1\right)^3 + \cdots.$$

Da nun p so gross genommen werden kann, dass $\sqrt[p]{u}$ sich auf eine beliebige Grenze der Einheit nähert, so kann $\sqrt[p]{u}-1$ so klein, als man will, gemacht werden, und man kann sich sogar mit einem Gliede begnügen, wenn man p so bestimmt, dass $\frac{1}{2p}\left(\sqrt[p]{u}-1\right)^2$ sich hinreichend der Null nähert. Ist also $\lg u$ auf s Decimalstellen zu bestimmen, so muss sein:

$$\frac{1}{2p}\left(\sqrt[p]{u}-1\right)^2 < \tfrac{1}{10}s,$$

d. h.:

$$\sqrt[p]{u}-1 < \frac{(2p)^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{s}{2}}}$$

setzt man übrigens $p = 2^n$, so wird die Bestimmung von $\sqrt[p]{u}$ sich auf wiederholte Ausziehung von Quadratwurzel beschränken.

Sei jetzt u kleiner als Eins, so ist $v = \frac{1}{u}$ zu setzen, wo man dann hat:

$$\lg u = -\lg v$$

und mit dem letztern Ausdruck ist wie oben zu verfahren. — Bekanntlich lassen sich aus unserer Formel auch recurrente Reihen für $\lg u$ ableiten, welche die Logarithmen der grösseren Zahlen durch die der kleineren geben, und äusserst schnell convergiren. Indess sind dergleichen Formeln nur als Interpolationsformeln zu betrachten, da die Fehler, welche man bei den kleineren Zahlen begeht, sich für die grösseren summiren, und in gewissen Zwischenräumen directe Berechnungen nöthig machen.

Was noch die Logarithmen der negativen und complexen Zahlen anbetrifft, so ist auf dasjenige zu verweisen, was darüber in dem Artikel Quantität gesagt worden ist. Jedoch berührt die Entwicklung der Bögen und Potenzen der trigonometrischen Linien, die hier zu gebenden Betrachtungen. Man hat bekanntlich:

Digitized by Google

$$\operatorname{tg} x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{i(e^{xi} + e^{-xi})} = \frac{1 - e^{-2xi}}{i(1 + e^{-2xi})},$$

also wenn man $\operatorname{tg} x = y$ setzt:

$$y = \frac{1 - e^{-2i \operatorname{arc\,tg} y}}{i(1 + e^{-2i \operatorname{arc\,tg} y})},$$

woraus dann folgt:

$$e^{2i \operatorname{arc\,tg} y} = \frac{1+iy}{1-iy},$$

also:

$$\operatorname{arc\,tg} y = \frac{1}{2i}(\lg(1+iy) - \lg(1-iy)).$$

Nach der oben gegebenen Formel lassen sich die Ausdrücke $\lg(1+iy)$ und $\lg(1-iy)$ in Reihen entwickeln, so lange der Modul von iy, d. h. y selbst kleiner als Eins ist, und man hat:

$$\lg(1+iy) = iy + \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{iy^5}{5} + \dots$$

$$\lg(1-iy) = -iy + \frac{y^2}{2} + \frac{iy^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{iy^5}{5} + \dots$$

$$\operatorname{arc\,tg} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \dots,$$

und die Gültigkeit dieser Reihe erstreckt sich über alle Werthe von y, die kleiner als Eins sind; aus den schon oben gegebenen Gründen ist $y = 1$ selbst nicht ausgeschlossen, auch nicht $y = -1$, da auch in diesem Falle die Glieder abwechselnde Zeichen haben. Noch ist zu bemerken, dass die Arcus tangens mehrdeutig, die gegebene Reihenentwicklung aber eindeutig ist, und dass gleiches bei den Logarithmen stattfindet. Die hierüber nöthigen Betrachtungen enthält der Artikel Quantität.

9) Allgemeine Sätze über Entwicklungen nach Potenzreihen.

In dem Artikel Quantitäten (imaginäre) ist der Satz bewiesen, dass jede Function $f(x)$ sich in gewissen Grenzen nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln lasse, falls $f(0)$ nicht discontinuirlich ist, und dass diese Entwicklung richtig bleibt, so lange die betreffende Reihe convergirt. Man kann also die Entwickelbarkeit ohne Weiteres voraussetzen, und es kommt blos darauf an, die Coefficienten der betreffenden Reihe zu bestimmen. Zu diesem Behufe dient nun namentlich folgender von Descartes herrührender Satz.

Wenn man in convergenter Reihe für unendlich viele continuirlich auf einander folgende Werthe von x hat

$$a_0 + a_1 + x + a_2 x^2 + \dots = 0$$

so muss

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$$

sein.

Offenbar nämlich verschwindet mit abnehmendem x die ganze Reihe bis aufs erste Glied, und man hat somit $a_0 = 0$, also für jedes x auch

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = 0$$

oder

$$a_1' + a_2 x + a_3 x^2 + \dots = 0,$$

woraus bei abnehmendem x folgt $a_1 = 0$, und

$$a_2 + a_3 x^2 + \dots = 0,$$

also $a_2 = 0$ u. s. w.

Nach diesem Satze lassen sich viele Functionen in Potenzreihen entwickeln.

Beispiel. Sei z. B. die Function $\operatorname{arc\,sin} x$ zu finden. Wir setzen:

$$\operatorname{arc\,sin} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

und indem wir differenziiren:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

Es ist aber:

Digitized by Google

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 1\cdot 2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^8 + \ldots$$

Hieraus folgt dann:

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 1\cdot 2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \ldots - a_1 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 - 4a_4 x^3 - \ldots = 0;$$

also wenn man die Coefficienten der einzelnen Potenzen vergleicht, so ergibt sich:

$$a_{2s} = 0, \quad a_{2s+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots 2s-1}{2^s\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots s(2s+1)},$$

womit zu verbinden ist $a_1 = 1$.

Noch bleibt a_0 unbestimmt, indess ergibt sich direct: $\arcsin(0) = 0$, und da die Reihe für $x = 0$ sich auf a_0 beschränkt, so ist $a_0 = 0$ zu setzen, also:

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2^2\cdot 1\cdot 2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 7}x^7 + \ldots$$

Was die Convergenz dieser Reihe anbetrifft, so hat man:

$$\frac{a_{2s+3}}{a_{2s+1}} = \frac{(2s+1)^2}{(2s+2)\ (2s+3)}x,$$

ein Ausdruck, der mit wachsendem s sich x nähert. Zur Convergenz der Entwicklung genügt also, dass x kleiner als Eins ist.

Wäre $\arccos x$ in eine Potenzreihe zu entwickeln, so hätte man:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

also:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{2\cdot 3} - \frac{1\cdot 3x^5}{2^2\cdot 1\cdot 2\cdot 5} - \ldots$$

Nicht immer aber lassen sich die Entwicklungen auf so einfache Weise finden.

Man hat bekanntlich:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots}$$

Will man aber diese Entwicklung, welche immer convergirt, in eine andere nach ganzen Potenzen von x umgestalten, wo natürlich auf die immerwährende Convergenz zu verzichten ist, so kann man setzen:

$$\operatorname{tg} x = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

Es ist dann

$$\operatorname{tg}(-x) = -a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots = -\operatorname{tg}(x).$$

Das Glied a_0 verschwindet nämlich, da $\operatorname{tg}(0) = 0$ ist, und man wird haben:

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \ldots$$

also:

$$a_2 = a_4 = \ldots = 0.$$

Aus beiden Entwickelungen von $\operatorname{tg} x$ folgt nun:

$$x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots = (a_1 x + a_3 x^3 + a^5 x^5 + \ldots)\left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots\right).$$

Digitized by Google

Wenn man rechts die Multiplication ausführt, so wird der Coefficient des mit x^{2s+1} multiplicirten Gliedes sein:

$$a_{2s+1} - \frac{a_{2s-1}}{1\cdot 2} + \frac{a_{2s-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^s a_1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten hat man also die recurrente Formel:

$$a_{2s+1} - \frac{a_{2s-1}}{1\cdot 2} + \frac{a_{2s-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^s a_1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s} = \frac{(-1)^s}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s+1}.$$

Es lassen sich hieraus die einzelnen Coefficienten bestimmen, wenn man nach einander setzt: $s = 0, 1, 2\ldots$. Auf diese Weise ergibt sich:

$$a_1 = 1,$$

$$a_3 - \frac{a_1}{1\cdot 2} = \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3}, \text{ also } a_3 = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \text{ also } a_3 = \tfrac{1}{3}$$

$$a_5 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 1\cdot 2} = \frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

u. s. w. Die evolute Bestimmung der Grössen a_1, a_3, a_5 würde grössere Schwierigkeit machen. Sie hängt in sehr einfacher Weise von derjenigen der sogenannten Bernoulli'schen Zahlen ab, von denen nachher die Rede sein wird. Man erhält:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2x^3}{2\cdot 3} + \frac{2^4 x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{2^4\cdot 17\, x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

Was die Convergenz dieser Entwicklung anbetrifft, so ist, um nicht in Weitläuftigkeiten zu gerathen, auf die allgemeinen Bedingungen der Convergenz für Potenzreihen zu verweisen, welche der Artikel Quantität (imaginäre) ergibt.

Das Resultat für diese Entwicklung ist, dass sie so lange convergirt, als x die Einheit nicht übersteigt.

Wir wollen noch $\cot x$ in eine Potenzreihe entwickeln. Es ist:

$$x\cot x = \frac{x\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots},$$

da für $x = 0$, $x\cot x = 1$ wird, erhält diese Reihe nur positive Potenzen von x, und man kann setzen:

$$x\cot x = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \ldots;$$

die mit ungraden Potenzen von x behafteten Glieder verschwinden nämlich, was sich ebenso wie bei der Tangente verificiren lässt. Aus beiden Gleichungen ergibt sich:

$$1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots = (b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 - \ldots)\left(1 - \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right)$$

und durch Ausführung der Multiplication:

$$b_{2s} - \frac{b_{2s-2}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{b_{2s-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots + \frac{(-1)^s b_0}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s+1} = \frac{(-1)^s}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s},$$

womit die Gleichung $b_0 = 1$ zu verbinden ist, und alle b sich in ähnlicher Weise wie die Ausdrücke a_{2s+1} ergeben.

Eben so leicht lässt sich eine Reihe für $\sec x$ finden. Es ist:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots}$$

Digitized by Google

und wenn man setzt

$$\sec x = c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \ldots,$$

so ergibt sich wie oben:

$$c_{2s} - \frac{c_{2s-2}}{1\cdot 2} + \frac{c_{2s-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^s c_0}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2s} = 0 \text{ und } c_0 = 1.$$

Was die Cosecante anbetrifft, so ist:

$$x \operatorname{cosec} x = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots},$$

also, wenn man setzt:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{g_0}{x} + g_2 x + g_3 x^3 + \ldots,$$

erhält man:

$$g_{2s} - \frac{g_{2s-2}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{g_{2s-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots + \frac{(-1)^s g_0}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots 2s+1} = 0$$

$$y_0 = 1.$$

Die Beziehung, welche zwischen den Coefficienten a, b, c und g stattfindet, wird in einem folgenden Abschnitte gegeben werden.

Hieran knüpfen wir noch einige Sätze über die Convergenz der Potenzreihen.

I. Wenn in einer Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

für irgend einen Werth y von x der Modul des Gliedes $a_n x^n$ mit zunehmendem n nicht über alle Grenzen wächst, so convergirt die Reihe selbst, und die Reihe der Differenzialquotienten nach x für jeden Werth von x, dessen Modul kleiner als der von y ist.

Sei nämlich

$b_n = \operatorname{mod} a_n$, und $r = \operatorname{mod} y$, $\varrho = \operatorname{mod} x$

so wird die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

gleichzeitig convergiren mit

$$b_0 + b_1 \varrho + b_2 \varrho^2 + \ldots$$

Man kann aber setzen:

$$b_n \varrho^n = b_n r^n \cdot \frac{\varrho^n}{r^n}.$$

Da nun nach der Annahme die Reihe der ersten Factoren

$$b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \ldots$$

nicht ins Unendliche wächst und die der zweiten Reihe

$$1 + \frac{\varrho}{r} + \frac{\varrho^2}{r^2} + \ldots$$

convergirt, so wird auch die Reihe

$$b_0 + b_1 \varrho + \ldots$$

nach einem in Abschnitt 3) bewiesenen Satze convergiren. Was nun die Reihe der Differenzialquotienten anbetrifft, so ist deren allgemeines Glied $n a_n x^{n-1}$, und das der Moduln dieser Reihe:

$$n b_n \varrho^{n-1} = b_n r^{n-1} \frac{n\varrho^{n-1}}{r^{n-1}}.$$

Die Reihe der ersten Factoren ist wie oben, die der zweiten

$$1 + \frac{\varrho}{r} + \frac{2\varrho^2}{r^2} + \ldots,$$

welche convergirt, da der Quotient des $n+1$ten Gliedes durch das $n$te $\frac{n+1}{n}\frac{\varrho}{r}$ sich mit wachsendem n einer Grösse $\frac{\varrho}{r}$, die kleiner als Eins ist, nähert.

Es ist nicht an sich klar, dass die Summe der Differenzialquotienten der Glieder einer gegebenen convergirenden Reihe, auch den Differenzialquotienten dieser Reihe bildet, denn ist z. B.:

$$S = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$

so kann man zwar setzen:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx} + \ldots$$

so lange die Anzahl der Glieder endlich ist; wird sie aber unendlich gross, so kann der Werth von $\frac{df_n(x)}{dx}$ bedeutungslos oder

Digitized by Google

unbestimmt werden, so dass die Summe

$$\frac{df_1}{d(x)}+\frac{df_2(x)}{dx}+\ldots$$

aufhört die Grenze von $\frac{dS}{dx}$ zu sein. — Es gilt aber für Potenzreihen der Satz:

II. Wenn eine Reihe

$$S=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

convergirt für jedes x, dessen Modul gleich r ist, so wird für jedes x, dessen Modul ϱ kleiner als r ist, sein

$$\frac{dS}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$$

also gleich der Summe der Differenzialquotienten, denn es ist:

$$\frac{dS}{dx}=\lim\frac{S(x+\nu)-S(x)}{\nu}=\sum_s a_s\,\frac{(x+\nu)^s-x^s}{\nu}.$$

Betrachtet man nun die Glieder dieser Reihe vom $n$ten an, so kommt:

$$a_n\frac{(x+\nu)^n-x^n}{\nu}+a_{n+1}\frac{(x+\nu)^{n+1}-x^{n+1}}{\nu}=T=a_n[(x+\nu)^{n-1}+(x+\nu)^{n-2}x$$
$$+\ldots+(x+\nu)x^{n-2}+x^{n-1}]+a_{n+1}[(x+\nu)^n+(x+\nu)^{n-1}x+\ldots$$
$$+(x+\nu)x^{n-1}+x^n]+\ldots$$

Sei mod $a_n=b_n$, mod $x=\varrho$, mod $x+n=\varrho'$, so liegt die Summe der Modul dieser Reihe zwischen

$$nb_n\varrho^{n-1}+(n+1)b_{n+1}\varrho^n+\ldots,\text{ und }nb_n\varrho'^{n-1}+(n+1)b_{n+1}\varrho'^n,$$

welche entstehen wenn man im ersten Falle ϱ' für ϱ im zweiten ϱ für ϱ' setzt, also die Modulsumme einmal vergrössert, das andere Mal verkleinert. Da nun nach Satz I. die Reihe $b_1+2b_2\varrho+\ldots+nb_n\varrho^{n-1}+\ldots$ convergirt für ϱ und ϱ', so wird mit zunehmendem n sein

$$nb_n\varrho^{n-1}+(n+1)b_{n+1}\varrho^n+\ldots=0$$

und ebenso, wenn man ϱ' für ϱ setzt; es wird also $T=0$ sein, und man kann in dem Werthe von $\frac{dS}{dx}=\sum_s a_s\frac{(x+\nu)^s-x^s}{\nu}$, sich s immer endlich denken, in welchem Falle man hat: $\frac{dS}{dx}=\sum_s sa^sx^{s-1}$, was zu beweisen war.

10) Reihe der negativen Potenzen einer arithmetischen Reihe.

Die Reihe x^s, $(x+\alpha)^s$, $(x+2\alpha)^s$ ... war immer eine arithmetische Reihe $s$ter Ordnung so lange s eine ganze positive Zahl war. Sei jetzt s eine negative (ganze oder gebrochene) Zahl, und untersuchen wir die Reihe:

$$S=x^{-p}+(x+\alpha)^{-p}+(x+2\alpha)^{-p}+\ldots$$

Offenbar werden die Glieder mit wachsender Stellenzahl sich der Null nähern, jedoch haben wir gesehen, dass dieser Umstand nicht zur Convergenz der Reihe ausreicht.

Untersuchen wir nach Abschnitt 3) den Ausdruck:

Digitized by Google

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{x+(n+1)\alpha}{x+n\alpha}\right)^{-p},$$

so nähert derselbe sich mit wachsendem n der Einheit, und gleiches findet mit

$$a_n^{\frac{1}{n}} = (x+n\alpha)^{-\frac{p}{n}}$$

statt. Es lassen uns also hier die obigen Kennzeichen der Convergenz im Stich. Dieselbe ist also direct zu prüfen.

Wir nehmen zunächst an, dass α und x positiv seien. Es sind dann je nach dem α grösser oder kleiner als x ist, die einzelnen Glieder der Reihe S kleiner als eine der folgenden:

$$x^{-p},\ (2x)^{-p},\ (3x)^{-p}\ \ldots$$

$$\alpha^{-p},\ (2\alpha)^{-p},\ (3\alpha)^{-p}\ \ldots$$

Ist x negativ, so wird der Ausdruck $-x+m\alpha$, wenn man m derart nimmt, dass $m\alpha$ dass kleinste Vielfache von α ist, welches grösser als x ist, doch immer positiv sein, und die mit $(-x+m\alpha)^{-p}$ beginnenden Glieder unserer Reihe, werden kleiner sein, als die entsprechenden der Reihe

$$\alpha^{-p},\ (2\alpha)^{-p},\ (3\alpha)^{-p}\ \ldots$$

In jedem dieser Fälle wird also unsere Reihe gleichzeitig convergiren mit einer der Reihen:

$$\alpha^{-p}+(2\alpha)^{-p}+(3\alpha)^{-p}+\ldots$$

oder:

$$x^{-p}+(2x)^{-p}+(3x)^{-p}+\ldots,$$

welche beiden Reihen die Form annehmen:

$$\alpha^{-p}(1+2^{-p}+3^{-p}+\ldots) \qquad x^{-p}(1+2^{-p}+3^{-p}+\ldots),$$

so dass die Convergenz unserer Reihe nur von der in der Klammer enthaltenen abhängt.

Ist α negativ, so kommt die Betrachtung auf die Reihe:

$$(-\alpha)^{-p}(-2\alpha)^{-p}+(-3\alpha)^{-p}+\ldots,$$

zurück, (wo nöthigenfalls α mit x zu vertauschen ist), und da hierfür gesetzt werden kann:

$$(-\alpha)^{-p}(1+2^{-p}+3^{-p}+\ldots),$$

so ist wieder die in der Klammer stehende Reihe maassgebend. Gleiches zeigt sich wie leicht zu sehen auch dann, wenn x und α complexe oder rein imaginäre Grössen sind, wie man sieht, wenn man statt der reellen Grössen x und $n\alpha$ ihre Moduln betrachtet und eine Reihe von Moduln bildet, mod $(n\alpha)^{-p}$ oder mod $(nx)^{-p}$, welche grösser als die von $(x+n\alpha)^{-p}$ sind. Nur der Fall, wo x reell, und α rein imaginär ist, macht hier eine Ausnahme. In diesem Falle haben wir:

$$(x+n\alpha i)^{-p} = (n\alpha i)^{-p}\left(1-\frac{xi}{n\alpha}\right)^{-p}$$

oder da der Ausdruck $\left(1-\frac{xi}{n\alpha}\right)^{n}$ sich mit wachsendem n dem Werthe $e^{-\frac{xi}{\alpha}}$ nähert, für diesen Fall:

$$(x+n\alpha i)^{-p} = (n\alpha i)^{-p} e^{\frac{pxi}{\alpha}}$$

Digitized by Google

und da der reelle und imaginäre Theil der Exponentialgrösse beide kleiner als Eins sind, so wird die Convergenz der Reihe auch in diesem Falle von dem Faktor $(n\alpha i)^{-p}$, d. h. von der Convergenz der Reihe:

$$(\alpha i)^{-p} + (2\alpha i)^{-p} + (3\alpha i)^{-p} + \ldots$$

oder von der Reihe $1 + 2^{-p} + 3^{-p} + \ldots$ abhangen. — Was nun diese letztere Reihe anbetrifft, so ist offenbar:

$$2^{-p} + 3^{-p} < 2 \cdot 2^{-p}$$

$$4^{-p} + 5^{-p} + 6^{-p} + 7^{-p} < 4 \cdot 4^{-p}$$

$$8^{-p} + 9^{-p} + 10^{-p} + 11^{-p} + 12^{-p} + 13^{-p} + 14^{-p} + 15^{-p} + 16^{-p} < 8 \cdot 8^{-p}$$

u. s. w., ferner

$$1^{-p} > 2^{-p}$$

$$2^{-p} + 3^{-p} > 2 \cdot 4^{-p}$$

$$4^{-p} + 5^{-p} + 6^{-p} + 7^{-p} > 4 \cdot 8^{-p}$$

u. s. w., so dass unsere Reihe convergirt mit der folgenden:

$$1 + 2^{1-p} + 4^{1-p} + 8^{1-p} + \ldots = 1 + 2^{1-p} + 2^{2(1-p)} + 2^{3(1-p)} + \ldots$$

und divergirt mit der folgenden:

$$2^{-p} + 2^{-2p+1} + 2^{-3p+2} + 2^{-4p+3} + \ldots = \tfrac{1}{2}(2^{-p+1} + 2^{-2p+2} + 2^{-3p+3} + \ldots).$$

Es sind dies beides geometrische Reihen, deren erstere so lange convergirt als p grösser als Eins ist, und deren zweite immer divergirt, wenn p gleich Eins oder grösser als Eins ist, und man hat daher den Satz:

„Die Reihe $S = x^{-p} + (x+\alpha)^{-p} + (x+2\alpha)^{-p} + \ldots$ wo p positiv ist, convergirt für jedes x und α, wenn p grösser als Eins ist, sonst aber niemals."

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo $p = 1$ ist, man hat dann:

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+2\alpha} + \ldots;$$

wie eben gezeigt wurde, divergirt diese Reihe. Diese Divergenz findet aber nicht statt, wenn man den einzelnen Gliedern wechselnde Vorzeichen gibt, da die Glieder mit wachsender Stellenzahl sich der Null nähern. Es hat also die Reihe:

$$S_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+2\alpha} - \frac{1}{x+3\alpha} + \ldots$$

eine ganz bestimmte Summe.

Aber auch bei der Reihe S kann man von einer Summe sprechen. Nur dass dieselbe von der Anzahl der Glieder abhängt. Wir wollen uns mit der Ermittlung beider Summen S und S_1 hier beschäftigen. Sei:

$$S_{(n)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+2\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+(n-1)\alpha},$$

so ist:

$$S_{(n+p)} - S_{(n)} = \frac{1}{x+n\alpha} + \frac{1}{x+(n+1)\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+(n+p-1)\alpha}$$

$$= \frac{1}{n\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n\alpha}} + \frac{1}{1+\frac{x+\alpha}{n\alpha}} + \frac{1}{1+\frac{x+2\alpha}{n\alpha}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{x+(p-1)\alpha}{n\alpha}}\right).$$

Der letzte Ausdruck nähert sich mit wachsendem n offenbar dem bestimmten Integral:

Digitized by Google

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{p}{n}} \frac{d\vartheta}{1+\frac{x}{n\alpha}+\vartheta} = \frac{1}{\alpha}\lg\frac{1+\frac{x+p\alpha}{n\alpha}}{1+\frac{x}{n\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\lg[x+(p+n)\alpha] - \frac{1}{\alpha}\lg(x+n\alpha).$$

Setzen wir noch $p+n=n'$, so erhalten wir für wachsendes n und n':

$$S_{(n')} - \frac{1}{\alpha}\lg(x+n'\alpha) = S_{(n)} - \frac{1}{\alpha}\lg(x+n\alpha),$$

d. h. Der Ausdruck

$$S_{(n)} - \frac{1}{\alpha}\lg(x+n\alpha)$$

nähert sich mit wachsendem n einer von n unabhängigen, also nur mit x und α sich ändernden Grösse. Wir wollen dieselbe hier ermitteln. Sei ν irgend eine endliche positive ganze Zahl, so ist:

$$S(\nu) - \frac{1}{\alpha}\lg(x+\nu\alpha) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+2\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+(\nu-1)\alpha} - \frac{1}{\alpha}\lg(x+\nu\alpha),$$

und indem wir diese Gleichung von

$$\varphi(x,\alpha) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+2\alpha} + \ldots - \frac{1}{x+(n-1)\alpha} - \frac{1}{\alpha}\lg(x+n\alpha)$$

abziehen, wo $\varphi(x+\alpha)$ die constante Grenze von $S(n) - \frac{1}{\alpha}\lg(x+n\alpha)$ vorstellt, ergibt sich:

$$\varphi(x,\alpha) - S(\nu) + \frac{1}{\alpha}\lg(x+\nu\alpha) = \frac{1}{x+\nu\alpha} + \frac{1}{x+(\nu+1)\alpha} + \frac{1}{x+(\nu+2)\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+(n-1)\alpha} - \frac{1}{\alpha}\lg\left(\frac{x+n\alpha}{x+\nu\alpha}\right).$$

Der Logarithmus rechts nimmt aber die Form an:

$$\lg\frac{x+(\nu+1)\alpha}{x+\nu\alpha} + \lg\frac{x+(\nu+2)\alpha}{x+(\nu+1)\alpha} + \ldots + \lg\frac{x+n\alpha}{x+(n-1)\alpha} = \lg\left(1+\frac{\alpha}{x+\nu\alpha}\right) + \lg\left(1+\frac{\alpha}{x+(\nu+1)\alpha}\right) + \ldots + \lg\left(1+\frac{\alpha}{x+(n-1)\alpha}\right),$$

oder wenn man nach vorigem Abschnitt diese Logarithmen in Reihen entwickelt

$$\frac{1}{\alpha}\lg\left(\frac{x+n\alpha}{x+\nu\alpha}\right) = \frac{1}{x+\nu\alpha} + \frac{1}{x+(\nu+1)\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+(n-1)\alpha} - \frac{\alpha}{2}\left[\left(\frac{1}{x+\nu\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+(\nu+1)\alpha}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{x+(n-1)\alpha}\right)^2\right] + \frac{\alpha^2}{3}\left[\left(\frac{1}{x+\nu\alpha}\right)^3 + \left(\frac{1}{x+(\nu+1)\alpha}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{x+(n-1)\alpha}\right)^3\right] + \ldots$$

wo zu bemerken ist, dass die in den Klammern stehenden Reihen alle, die erste ausgenommen, nach dem Obigen convergiren. Es ist somit:

1) $$\varphi(x,\alpha) = S(\nu) - \frac{1}{\alpha}\lg(x+\nu\alpha) + \frac{\alpha}{2}\Sigma[x+(\nu+s)\alpha]^{-2} + \frac{\alpha^2}{3}\Sigma[x+(\nu+s)\alpha]^{-3} + \ldots,$$

wo sich die Summen auf alle Werthe von s von 0 bis ins Unendliche erstrecken. Nimmt man ν hinreichend gross, z. B. gleich 10, so wird sich schnelle Convergens ergeben. — Setzt man z. B. $x=1$, $\alpha=1$, so ist:

$$S(\nu) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu}$$

Digitized by Google

und der Ausdruck $\varphi(x, \alpha)$ reducirt sich auf eine Constante. Die Formel 1) wird in diesem Falle, wenn C diese Constante ist:

$$2)\quad C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} - \lg(1+\nu) + \tfrac{1}{2}\Sigma(1+\nu+s)^{-2} + \tfrac{1}{3}\Sigma(1+\nu+s)^{-3} + \ldots;$$

man erhält auf diese Weise:

$$C = 0{,}5772156649015328\ldots$$

Allgemein aber hat man, wenn n ins Unendliche wächst:

$$3)\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+(n-1)\alpha} = \frac{1}{\alpha}\lg(x+n\alpha) + \varphi(x, \alpha),$$

woraus dann folgt:

$$4)\quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \lg(1+n).$$

Wir wenden uns jetzt zu der Reihe:

$$S_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+2\alpha} - \ldots + \frac{1}{x+2(n-1)\alpha} - \frac{1}{x+(2n-1)\alpha},$$

wo n ins Unendliche wächst. Man kann hierfür setzen:

$$S_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2\alpha} + \frac{1}{x+4\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+2(n-1)\alpha} - \left(\frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+3\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+(2n-1)\alpha}\right)$$

$$S_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+2\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+(2n-1)\alpha} - \left(\frac{1}{\frac{x+\alpha}{2}} + \frac{1}{\frac{x+\alpha}{2}+\alpha} + \frac{1}{\frac{x+\alpha}{2}+2\alpha} + \ldots + \frac{1}{\frac{x+\alpha}{2}+(n-1)\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\lg(x+2n\alpha) - \varphi(x, \alpha) - \frac{1}{\alpha}\lg\left(\frac{x+\alpha}{2}+n\alpha\right) + \varphi\left(\frac{x+\alpha}{2}, \alpha\right)$$

und da sich mit wachsendem n die Ausdrücke $\lg(x+2n\alpha)$, $\lg[x+(2n+1)\alpha]$ der Gleichheit nähern:

$$5)\quad S_1 = \frac{1}{\alpha}\lg 2 + \varphi\left(\frac{x+\alpha}{2}, \alpha\right) - \varphi(x, \alpha).$$

Dies ist, wie vorauszusehen war, eine von n unbhängige Grösse.

Für den Fall, wo x gleich α ist, heben sich die Grössen φ weg und man hat

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{3\alpha} - \frac{1}{4\alpha} + \ldots = \frac{1}{\alpha}\lg 2$$

eine Formel, welche mit der im vorigen Abschnitte gefundenen:

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots = \lg 2$$

identisch ist.

Um diesen Gegenstand aber völlig zu erschöpfen, bleibt es noch übrig, zu untersuchen, wie sich die Reihe S_1 ändert wenn man die Anordnung der positiven und negativen Glieder sich verändern lässt. Zu dem Ende nehmen wir an, dass immer auf p positive Glieder deren q negative folgen sollen, ohne dass die Zeichen selbst sich ändern. Wir setzen also:

$$T = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2\alpha} + \ldots + \frac{1}{x+2(p-1)\alpha} - \frac{1}{x+\alpha} - \frac{1}{x+3\alpha} - \ldots - \frac{1}{x+(2q-1)\alpha}$$

Digitized by Google

$$+\frac{1}{x+2p\alpha}+\frac{1}{x+(2p+2)\alpha}+\cdots\quad\frac{1}{x+2(2p-1)\alpha}$$
$$-\frac{1}{x+(2q+1)\alpha}-\frac{1}{x+(2q+3)\alpha}-\cdots-\frac{1}{x+(4q-1)\alpha}$$
$$+\quad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot\qquad\cdot$$

Nehmen wir an, dass q kleiner als p sei und dass die Reihen der positiven und negativen Glieder aus n Partialreihen, wie in jeder Columne enthalten sind, bestehen, um dann eben so viel negative als positive Glieder zu haben; es wären dann zu T noch hinzuzufügen die Glieder:

$$-\frac{1}{x+(2nq+1)\alpha}-\frac{1}{x+(2nq+3)\alpha}-\cdots-\frac{1}{x+(2np-1)\alpha}.$$

Dann aber würde die Reihe T sich in S_1 verwandeln, so dass man hat:

$$T=S_1+\frac{1}{x+(2nq+1)\alpha}+\frac{1}{x+(2nq+3)\alpha}+\cdots+\frac{1}{x+(2np-1)\alpha},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$T=S_1+\frac{1}{(2nq+1)\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{(2nq+1)\alpha}}+\frac{1}{1+\frac{x+2\alpha}{(2nq+1)\alpha}}+\frac{1}{1+\frac{x+4\alpha}{(2nq+1)\alpha}}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{1+\frac{x+2[n(p-q)-1]\alpha}{(2nq+1)\alpha}}\right),$$

woraus sich für wachsendes n ergibt:

$$T=S_1+\frac{1}{2\alpha}\int_0^{p}\frac{d\vartheta}{1-\vartheta},$$

also:

$$T=S_1+\frac{1}{2\alpha}\lg\frac{p}{q}$$

oder mit Berücksichtigung des Werthes von S_1:

6) $$T=\frac{1}{\alpha}\lg\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)+q\left(\frac{x+\alpha}{2},\alpha\right)-(x,\alpha).$$

Der Werth von T hängt also von dem Verhältnisse $\frac{p}{q}$ allein ab. Für $x=\alpha$, hat man einfach:

7) $$T=\frac{1}{\alpha}\lg 2\sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Dieselbe Formel lässt sich leicht beweisen auch für den Fall, dass q grösser als p ist; es ist dann nämlich nur q mit p zu vertauschen, und das Zeichen der Ergänzungsreihe, welche zu S_1 kommt, zu ändern, was dann denselben Ausdruck gibt. — Was den Ausdruck 7) anbetrifft, so ist es interessant zu bemerken, dass diese convergirenden Entwicklungen die Logarithmen ganz beliebiger ganzer und gebrochener Werthe enthalten.

Mit Hülfe der Theorie der bestimmten Integrale lässt sich ein Summenausdruck für die Reihe:

$$R(n)=\frac{1}{x^s}+\frac{1}{(x+\alpha)^s}+\frac{1}{(x+2\alpha)^s}+\cdots+\frac{1}{(x+\widehat{n-1}\alpha)^s}$$

finden. Es ist nämlich bekanntlich (siehe den Artikel Quadratur):

$$\frac{\Gamma(s)}{u^s}=\int_0^{\infty}e^{-u\vartheta}\,\vartheta^{s-1}\,d\vartheta,$$

Digitized by Google

wo $\Gamma(s)$ der bekannte Ausdruck ist, welcher für ganzes positives s den Werth $1\cdot 2\cdot 3\cdot s-1$ annimmt. Man hat sonach, wenn man für n nach und nach x, $x+\alpha$, $x+2\alpha$ . . . setzt:

$$R(n)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \vartheta^{s-1}\left(e^{-x\vartheta}+e^{-(x+\alpha)\vartheta}+e^{-(x+2\alpha)\vartheta}+\ldots\right.$$

$$\left.+e^{-[x+(n-1)\alpha]\vartheta}\right)d\vartheta=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-x\vartheta}\,\vartheta^{s-1}\,\frac{1-e^{-n\alpha\vartheta}}{1-e^{-\alpha\vartheta}}\,d\vartheta.$$

Die Formel ist selbstverständlich nur für positive Werthe von s gültig; auch muss x positiv sein. Setzt man $n=\infty$ so erhält man, wenn R die Reihe

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{(x+\alpha)^s}+\frac{1}{(x+2\alpha)^s}+\ldots$$

vorstellt:

$$R=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{-x\vartheta}\,\vartheta^{s-1}}{1-e^{-\alpha\vartheta}}\,d\vartheta.$$

Die Gültigkeit des Integrals verlangt aber noch eine weitere Beschränkung. An der untern Grenze verschwindet nämlich der Nenner. Setzen wir daher:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x\vartheta}\,\vartheta^{s-1}\,d\vartheta}{1-e^{-\alpha\vartheta}}=\int_0^\nu \frac{e^{-x\vartheta}\,\vartheta^{s-1}\,d\vartheta}{1-e^{-\alpha\vartheta}}+\int_0^\infty \frac{e^{-x\vartheta}\,\vartheta^{s-1}\,d\vartheta}{1-e^{-\alpha\vartheta}}$$

wo ν abnimmt, so wird das zweite Integral einen endlichen Werth haben. Man kann dann vermöge der Form:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=f[a+\varepsilon(b-a)]\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

wo ε zwischen 0 und 1 liegt, und welche Formel für alle Functionen $f(x)$ gilt, welche in den Grenzen a und b ihre Zeichen nicht wechseln, dafür schreiben:

$$\frac{e^{-x\varepsilon\nu}}{1-e^{-\alpha\varepsilon\nu}}\int_0^\nu \vartheta^{s-1}\,d\vartheta=\frac{\nu^s\,e^{-x\varepsilon\nu}}{s(1-e^{-\alpha\varepsilon\nu})}.$$

Bei abnehmenden ν ist aber:

$$e^{-\alpha\varepsilon\nu}=1-\alpha\varepsilon\nu,\quad e^{-x\varepsilon\nu}=1-x\varepsilon\nu$$

zu setzen, woraus sich die Grenze ergibt: $\frac{\nu^{s-1}}{s\alpha\varepsilon}$, ein Ausdruck, der continuirlich bleibt, so lange s grösser als Eins ist. Diese Bedingung ist also für die Gültigkeit unserer Formel hinzuzufügen. Die Formel kann aber nicht für die Grenze $s=1$ angewandt werden, da das Integral in den Grenzen 0 und ν einen endlichen Werth hat $\frac{1}{\alpha\varepsilon}$, also Discontinuität stattfindet. Bei der Formel für $R(n)$, wo n endlich ist, findet die letzte Beschränkung dagegen nicht statt.

11) **Regeln für die Convergenz der Reihen mit positiven Vorzeichen, falls die Ausdrücke**

$$\frac{a_{s+1}}{a_s},\quad a_s^{\frac{1}{s}}$$

sich der Einheit nähern.

Da bei der Reihe der negativen Potenzen, die früher gegebenen Kennzeichen der Convergenz nicht ausreichten, dessenungeachtet aber die Fälle, wenn diese Reihe convergirt, ermittelt werden können, so kann man auch andere Reihen mit diesen vergleichen, und hieraus neue Regeln über die Convergenz ableiten, Es ist hierbei die Reihe der negativen Potenzen ganz wie oben die geometrische zu behandeln.

Digitized by Google

Sei die zu untersuchende Reihe wieder

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

wo wir uns alle Glieder reell und positiv denken.

Vergleichen wir die auf das $s$te Glied folgenden Ausdrücke:

$$a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + \ldots$$

mit den entsprechenden der Reihe:

$$\frac{1}{s^\alpha} + \frac{1}{(s+1)^\alpha} + \frac{1}{(s+2)^\alpha} + \ldots,$$

wo α grösser als Eins ist, die also nach Obigem mit wachsendem s der Null sich nähert, so wird dasselbe mit den Gliedern der gegebenen Reihe der Fall sein, und somit die gegebene Reihe convergiren, so bald für wachsendes s, $a_s < \frac{1}{s^\alpha}$,

d. h. $\frac{\lg \frac{1}{a_s}}{\lg s} > \alpha$ und α selbst grösser als Eins ist. Ist α aber kleiner als Eins, so wird die Reihe

$$\frac{1}{s^\alpha} + \frac{1}{(s+1)^\alpha} + \frac{1}{(s+2)^\alpha} + \ldots$$

sich nicht der Null nähern, folglich auch nicht die vorgelegte, sobald

$$a_s > \frac{1}{s^\alpha}, \text{ also } \frac{\lg \frac{1}{a_s}}{\lg s} < \alpha$$

ist. Daraus folgt dann der Satz:

Satz I. „Eine Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem der Ausdruck $\frac{\lg\left(\frac{1}{a_s}\right)}{\lg s}$ sich mit wachsendem s einer Grenze nähert die grösser oder kleiner als Eins ist."

Dies Kennzeichen verlässt uns, sobald die Grenze der Einheit gleich wird. Ist jedoch für jedes endliche s von einem bestimmten an $\frac{\lg \frac{1}{a_s}}{\lg s}$ immer noch kleiner als Eins, so wird die Reihe divergiren, da dann $a_s > \frac{1}{s}$ wird, und die Glieder also grösser sind als die der divergenten Reihe:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} + \ldots$$

Diese wie alle Betrachtungen über die Convergenz gehen von dem Satze aus, dass jede Reihe dann convergirt, wenn ihre Glieder von einem bestimmten an schneller abnehmen, als die einer andern als convergent bekannten Reihe. Jedoch gibt es in Bezug auf die Vergleichung zweier Reihen noch ein anderes oft anwendbares Kennzeichen.

Satz II. Ist

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

die zu untersuchende Reihe,

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$$

eine andere schon als convergent bekannte, und sind die Glieder beider Reihen positiv, so wird die erstere Reihe immer convergiren, wenn man von einem bestimmten, dem $s$ten Gliede bis ins Unendliche hat:

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} < \frac{b_{s+1}}{b_s}.$$

Denn wenn man die letztere Reihe mit $\frac{a_s}{b_s}$, wo s eine bestimmte endliche Zahl ist, multiplicirt, so wird dieselbe noch immer convergiren. Die Reihe vom $s$ten Gliede an ist dann:

$$a_s + \frac{a_s}{b_s} b_{s+1} + \frac{a_s}{b_s} b_{s+2} + \ldots$$

und der entsprechende Theil der zu untersuchenden Reihe

$$a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + \ldots$$

Aber da

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} < \frac{b_{s+1}}{b_s}$$

ist, auch:

$$a_{s+1} < a_s \frac{b_{s+1}}{b_s},$$

$$a_{s+2} < a_{s+1} \frac{b_{s+2}}{b_{s+1}} < a_s \frac{b_{s+2}}{b_s},$$

$$a_{s+3} < a_{s+2} \frac{b_{s+3}}{b_{s+2}} < a_s \frac{b_{s+3}}{b_s} \ldots$$

Digitized by Google

so dass die Glieder der vorgelegten Reihe kleiner als die einer als convergent bekannten, sind.

Nehmen wir z. B. als die zur Vergleichung bestimmte Reihe, wieder die folgende:

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots,$$

so muss also, damit die vorgelegte convergire,

$$\frac{a_{s+1}}{a_s}<\left(\frac{s}{s+1}\right)^\alpha \text{ und } \alpha>1$$

sein. Umgekehrt, wenn

$$\frac{a_{s+1}}{a_s}>\left(\frac{s}{s+1}\right)^\alpha \text{ und } \alpha<1,$$

so wird die Reihe divergiren, denn es sind dann die Glieder der Reihe:

$$a_{s+1}+a_{s+2}+a_{s+3}+\ldots$$

offenbar grösser als die entsprechenden der Reihe:

$$\frac{a_s s^\alpha}{(s+1)^\alpha}+\frac{a_s s^\alpha}{(s+2)^\alpha}+\frac{a_s s^\alpha}{(s+3)^\alpha}+\ldots$$

Da aber die letzte Reihe divergirt, so findet auch gleiches bei der ersteren statt.

Die Ungleichheiten finden übrigens im algebraischen Sinne statt, d. h. die positiven Werthe von α sind grösser als die negativen gedacht.

Den Bedingungen der Convergenz oder Divergenz die hierin enthalten sind, ist aber ein einfacherer Ausdruck zu geben. Zunächst kann man dieselben umgestalten in:

$$\frac{a_s}{a_{s+1}}>\left(1+\frac{1}{s}\right)^\alpha,\ \alpha>1$$

im Falle der Convergenz,

$$\frac{a_s}{a_{s+1}}<\left(1+\frac{1}{s}\right)^\alpha,\ \alpha<1$$

im Falle der Divergenz.

Den Ausdrücken rechts ist aber eine einfachere Form zu geben. Es ist immer, wenn s grösser als Eins ist:

$$\left(1+\frac{1}{s}\right)^\alpha=1+\frac{\alpha}{s}+\ldots$$

wo die weggelassenen Glieder sich bis auf jede Grenze der Null nähern, und man hat also die Regeln:

$$\frac{a_s}{a_{s+1}}>1+\frac{\alpha}{s},\ \alpha>1$$

im Falle der Convergenz,

$$\frac{a_s}{a_{s+1}}<1+\frac{\alpha}{s},\ \alpha<1$$

im Falle der Divergenz, d. h. im ersten Falle

$$s\left\{\frac{a_s}{a_{s+1}}-1\right\}>\alpha,$$

im letzteren Falle:

$$s\left\{\frac{a_s}{a_{s+1}}-1\right\}<\alpha,$$

also:

Satz III. Eine Reihe, convergirt oder divergirt, je nachdem sich der Ausdruck: $s\left\{\frac{a_s}{a_{s+1}}-1\right\}$ mit wachsendem s einer Grenze nähert, die algebraisch grösser oder kleiner als Eins ist.

Dies Kennzeichen wird dann mit Vortheil angewandt, wenn $\frac{a_{s+1}}{a_s}$ die Einheit zur Grenze hat.

Nur der Fall, wo $s\left\{\frac{a_s}{a_{s+1}}-1\right\}$ die Einheit zur Grenze hat, entzieht sich der Betrachtung. Ist jedoch dieser Ausdruck für jedes endliche s von einem bestimmten an stets kleiner als Eins, so findet Divergenz statt, denn es ist dann:

$$\frac{a_{s+1}}{a_s}>\frac{s}{s+1},$$

und das Verhältniss zweier Glieder der vorgelegten Reihe ist also grösser als das zweier entsprechenden, der als divergent bekannten Reihe:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots$$

Beispiel. Untersuchen wir die Reihe:

$$1+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+\ldots,$$

so ist:

$$a_s=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2s-1)}{2\cdot4\ldots2s(2s+1)}$$

und der Ausdruck $\frac{a_{s+1}}{a_s}$ nähert sich mit wachsendem s der Einheit.

Digitized by Google

Dagegen ist:

$$s\left\{\frac{a_s}{a_{s+1}}-1\right\}=\left(\frac{2(s+1)(2s+3)}{(2s+1)^2}-1\right)s.$$

Ein Ausdruck für den zu setzen ist:

$$\frac{s}{2s+1}\left[\frac{4s^2+10s+6-(4s^2+4s+1)}{2s+1}\right]=\frac{s}{2s+1}\cdot\frac{6s+5}{2s+1},$$

und der sich mit wachsendem s, also dem Werthe $\alpha=\frac{3}{2}$ nähert, so dass die Reihe convergirt.

Die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\ldots$$

hat zum allgemeinen Gliede:

$$a_s=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2s-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2s}.$$

Das Verhältniss $\frac{a_{s+1}}{a_s}$ wird gleich Eins, dagegen ist:

$$s\left\{\frac{a_s}{a_{s+1}}-1\right\}=\left(\frac{2s+2}{2s+1}-1\right)s=\frac{s}{2s+1}$$

und die Grenze des Ausdrucks ist $\alpha=\frac{1}{2}$, weshalb unsere Reihe divergirt.

Mancherlei Regeln der Convergenz gibt die Theorie der bestimmten Integrale.

Der vorige Abschnitt hat uns gezeigt, wie der Rest der Reihe vom $s$ten Gliede an ohne Weiteres zuweilen in ein bestimmtes Integral verwandelt werden kann. Oefter anwendbar ist jedoch das jetzt zu gebende Kennzeichen.

Nehmen wir an, dass a_s eine Function von s sei, die stets abnimmt, mit wachsendem s sich der Null nähert, und stets positiv ist, und übrigens einer Erweiterung für gebrochene und irrationale s fähig ist.

Da die Function a_s positiv und abnehmend ist, so hat man:

$$a_s>\int_s^{s+1}a_\alpha d\alpha,\quad a_{s+1}>\int_{s+1}^{s+2}a_\alpha d\alpha\ldots$$

und

$$a_{s+1}<\int_s^{s+2}a_\alpha d\alpha,\quad a_{s+2}<\int_{s+1}^{s+1}a_\alpha d\alpha\ldots$$

also:

$$a_s+a_{s+1}+a_{s+2}+\ldots>\int_s^\infty a_\alpha d\alpha$$

$$a_{s+1}+a_{s+2}+a_{s+3}+\ldots<\int_s^\infty a_\alpha d\alpha.$$

Hat das Integral nun einen endlichen Werth, so wird dasselbe mit der Reihe

$$a_0+a_1+a_2+\ldots$$

stattfinden, und letztere also auch convergiren, ist dagegen das Integral unendlich gross, so findet dasselbe mit der Reihe

$$a_0+a_1+a_2+\ldots$$

statt, und sie wird also divergiren.

Beispiel. Sei gegeben die Reihe:

$$\frac{\lg1}{1}+\frac{\lg2}{2}+\frac{\lg3}{3}+\ldots$$

Digitized by Google

Der Ausdruck $a_s = \frac{\lg \alpha}{\alpha}$ wird immer abnehmen von dem Werthe an, wo $d\frac{\lg \alpha}{\alpha} = 0$ ist, wo also ein Maximum stattfindet. Es erfüllt diesen Werth die Gleichung:

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\lg \alpha}{\alpha^2} = 0; \text{ es ist also } \alpha = e.$$

Es ist ferner:

$$\int_s^t \frac{\lg x\, dx}{x} = \tfrac{1}{2}(\lg t)^2 - \tfrac{1}{2}(\lg s)^2,$$

ein Ausdruck, der für $t = \infty$ unendlich gross wird. Somit divergirt also die vorgelegte Reihe.

Andere Regeln der Convergenz, welche auf die Theorie der bestimmten Integrale beruhen, müssen hier übergangen werden.

12) Untersuchung der binomischen Reihe für den Grenzfall.

Die binomische Reihe:

$$(1+x)^n = 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + \ldots$$

convergirt für jedes x, das abgesehen vom Vorzeichen kleiner als Eins ist. Der Grenzfall, wo $x = \pm 1$ ist, erfordert somit eine besondere Untersuchung.

Man hat:

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = \pm\frac{n-s+1}{s} = \mp\left(1 - \frac{n+1}{s}\right).$$

Wir haben früher gesehen, dass die Reihe immer divergiren wird, wenn der in der Klammer stehende Ausdruck für jedes endliche s grösser als Eins ist, und da dies der Fall, wenn $n+1$ negativ ist, so sind nur die Werthe von n zu untersuchen, welche $n+1$ positiv machen, also die von -1 bis ∞, (die Grenze -1 ausgeschlossen).

Sei jetzt $x = -1$, in welchem Fall zu setzen ist:

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = 1 - \frac{n+1}{s}$$

Diese Formel zeigt schon, dass a_{s+1} und a_s gleiche Vorzeichen haben, wenn $n+1$ kleiner als s ist, dass also alle Glieder von einem gewissen an gleichzeitig positiv oder negativ sind. (Im letzteren Falle sind sie dann mit entgegengesetztem zu nehmen), so dass das letzte Kennzeichen des vorigen Abschnittes anzuwenden ist. Man hat:

$$s\left\{\frac{a_s}{a_{s+1}} - 1\right\} = s\left(\frac{s}{s-n-1} - 1\right) = \frac{n+1}{1 - \frac{n-1}{s}}.$$

Die Grenze dieses Ausdruckes ist $n+1$, und damit derselbe grösser als Eins sei, muss n positiv sein, in welchem Falle Convergenz stattfindet.

Sei jetzt $x = +1$, also

$$\frac{a_{s+1}}{a_s} = -\left(1 - \frac{n+1}{s}\right),$$

so sind die Glieder abwechselnd positiv und negativ, und es ist zur Convergenz nur erforderlich, dass die einzelnen Glieder mit wachsendem s abnehmen und sich der Null nähern. Nun ist offenbar:

Digitized by Google

$$a_{s+1}=\left(\frac{n+1}{s}-1\right)a_s,\quad a_{s+2}=\left(\frac{n+1}{s}-1\right)\left(\frac{n+2}{s+1}-1\right)a_s$$
$$a_{s+3}=\left(\frac{n+1}{s}-1\right)\left(\frac{n+2}{s+1}-1\right)\left(\frac{n+3}{s+2}-1\right)a_s$$

allgemein:

$$a_{s+t}=\left(\frac{n+1}{s}-1\right)\left(\frac{n+2}{s+1}-1\right)\ldots\left(\frac{n+t}{s+t-1}-1\right)a_s.$$

Es kommt also nur darauf an, dass mit zunehmendem t sich der Ausdruck:

$$\left(\frac{n+1}{s}-1\right)\left(\frac{n+2}{s+1}-1\right)\ldots\left(\frac{n+t}{s+t-1}-1\right)$$
$$=(-1)^t\left(1-\frac{n+1}{s}\right)\left(1-\frac{n+2}{s+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n+t}{s+t-1}\right)$$

der Null nähere, wo s so gross als man will genommen werden kann. Statt des obigen Ausdrucks aber kann man den offenbar grösseren:

$$\left(1-\frac{n+1}{s}\right)\left(1-\frac{n+1}{s+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n+1}{s+t-1}\right)$$

untersuchen. Und wenn s sehr gross ist, kann man vermöge der Gleichung:

$$\lim\left(1-\frac{n}{s}\right)^s=e^{-n}$$

setzen:

$$1-\frac{n+1}{s}=e^{-\frac{n+1}{s}},\quad 1-\frac{n+1}{s+1}=e^{-\frac{n+1}{s+1}},\quad 1-\frac{n+1}{s+t-1}=e^{-\frac{n+1}{s+t-1}},$$

wo dann der zu untersuchende Ausdruck die Gestalt annimmt:

$$e^{-(n+1)}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\ldots+\frac{1}{s+t-1}\right).$$

Die in der Klammer eingeschlossene Summe aber wird bei wachsendem t, wie wir gesehen haben, unendlich gross; immer also wenn $n+1$ positiv ist, wird diese Grenze Null werden. Somit folgt für die binomische Reihe der Satz:

Satz. Die binomische Reihe für $(1+x)^n$ convergirt, wenn $x=-1$ ist, immer noch, wenn n positiv ist, für $x=+1$ immer, wenn $n+1$ positiv ist. Sie divergirt für $x=-1$, wenn n negativ ist, und für $x=+1$, wenn $n+1$ negativ ist.

Die Untersuchung der Grenzfälle namentlich bei Potenzreihen macht oft umständliche Untersuchungen nöthig.

13) Recurrente Reihen.

Eine recurrente oder rücklaufende Reihe ist eine solche, deren allgemeines Glied eine Function einer bestimmten Anzahl von vorhergehenden Gliedern ist.

Damit also die Reihe:

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\ldots$$

eine recurrente sei, muss man haben:

1) $$a_s=\varphi(a_{s-1},\ a_{s-2}\ldots a_{s-p}).$$

Es ist im Allgemeinen Aufgabe der Differenzenrechnung das independente Gesetz für das allgemeine Glied zu finden. — Wir beschäftigen uns hier mit denjenigen Reihen, welche im engern Sinne recurrente genannt werden; dieses sind solche, wo zwischen einer Anzahl auf einander folgender Glieder eine lineare Beziehung stattfindet, also die Gleichung 1) die Form annimmt:

2) $$a_s+\alpha_1 a_{s-1}+\alpha_2 a_{s-2}+\ldots+\alpha_p a_{s-p}=0,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ Constanten sind.

Digitized by Google

Die allgemeine Auflösung dieser Functionen-Gleichung muss, wie in der Differenzenrechnung gezeigt wird, p Constanten enthalten, welche zu bestimmen sind, wenn man die p ersten Glieder der Reihe $a_0, a_1, a_2 \ldots a_{p-1}$ kennt.

Setzt man $a_s = u^s$, so erhält man:

3) $$u^p + \alpha_1 u^{p-1} + \alpha_2 u^{p-2} + \ldots + \alpha_p = 0,$$

eine Gleichung $p$ter Ordnung, deren Wurzeln sein mögen:

$$u_1, u_2 \ldots u_p.$$

Da die Gleichung 2) eine lineare ist, muss jeder Ausdruck von der Form:

4) $$A_1 u_1^s + A_2 u_2^s + A_3 u_3^s + \ldots + A_p u_p^s = a_s$$

dieselbe erfüllen, wo $A_1, A_2 \ldots A_p$ willkürliche Constanten sind, und zur Bestimmung derselben hat man die Gleichungen:

5)
$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 + \ldots + A_p &= a_0 \\
A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_p u_p &= a_1 \\
A_1 u_1^2 + A_2 u_2^2 + \ldots + A_p u_p^2 &= a_2 \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\
\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot & \\
A_1 u_1^{p-1} + A_2 u_2^{p-1} + \ldots + A_p u_p^{p-1} &= a_{p-1}.
\end{aligned}$$

Es ist wichtig, dass zur Bestimmung von a_s die Gleichung 3) nicht aufgelöst zu werden braucht; offenbar sind nämlich die aus 5) zu bestimmenden Grössen $A_1, A_2 \ldots A_p$ symmetrische Functionen der Wurzeln $u_1, u_2 \ldots u_p$, somit auch der Ausdruck a_s in 4), wenn man für $A_1, A_2 \ldots$ die Werthe setzt, eine solche symmetrische Function, also eine rationale Function von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$.

Ein Beispiel möge dies näher ausführen. Sei $p = 2$, also die Gleichung 2):

$$a_s + \alpha_1 a_{s-1} + \alpha_2 a_{s-2} = 0.$$

Die Gleichung 3) wird dann:

$$u^2 + \alpha_1 u + \alpha_2 = 0,$$

welche gleichbedeutend ist mit dem System:

$$u_1 + u_2 = -\alpha_1, \quad u_1 u_2 = \alpha_2.$$

Die Gleichungen 5) werden dann:

$$A_1 + A_2 = a_0, \quad A_1 u_1 + A_2 u_2 = a_1,$$

d. h.:

$$\begin{aligned}
A_1 (u_2 - u_1) &= a_0 u_2 - a_1 \\
A_2 (u_1 - u_2) &= a_0 u_1 - a_1.
\end{aligned}$$

Die Gleichung 4) wird, wenn man A_1 und A_2 eliminirt:

$$a_s = \frac{a_1 \left(u_2^s - u_1^s\right) - a_0 u_1 u_2 \left(u_2^{s-1} - u_1^{s-1}\right)}{u_2 - u_1}$$

$$= \frac{a_1 \left(u_2^s - u_1^s\right) - a_0 \alpha_2 \left(u_2^{s-1} - u_1^{s-1}\right)}{u_2 - u_1}.$$

Sei noch

$$\alpha_1 = -\beta, \quad \alpha_1^2 - 4\alpha_2 = \gamma^2,$$

so ist:

Digitized by Google

$$u_1 - u_2 = \gamma, \quad u_1 + u_2 = \beta, \quad u_1 = \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad u_2 = \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$u_2^s - u_1^s = \frac{1}{2^s}(\beta-\gamma)^s - \frac{1}{2^s}(\beta+\gamma)^s = -\frac{1}{2^{s-1}}\beta\gamma(s_1\beta^{s-2} - s_3\beta^{s-4}\gamma^2 + s_5\beta^{s-6}\gamma^4 + \ldots),$$

wo $s_1, s_3 \ldots$ die entsprechenden Binomialcoefficienten sind. Die Reihe ist selbstverständlich eine endliche.

Setzen wir die Werthe von β und γ wieder ein, so ergibt sich hieraus:

$$a_s = \frac{(-1)^{s-1}a_1}{2^{s-1}}[s_1 a_1^{s-2} - s_3 a_1^{s-4}(a_1^2 - 4a_2) + s_5 a_1^{s-6}(a_1^2 - 4a_2)^2 - \ldots]$$

$$+ \frac{(-1)^{s-1}a_1 a_2 a_2}{2^{s-2}}[(s-1)a_1^{s-3} - (s-1)_3 a_1^{s-5}(a_1^2 - 4a_2) + (s-1)_5 a_1^{s-7}(a_1^2 - 4a_2)^2 - \ldots].$$

Besondere Erwägung muss für den Fall eintreten, dass die Gleichung 3) zwei oder mehr gleiche Wurzel hat, in welchem Falle unser Verfahren nicht mehr das allgemeine Integral gibt. Man kann dann ähnlich wie bei Behandlung der linearen Differenzialgleichungen verfahren. Seien die Wurzeln u_k und u_{k+1} zunächst gleich, so kann man diese erst sich um eine abnehmende Grösse unterscheiden lassen und setzen:

$$u_{k+1} = u_k + \nu;$$

setzt man dies in s ein, so kommt:

$$(u_k+\nu)^p + a_1(u_k+\nu)^{p+1} + \ldots + a_p = 0$$

oder, wenn man die höheren Potenzen von ν weglässt, was ja bei abnehmendem ν geschehen kann, und Gleichung 3), welche auch für $u = u_p$ gilt, berücksichtigt:

3a) $$p u_k^{p-1} + (p-1)a_1 u_k^{p-2} + (p-2)a_2 u_k^{p-3} + \ldots + a_{p-1} = 0.$$

Man zeigt bekanntlich auch direct, dass in diesem Falle der Differenzialquotient der Gleichung 3) für $u = u_p$ verschwindet.

Die Gleichung 4) aber gibt:

4) $$A_1 u_1^s + A_2 u_2^s + \ldots + A_k u_k^s + A_{k+1}(u_k+\nu)^s + A_{k+2}u_{k+2}^s + \ldots + A_p u_p^s = a_p;$$

aber wenn man ν sehr klein nimmt, so ist:

$$(u_k+\nu)^s = u_p^s + s u_k^{s-1}\nu.$$

Also, wenn man vertauscht:

$$A_k + A_{k+1} \text{ mit } B_k, \quad \nu A_{k+1} \text{ mit } B_{k+1},$$

was geschehen kann wenn man A_k und A_{k+1} wachsen lässt, in welchem Falle B_k und B_{k+1} endlich, so ergibt sich, wenn man wieder A_k und A_{k+1} für B_k und B_{k+1} schreibt:

4) $$A_1 u_1^s + A_2 u_2^s + \ldots + A_k u_k^s + s A_{k+1} u_k^{s-1} + A_{k+2} u_{k+2}^s + \ldots + A_p u_p^s = a_p.$$

Digitized by Google

Da jedes mit einem der Coefficienten A multiplicirte Glied eine partielle Auflösung ist, so ist auch:

$$A_h u_h^s + sA_{h+1} u_h^{s-1} = a_p$$

eine solche. — Nimmt man nun auch an, dass $u_{h+2} = u_h$ sei, so setzen wir wieder: $u_{h+2} = u_h + \nu$, und haben dann die Auflösung

$$B_p (u_p + \nu)^s + sB_{p+1} u_h^{s-1} = a_p$$

und da die Summe zweier partiellen Auflösungen wieder eine Auflösung ist:

$$(A_h + A_h) u_h^s + s(A_{h+1} + \nu B_h + B_{h+1}) u_h^{s-1} + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} \nu B_{h+1} u_h^{s-2} = a_p,$$

wo man ν unendlich klein gesetzt hat, also wenn man für:

$$A_h + B_h, \quad A_{h+1} + \nu B_h, \quad B_{h+1}, \quad s(s-1)\nu B_{h+1}$$

bezüglich setzt:

$$A_h, \quad A_{h+1}, \quad 1 \cdot 2 A_{h+1},$$

so ergibt sich:

$$A_h u_h^s + sA_{h+1} u_h^{s-1} + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} A_{h+2} u_h^{s-2} = a_p$$

und in Vereinigung mit den von den übrigen Wurzeln herrührenden Gliedern die allgemeine Auflösung:

4b) $$a_p = A_1 u_1^s + A_2 u_2^s + \ldots + A_h u_h^s + sA_{h+1} u_h^{s-1} + \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2} A_{h+2} u_h^{s-2} + A_{h+3} u_{h+3}^s + \ldots + A_p u_p^s$$

auf diese Weise erhält man, wenn k gleiche Wurzeln sind, statt der Glieder:

$$A_h u_h^s + A_{h+1} u_{h+1}^s + \ldots + A_{h+k-1} u_{h+k-1}^s$$

die folgenden:

$$A_h u_h^s + sA_{h+1} u_h^{s-1} + s_2 A_{h+2} u_h^{s-2} + \ldots + s_{k-1} A_{h+k-1} u_{h+k-1}^{s-k+1}$$

wo $s_1, s_2 \ldots$ die Binomialcoefficienten sind.

Nimmt man also im allgemeinen Falle an, dass die p Wurzeln $u_1, u_2 \ldots_p$ in Klassen von bezüglich $k, k_1, k_2 \ldots k_p$ zerfallen, deren jede nur gleiche enthält, wo also auch $k, k_1 \ldots$ gleich Eins sein können, so ist:

4c) $$a_p = \sum_{t=0}^{t=k-1} s_t A_{t+1} u_{t+1}^s + \sum_{t=0}^{t=k_1-1} s_t A_{k+1} u_{k+t+1}^s + \sum_{t=0}^{t=k_2-1} s_t A_{k+k'+t+1} u_{k+k_1+t+1}^{s-t} + \ldots + \sum_{t=0}^{t=k_n-1} s_t A_{k+k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+t+1} u_{k+k_1+\ldots+k_{n-1}+t+1}^{s-1}.$$

Auch die Gleichungen 5) werden andere; sie nehmen nämlich die Gestalt an, welche sich aus 4c) ergibt, wenn man darin nach einander $s = 0, 1, 2 \ldots p-1$ setzt.

Kehren wir zu dem Falle, wo alle Wurzeln der Gleichung 3) ungleich sind, zurück. Aus den Gleichungen 5) lassen sich dann sehr leicht die Ausdrücke A_1, A_2, A_p bilden.

Digitized by Google

Multipliciren wir dieselben der Reihe nach mit zu bestimmenden Constanten: v_{p-1}, $v_{p-2} \ldots v_{p-1}$ und addiren dieselben, so ist das mit A_q multiplicirte Glied:

$$A_q(u_q^{p-1} + v_1 u_q^{p-2} + v_2 u_q^{p-3} + \ldots + v_{p-1}),$$

ein Ausdruck, der sich auf die Form bringen lässt:

$$A_q(u_q - w_1)(u_q - w_2) \ldots (u_q - w_p),$$

wenn man setzt:

$$\begin{aligned} v_1 &= -(w_1 + w_2 + \ldots + w_{p-1}) \\ v_2 &= w_1 w_2 + w_1 w_3 + \ldots + w_{p-2} w_{p-1} \\ v_3 &= -(w_1 w_2 w_3 + \ldots + w_{p-3} w_{p-2} w_{p-1}) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v_{p-1} &= \pm(w_1 w_2 + \ldots + w_{p-1}). \end{aligned}$$

Um zu bewirken, dass alle Ausdrücke:

$$A_q(u_q - w_1)(u_q - w_2) \ldots (u_q - w_{p-1})$$

mit Ausnahme desjenigen, wo $q = r$ ist verschwinden, hat man nur setzen:

$$w_1 = u_1, \quad w_2 = u_2 \ldots w_{r-1} = u_{r-1}$$

$$w_r = u_{r-1} \ldots w_{p-1} = u_p$$

und man erhält also aus den Gleichungen 5)

$$A_r(u_r - u_1)(u_r - u_2) \ldots (u_r - u_{r-1})(u_r - u_{r+1}) \ldots (u_r - u_p)$$
$$a_{p-1} + a_{p-2} v_1 + a_{p-3} v_2 + \ldots + a_1 v_{p-2} + a_0 v_{p-1},$$

womit A_r gegeben ist.

Was die Grössen $v_1, v_2 \ldots v_{p-1}$ anbetrifft, so ist identisch:

$$(u - u_1)(u - u_2) \ldots (u - u_p) = u^p + \alpha_1 u^{p-1} + \ldots + \alpha_p$$
$$= (u - u_r)(u^{p-1} + v_1 u^{p-2} + \ldots + v_{p-1}),$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha_t = v_t - u_r v_{t-1}, \quad \alpha_1 = v_1 - u_r,$$

also:

$$v_1 = \alpha_1 + u_r, \quad v_2 = \alpha_2 + \alpha_1 u_r + u_r^2 + \ldots$$

$$v_s = \alpha_s + \alpha_{s-1} u_r + \alpha_{s-2} u_r^2 + \ldots + \alpha_1 u_r^{s-1} + u_r^s.$$

Wenn man noch setzt:

$$6) \qquad f_s(u) = u^s + \alpha_1 u^{s-1} + \alpha_2 u^{s-2} + \ldots + \alpha_s,$$

so ist offenbar:

$$f_p(u) = (u - u_1)(u - u_2) \ldots (u - u_p)$$

$$f'_p(u_r) = (u_r - u_1)(u_r - u_2) \ldots (u_r - u_{r-1})(u_r - u_{r+1}) \ldots (u_r - u_p),$$

also:

Digitized by Google

$$7)\quad Ar = \frac{a_{p-1} + a_{p-2} f_1(u_r) + a_{p-3} f_2(u_r) + \ldots + a_1 f_{p-2}(u_r) + a_0 f_{p-1}(u_r)}{f'_p(u_r)}.$$

Die Gleichungen 4) und 7) lösen die Aufgabe vollständig. Dies ist sogar für den Fall richtig, wo zwei oder mehrere Wurzeln gleich werden. Es nimmt dann die Summe der entsprechenden Glieder in 4) mit Berücksichtigung von 7) die Form $\frac{0}{0}$ an, welche nach den gewöhnlichen Regeln bestimmt wird, und so zum Resultate führt.

Die Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

lässt sich leicht summiren. Dieselbe zerfällt nämlich in Partialreihen, deren allgemeines Glied die Form hat: $s_t A u^{s-t}$; für $t = 0$ ist dies eine geometrische Reihe, und die Summe ist $A \frac{1-u^n}{1-u}$. In jedem andern Falle ist das allgemeine Glied: $\frac{A}{1 \cdot 2 \ldots t} \frac{d^t(u^s)}{du^t}$, also die Summe: $\frac{A}{1 \cdot 2 \ldots t} \frac{d^t}{du^t}\left(\frac{1-u^n}{1-u}\right)$ Bei unendlich vielen Gliedern hat man, wenn der Modul von u kleiner als Eins ist für die Summe bezüglich:

$$\frac{A}{1-u} \text{ und } \frac{A}{1 \cdot 2 \ldots t} \frac{d^t\left(\frac{1}{1-u}\right)}{du^t}.$$

Eine andere Methode zur Ermittelung des allgemeinen Gliedes ist die von La Place herrührende Betrachtung der erzeugenden Function, welche wir hier nur kurz geben wollen.

Man kann das allgemeine Glied a_s nämlich als den Coefficienten der unendlichen Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

betrachten. Setzt man nun:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{p-1} x^{p-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_p x^p},$$

so wird der Ausdruck rechts, den wir mit $f(x)$ bezeichnen, die erzeugende Function der Reihe links genannt, und wenn man den Nenner wegschafft, so erhält man als Coefficient von x^s rechts den Ausdruck:

$$a_s + \alpha_1 a_{s-1} + \alpha_2 a_{s-2} + \ldots + \alpha_p a_{s-p}.$$

Dieser Ausdruck aber ist gleich Null, wenn s grösser als $p-1$ ist. Somit erfüllen die Coefficienten unserer Reihe in der That die Gleichung 2). Ist s kleiner als p, so hat man:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_0\alpha_1 + a_1, \quad b_2 = a_0\alpha_2 + a_1\alpha_1 + a_2 \ldots$$
$$b_{p-1} = a_0\alpha_{p-1} + a_1\alpha_{p-2} + a_2\alpha_{p-3} + \ldots + a_{p-1}.$$

Sind die Grössen $a_0, a_1 \ldots a_{p-1}$ gegeben, so lässt sich also auch $b_0, b_1 \ldots b_{p-1}$ finden. Es ist mithin a_s der Coefficient von x_s in der Entwickelung von $f(x)$, oder wenn man mit $\operatorname{Res} q(x)$ den Coefficienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $q(x)$ bezeichnet:

$$a_s = \operatorname{Res} \frac{f(x)}{x^{s+1}}.$$

Digitized by Google

Um nun das independente Gesetz von $f(x)$ zu finden, braucht man nur die Function $f(x)$ in Partialbrüche zu zerlegen, wo sich dann ergibt:

$$f(x) = \Sigma \frac{A}{\left(1-\frac{x}{q}\right)^n},$$

wo n irgend eine positive ganze Zahl, A und q Constanten sind.

Der Coefficient von x_s in dieser Entwickelung ist: $\Sigma (n+s-1)_s \frac{A}{q^s}$, und dies ist der Werth von a_s. Diese Methode hat den Vortheil, dass sie ohne weitere Unterscheidung der mehrfachen Wurzeln immer zum Ziele führt. Auch ist sie leicht auf doppelte und mehrfache Reihen anzuwenden.

Nach einer Methode, die einem ähnlichen Theorem in der Theorie der linearen Differenzialgleichungen genau entspricht, lässt sich das independente Gesetz einer Reihe, deren Glieder die recurrente Beziehung erfüllen:

8) $$a_s + \alpha_1 a_{s-1} + \alpha_2 a_{s-2} + \ldots + \alpha_p a_{s-p} = q(s),$$

wo $q(s)$ eine beliebige Function des Index s ist, auf die eben behandelte Aufgabe zurückführen. Sind nämlich $u_1^{(s)}, u_2^{(s)} \ldots u_p^{(s)}$ irgend wie gefundene partielle Lösungen der Gleichung 2) so setzen wir:

9) $$a_s = A_1^{(s)} u_1^{(s)} + A_2^{(s)} u_2^{(s)} + \ldots + A_p^{(s)} u_p^{(s)} = \Sigma A_p^{(s)} u_p^{(s)},$$

wo $A_1^{(s)}, A_2^{(s)} \ldots A_p^{(s)}$ zu bestimmende Functionen sind.

Nehmen wir für dieselbe zunächst die $p-1$ Beziehungen an:

10) $$\Sigma A^{(s)}{}_u{}^{(s)} = \Sigma A^{(s+1)}{}_u{}^{(s)} = \Sigma A^{(s-2)}{}_u{}^{(s)} = \Sigma A^{(s+p-1)}{}_u{}^{(s)},$$

so erhalten wir mit Benutzung dieser Gleichungen, wenn wir den Werth von a_s in 8) einsetzen, und berücksichtigen, dass nach der Annahme:

$$a_s u_h^{(s)} + \alpha_1 u_h^{(s-1)} + \alpha_2 u_p^{(s-2)} + \ldots + \alpha_p u_h^{(s-p)} = 0$$

ist:

$$\Sigma A^{(s)}{}_u{}^{(s)} + \alpha_1 \Sigma A^{(s)}{}_u{}^{(s-1)} + \alpha_2 \Sigma A^{(s)}{}_u{}^{(s-2)} + \ldots + \alpha_{p-1} \Sigma A^{(s)}{}_u{}^{(s-p+1)} + \alpha_p \Sigma A^{(s-1)}{}_u{}^{(s-p)} = q(s),$$

wo die Gleichungen 10) angewandt sind, indem man für s nach und nach $s(s-1)$, $(s-2)$ ... gesetzt hat.

Offenbar ist nun:

$$\Sigma A^{(s)}{}_u{}^{(s)} + \alpha_1 \Sigma A^{(s)}{}_u{}^{(s-1)} + \ldots + \alpha_p \Sigma A^{(s)}{}_u{}^{(s-p)} = 0,$$

also wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht:

$$\alpha_p \Sigma (A^{(s-1)} - A^{(s)})\, u^{(s-p)} = q(s)$$

oder:

$$\Sigma [A^{(s)} - A^{(s-1)}]\, u^{(s-p)} = -\frac{\varphi(s)}{\alpha_p},$$

eine Gleichung, die wir mit den folgenden verbinden, die mit 10) gleichbedeutend sind:

Digitized by Google

$$\Sigma[A^{(s)} - A^{(s-1)}]\, u^{(s-1)} = 0$$
$$\Sigma[A^{(s)} - A^{(s-1)}]\, u^{(s-2)} = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\Sigma[A^{(s)} - A^{(s-1)}]\, u^{(s-p+1)} = 0.$$

Die Anzahl der Gleichungen ist p. Sie geben die p Grössen:

$$A_h^{(s)} - A_h^{(s-1)}$$

als Functionen von s derart, dass man hat:

$$A_h^{(s)} - A_h^{(s-1)} = \psi(s)$$

oder:

$$A_h^{(s)} = A_h^{(0)} + \psi_{(1)} + \psi_{(2)} + \ldots + \psi_{(s)}$$

wo $A_h^{(0)}$ eine beliebige Constante ist, welche durch die Anfangsglieder der Reihe bestimmt werden muss.

Offenbar würde diese Methode noch unverändert anwendbar sein, wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ beliebige Functionen von s wären. Ist $\psi(s) = b$ eine Constante, so setzt man:

$$v_1^{(s)} = u_1^{(s)} + c$$
$$v_h^{(s)} = u_h^{(s)},$$

wo $v_h^{(s)}$ eine partielle Lösung sein soll, und h jede Zahl, die grösser als Eins ist. Bleiben dann $A_1, A_2 \ldots A_p$ Constanten, so muss sein:

$$A_1(u_1^{(s)} + c) + A_2 u_2^{(s)} + \ldots + A_p u_p^{(s)} = b$$

und da man hat:

$$A_1(u_1^{(s)} + A_2 u_2^{(s)} + \ldots + A_p u_p^{(s)} = 0,$$

so ist:

$$c = \frac{b}{A_1}$$

eine Gleichung, welche die Constante c gibt.

13) **Recurrente Reihen, worin jedes Glied aus allen Vorhergehenden zusammengetzt ist — Bernoulli'sche Zahlen.**

Ist das allgemeine Glied einer Reihe a_s gegeben durch die recurrente Gleichung:

1) $$\alpha_0 a_s + \alpha_1 a_{s-1} + \alpha_2 a_{s-2} + \ldots + \alpha_s a_0 = \beta_s,$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s, \beta_s$ Constanten sind, so ist die erzeugende Function von der Form:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2}.$$

Setzt man nämlich diesen Ausdruck gleich $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, so erfüllt der Coefficient von $x^{(s)}$ die Gleichung; man kann also setzen:

Digitized by Google

$$a_s = \text{Res}\left(\frac{\varphi(x)}{x^{s+1} f(x)}\right).$$

Ist umgekehrt die erzeugende Function $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ gegeben, so führt die Gleichung, zur Entwickelung derselben.

So hatten wir die Reihen:

1) $$\text{tg}\, x = a_0 x + a_2 x^3 + a_4 x^5 + \ldots$$

2) $$\cot x = \frac{b_0}{x} + b_2 x + b_4 x^3 + b_6 x^5 + \ldots$$

3) $$\sec x = c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \ldots$$

4) $$\text{cosec}\, x = \frac{g_0}{x} + g_2 x + g_4 x^3 + g_6 x^5 + \ldots$$

(in der ersten Reihe sind die Bezeichnungen a_1, a_3, a_5 . . . des Abschnitts 9) mit a_0, a_2, a_4 . . . vertauscht.)

Es ergab sich aber:

5) $$a_{2s} - \frac{a_{2s-2}}{1\cdot 2} + \frac{a_{2s-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^s a_0}{1\cdot 2 \ldots 2s} = \frac{(-1)^s}{1\cdot 2\ldots 2s+1}$$

6) $$b_{2s} - \frac{b_{2s-2}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{b_{2s-4}}{1\cdot 2\ldots 5} - \ldots + \frac{(-1)^s b_0}{1\cdot 2\ldots 2s+1} = \frac{(-1)^s}{1\cdot 2\ldots 2s}$$

7) $$c_{2s} - \frac{c_{2s-2}}{1\cdot 2} + \frac{c_{2s-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^s c_0}{1\cdot 2\ldots 2s} = 0$$

8) $$g_{2s} - \frac{g_{2s-2}}{1\cdot 23} + \frac{g_{2s-4}}{1\cdot 2\ldots 5} - \ldots + \frac{(-1)^s g_0}{1\cdot 2\ldots 2s+1} = 0$$

und $$a_0 = b_0 = c_0 = g_0 = 1.$$

Die Coefficienten dieser vier Reihen lassen sich auf die einer einzigen zurückführen. Man hat:

$$\text{cosec}\, \alpha + \cot \alpha = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{cosec}\, \alpha - \cot \alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \text{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Wenn man nun in dem Ausdruck:

$$\text{cosec}\, \alpha = \cot\frac{\alpha}{2} - \cot\alpha.$$

die Reihenentwickelungen aus 2 und 4 einsetzt, ergibt sich durch Vergleichen der Coefficienten:

$$2^{s-1} g_{2s} = -b_{2s}(2^{2s-1} - 1)$$

und mitttels der Formel:

$$\text{cosec}\, \alpha = \text{tg}\frac{\alpha}{2} + \cot\alpha$$

$$2^{s-1} g_{2s} = a_{2s-2} + 2^{s-1} b_{2s}$$

oder mit Benutzung der vorigen Gleichung:

$$a_{2s-2} = -b_{2s}(2^s - 1)$$

oder:

Digitized by Google

$$a_{2s-2} = 2^{s-1} g_{2s} \frac{2^s - 1}{2^{s-1} - 1}.$$

Um die Coefficienten der dritten Reihe zu entwickeln bedienen wir uns der Gleichung:

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin 2\alpha}$$

oder:

$$\sec \alpha = 2 \sin \alpha \operatorname{cosec} 2\alpha$$

und indem wir für $\sec \alpha$, $\sin \alpha$ und $\operatorname{cosec} 2\alpha$ die Werthe einsetzen:

$$c_0 + c_2 \alpha^2 + c_4 \alpha^4 + \ldots = 2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\alpha^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots \right) \left(\frac{g_0}{2\alpha} + g_2 \cdot 2\alpha + g_4 \cdot 8\alpha^3 + g_6 \cdot 32\alpha^5 + \ldots \right)$$

und durch Vergleichung der Coefficienten ergibt sich:

$$c_{2s} = g_{2s} 2^{2s} - \frac{g_{2s-2} 2^{2s-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{g_{2s-4} 2^{2s-4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots + \frac{(-1)^{s-1} g_2 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s-1} + \frac{(-1)^s g_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s+1};$$

es lassen sich also die Coefficienten a, b, c leicht durch die Coefficienten g bestimmen. Wir wollen dieselben jedoch noch auf andere recurrente Ausdrücke zurückführen, indem wir setzen:

9) $$\cot \frac{\alpha}{2} = -\frac{2B_0}{\alpha} - \frac{2B_2 \alpha}{1 \cdot 2} - \frac{2B_4 \alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots$$

Da die Gleichung 2) gibt:

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{2b_0}{\alpha} + \frac{b_2 \alpha}{2} + \frac{b_4 \alpha^3}{2^3} + \ldots$$

so ist:

$$B_0 = 1 \text{ und } B_{2s} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s\, b_{2s}}{2^{2s}}.$$

Die Zahlen B_0, B_2, B_4 . . . heissen die Bernoulli'schen Zahlen. Sollen die Coefficienten unserer vier Reihen durch dieselben ausgedrückt werden, so erhalten wir:

10) $$b_{2s} = -\frac{2^{2s} B_{2s}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s}$$

11) $$a_{2s} = \frac{(2^{s+1} - 1) 2^{2s+1} B_{2s+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2s+2)}$$

12) $$g_{2s} = \frac{2(2^{s-1} - 1) B_{2s}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s}$$

und endlich:

$$c_{2s} = \frac{2^{2s+1}(2^{s-1} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s} B_{2s} - \frac{2^{2s-1}(2^{s-2} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s-2} B_{2s-2} + \frac{2^{2s-3}(2^{s-3} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 2s-4} B_{2s-4} - \ldots + \frac{(-1)^{s-1} 2^s \cdot (2^s - 1) B_s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s-1 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{(-1)^s B_0 2(2^{-1} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s-4}$$

Digitized by Google

oder, was dasselbe ist:

$$13)\ c_{2s} = \frac{2^{2s+1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s+1}\left((2s+1)(2^{s-1}-1)B_{2s} - (2s+1)_2\frac{2^{s-2}-1}{2^2}B_{2s-2}\right.$$
$$+ (2s+1)_3\frac{2^{s-3}-1}{2^4}B_{2s-4} - \ldots + (-1)^{s-1}(2s+1)_{2s-1}\frac{(2^0-1)B_2}{2^{2s-2}}$$
$$\left. + (-1)^s\frac{(2^{-1}-1)}{2^{2s}}\right),$$

wo $(2s+1)_1$, $(2s+1)_2$ ... die Binomialcoefficienten sind.

Das recurrente Gesetz für die Bernoullischen Zahlen nimmt mit dem für die Coefficienten b verglichen die Gestalt an:

$$\frac{2^{2s}B_{2s}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s} - \frac{2^{2s-2}B_{2s-2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s-2} + \frac{2^{2s-4}B_{2s-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s-4}$$
$$- \ldots + \frac{(-1)^s B_0}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s+1} = \frac{(-1)^{s+1}}{1\cdot 2\ldots 2s},$$

wofür man auch setzen kann:

$$(2s+1)2^{2s}B_{2s} - (2s+1)_2 2^{2s-2}B_{2s-2} + (2s+1)_3 2^{2s-4}B_{2s-4}$$
$$- \ldots + (-1)^s B_0 = (-1)^{s+1}(2s+1).$$

Dasselbe Gesetz erhält aber ein einfachere Form, wenn man den Ausdruck $\cot\frac{\alpha}{2}$ direct ermittelt. Es ist derselbe:

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

und man hat die Beziehung:

$$\frac{1+\cos\alpha}{2} = -\sin\alpha\left(\frac{B_0}{\alpha} + \frac{B_2\alpha}{1\cdot 2} + \frac{B_4\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\right),$$

also wenn man für $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ die entsprechenden Entwickelungen setzt, und die Coefficienten vergleicht:

$$\frac{B_{2s}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s} - \frac{B_{2s-2}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s-2} + \frac{B_{2s-4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s-4} - \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{(-1)^s B_0}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s+1} = \frac{(-1)^{s+1}}{2\cdot 1\cdot 2\ldots 2s},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$14)\ B_{2s} - \tfrac{1}{2}(2s)_2 B_{2s-2} + \tfrac{1}{3}(2s)_4 B_{2s-4} - \ldots + (-1)^s\frac{1}{2s+1}B_0 = \tfrac{1}{2}(-1)^{s+1}.$$

Unsere Aufgabe reducirt sich jetzt darauf, ein independentes Gesetz für die Bernoullischen Zahlen zu ermitteln. Wie in dem Artikel Quantitäten (imaginäre) dargethan wird, lässt sich die Cotangente eines beliebigen Winkels in eine Reihe nach Partialbrüchen zerlegen, welche immer convergirt, und zwar hat man:

$$\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\alpha} - 4\alpha\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{4m^2\pi^2-\alpha^2}.$$

Ist α kleiner als 2π, so kann man setzen:

Digitized by Google

$$\frac{1}{4m^4\pi^4-\alpha^2}=\frac{1}{4m^2\pi^2}\left(1+\frac{\alpha^2}{(2m\pi)^2}+\frac{\alpha^4}{(2m\pi)^4}+\frac{\alpha^6}{(2m\pi)^6}+\ldots\right),$$

also:

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\alpha}-4\alpha(k_0+k_1\alpha^2+k_2\alpha^4+\ldots),$$

wo zu setzen ist:

$$k_s=\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{(2m\pi)^{2s+2}}.$$

Man hat aber $\frac{B_{2s}}{1\cdot2\cdot3\ldots2s}=2k_{s-1}$ und somit:

15) $$\frac{B_{2s}}{1\cdot2\cdot3\ldots2s}=\frac{1}{2^{2s-1}\pi^{2s}}\left(1+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{4^{2s}}+\ldots\right)$$

Die Reihe rechts convergirt immer, und um so mehr, je grösser s ist. Umgekehrt kann dies Verfahren auch dienen, die Reihe

$$1+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{3^{2s}}+\ldots$$

zu berechnen, da die Bernoullischen Zahlen bekannt sind.

Aus der Formel 14) erhält man:

$$B_0=-1,\quad B_2=\tfrac{1}{6},\quad B_4=\tfrac{1}{30},\quad B_6=\tfrac{1}{42},\quad B_8=\tfrac{1}{30},\quad B_{10}=\tfrac{5}{66},$$
$$B_{12}=\tfrac{691}{2730},\quad B_{14}=\tfrac{7}{6}\ldots$$

Diese Zahlen nehmen allerdings zuerst ab, aber von B_6 an nehmen sie bis ins Unendliche zu.

Aus der Formel 15) ergibt sich:

$$1+\frac{1}{2^{2s}}+\frac{1}{3^{2s}}+\frac{1}{4^{2s}}+\ldots=\frac{\pi^{2s}2^{2s-1}B_{2s}}{1\cdot2\cdot3\ldots2s}$$

also, z. B.:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$
$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots=\frac{2^3\pi^4}{30\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\ldots=\frac{2^5\pi^6}{42\cdot1\cdot2\ldots6}$$

Wir hatten in Abschnitt 10) gefunden:

$$\frac{1}{x^s}+\frac{1}{(x+\alpha)^s}+\frac{1}{(x+2\alpha)^s}+\ldots=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{e^{x\vartheta}\vartheta^{s-1}d\vartheta}{1-e^{-\alpha\vartheta}}$$

also, wenn $x=\alpha=1$ war:

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{e^{\vartheta}\vartheta^{s-1}d\vartheta}{1-e^{-\vartheta}}$$

wo s grösser als Eins sein musste. Vergleichen wir die Integrale mit dem eben Gefundenen, indem wir $\Gamma(2s)=1\cdot2\ldots(2s-1)$ setzen, so ergibt sich:

16) $$\int_0^\infty\frac{e^{\vartheta}\vartheta^{2s-1}}{1-e^{-\vartheta}}d\vartheta=\frac{\pi^{2s}2^{2s-2}B_{2s}}{s}.$$

Digitized by Google

Diese Formel lehrt also auch, die Bernoullischen Zahlen durch ein bestimmtes Integral auszudrücken.

Der hier gegebene in Formel 15) enthaltene independente Ausdruck für die Bernoullischen Zahlen hat den Nachtheil, dieselben trotz dem, dass sie rational sind, in transcendenter Form zu geben.

Wir entwickeln hier nach Serret einen zweiten Ausdruck der nicht mit diesem Nachtheile behaftet ist.

Die Bernoullischen Zahlen sind definirt durch die Formel:

$$\cot\frac{\alpha}{2} = -\frac{2B_0}{\alpha} - \frac{2B_2\alpha}{1\cdot 2} - \frac{2B_4\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots;$$

setzen wir nun für $\cot\frac{\alpha}{2}$ seinen Werth:

$$\frac{e^{\frac{\alpha}{2}i} + e^{-\frac{\alpha}{2}i}}{e^{\frac{\alpha}{2}i} - e^{-\frac{\alpha}{2}i}}\, i = \frac{e^{\alpha i}+1}{e^{\alpha i}-1}\, i = \left(1 + \frac{2}{e^{\alpha i}-1}\right) i$$

und $\alpha i = x$, so kommt:

$$\frac{1}{e^x-1} = -\frac{1}{2} - \frac{B_0}{x} + \frac{B_2 x}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{B_4 x^3}{1\cdot 2\ldots 5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n}x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}.$$

Man hat aber identisch:

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1}$$

und indem man beide Glieder rechts in Reihen ausdrückt, erhält man:

$$17)\quad \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2} - \frac{(2^2-1)B_2 x}{1\cdot 2} + \frac{(2^4-1)B_4 x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + (-1)^n(2^{2n}-1)\frac{B_{2n}x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n},$$

eine Reihe, die nach den allgemeinen Regeln über Potenzreihen so lange convergirt, als der Modul von x kleiner als π ist.

Vergleicht man nun die Coefficienten der Potenzen von x mit denen, welche die directe Anwendung der Maclaurinschen Reihe ergibt, so erhält man:

$$(-1)^n\frac{2^{2n}-1}{2n}B_{2n} = \frac{d^{2n-1}\frac{1}{e^\alpha+1}}{d\alpha^{2n-1}} \quad (\text{für } \alpha = 0).$$

Nun zeigt sich leicht, dass der Ausdruck rechts die Form hat.

$$\frac{d^{2n-1}\frac{1}{e^x-1}}{dx^{2n-1}} = \frac{A_1 e^{(2n-1)x} + A_2 e^{(2n-2)x} + \ldots + A_{2n-1}e^x}{(e^x+1)^{2n}}$$

$A_1, A_2 \ldots A_{2n-1}$ sind zu bestimmende Coefficienten. Da nun $\frac{1}{e^x+1}$ sich nach Gleichung 17) als ungrade Function, folglich der $2n-1$te Differenzialquotient als grade Function von x ergibt, so bleibt dieser Ausdruck unverändert, wenn man x mit $-x$ vertauscht. Durch diese Vertauschung aber wird der Ausdruck rechts:

Digitized by Google

$$\frac{A_{2n-1}e^{(2n-1)x}+A_{2n-2}e^{(2n-2)x}+\ldots+A_1e^x}{(e^x+1)^{2n}},$$

so dass man hat:

$$A_{2n-p}=A_p$$

und somit:

$$\frac{d^{2n-1}\frac{1}{e^x+1}}{dx^{2n-1}}=\frac{A_1(e^{(2n-1)}+e^x)+\ldots+A_{n-1}(e^{(n+1)x}+e^{(n-1)x})+A_ne^{nx}}{(e^x+1)^{2n}}.$$

Ausserdem aber ist:

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=e^{-x}-e^{-2x}+e^{-3x}-\ldots+(-1)^{\mu-1}e^{\mu x}+\ldots$$

also:

$$\frac{d^{2n-1}\frac{1}{e^x+1}}{dx^{2n-1}}=(-1)^{2n-1}e^{-x}+2^{2n-1}e^{-2x}-3^{2n-1}e^{-3x}+\ldots$$
$$+(-1)^{\mu}\mu^{2n-1}e^{-\mu x}+\ldots$$

Entwickeln wir $(e^x+1)^{2n}$ nach der binomischen Reihe, so ergibt sich durch Vergleich dieses und des so eben gefundenen Ausdruckes die Gleichung:

$$A_1(e^{(2n-1)x}+e^x)+\ldots+A_{n-1}(e^{(n+1)x}+e^{(n-1)x})+A_ne^{nx}$$
$$=[(-1)^{2n-1}e^{-x}+2^{2n-1}e^{-2x}-\ldots(-1)^{\mu}\mu^{2n-1}e^{-\mu x}+\ldots]$$
$$[e^{2nx}+(2n)_1e^{(2n-1)x}+(2n)_2e^{2n-2x}+\ldots+2ne^x+1].$$

Die rechte Seite darf so wie die linke also nur positive Potenzen von e^x enthalten. Durch Vergleichung der Coefficienten ergibt sich:

$$A_p=(-1)^p[p^{2n-1}-2n(p-1)^{2n-1}+\ldots+(-1)^s(2n)_s(p-s)^{2n-1}$$
$$+\ldots+(-1)^{p-1}(2n)p].$$

Wenn in dem Ausdrucke für den $(2n-1)$ten Differenzialquotienten von $\frac{1}{e^x+1}$ jetzt $x=0$ gesetzt wird, so ergibt sich:

$$(-1)^n\frac{2^{2n}-1}{2n}B_{2n}=\frac{1}{2^{2n-1}}(A_1+A_2+\ldots+A_{2n-1}+\tfrac{1}{2}A_n),$$

woraus dann folgt:

$$\frac{(-1)^n2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n}=-1^{2n-1}+(2^{2n-1}-2n)$$
$$-(3^{2n-1}-2n\cdot2^{2n}+(2n)_2)+\ldots+(-1)^{n-1}[(n-1)^{2n-1}$$
$$-2n(n-2)^{2n-1}+\ldots+(-1)^{n-2}(2n)_{n-2}]+\tfrac{1}{2}(-1)^n[n^{2n-1}$$
$$-2n(n-1)^{2n-1}+\ldots+(-1)^{n-2}(2n)_{n-1}],$$

Digitized by Google

oder wenn man die mit n^{2n-1}, $(n-1)^{2n-1}$ . . . behafteten Glieder vereinigt:

18) $$\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{2n} = \tfrac{1}{2}n^{2n-1} - (1+\tfrac{1}{2}\cdot n)(n-1)^{2n} + (1+2n+\tfrac{1}{2}(2n)_2)(n-2)^{2n-1} - (1+2n+(2n)_2 + \tfrac{1}{2}(2n)_2)(n-3)^{2n-1} + \ldots$$

Das Gesetz dieser Reihe ist völlig ersichtlich.

14) Weitere Anwendungen der Bernoulli'schen Zahlen.

A. Ausdruck für die Summen der Reihen ganzer Potenzen.

In der Theorie der arithmetischen Reihe war bereits ein Ausdruck für:

1) $$\varphi(n,p) = x^p + (x+\alpha)^p + (x+2\alpha)^p + \ldots + [x+(n-1)\alpha]^p$$

von uns abgeleitet worden. Indess gibt es noch eine andere wichtige Summenformel, die nach ganzen positiven Potenzen geordnet ist. Um diese zu finden, definiren wir den Ausdruck $\varphi(n,p)$ durch die recurrente Gleichung:

2) $$\varphi(n,p) - \varphi[(n-1)p] = [x+(n-1)\alpha]^p,$$

welche zu verbinden ist mit

3) $$\varphi(0,p) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen geben für jedes positive ganze n offenbar die obige Summe wieder, sie definiren aber auch die Function $\varphi(n,p)$ für negatives ganzes n denn man hat:

$$\varphi(0,p) - \varphi(-1,p) = (x-\alpha)^p,$$
$$\varphi(-1,p) - \varphi(-2,p) = (x-2\alpha)^p$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\varphi[-(n-1),p] - \varphi(-n,p) = (x-n\alpha)^p,$$

also durch Addition mit Berücksichtigung der Gleichung 5):

4) $$\varphi(-n,p) = -(x-\alpha)^p - (x-2\alpha)^p - \ldots - (x-n\alpha)^p,$$

oder, wenn $x=0$, p grade ist:

5) $$\varphi(-n,p) = -\varphi(n+1,p) + \varphi(1,p).$$

Es ist nun offenbar:

$$(x+s\alpha)^p - [x+(s-1)\alpha]^p = p\alpha[x+(s-1)\alpha]^{p-1} + p_2\alpha^2[x+(s-1)\alpha]^{p-2} + \ldots + \alpha^p$$

wo p_1, p_2 . . . wieder die Binomialcoeficienten sein sollen.

Setzt man hier für s alle Werthe von 1 bis n und addirt die so gebildeten Gleichungen, so erhält man:

6) $$(x+n\alpha)^p - x^p = p\alpha\varphi(n,p-1) + p_2\alpha^2\varphi(n,p-2) + \ldots + p\alpha^{p-1}\varphi(n,1) + \alpha^p\varphi(n,0),$$

woraus sich dann die Entwickelungen ergeben:

$$\varphi(n,0) = \frac{y-x}{\alpha}$$
$$\varphi(n,1) = \frac{y^2-x^2}{2\alpha} - \tfrac{1}{2}(y-x)$$
$$\varphi(n,2) = \frac{y^3-x^3}{3\alpha} - \tfrac{1}{2}(y^2-x^2) + \frac{\alpha}{4^2}(y-x)$$

Digitized by Google

$$\varphi(n,3) = \frac{y^4 - x^4}{4\alpha} - \tfrac{1}{2}(y^3 - x^3) + \frac{\alpha}{4}(y^2 - x^2)$$

$$\varphi(n,4) = \frac{x^5 - x^5}{5\alpha} - \tfrac{1}{2}(y^4 - x^4) + \frac{\alpha}{3}(y^3 - x^3) - \frac{\alpha^2}{30}(y - x),$$

wo nach einander $p = 0, 1, 2 \ldots$ gesetzt ist, y aber $= x + n\alpha$.

Allgemein erhält man so aus Formel 6) auf recurrentem Wege den entsprechenden Ausdruck für jedes p. Um dies Gesetz zu bestimmen, bemerken wir, dass die obigen Entwickelungen jedenfalls geben:

$$7)\quad \varphi(n,p) = \frac{A^{(p)}}{\alpha}(y^{p+1} + x^{p+1}) + A_1^{(p)}(y^p - x^p) + A_2^{(p)}\alpha(y^{p-1} - x^{p-1}) + A_3^{(p)}\alpha^2(y^{p-2} - x^{p-2}) + \ldots + A_p^{(p)}\alpha^{p-1}(y - x),$$

wo also die Coefficienten A weder α noch n noch x enthalten, also Functionen von p allein sind. Das Gesetz dieser Abhängigkeit aber ist leicht zu ermitteln. Gleichung 1) gibt, wenn man noch differenziirt:

$$\varphi'(n,p) = p\,\varphi(n,p-1),$$

also, wenn man auch Gleichung 7) differenziirt:

$$p\,\varphi(n,p-1) = \frac{(p+1)A^{(p)}}{\alpha}(y^p - x^p) + pA_1^{(p)}(y^{p-1} - x^{p-1}) + (p-1)A_2^{(p)}\alpha(y^{p-2} - x^{p-2}) + \ldots + 2A_{p-1}^{(p)}\alpha^{p-2}(y - x)$$

und wenn man in 7) p mit $p-1$ vertauscht, und den so gefundenen entsprechenden Coefficienten des allgemeinen Gliedes $y^{p-s} - x^{p-s}$ mit dem hier gegebenen identificirt:

$$8)\quad (p - s + 1)A_s^{(p)} = pA_s^{(p-1)}$$

Setzt man hier wieder $p-1$ für p, macht in der so entstehenden Gleichung dieselbe Substitution, u. s. f. so kommt:

$$(p-s)A_s^{(p-1)} = (p-1)A_s^{(p-2)}$$

$$(p-1-s)A_s^{(p-2)} = (p-2)A_s^{p-3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$2A_s^{(s+1)} = (s+1)A_s^{(s)},$$

p kann selbstverständlich nicht kleiner als s sein. Diese Gleichungen multiplicirt man mit einander erst alle, dann alle mit Ausschluss der ersten, dann alle mit Ausschluss der zweiersten und so fort; es kommt:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (p-s+1)}{s \cdot (s+1)(s+2) \ldots p} A_s^{(p)} = \frac{A_s^{(s)}}{s}$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (p-s)}{s(s+1) \ldots (p-1)} A_s^{(p-1)} = \frac{A_s^{(s)}}{s}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Digitized by Google

oder da man hat:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(p-s+1)}{s(s+1)(s+2)\ldots p}=p_{p-s+1}$$

und da $p_{p-s+1}=p_{s-1}$ ist:

$$\frac{A_s^{(p)}}{p_{s-1}}=\frac{A_s^{(p-1)}}{(p-1)_{s-1}}=\frac{A_s^{(p-2)}}{(p-2)_{s-1}}=\ldots=\frac{A_s^{(s)}}{s_{s-1}}.$$

Diese Ausdrücke sind somit vom obern Index p ganz unabhängig; setzt man also:

9) $$\frac{A_s^{(p)}}{p_{s-1}}=\frac{b_s}{s}$$

so stellen die Grössen b_s lediglich Constanten vor, und es ist b_s mit $A_s^{(s)}$ identisch.

Was die Grössen $A_0^{(p)}$ und $A_1^{(p)}$ betrifft, so entziehen dieselben sich dieser Betrachtung. Die Gleichung 8) gibt aber direct für $s=0$:

$$(p+1)A^{(p)}=pA^{(p-1)}=(p-1)A^{(p-2)}=\ldots A^{(0)}$$

und da für $p=0$ der Coefficient der ersten Glieder Eins ist, so hat man:

$$A^{(p)}=\frac{1}{p+1}.$$

Ebenso gibt Gleichung 8) für $s=1$:

$$A_1^{(p)}=A_1^{(p-1)}=A_1^{(p-2)}=\ldots=A_1^{(1)}.$$

Es war aber für $p=2$ der Coefficient des ersten Gliedes: $-\frac{1}{2}$, also $A_1^{(p)}=-\frac{1}{2}$ Die Gleichung 7) nimmt nun die einfache Gestalt an:

10) $$\varphi(n,p)=\frac{1}{(p+1)\alpha}(y^{p+1}-x^{p+1})-\tfrac{1}{2}(y^p-x^p)+\frac{p}{2}\alpha b_2(y^{p-1}-x^{p-1})$$
$$+\frac{p_2}{3}\alpha^2 b_3(y^{p-2}-x^{p-2})+\ldots+\frac{p_{p-1}}{p}\alpha^{p-1}b_p(y-x).$$

Dieser Ausdruck ist aber noch einer Vereinfachung zu unterziehen. Zu dem Ende wollen wir $x=0$ setzen; es ist dann offenbar $\varphi(1,p)=0$, und wegen Gleichung 5) für grades p:

$$\varphi(-n,p)=-\varphi(n+1,p).$$

Ist noch $n=1$, so hat man

$$\varphi(-1,p)=-\varphi(2,p).$$

Setzen wir jetzt in Gleichung 10) zuerst $n=1$ und dann $n=-1$, so ergibt sich:

A) $$0=\frac{1}{p+1}-\tfrac{1}{2}+\frac{p}{2}b_2+\frac{p_2}{3}b_3+\ldots+\frac{p_{p-1}}{p}b_p$$

B) $$(-1)^{p-1}=-\frac{1}{p+1}-\tfrac{1}{2}+\frac{p}{2}b_2+\frac{p_2}{3}b_3-\ldots+(-1)^{p-1}\frac{p_{p-1}b_p}{p}.$$

Also durch Addition, indem wir uns p grade denken:

$$-1=-1+\frac{2p_2}{3}b_3+\frac{2p_4}{5}b_5+\ldots+\frac{2p_{p-2}}{p-1}b_{p-1}.$$

Für $p=2$ ergibt sich hieraus:

Digitized by Google

$$-1 = -1 + \tfrac{2}{3} b_2, \text{ also } b_2 = 0,$$

für $p = 4$, also

$$-1 = -1 + \tfrac{2}{3} b_2, \text{ also } b_2 = 0, \text{ u. s. f.}$$

Es sind also alle b mit ungraden Indices der Null gleich, und man hat, indem wir noch setzen:

$$b_{2s} = (-1)^{s+1} B_{2s}$$

$$11)\quad q(n,p) = \frac{1}{(p+1)\alpha}(y^{p+1} - x^{p+1}) - \tfrac{1}{2}(y^p - x^p) + \frac{p}{2}\alpha B_2 (y^{p-1} - x^{p-1})$$
$$- \frac{p_3}{4}\alpha^3 B_4 (y^{p-3} - x^{p-3}) + \ldots$$

Die Reihe bricht offenbar von selbst ab. Um das Gesetz der Coefficienten zu bestimmen, können wir setzen:

$$x = 0, \quad \alpha = 1$$

und erhalten:

$$12)\quad 1^p + 2^p + \ldots + (n-1)^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \tfrac{1}{2} n^p + \frac{p}{2} B_2 n^{p-1}$$
$$- \frac{p_3}{4} B_4 n^{p-3} + \frac{p_5}{6} B_6 n^{p-5} - \ldots;$$

es reicht aber ein Werth von n schon völlig zur Bestimmung aus. Setzen wir daher: $n = 1$, so kommt:

$$13)\qquad 1 = \frac{1}{p+1} - \tfrac{1}{2} + \frac{p}{2} B_2 - \frac{p_3}{4} B_4 + \ldots + (-1)^{p+1} \frac{p_{p-1}}{p} B_p,$$

wo p grade ist. Für ungrades p hat man:

$$14)\qquad 1 = \frac{1}{p+1} - \tfrac{1}{2} + \frac{p}{2} B_2 - \frac{B}{4} B_4 + \ldots + (-1)^p \frac{p_{p-2}}{p-1} B_p.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Formel 13) mit Formel 14) des vorigen Abschnittes übereinstimmt, da

$$\frac{p_s}{s+1} = \frac{p_{s+1}}{p-s}$$

ist. Macht man diese Aenderung, so hat man in der That die erwähnte Formel. Ausserdem aber gibt Formel 12) unendlich viel recurrente Beziehungen für die Bernoullischen Zahlen, welche alle dieselben definiren. Der Ausdruck 11) gibt dann die verlangte Summenformel

B. Allgemeine Summenformel.

Der folgende Ausdruck enthält eine allgemeine Summenformel, deren Anwendung jedoch gewissen Beschränkungen unterliegt.

Wir setzen:

$$\Sigma f(x) = f(x) + f(x+\alpha) + f(x+2\alpha) + \ldots + f[x+(n-1)\alpha],$$

wo f eine beliebige Function vorstellen soll. Nun ist nach dem Taylorschen Satze:

$$f(x+\alpha) - f(x) = \alpha f'(x) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots,$$

also, wenn man für x nach einander x, $x+\alpha$, $x+2\alpha \ldots x+(n-1)\alpha$ setzt:

$$f(x+n\alpha) - f(x) = \alpha \Sigma f'(x) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \Sigma f''(x) + \ldots;$$

setzt man:

$$f'(x) = q(x),$$

Digitized by Google

so kommt:

$$\int_x^{x+n\alpha} \varphi(x)\,dx = \alpha\Sigma\varphi(x) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\Sigma\varphi'(x) + \ldots$$

oder:

$$\Sigma\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+n\alpha} \varphi(x)dx - \frac{\alpha}{1\cdot 2}\Sigma\varphi'(x) + \ldots$$

also, wenn man nach und nach φ mit φ', φ'' ... vertauscht:

$$\Sigma\varphi'(x) = \frac{1}{\alpha}[\varphi(x+n\alpha) - \varphi(x)] - \frac{\alpha}{1\cdot 2}\Sigma\varphi''(x) - \ldots$$

$$\Sigma\varphi''(x) = \frac{1}{\alpha}[\varphi'(x+n\alpha) - \varphi'(x)] - \frac{\alpha}{1\cdot 2}\varphi'''(\alpha) - \ldots$$

. . . .
. . . .
. . . .

Wenn man $\Sigma\varphi'(x)$, $\Sigma\varphi''(x)$ hieraus eliminirt, so erhält die Eliminationsgleichung die Form:

$$15)\quad \Sigma\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+n\alpha} \varphi(x)dx + A_0[\varphi(x+n\alpha) + \varphi(x)] + A_1\alpha[\varphi'(x+n\alpha) - \varphi'(x)] + A_2\alpha^2[\varphi''(x+n\alpha) - \varphi''(x)] + \ldots$$

und die Coefficienten A_0, A_1, A_2 ... ergeben sich:

$$A_0 + \frac{1}{1\cdot 2} = 0,\quad A_1 + \frac{A_0}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = 0,$$

$$A_2 + \frac{A_1}{1\cdot 2} + \frac{A_0}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0 \ldots,$$

oder wenn man setzt:

$$b_{s+1} = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (s+2)A_s$$

so erhält man:

$$b_{s+1} + \frac{(s+2)}{2}b_s + \frac{(s+2)_2}{3}b_{s-1} + \frac{(s+2)_3}{42}b_{s-2} + \ldots + (s+2)b_1 + 1 = 0;$$

für $s = 0$ ergibt sich $b_1 = -\frac{1}{2}$, also:

$$\frac{1}{s+2} - \tfrac{1}{2} + b_2\frac{(s+1)}{2} + b_3\frac{(s+1)_2}{3} + \ldots = 0,$$

eine Gleichung, die der mit A bezeichneten in diesem Abschnitte identisch ist, und aus der sich also die nämlichen Schlüsse ziehen lassen, da diese Gleichung zur Bestimmung der b ausreicht. Es sind also wie dort die b mit ungraden Indices der Null gleich, und die mit graden Indices und abwechselnd negativen Vorzeichen die Bernoullischen Zahlen. Man hat also:

$$16)\quad \Sigma\varphi(x) = \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+n\alpha} \varphi(x)dx - \tfrac{1}{2}(\varphi(x+n\alpha) - \varphi(x)) + \frac{B_2}{1\cdot 2}\alpha(\varphi'(x+n\alpha) - \varphi'(x)) \mp \frac{{}^1B_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\alpha^2(\varphi'''(x+n\alpha) - \varphi'''(x)) + \ldots$$

Diese Formel heisst die Euler'sche. Ihrer Anwendbarkeit steht aber so lange ein Bedenken entgegen, als man den Rest der Reihe rechts nicht bestimmt, da die Convergenz dieser Reihe durchaus nicht allgemein stattfindet, und im Uebrigen auch, wie wir sehen werden, die Anwendbarkeit der Formel selbst im Falle der Divergenz nicht völlig ausgeschlossen ist. Wir bedienen uns somit zur Bestimmung des Restes einer von Poisson herrührenden Methode. Es ist: (siehe die Theorie der Fourrier'schen Reihen im Artikel: imaginäre Quantität.)

Digitized by Google

C) $$f(x)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(\lambda)\,d\lambda+\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(\lambda)\left(\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos\frac{s\pi}{a}(x-\lambda)\right)d\lambda$$

für alle reellen Werthe von x zwischen a und $-a$. An den Grenzen selbst aber ist:

D) $$\tfrac{1}{2}(f(a)+f(-a))=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(\lambda)\,d\lambda+\frac{1}{a}\int_{-a}^{+a} f(\lambda)\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos\frac{s\pi(\lambda\mp a)}{a}\,d\lambda.$$

Sei nun $a=n\alpha$, und setzt man für x nach und nach die Werthe:

$$-(n-1)\alpha,\quad -(n-2)\alpha\ \ldots,\ -\alpha,\ 0,\ \alpha,\ 2\alpha\ \ldots\ (n-1)\alpha \text{ in } C$$

ein, addirt die entstehenden Gleichungen zu $\frac{1}{2}(f(n\alpha)+(-n\alpha))$ so kommt:

E) $$\alpha\left(\sum_{s=-n}^{s=+(n-1)} f(s\alpha)+\tfrac{1}{2}f(n\alpha)-\tfrac{1}{2}f(-n\alpha)\right)=\frac{\alpha}{2}(f(n\alpha)+f(-n\alpha))$$
$$+\frac{2n-1}{2n}\int_{-n\alpha}^{+n\alpha} f(\lambda)\,d\lambda+\frac{1}{n}\int_{-n\alpha}^{n\alpha}\sum_{s=1}^{s=\infty}\left(P\cos\frac{s\pi\lambda}{n\alpha}\right)f(\lambda)\,d\lambda,$$

wo gesetzt ist:

$$P=1+2\cos\frac{s\pi}{n}+2\cos\frac{2s\pi}{n}+\ldots+2\cos\frac{(-1)s\pi}{n}.$$

Ist s ein Vielfaches von $2n$, so wird $P=2n-1$. Ausserdem aber ist:

$$P\cos\frac{s\pi}{n}=P+\cos\pi-\cos\frac{(n-1)s\pi}{n},$$

woraus sich ergibt:

$$P=-\cos s\pi,$$

wenn s kein Vielfaches von 2π ist.

Es ist nun

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} P\cos\frac{s\pi\lambda}{n\alpha}=-\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos s\pi\cos\frac{s\pi\lambda}{n\alpha}+2n\sum_{s'=1}^{s'=\infty}\cos\frac{2s'\pi\lambda}{n\alpha}.$$

Die erste Summe rechts gibt nämlich den Werth, welcher gelten würde, wenn der zuletzt für P gefundene Werth ausnahmsweise stattfände. Es ist also für die Werthe von $s=2s'n$ der entsprechende Theil des Summenausdruckes wieder abzuziehen, und der hinzuzuzählen, welcher $O=2n-1$ entspricht, beide letzteren Theile aber sind in der zweiten Summe enthalten. Wegen der Gleichung:

$$\cos s\pi\cos\frac{s\pi\lambda}{n\alpha}=\cos s\pi\frac{n\alpha-\lambda}{n\alpha},$$

ist nun:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} P\cos\frac{s\pi\lambda}{n\alpha}=-\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos s\pi\frac{n\alpha-\lambda}{n\alpha}+2n\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{2s'n\lambda}{n\alpha}$$

und somit gibt unsere Gleichung E):

$$\alpha\left(\sum_{s=-n}^{s=+(n-1)} f(s\alpha)+\tfrac{1}{2}f(n\alpha)-\tfrac{1}{2}f(-n\alpha)\right)=\frac{\alpha}{2}(f(n\alpha)+f(-n\alpha))$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\int_{-n\alpha}^{+n\alpha} f(\lambda)\,d\lambda-\frac{1}{n}\int_{-n\alpha}^{+n\alpha}\left(\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos s\pi\frac{n\alpha-\lambda}{n\alpha}\right)f(\lambda)\,d\lambda$$
$$+2\int_{-n\alpha}^{+n\alpha}\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos\frac{2s\pi\lambda}{\alpha}f(\lambda)\,d\lambda.$$

Mittels der Gleichung C) ergibt sich hieraus:

Digitized by Google

$$\alpha\left(\sum_{s=-n}^{s=+(n-1)} f(s\alpha)+\tfrac{1}{2}f(n\alpha)-\tfrac{1}{2}f(-n\alpha)\right)=\int_{-n\alpha}^{+n\alpha} f(\lambda)\,d\lambda + 2\int_{-n\alpha}^{+n\alpha}\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos\frac{2s\pi\lambda}{\alpha}\,f(\lambda)\,d\lambda.$$

Wir setzen jetzt:

$$f(\lambda)=\varphi(x+\lambda+n\alpha),\quad 2n=n',\quad x+n'\alpha=y$$
$$\Sigma\varphi(x)=\varphi(x)+\varphi(x+\alpha)+\varphi(x+2\alpha)+\ldots+\varphi[x+(2n-1)\alpha],$$

so kommt:

F) $$\alpha\left[\Sigma\varphi(x)+\tfrac{1}{2}\varphi(y)-\tfrac{1}{2}\varphi(x)\right]=\int_x^y\varphi(\lambda)\,d\lambda + 2\int_x^y\sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\cos\frac{2s\pi(\lambda-x)}{\alpha}\right)\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Diese Gleichung ist für den Fall entwickelt, dass $y=x+2n\alpha$ ist. Sie gilt aber noch, wenn $y=x+(2n-1)\alpha$ ist. Denn setzt man $y=x+(2n-1)\alpha$ statt x in dieselbe ein, so ergibt sich:

$$\alpha\left[\varphi(y')+\tfrac{1}{2}\varphi(y)-\tfrac{1}{2}\varphi(y')\right]=\int_{y'}^{y}\varphi(\lambda)\,d\lambda+2\int_{y'}^{y}\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos\frac{2s\pi(\lambda-x)}{\alpha}\,\varphi(\lambda)\,d\lambda$$

und zieht man diese Gleichung von der obigen ab, so bleibt die Form die der Gleichung F), nur dass $y'=y$ erscheint, so dass dieselbe gilt, es mag y um ein grades oder ungrades Vielfaches der Differenz sich von x unterscheiden.

Wir setzen nun:

$$B_{2n}=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots2n}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right).$$

Es ist dann B_{2n} genau der im vorigen Abschnitte entwickelte Ausdruck für die Bernoullischen Zahlen. Berücksichtigen wir, dass man hat $y-x=n'\lambda$, wo n' eine ganze Zahl ist, so erhält man:

$$\cos\frac{2s\pi(y-x)}{\alpha}=1,\quad \sin\frac{2s\pi(y-x)}{\alpha}=0,$$

und durch theilweises Integriren:

G) $$2\int_x^y\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos\frac{2s\pi(\lambda-x)}{\alpha}\varphi(\lambda)\,d\lambda=+\frac{B_2\alpha^2}{1\cdot2}[\varphi'(y)-\varphi'(x)]$$
$$-\frac{B_4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\alpha^4[\varphi'''(y)-\varphi'''(x)]+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{1\cdot2\ldots2n}[\varphi^{(2n-1)}(y)$$
$$-\varphi^{(2n-1)}(x)]+(-1)^n\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{2n}\int_x^y\left(\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^{2n}}\cos\frac{2s\pi(\lambda-x)}{\alpha}\right)f^{(2n)}(\lambda)\,d\lambda.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung F) so erhält man einen Ausdruck der mit 16) übereinstimmt, nur dass ein Schlussglied hinzukommt. Es ist nämlich:

16a) $$\Sigma\varphi(x)=\frac{1}{\alpha}\int_x^y\varphi(\lambda)\,d\lambda-\tfrac{1}{2}[\varphi(y)-\varphi(x)]+\frac{B_2}{1\cdot2}\alpha[\varphi'(y)-\varphi'(x)]$$
$$-\frac{B_4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\alpha^3[\varphi'''(y)-\varphi'''(x)]+\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{1\cdot2\ldots2n}\alpha^{2n-1}[\varphi^{(2n-1)}(y)-\varphi^{(2n-1)}(x)]+(-1)^nR_{2n},$$

wo zu setzen ist:

Digitized by Google

17) $$R_{2n} = 2\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{2n}\int_x^y \left(\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^{2n}} \cos 2s\pi\frac{\lambda - x}{\alpha}\right) \varphi^{(2n)}(\lambda)\, d\lambda.$$

Sei jetzt u_{2n} der grösste Werth, welchen die Function $\varphi^{(2n)}(\lambda)$ in den Grenzen x und y annimmt. Da nun wegen des Ausdrucks für B_{2n}, jedenfalls:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s^{2n}} \cos 2s\pi\frac{\lambda - x}{\alpha} < \frac{2^{n-1}\pi^{2n}B_{2n}}{1\cdot 2 \ldots 2n}$$

ist, abgesehen vom Vorzeichen:

18) $$R_{2n} < \frac{u_{2n}(y-x)B_{2n}}{1\cdot 2\ldots 2n}\alpha^{2n};$$

hat $\varphi^{(2n)}(\lambda)$ aber in dem ganzen betrachteten Raume dasselbe Zeichen, so ist dies auch das Zeichen von R_{2n}. Nimmt R_{2n} ins Unendliche ab, so divergirt die Reihe 16). Ist dann für einen schicklichen Werth von n dieser Rest unter einer gewissen Grenze, die man vernachlässigen kann, so gibt nichtsdestoweniger die Formel 16a) einen Näherungswerth der Summe, jedoch unterscheidet sich dieser Näherungswerth von den durch convergirende Reihen gefundenen dadurch, dass die Näherung nicht auf beliebig zu bestimmende Grenzen getrieben werden kann.

Reihen, welche bis zu einem gewissen Gliede sich einer Function annähern, dann aber sich von dieser sich entfernen und divergiren, hat man nicht sehr geschmackvoll halbconvergirende genannt. Wir werden sogleich ein wichtiges Beispiel einer solchen geben.

C) Ausdruck für die Summe der Logarithmen einer arithmetischen Reihe (Stirling'sche Formel).

Die Stirling'sche Formel gibt einen Näherungswerth für die Summe der Logarithmen der natürlichen Zahlen. Sie ist allerdings als ein besonderer Fall der eben entwickelten Euler'schen Reihe zu betrachten. Indess würde für die Gestalt der zu entwickelnden Reihe die Behandlung des Restes mittels des Poisson'schen Ausdrucks nicht gelingen, und wir geben daher eine directe Entwickelung, die von Serret herrührt.

Wir gehen von dem bekannten Wallis'schen Ausdrucke:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6 \ldots (2x-2)\,(2x-2)\,2x}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7 \ldots (2x-3)\,(2x-1).(2x-1)}$$

aus, der sich entweder aus der Theorie der bestimmten Integrale, oder aus dem bekannten Euler'schen Producte für $\sin(\pi x)$ ergibt:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

wenn man darin $x = \frac{\pi}{2}$ setzt.

Wir setzen in diesen Ausdruck:

$$\varphi(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots x}{\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}} \qquad a)$$

und erhalten, vermittelst des Wallisschen Produktes:

$$\lim \frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)} = 1.$$

Aus dem Werthe von $\varphi(x)$ aber folgt:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{-1+(x+\frac{1}{2})\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}. \qquad b)$$

Digitized by Google

Nun ist, wenn ϑ, ϑ' echte Brüche sind:

$$\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{\vartheta}{2x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{\vartheta'}{3x^3},$$

eine Formel, welche gilt, so lange x grösser als Eins ist, (vergleiche den Taylor'schen Satz) also:

$$(x+\tfrac{1}{2})\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\left(\frac{\vartheta}{8}-\frac{\vartheta'}{4}\right)\frac{1}{x^2}=1+\frac{\varepsilon}{x^2},$$

wo ε ein positiver oder negativer echter Bruch ist, also:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}=e^{\frac{\varepsilon}{x^2}}.$$

Setzt man hierin für x nach einander $x+1$, $x+2\ldots 2x-1$ und multiplicirt alle sich ergebenden Gleichungen, so kommt:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)}=e^{\frac{\varepsilon}{x^2}+\frac{\varepsilon_1}{(x+1)^2}+\frac{\varepsilon_2}{(x+2)^2}+\ldots+\frac{\varepsilon_{x-1}}{(2x-1)^2}}$$

und die Summe der Reihe im Exponenten ist kleiner als $\frac{x}{x^2}$ oder $\frac{1}{x}$, so dass man hat: $\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)}=e^{\frac{\tau}{x}}$, wo τ wieder ein echter Bruch ist, also mit wachsendem x: $\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)}=1$; es war aber $\frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)}=1$, also auch $\varphi(x)=1$, und man hat also:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots x=\sqrt{2\pi}\,e^{-x}\,x^{x+\frac{1}{2}}$$

für wachsendes x. Es ist dies der bekannte von Stirling herrührende Näherungsausdruck, der in dem Artikel: Quadratur auf andere Weise gefunden ist.

Sei jetzt aber x eine beliebige ganze Zahl, und möge $\varphi(x)$ noch immer den Werth in Formel a) haben. Es ist dann, wenn man unter $\Gamma(x+1)$ das Product $1\cdot 2\ldots x$ versteht:

$$\lg\Gamma(x+1)=\tfrac{1}{2}\lg 2x+(x+\tfrac{1}{2})\lg x-x+\lg\varphi(x); \qquad c)$$

aber es ist identisch:

$$\lg\varphi(x)=\lg\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)}+\lg\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)}+\ldots+\frac{\lg\varphi(x+m)}{\lg\varphi(x+m+1)}+\lg\varphi(x+m+1)$$

und da mit wachsendem m sich $\varphi(x+m+1)$ der Einheit nähert:

$$\lg\varphi(x)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\lg\frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)} \qquad d)$$

und mit Hülfe von Formel b) ergibt sich:

$$\lg\varphi(x)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\left[(x+m+\tfrac{1}{2})\lg\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1\right] \qquad e)$$

also:

$$\lg\Gamma(x+1)=\tfrac{1}{2}\lg 2\pi-x+(x+\tfrac{1}{2})\lg x+\sum_{m=0}^{m=\infty}\left[(x+m+\tfrac{1}{2})\lg\left(1+\frac{1}{x+m}\right)-1\right]. \qquad f)$$

Diese Formel, welche der folgenden Entwickelung zu Grunde liegt, ist für den Fall abgeleitet, dass x eine ganze positive Zahl ist. Es beschränkt sich indess bekanntlich die Bedeutung des Ausdrucks $\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^x d\alpha$ nicht

Digitized by Google

auf solche allein. Um demgemäss die Formel f) auf Brüche zu erweitern, nehmen wir die bekannte:

$$\lg \Gamma(x+1) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[x \lg \left(1+\frac{1}{m+1}\right) - \lg \left(1+\frac{x}{m+1}\right)\right].$$

(Es ist diese Formel 12 in Abschnitt 50 des Artikels: Quadratur, und daselbst allgemein abgeleitet.)

Dass diese Formel mit f) identisch ist, zeigt sich folgendermaassen. Differenziirt man beide Formeln zweimal, so kommt:

$$\frac{d^2 \lg \Gamma(x+1)}{dx^2} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m+1)^2},$$

von welcher von beiden man auch ausgeht. Es haben also beide Ausdrücke denselben zweiten Differenzialquotienten und könnten sich daher nur um eine lineare Function von x unterscheiden. Letzteres aber ist unmöglich, da sie für alle ganzen und positiven x übereinstimmen. Es gilt somit auch für den Ausdruck:

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x}}$$

die Formel e) ganz allgemein, da diese sich wieder aus f) ergibt. Wir wollen aber den sich aus ihr ergebenden Werth von $\lg \varphi(x)$ in ein bestimmtes Integral verwandeln. Es ist:

$$\frac{d \lg \varphi(x)}{dx} = \frac{1}{2x} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\lg \left(1+\frac{1}{x+m}\right) - \frac{1}{x+m}\right]$$

$$\frac{d^2 \lg \varphi(x)}{dx} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m)^2}$$

und da man hat:

$$\frac{1}{u_n} = \int_0^\infty e^{-\alpha u} u^{n-1}\, dx$$

$$\frac{d^2 \lg \varphi(x)}{dx^2} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) dx + \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-m\alpha}\, \alpha\, d\alpha$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha x} \left(\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} - \frac{\alpha}{2} - 1 \right) d\alpha.$$

Indem man zweimal integrirt und berücksichtigt, dass $\lg \varphi(x)$ und $\frac{d \lg \varphi(x)}{dx}$ für $x = \infty$ verschwinden, ergibt sich:

$$\lg \varphi(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) e^{-\alpha x}\, d\alpha. \qquad g)$$

In die bereits im Abschnitt 13) angewandte Formel:

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\alpha} - 4\alpha \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{4m^2\pi^2 - \alpha^2}$$

wollen wir jetzt αi für α setzen, wo man dann hat:

$$\cot \frac{\alpha i}{2} = i\, \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}} + e^{\frac{\alpha}{2}}}{e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{\frac{\alpha}{2}}} = -i\, \frac{1+e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}} = -2i \left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{2} \right),$$

Digitized by Google

woraus sich dann ergibt:

$$\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}=2\alpha\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{4m^2\pi^2+\alpha^2}.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{4m^2\pi^2+\alpha^2}$ wird jetzt ganz wie in Abschnitt 13) nach Potenzen von α geordnet, wobei wir jedoch den Rest hinzufügen. Es ist:

$$\frac{1}{4m^2\pi^2+\alpha^2}=\frac{1}{(2m\pi)^2}-\frac{\alpha^2}{(2m\pi)^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\alpha^{2n-2}}{(2m\pi)^{2n}}+(-1)^n\vartheta_m\frac{\alpha^{2n}}{(2m\pi)^{2n+2}},$$

wo

$$\vartheta_m=\frac{4m^2\pi^2}{4m^2\pi^2+\alpha^2}$$

ist. So lange also α reell ist, wird ϑ_m zwischen Null und Eins liegen. In dem wir den so gefundenen Werth in die Summe einsetzen, ergibt sich:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right)=\frac{B_2}{1\cdot2}-\frac{B_4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\alpha^2+\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{1\cdot2\ldots2n}\alpha^{2n-2}+\frac{(-1)^n\vartheta\cdot B_{2n+2}}{1\cdot2\ldots(2n+2)}\alpha^{2n}\qquad h)$$

wo ϑ zwischen Null und Eins liegt, und die B wieder die Bernoulli'schen Zahlen, sind. Der Ausdruck h) ist jetzt in die Formel g) einzusetzen. Dies gibt:

$$\lg\varphi(x)=\frac{B_2}{1\cdot2}\int_0^\infty e^{-\alpha x}d\alpha-\frac{B_4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^2 d\alpha+\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{1\cdot2\ldots2n}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2n-2}d\alpha$$

$$+(-1)^n\frac{B_{2n+2}}{1\cdot2\ldots(2n+2)}\int_0^\infty\vartheta e^{-\alpha x}\alpha^{2n}d\alpha.\qquad i)$$

Die Integrationen sind alle ausführbar. Was die letzte anbetrifft, so ist das entsprechende Integral positiv und kleiner als $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{2n}d\alpha$, übrigens allgemein

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\alpha^{\mu-1}d\alpha=\frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu}$$ also:

$$\lg\varphi(x)=\frac{B_2}{1\cdot2}\frac{1}{x}-\frac{B_4}{3\cdot4}\frac{1}{x^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{(2n-1)2n\,x^{2n-1}}$$

$$+(-1)^n\tau\frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}},$$

wo τ zwischen Null und Eins liegt, und wenn dieser Ausdruck in die Formel f) gesetzt wird, so hat man schliesslich die Stirling'sche Reihe:

$$\lg\Gamma(x+1)=\tfrac{1}{2}\lg2\pi-x+(x+\tfrac{1}{2})\lg x+\frac{B_2}{1\cdot2}\frac{1}{x}-\frac{B_4}{3\cdot4}\frac{1}{x^3}+\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n-1)2n}\frac{1}{x^{2n-1}}+(-1)^n\tau\frac{B_{2n-2}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{x^{2n+1}}\qquad k)$$

Digitized by Google

Kann man das letzte Glied für irgend ein n vernachlässigen, so hat man also einen Näherungswerth für $\lg \Gamma(x+1)$.

Es ist aber die Stirling'sche Reihe nie convergent, denn das allgemeine Glied $(-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{(2n-1)2n} \frac{1}{x^{2n-1}}$ ist, wenn man den Werth von B_{2n} einsetzt, gleich dem Producte:

$$\frac{1}{2n\,x} \cdot \frac{2}{2n\,x} \cdots \frac{2n-2}{2n\,x}.$$

multiplicirt in $\frac{1}{2n^2 x}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right)$.

Die Grenze des zweiten Factors ist $\frac{1}{2n^2 x}$, der erste aber wächst ins Unendliche. Somit ist eine Annäherung an $\lg \Gamma(x+1)$ auf beliebige Grenzen durch die Stirling'sche Reihe unmöglich. Indess gibt sie eine Annäherung und gehört somit in die Anzahl der halbconvergenten Reihen. In der That nehmen die Glieder der Stirlingschen Reihe im Anfange ab, wenn x grösser als Eins ist, und die Formel k) zeigt, dass der Fehler immer kleiner ist als das erste weggelassene Glied. Denn dasselbe ist $(-1)n \frac{B_{2n-2}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}}$, während der Fehler dem Product dieses Gliedes in den Factor τ, der ein echter Bruck ist, gleich war. Man hat also die beste Näherung, wenn man bei dem Gliede, welches dem kleinsten der Reihe vorhergeht, stehen bleibt. Dieses kleinste aber gibt die obere Fehlergrenze, — Lassen wir zunächst das mit B_2 multiplicirte Glied weg, so kommt als Fehlergrenze $\frac{B_2}{2x} = \frac{1}{12x}$. Es ist also, wenn man:

$$\lg \Gamma(x+1) = \tfrac{1}{2} \lg 2\pi - x + (x+\tfrac{1}{2}) \lg x$$

setzt, eine positive Grösse vernachlässigt, die kleiner als $\frac{1}{12x}$ ist. Also wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, kommt:

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}} < \Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi}\, e^{-x+\frac{1}{12x}} x^{x+\frac{1}{2}}.$$

Cauchy gibt noch folgende Grenzen für die Bernoulli'schen Zahlen.

Sei

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots,$$

so ist:

$$B_{2n} = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n}, \quad B_2 = \frac{S_2}{\pi^2},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{B_{2n+2}}{B_{2n}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2} \frac{S_{2n+2}}{S_{2n}}, \quad \frac{B_{2n}}{B_2} = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}} \frac{S_{2n}}{S_2},$$

und da die Summen S mit wachsendem n abnehmen:

$$\frac{B_{2n+2}}{B_{2n}} < \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2}, \quad \frac{B_{2n}}{B_2} < = \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n-2}}$$

oder:

$$\frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{B_{2n}}{4\pi^2},$$

Digitized by Google A)

und da $B_2 = \frac{1}{6}$ ist:

$$B_{2n} < 1\tfrac{1}{12} \frac{\Gamma(2n+1)}{(2\pi)^{2n-2}}. \qquad \text{B)}$$

Die Formel A) gibt eine obere Grenze. Ersetzt man in dem vollständigen Ausdrucke von B_{2n}, S_{2n} durch Eins, so hat man eine untere Grenze nämlich:

$$B_{2n} > \frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}. \qquad \text{C)}$$

Da wir aber für $\Gamma(2n+1)$ eine obere und eine untere Grenze haben, so kann man die erstere in B) die letztere in C) einsetzen, dies gibt:

$$\frac{2(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n+\frac{1}{2}}} e^{-2n} < B_{2n} < 1\tfrac{1}{12} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2n-\frac{1}{2}}} e^{-2n+\frac{1}{24n}}. \qquad \text{D)}$$

Mit Hülfe dieser Formel kann jetzt bestimmt werden, wie weit die durch die Stirlingsche Reihe zu bewerkstelligende Annäherung sich treiben lässt. — Wir wollen das mit B_{2n} bezeichnete Glied der Reihe durch u_n bezeichnen.

Es ist dann

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{B_{2n+2}}{B_{2n}} \frac{(2n+1)2n}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^2}$$

und wegen der Formel A)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{(2n-1)2n}{4\pi^2 x^2} < \frac{n^2}{\pi^2 x^2} < \frac{n^2}{9x^2}.$$

So lange also n nicht grösser als $3x$ ist, werden die Glieder der Reihe abnehmen. Wenn x eine ganze Zahl ist, bilden also die drei ersten Glieder den anzuwendenden Theil der Reihe. Bricht man mit dem Gliede B_{2n} ab, und ist R_n der Fehler, so hat man:

$$R_n < \frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{x^{2n+1}}$$

und wegen der Formel A):

$$R_n < \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{n\pi}}{x} \left(\frac{n}{e\pi x}\right)^{2n} e^{\frac{1}{24n}}. \qquad \text{E)}$$

Eine Grenze, deren Werth sich mit Logarithmen sehr leicht berechnen lässt.

Wird noch $n = 3x$ gesetzt, so ergibt sich:

$$R_{3x} < \tfrac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{6x-\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{72x}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x},$$

oder da x kleiner als Eins ist, um so mehr:

$$R_{3x} < \tfrac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{6\frac{1}{2}} e^{7\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-6x}$$

und wenn man den Zahlenfactor berechnet:

$$R_{3x} < 0{,}893409 \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e}\right)^{6x}$$

oder wenn man Brigge'sche Logarithmen anwendet:

Digitized by Google

$$\lg R_{3x} < 0{,}594844 - 1 + x \cdot (0{,}3942431 - 3) - \tfrac{1}{2} \lg x.$$

also schon für $x = 1$: $\lg R_3 < 0{,}9890775 - 4$ und somit der Fehler kleiner als $\frac{1}{15000}$. Für $x = 10$ ist bereits $\lg R_{30} < 0{,}047175 - 27$. Man kann also eine Annäherung auf 30 Decimalstellen erreichen.

Differenziirt man die Stirling'sche Reihe, so erhält man ebenfalls halbconvergente Reihen. Zu dem Ende bemerken wir, dass in Formel i) die Grösse ε unter dem letzten Integralzeichen von x unabhängig ist. μmaliges Differenziiren gibt also:

$$(-1)^\mu \frac{d^\mu \lg q(x)}{dx^\mu} = \frac{B_2}{1 \cdot 2} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^\mu \, d\alpha - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{B_{2n}}{1 \cdot 2 \ldots 2n} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\mu+2n-2} \, d\alpha$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{2n+2}}{1 \cdot 2 \ldots (2n+2)} \int_0^\infty \varepsilon e^{-\alpha x} \alpha^{\mu+2n} \, d\alpha,$$

woraus dann folgt:

$$(-1)^\mu \frac{d^\mu \lg \varphi(x)}{dx^\mu} = B_2 \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)} \frac{1}{x^{\mu+1}} - B_4 \frac{\Gamma(\mu+3)}{\Gamma(5)} \frac{1}{x^{\mu+3}} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} B_{2n} \frac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)} \frac{1}{x^{\mu+2n-1}}$$
$$+ (-1)^n \vartheta B_{2n+2} \frac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+3)} \frac{1}{x^{\mu+2n+1}} \qquad \text{l)}$$

wo ϑ zwischen Null und Eins liegt. Ueber den Fehler gilt Gleiches wie bei der Stirlingschen Reihe. So hat man für $\mu = 1$:

$$\frac{d \lg q(x)}{dx} = -\frac{B_2}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{B_4}{4} \frac{1}{x^4} - \ldots + (-1)^n \frac{B_{2n}}{2^n} \frac{1}{x^{2n}} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1} \vartheta \frac{B_{2n+2}}{2n+2} \frac{1}{x^{2n+2}}.$$

Durch μmaliges Differenziiren der Gleichung f) ergibt sich:

$$(-1)^\mu \frac{d^\mu \lg \Gamma(x+1)}{dx^\mu} = \frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu-1}} - \frac{\Gamma(\mu)}{2x^\mu} + (-1)^\mu \frac{d^\mu \lg \varphi(x)}{dx^\mu} \qquad \text{m)}$$

wo der Werth von $\frac{d^\mu \lg \varphi(x)}{dx^\mu}$ sich aus l) ergibt. Für $\mu = 1$ ist, z. B.:

$$\frac{d \lg \Gamma(x+1)}{dx} = \lg x + \frac{1}{2x} + \frac{d \lg \varphi(x)}{dx},$$

also:

$$\frac{d \lg \Gamma(x+1)}{dx} = \lg x + \frac{1}{2x} - \frac{B_2}{2} \frac{1}{x^2} + \ldots + (-1)^n \frac{B_{2n}}{2n} \frac{1}{x^{2n}}$$
$$+ (-1)^{n+1} \vartheta \frac{B_{2n+2}}{2n+2} \frac{1}{x^{2n+2}} \qquad \text{n)}$$

und allgemein:

Digitized by Google

$$(-1)^{\mu}\frac{d^{\mu}\lg\Gamma(x+1)}{dx^{\mu}}=\frac{\Gamma(\mu-1)}{x^{\mu}-1}-\frac{\Gamma(\mu)}{2x^{\mu}}-\frac{B_2\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(3)}\frac{1}{x^{\mu}+1}-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}B_{2n}\frac{\Gamma(\mu+2n-1)}{\Gamma(2n+1)}\frac{1}{x^{\mu}+2n-1}$$
$$+(-1)^{n}B_{2n+2}\frac{\Gamma(\mu+2n+1)}{\Gamma(2n+3)}\frac{1}{x^{\mu}+2n+1}.\quad o)$$

Für grosses x ist also z. B. ein Annäherungswerth von $\frac{d\lg\Gamma(x+1)}{dx}$ schon der Ausdruck $\lg(x)$. —

In dem Artikel: Quadratur ist die Formel bewiesen:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}-\frac{d\lg\Gamma(x+1)}{dx}=C,$$

wo C also dieselbe Constante ist, welche in diesem Artikel in der Formel:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\lg n+C,$$

enthalten ist, und welche für wachsendes n galt.

Setzen wir für $\frac{d\lg\Gamma(x+1)}{dx}$ den obigen Werth, so kommt:

$$C=\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}\right)-\lg x-\frac{1}{2x}+\frac{B_2}{2x^2}-\frac{B_4}{4x^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{2nx^{2n}}$$

und der Fehler ist kleiner als $\frac{B_{2n+2}}{(2n+2)x^{2n+2}}$; bricht man mit B_{12} ab, und setzt die Werthe der Bernoulli'schen Zahlen ein, so kommt:

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{x}-\lg x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{120x^4}+\frac{1}{252x^6}-\frac{1}{240x^8}$$
$$+\frac{1}{132x^{10}}-\frac{691}{32760x^{12}}+\ldots$$

und der Fehler ist kleiner als $\frac{1}{12x^{14}}$ für $x=10$, also kommt:

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}-\lg 10-\frac{1}{20}+\frac{0{,}01}{12}-\frac{0{,}0001}{120}+\frac{0{,}000001}{252}-\frac{(0{,}1)^8}{240}$$
$$+\frac{(0{,}1)^{10}}{132}-\frac{(0{,}1)^{12}}{32760}.$$

Hieraus ergibt sich der bereits gefundene Werth von C ungemein schnell.

Diese Entwickelungen sind hier ausführlicher gegeben, weil sie ein besonders gutes Beispiel gewähren, wie divergente Reihen dennoch für die Entwickelungen von grossem Nutzen sein können.

15) Ueber die Schwierigkeiten, welche sich aus der Entwickelung mehrdeutiger Ausdrücke in Reihen ergeben. Ueber die Reihenausdrücke für die Potenzen der Sinus und Cosinus.

Da mehrdeutige Functionen sich in gewissen Grenzen in convergenten Reihen entwickeln lassen, so entsteht oft die Frage, welcher der Werthe durch eine bestimmte Entwickelung dargestellt sei. Wir geben ein bekanntes und wichtiges Beispiel einer solchen Entwickelung, nämlich der Potenzen der Cosinus und Sinus nach Cosinus und Sinus der vielfachen Bogen. Wir setzen:

$$u=e^{xi},\quad v=e^{-xi};$$

es ist dann:

Digitized by Google

$$uv = 1, \quad u + v = 2\cos x, \quad u - v = 2i \sin x$$

und wenn n zunächst eine ganze positive Zahl ist:

$$(u \pm v)^n = u^n \pm n_1 u^{n-1} v + n_2 u^{n-2} v_2 + \ldots + (\pm 1)^n v^n.$$

Nimmt man das obere Zeichen, und vereint die gleichweit vom Ende befindlichen Glieder, so ergibt sich, wenn n grade ist:

$$(2\cos x)^n = 2[\cos nx + n\cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \ldots + n_{\frac{n}{2}-1} \cos 2x] + n_{\frac{n}{2}} \quad 1)$$

und wenn n ungrade ist:

$$(2\cos x)^n = 2[\cos nx + n\cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \ldots + n_{\frac{n-1}{2}} \cos x]. \quad 2)$$

Ebenso wenn man das untere Zeichen nimmt, wenn n grade ist:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} (2\sin x)^n = 2[\cos nx - n\cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} n_{\frac{n}{2}-1} \cos 2x] + (-1)^{\frac{n}{2}} n_{\frac{n}{2}} \quad 3)$$

und wenn n ungrade ist:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\sin x)^n = 2[\sin nx - n\sin(n-2)x + n_2 \sin(n-4)x - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{n-1}{2}} \sin x]. \quad 4)$$

Diese Reihen sind für jedes ganze positive n endlich.

Sei nun aber n ein Bruch, so ist da die Entwickelung von imaginären Ausdrücken ausgeht, und die entwickelnde Function n-deutig ist die Frage zu beantworten, welche dieser Werthe die Reihen vorstellen, wenn die binomische Reihe als convergent vorausgesetzt wird.

Wir setzen jetzt allgemein:

$$\varphi(x) = \cos nx + n\cos(n-2)x + n_2 \cos(n-4)x + \ldots$$
$$\psi(x) = \sin nx + n\sin(n-2)x + n_2 \sin(n-4)x + \ldots$$

Die Reihen rechts, die im Allgemeinen ins Unendliche gehen, setzen wir als convergent voraus. In welchen Fällen dies stattfindet, soll nachher erörtert werden.

Offenbar ist nun nach dem binomischen Satze:

$$\varphi(x) + i\psi(x) = e^{nxi} + n_1 e^{(n-2)xi} + n_2 e^{(n-4)xi} + \ldots = (e^{xi} + e^{-xi})^n = (2\cos x)^n,$$

was auch n sei.

Ist n eine ganze positive Zahl, so wird $\varphi(x) = 0$, da die gleich weit vom Ende befindlichen Glieder sich vernichten.

Sei jetzt $n = \frac{p}{q}$, wo p und q ganze, positive, relativ einfache Zahlen sein sollen, so hat der Ausdruck $(2\cos x)^{\frac{p}{q}}$ q verschiedene Werthe, von denen einer unsere Entwickelung gibt; es ist somit für jeden Werth dieses Ausdrucks:

$$(2\cos x)^{\frac{p}{q}} = [\varphi(x) + i\psi(x)]\left[\cos\frac{p}{q} 2s\pi + i\sin\frac{p}{q} 2s\pi\right],$$

Digitized by Google

wo jedem Werthe der Potenz ein andres s entspricht, und s alle Werthe von 0 bis $q-1$ annimmt. — Sei jetzt $\cos x$ positiv, so hat der Ausdruck links einen positiven und reellen Werth, den wir mit X bezeichnen.

Was den Ausdruck rechts anbetrifft, so kann man für denselben schreiben:

$$e^{2s\pi i\frac{p}{q}}(e^{xi}+e^{-xi})^{\frac{p}{q}} = [e^{(x+2s\pi)i}+e^{(-x+2s\pi)i}]^{\frac{p}{q}}$$

$$= [e^{(x+2s\pi)i}+e^{-(x+2s\pi)i}]^{\frac{p}{q}},$$

so dass man hat:

$$(2\cos x)^{\frac{p}{q}} = \varphi(x+2s\pi)+i\psi(x+2s\pi).$$

Es ist also allgemein:

$$X\left(\cos\frac{2s'\pi p}{q}+i\sin\frac{2s'\pi p}{q}\right) = [\varphi(x)+i\psi(x)]\left(\cos\frac{p}{q}2s\pi+i\sin\frac{p}{q}2s\pi\right) \quad a)$$

$$= \varphi(x+2s\pi)+i\psi(x+2s\pi). \quad b)$$

da jeder Werth von $(2\cos x)^{\frac{p}{q}}$ sich auf die Form des Ausdruckes links bringen lässt. s und s' sind aus der Zahlenreihe von 0 bis $q-1$ entnommen.

Setzt man in die vorige Gleichung $x=0$, so kommt: $X_0 = 2^{\frac{p}{q}}$, und es wird in Formel a) $\varphi(0) = 2^{\frac{p}{q}}$, $\psi(0)=1$; damit also beide Seiten der Gleichung übereinstimmen, ist $s=s'$ zu nehmen, und somit hat man wegen des Ausdruckes b):

$$X\left(\cos\frac{p}{q}2s\pi+i\sin\frac{p}{q}2s\pi\right) = \varphi(x+2s\pi)+i\psi(x+2s\pi).$$

Hieraus ergibt sich:

$$\varphi(x) = X, \quad \psi(x)=0$$

für $s=0$, und diese Ausdrücke gelten, so lange x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, da in diesen Fällen $\cos x$ continuirlich und positiv bleibt. Die letztere Bedingung aber war bei der ganzen Entwickelung vorausgesetzt. Allgemein hat man für x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ aber:

I) $$\varphi(x+2s\pi) = X\cos\frac{p}{q}2s\pi, \quad \psi(x+2s\pi) = X\sin\frac{p}{q}2s\pi.$$

Sei jetzt $\cos(x)$ negativ, und liege x zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ und sei jetzt X der reelle und positive Werth von $(-2\cos x)^{\frac{p}{q}}$, so ist:

$$(2\cos x)^{\frac{p}{q}} = (-1)^{\frac{p}{q}}X = X\left(\cos\frac{p}{q}(2s'+1)\pi+\sin\frac{p}{q}(2s'+1)\pi\right).$$

Statt der Gleichung a) erhält man dann:

$$X\left(\cos\frac{p}{q}(2s'+1)\pi+i\sin\frac{p}{q}(2s'+1)\pi\right) = \varphi(x+2s\pi)+i\psi(x+2s\pi)$$

$$= [\varphi(x)+i\psi(x)]\left(\cos\frac{p}{q}2s\pi+i\sin\frac{p}{q}2s\pi\right);$$

für $x=\pi$ aber kommt:

Digitized by Google

$$q(n) = 2^{\frac{p}{q}} \cos\frac{p}{q}n\pi, \quad \psi(n) = 2^{\frac{p}{q}} \sin\frac{p}{q}n\pi,$$

es haben dann nämlich die in den Ausdrücken für $q(x)$ und $\psi(x)$ enthaltenen Cosinus und Sinus alle das Argument $\frac{p}{q}\pi$. Also hat man, da noch $X = 2^{\frac{p}{q}}$ ist:

$$\cos\frac{p}{q}(2s'+1)\pi + i\sin\frac{p}{q}(2s'+1)\pi = \left(\cos\frac{p}{q}\pi + i\sin\frac{p}{q}\pi\right)\left(\cos\frac{p}{q}2s\pi + i\sin\frac{p}{q}2s\pi\right),$$

also $s' = s$, somit:

$$X\left(\cos\frac{p}{q}(2s+1)\pi + i\sin\frac{p}{q}(2s+1)\pi\right) = q(x+2s\pi) + i\psi(x+2s\pi),$$

also:

II) $$q(x+2s\pi) = X\cos\frac{p}{q}(2s+1)\pi, \quad \psi(x+2s\pi) = X\sin\frac{p}{q}(2s+1)\pi$$

und für $s = 0$,

$$q(x) = X\cos\frac{p}{q}\pi, \quad \psi(x) = X\sin\frac{p}{q}\pi,$$

die Formeln 1) und 2) geben also für jeden Werth von x die Werthe q und ψ. Wir haben noch diese Ausdrücke auf ihre Convergenz hin zu prüfen.

Die Reihe:

$$(1-\varepsilon)^n = 1 - n\varepsilon - \frac{n(1-n)}{1\cdot 2}\varepsilon^2 + \ldots$$

convergirt für jedes reelle ε, das kleiner als Eins ist, und es ist leicht ersichtlich, dass die Glieder von einem gewissen ab dasselbe Zeichen haben. Nähert sich also $(1-\varepsilon)^n$ einer gewissen endlichen Grenze, wenn ε sich der Einheit nähert, so muss dies auch mit der Reihe

$$A = 1 - n + n_2 - n_3 + \ldots$$

der Fall sein, da die mit gleichen Zeichen versehenen Glieder an der Grenze keine unbestimmte Summe geben können. Da dies nun bei positiven n der Fall ist, so wird die Reihe A convergiren und um so mehr die unsere, wo jedes Glied von A mit einem Factor multiplicirt ist, dessen Modul Eins ist. Für negatives n divergirt aber die Reihe.

Für positives n sind unsere Reihen geeignet, die Potenzen des Cosinus zu finden.

Die Entwickelung der Potenzen des Sinus aber ergibt sich daraus, wenn man x mit $\frac{\pi}{2} - x$ vertauscht.

Sei z. B. $n = \frac{1}{2}$, und sei unter $\sqrt{\alpha}$ immer der positive Werth der Wurzel verstanden, wenn α selbst positiv ist; man hat dann:

x zwischen			
$-\frac{\pi}{2}$	und $+\frac{\pi}{2}$	$q(x) = +\sqrt{\cos x}$,	$\psi(x) = 0$
$+\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$q(x) = 0$,	$\psi(x) = \sqrt{-\cos x}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$q(x) = -\sqrt{\cos x}$,	$\psi(x) = 0$
$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	$q(x) = 0$,	$\psi(x) = -\sqrt{-\cos x}$
.	.	.	.
.	.	.	.

Digitized by Google

16) Allgemeine Umkehrungsformel für die Potenzreihen.

Eine aus allgemeinen Gesichtspunkten geschöpfte Theorie der Reihen, welche nach positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Potenzen fortschreiten, so wie derjenigen, welche nach Cosinus und Sinus der Vielfachen der Variabeln geordnet sind, gibt der Artikel: Quantität (imaginäre); indem wir uns auf denselben beziehen, geben wir noch die wichtige von Lagrange herrührende Reihe, welche die Umkehrung der nach ganzen positiven Potenzen geordneten Reihen enthält. Wir bedienen uns hierbei einer Methode von Serret.

Sei gegeben die Gleichung:

$$z = x + tf(z), \qquad 1)$$

wo x eine reelle Constante, t eine reelle oder imaginäre Variable, $f(z)$ eine beliebige, eindeutige und continuirliche Function von z vorstellt, die von x und t unabhängig ist. Es handelt sich darum, z und eine Function $F(z)$ von z nach Potenzen von t zu entwickeln. Diese Entwickelung gilt nur, so lange $f(z)$ die obigen Bedingungen erfüllt.

Setzt man z. B. dann

$$x = 0, \text{ und } \frac{z}{f(z)} = \varphi(z),$$

so kann man also hiernach die Gleichung $\varphi(z) = t$ durch Reihenentwickelung lösen. Es handelt sich nun darum, die Grenzen der Anwendbarkeit dieser Entwickelung festzustellen.

Im allgemeinen Falle kann die Gleichung eine endliche oder unendliche Anzahl von Wurzeln haben. Im Falle, dass $t = 0$ ist, wird eine derselben $z = x$, und die anderen werden jedenfalls $f(z)$ unendlich gross machen.

Soll die Gleichung 2) gleiche Wurzeln haben, so muss nach einem bekannten Satze sie noch richtig sein, wenn man nach z differenziirt, man wird also in diesem Falle haben:

$$1 = tf'(z). \qquad 2)$$

Eliminirt man dann aus beiden Gleichungen t, so kommt:

$$z = x + \frac{f(z)}{f'(z)}. \qquad 3)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind von t unabhängig. Wir bezeichnen sie bezüglich durch $r_1 e^{\alpha_1 i}$, $r_2 e^{\alpha_2 i}$ . . . , und setzen sie in die zweite Gleichung ein, wo sich dann ergibt:

$$t = \frac{1}{f'(r_1 e^{\alpha_1 i})}, \quad t = \frac{1}{f'(r_2 e^{\alpha_2 i})} \ldots .$$

Sei R der kleinste Modul, den einer dieser Werthe von t annimmt, so wird die Gleichung 1) so lange keine gleichen Wurzeln haben, als der Modul von t kleiner als R bleibt. So lange nun diese Bedingung erfüllt ist, bleiben die Wurzeln unserer Gleichung 1) eindeutige und continuirliche Functionen von t. Das Erstere ist selbstverständlich der Fall, da die Mehrdeutigkeit ja eben von der Gleichheit zweier Wurzeln herrührt. Was das Letztere anbetrifft, so geben wir der Grösse t den Werth t_0, deren Modul zwischen Null und R liegt. Ist dann z_0 eine Wurzel der Gleichung 1), so hat man:

$$t_0 = \frac{z_0 - x}{f(z_0)}.$$

Ist ζ_0 ein verschwindend kleiner Zuwachs zu z_0, τ_0 der entsprechende von t_0, so ergibt sich:

$$t_0 + \tau_0 = \frac{z_0 + \zeta_0 - x}{f(z_0 + \zeta_0)}.$$

Man erhält also:

$$\tau_0 = \frac{z_0 + \zeta_0 - x}{f(z_0 + \zeta_0)} - \frac{z_0 - x}{f(z_0)},$$

d. h.:

$$\tau_0 = \frac{\zeta_0 + t_0[f(z_0) - f(z_0 + \zeta_0)]}{f(z_0 + \zeta_0)},$$

oder:

$$\tau_0 = \frac{1 - t_0 \frac{[f(z_0 + \zeta_0) - f(z_0)]}{\zeta_0}}{f(z_0 + \zeta_0)} \zeta_0.$$

Da $f(z)$ continuirlich ist, so kann man die Maclaurinsche Reihe gebrauchen; wenn man aber das erste Glied nur anwendet, ergibt sich:

$$\tau_0 = \frac{1 - t_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \zeta_0,$$

also:

$$\zeta_0 = \frac{f(z_0)}{1 - t_0 f'(z_0)} \tau_0.$$

Da der Nenner nicht verschwindet, so wird, wenn z_0 die zu t_0 gehörige Wurzel ist, $z_0 + \zeta_0$ dem Werthe $t_0 + \tau_0$ entsprechen und der Unterschied beider Wurzeln verschwindend klein sein, womit unsere Behauptung erwiesen ist. Da aber für alle Wurzeln der Gleichung 1) bis auf eine $f(z)$ discontinuirlich ist, so kann nur diese erstere als eine continuirliche Function von t betrachtet wer-

Digitized by Google

den, so lange der Modul von t kleiner als R ist, und in diesem Umfange kann z nach ganzen positiven Potenzen von s entwickelt werden. Es ist nun:

$$z = z_0 + t\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_0 + \cdots \quad 4)$$

Sei ferner $F(z)$ eine continuirliche Function von z, so hat man:

$$F(z) = F(z_0) + t\left(\frac{\partial F(z)}{\partial t}\right)_0 + \frac{t^2}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 F(z)}{\partial t^2}\right)_0 + \cdots, \quad 5)$$

das Zeichen 0 bei dem Differenzialquotienten zeigt an, dass nach der Differenziation $t = 0$ gesetzt werden soll.

Berechnen wir jetzt, nachdem die Grenzen der Gültigkeit unserer Entwickelung festgestellt sind, die Coefficienten der Potenzen von t.

Wir betrachten jetzt x als variabel und differenziiren Gleichung 1) zuerst nach t dann nach x:

$$1 - t f'(z)\frac{\partial z}{\partial t} = f(z); \quad [1 - t f'(z)]\frac{\partial z}{\partial x} = 1; \quad 6)$$

hieraus folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f(z)\frac{\partial z}{\partial x}, \quad 7)$$

also, wenn dz das vollständige Differenzial ist:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(dx + f(z)\,dt),$$

und:

$$\varphi(z)\,dz = \varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}(dx + f(z)\,dt),$$

wo $\varphi(z)$ eine beliebige Function von z ist. Durch Vergleichung der mit dx und dt multiplicirten Theile erhält man:

$$\frac{\partial\left(\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left(f(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}. \quad 8)$$

(Es ist rechts erst nach t dann nach x, links erst nach x, dann nach t differenziirt.) Oder wenn wir $n-2$ mal nach t differenziiren:

$$\frac{\partial^{n-1}\left(\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{n-2}\left(f(z)\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial t^{n-2}}.$$

Die Formel 8) aber zeigt, dass jede auf t bezügliche Differenziation rechts durch eine auf x bezügliche ersetzt werden kann, vorausgesetzt, dass man einen Factor $f(z)$ hinzufügt. Man hat also:

$$\frac{\partial^{n-1}\left(\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial t^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left([f(z)]^{n-1}\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Sei jetzt $\varphi(z) = f(z)F'(z)$, so gibt Gleichung 7):

$$\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x} = F'(z)\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F(z)}{\partial t}$$

und also:

$$\frac{\partial^n F(z)}{\partial t^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left([f(z)]^n F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right). \quad 9)$$

Für $t = 0$ hat man nun $z_0 = x$, $F(z_0) = F(x)$ und wegen Gleichung 6):

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = f(x)$$

also:

$$\left(\frac{\partial F(z)}{\partial t}\right)_0 = F'(z)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 = f(x)\,F'(x).$$

So erhält man aus Formel 5):

$$F(z) = F(x) + t f(x) F'(x) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\frac{\partial}{\partial x^2}([f(x)]^2 F'(x)) + \ldots$$

$$+ \frac{t^n}{1\cdot 2\ldots n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}([f(x)]^n F'(x)) + \ldots \quad 10)$$

und wenn man z für $F(z)$ nimmt:

$$z = x + t f(x) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\frac{\partial}{\partial t}[f(x)]^2 + \ldots + \frac{t^n}{1\cdot 2\ldots n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}[f(x)]^n + \ldots \quad 11)$$

Die Formel 11) ist die Lagrange'sche Umkehrungsformel. Da $f(z)$ continuirlich ist, also für diese Grösse eine nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende Reihe gesetzt werden kann, und sie umgekehrt lehrt, z und $F(z)$ nach ganzen positiven Potenzen von t zu entwickeln, was eben als Umkehrung der Reihen bezeichnet zu werden pflegt.

Beispiele. Sei

$$z = x + t z^m.$$

Die Gleichung 3) wird dann:

$$z = x + \frac{z}{m}, \quad \text{also} \quad z = \frac{m x}{m-1}$$

und Gleichung 2) gibt:

$$t = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m x^{m-1}}.$$

Die Entwickelung wird also so lange gelten, als der Modul von Eins kleiner als $\frac{(m-1)^{m-1}}{m^m x^{m-1}}$ abgesehen vom Vorzeichen ist. Formel 11) gibt:

$$z = x + x^m t + \frac{2m}{1\cdot 2}x^{2m-1}t^2 + \frac{(3m)_2}{3}x^{3m-2}t^3 + \ldots$$

$$+ \frac{(nm)_{n-1}}{n}x^{mn-n+1}t^{4n} + \ldots.$$

Mittels dieser Formel gelingt also die Auflösung der Gleichungen von der Form $z^m + Az = B$, wenn man $f = -\frac{1}{A}$, $x = \frac{B}{A}$ setzt, jedoch nur bis zur einer gewissen Grenze für $\frac{1}{A}$ und für einen vollständig charakterisirten Wurzelwerth.

Setzen wir ferner in Gleichung 11) $F'(z) = z^m$, $f(z) = z - 1$, wo dann Gleichung 1) gibt:

$$z = \frac{x-t}{1-t}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1-t}$$

und aus Gleichung 11) erhält man durch Differenziiren nach x:

$$F'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{t^n}{1\cdot 2\ldots n}\frac{\partial^n}{\partial x^n}(F'(z)[f(x)]^n)$$

also:

Digitized by Google

$$\frac{(x-t)^m}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{t^n}{1\cdot 2\ldots n} \frac{\partial^n}{\partial x^n}[x^m(x-1)^n].$$

Wir bemerken noch, dass dem Lagrange'schen Satze eine Ausdehnung auf Functionen zweier Variablen durch La Place und Jacobi gegeben ist.

Eine der bekanntesten Anwendungen des Lagrange'schen Satzes ist übrigens die Auflösung der Kepler'schen Gleichung in der theorischen Astronomie.

17) Summirung der Reihen.

A. Elementare Methoden.

Mit Bezug auf Summirung der Reihen machen wir auf die bei den recurrenten Reihen benutzte Methode nochmals aufmerksam.

Eine oft anwendbare Methode ist auch die, welche bei Summirung der Reihen von Binomialquotienten:

$$1_p + 2_p + 3_p + \ldots + (n-1)_p = n_{(p+1)}$$

hier benutzt worden ist. Diese Methode lässt sich allgemein so geben:

Wenn sich ein Ausdruck A_s auf die Form bringen lässt:

$$B_{(s+1)} - B_s = A_s,$$

so hat man, wenn für s alle Zahlen von α bis $n-1$ gesetzt werden:

$$B_{\alpha+1} - B_\alpha = A_\alpha,\ B_{\alpha+2} - B_{\alpha+1} = A_{\alpha+1} \ldots B_n - B_{n-1} = A_{n-1}$$

und durch Addition aller dieser Gleichungen:

$$A_\alpha + A_{\alpha+1} + A_{\alpha+2} + \ldots + A_{\alpha+n-1} = B_{\alpha+n} - B_\alpha;$$

die Reihe links ist also summirbar.

Beispiel. Es ist:

$$x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h] - (x-h)\,x(x+h)\ldots[x+(m-2)h]$$
$$= x(x+h)\ldots(x+\overbrace{m-2}h)\,mh.$$

Also wenn man $x(x+h)\ldots[x+(m-1)h] = f(x,m)$ setzt, so ist:

$$f(\alpha, m-1) + f(\alpha+h, m-1) + \ldots + f[\alpha+(n-1)h, m-1]$$
$$= [f(\alpha+(n-1)h, m) - f(\alpha-h, m)]\ \frac{1}{mh}.$$

Aus dieser Reihe ergibt sich wieder der Ausdruck für die Binomialcoefficienten, wenn man $h=1$ setzt, und durch $1\cdot 2\ldots m-1$ dividirt.

Es ist ferner:

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]} - \frac{1}{(x-h)x\ldots[x+(m-2)h]}$$
$$= \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-2)h]}\left(\frac{1}{x+(m-1)h} - \frac{1}{x-h}\right)$$
$$= -mh\,\frac{1}{(x-h)x(x+h)\ldots[x+(m-1)h]}.$$

Also, wenn man setzt:

$$\varphi(x,m) = \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]},$$

so ergibt sich:

$$\varphi(\alpha, m+1) + \varphi(\alpha+h, m+1) + \ldots + \varphi(\alpha+(n-1)h, m+1)$$
$$= -\frac{1}{mh}[\varphi(\alpha+nh, m) - \varphi(\alpha, m)] = \frac{\varphi(\alpha,m) - \varphi(\alpha+nh, m)}{mh}.$$

Setzt man also z. B. $h=1$, $m=1$, so kommt:

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \ldots + \frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+n}.$$

Digitized by Google

B. Anwendung der bestimmten Integrale.

Sehr viele, namentlich unendliche Reihen lassen sich durch bestimmte Integrale summiren. Jedoch ist diese Summation natürlich der Beschränkung unterworfen, die sich aus den Eigenschaften der bestimmten Integrale selbst ergibt, namentlich dem Umstande, dass in den Grenzen einer Integration der Differenzialquotient nicht discontinuirlich werden darf. Zu dieser Beschränkung aber kommt noch die andere hinzu, dass die Summenformel nur so lange gilt, als die fragliche Reihe convergirt. Einige Beispiele des hierbei einzuschlagenden Verfahrens gibt der Artikel: Quadratur. Wir fügen noch andere hinzu.

Sei gegeben:

$$S_n = \frac{a+b}{a_1+b_1}x + \frac{2a+b}{2a_1+b_1}x^2 + \frac{3a+b}{3a_1+b_1}x^3 + \ldots + \frac{na+b}{na_1+b_1}x^n. \qquad 1)$$

Gehen wir von der Formel aus:

$$\frac{1}{u} = \int_0^\infty e^{-\alpha u}\, d\alpha$$

und setzen für u den Ausdruck sa_1+b_1 so kommt:

$$\frac{sa+b}{sa_1+b_1}x^s = \int_0^\infty (sa+b)\, e^{-\alpha(sa_1+b_1)}x^s\, d\alpha$$

$$= a\int_0^\infty s e^{-\alpha b_1} e^{-sa_1\alpha}x^s\, d\alpha + b\int_0^\infty e^{-\alpha b_1} e^{-sa_1\alpha}x^s\, d\alpha. \qquad 2)$$

Wenn man den Ausdruck:

$$v+v^2+v^3+\ldots+v^n = \frac{v^{n+1}-1}{v-1}$$

differenziirt, so ergibt sich:

$$1+2v+\ldots+nv^{n-1} = \frac{nv^{n+1}-(n+1)v^n+1}{(v-1)^2}. \qquad 3)$$

Setzt man nun in Formel 2) für s nach einander 1, 2, 3 . . . n, so kommt:

$$S_n = a\int_0^\infty e^{-\alpha b_1} \sum_{s=1}^{s=\infty} s(e^{-\alpha a_1}x)^s\, d\alpha + b\int_0^\infty e^{-\alpha b_1} \sum_{s=1}^{s=\infty} (e^{-a_1\alpha}x)^s\, d\alpha,$$

also mit Benutzung der Formel 3):

$$S_n = a\int_0^\infty e^{-\alpha(a_1+b_1)} \left\{ \frac{ne^{-(n+1)}x^{n+2} + n + 1e^{-na_1\alpha}x^{n+1} + x}{(e^{-\alpha a_1}x-1)^2} \right\} d\alpha$$

$$+ b\int_0^\infty e^{-\alpha(a_1+b_1)}\, \frac{x(e^{-na_1\alpha}x^n-1)}{e^{-a_1\alpha}x-1}\, d\alpha.$$

Sind u_1, u_2, u_3 die Glieder unserer Reihe, so wird $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sich offenbar der Grösse x nähern, und zur Convergenz ist es daher hinreichend, dass x kleiner als Eins ist. Die so eben summirten Reihen convergiren aber nur wenn $e^{-a_1\alpha}x$ kleiner als Eins ist. Dies findet, vorausgesetzt, dass x kleiner Eins ist, immer in den Grenzen Null und Unendlich statt, wenn a_1 positiv ist, — eine Bedingung, die übrigens auch stattfinden muss, damit das bestimmte Integral von welchem wir ausgingen, überhaupt anwendbar sei, denn sonst würde von einem gewissen s an $\frac{1}{sa_1+b_1}$ negativ werden.

Machen wir also diese Beschränkung und sei S der Werth der vorgelegten Reihe, wenn sie bis ins Unendliche fortgesetzt wird; man hat dann:

Digitized by Google

$$S = a\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(a_1+b_1)x}}{(e^{\alpha a_1 x}-1)^a}d\alpha + b\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(a_1+b_1)}}{1-e^{-a_1\alpha x}}d\alpha$$
$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(a_1+b_1)}}{1-e^{a_1\alpha x}}\left\{b+\frac{ax}{1-e^{a_1\alpha x}}\right\}d\alpha.$$

Betrachten wir ferner die Reihe:

$$S_n = \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+n-1)}x^n.$$

Diese Reihe ist ein besonderer Fall der hypergeometrischen; sie nimmt die Gestalt einer gewöhnlichen geometrischen Reihe an, wenn $a = b$ ist. Die Reihe convergirt offenbar, sobald x kleiner als Eins ist. Nun ist:

$$\frac{a(a+1)\ldots(a+s-1)}{b(b+1)\ldots(b+s-1)} = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(b+s)}.$$

In die bekannte Formel:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

wo

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}du}{(1+u)^{\alpha+\beta}}$$

ist, setzen wir jetzt:

$$a = a+s, \quad \alpha+\beta = b+s,$$

woraus dann folgt:

$$\beta = b-a,$$

also:

$$\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(b+s)} = \left(\frac{a+s}{b-s}\right)\frac{1}{\Gamma(b-a)}$$

und

$$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(b+s)} = \left(\frac{a+s}{b-a}\right)\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)},$$

Die Anwendbarkeit der Formel setzt voraus, dass b grösser als a ist. Setzt man wieder:

$$\left(\frac{a+s}{b-a}\right) = \int_0^\infty \frac{u^{b-a-1}du}{(1+u)^{b+s}}$$

und wenn man für s alle Zahlen von 1 bis n setzt, ergibt sich für unsere Reihe:

$$S_n = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^\infty \frac{u^{b-a-1}}{(1+u)^b}\sum_{s=1}^{s=n}\left\{\frac{x^s}{(1+u)^s}\right\}du,$$

also:

$$S_n = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^\infty \frac{xu^{b-a-1}}{(1+u)^{b+1}}\frac{1-\left(\frac{x}{1+u}\right)^n}{1-\frac{x}{1+u}}du,$$

so lange x, wie es doch sein muss, kleiner als Eins ist, wird auch in den Grenzen der Integration $\frac{x}{1+u}$ ein echter Bruch sein, und man hat, wenn man unter S die Summe der unendlich gedachten Reihe versteht:

Digitized by Google

$$S = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)} \int_0^\infty \frac{x u^{b-a-1}\,du}{(1+u)^b\,(1+u-x)}.$$

Dieses Integral setzt voraus, dass b grösser als a ist, und a und b positiv sind. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt unsere Summenformel nicht die Reihe wieder.

Die hypergeometrische Reihe in ihrer allgemeinsten Gestalt hat die Form:

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{a}{b}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}\,\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\,x^2 + \ldots$$

Wir kommen im nächsten Abschnitt auf sie nochmal zurück. Mit derselben hat sich Gauss, nach ihm Kummer beschäftigt. Schwierigkeit macht die Summation derselben, sei es durch bestimmte Integrale, sei es durch eine Differenzialgleichung namentlich für den Fall imaginärer Variabeln. In einer vorzüglichen Abhandlung hat Riemann in neuester Zeit diesen Gegenstand erledigt, zugleich aber den durch die Reihe definirten Functionen eine allgemeinere von ihrer Convergenz unabhängige Definition gegeben.

Wir geben demnächst noch einen allgemeinen Satz, der für die Verwandlung von Reihen in bestimmte Integrale sehr oft angewandt wird. Es rührt dieser Satz von Parseval her.

Seien zwei summirbare Reihen gegeben:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$\psi(x) = b_0 + b x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n;$$

nun ist, wie leicht zu verificiren:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{st\,i}\,dt = 0$$

für jedes ganze s, jedoch nicht für $s = 0$. Im letzteren Falle ist 2π der Werth des Integrals.

Wir haben nun:

$$\varphi(e^{ti}) = a_0 + a_1 e^{ti} + a_2 e^{2ti} + \ldots + a_n e^{nti}$$

$$\psi(e^{-ti}) = b_0 + b_1 e^{ti} + b_2 e^{2t} + \ldots + b_n e^{nti};$$

multiplicirt man beide Gleichungen und integrirt in den Grenzen π und $-\pi$, so werden alle Glieder rechts der Null gleich, bis auf dasjenige, welches keine Exponentialgrösse enthält. Man hat also:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{ti})\,\psi(e^{-ti})\,dt = 2\pi(a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n). \qquad \text{A)}$$

Sind die Functionen φ und ψ identisch, so hat man noch:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{ti})\,\varphi(e^{-ti})\,dt = 2\pi(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2). \qquad \text{B)}$$

Beispiele. Sei zu summiren die Reihe:

$$f(u) = 1 + u^2 + \frac{u^4}{(1\cdot 2)^2} + \frac{u^6}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \ldots,$$

so setzen wir:

Digitized by Google

$$q(x) = 1 + ux + \frac{u^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots = e^{ux}.$$

Die Formel B) gibt dann:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ue^{ti} + ue^{-ti}}\, dt,$$

oder:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2u\cot t}\, dt.$$

Ist dagegen:

$$f(u) = 1 - u^2 + \frac{u^4}{(1\cdot 2)^2} - \frac{u^6}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \ldots$$

so setzen wir:

$$q(x) = 1 + ux - \frac{u^2x^2}{1\cdot 2} + \ldots = e^{ux}$$

$$\psi(x) = 1 - ux + \frac{u^2x^2}{1\cdot 2} - \ldots = e^{-ux}.$$

Es gibt dann die Formel *A*):

$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{u(e^{ti} - e^{-ti})}\, dt,$$

d. h.:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2ui\sin t}\, dt.$$

Da hier der imaginäre Theil verschwindet, so ist:

$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2u\sin t)\, dt.$$

Oder wenn man das Integral in vier andere theilt, die einander gleich sind:

$$f(u) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u\sin t)\, dt.$$

C. Anwendung der Quadraturen und der Differenzialgleichungen.

Wie Differenzialgleichungen und Quadraturen oft durch Reihen zu bestimmen sind, so werden auch Reihen umgekehrt auf Differenzialgleichungen und Quadraturen zurückgeführt. Es ist dies von Wichtigkeit, weil sehr oft Functionen, die zunächst durch Reihen definirt sind, welche nicht immer convergiren, sich auf alle Werthe der Variabeln erweitern lassen, wenn man die Differenzialgleichung, welche diesen Beschränkungen nicht unterliegt und welche die Reihe erfüllt, als Definition gelten lässt.

Sei wieder:

$$S = \frac{a+b}{a_1+b_1}x + \frac{2a+b}{2a_1+b_1}x^2 + \frac{3a+b}{3a_1+b_1}x^3 + \ldots + \frac{na+b}{na_1+b_1}x^n.$$

Indem wir diese Reihe mit ax^ν multipliciren, und dann nach x differenziiren erhalten wir:

$$\frac{a\cdot d(x^\nu S)}{dx} = a(1+\nu)\frac{a+b}{a_1+b_1}x^\nu + \frac{a(2+\nu)(2a+b)}{2a_1+b_1}x^{\nu+1} + \ldots + \frac{a(n+\nu)(na+b)}{na_1+b_1}x^{n+\nu-1}.$$

Digitized by Google

Wir setzen nun:

$$\alpha = a^1, \quad \alpha\nu = b_1$$

und erhalten:

$$\frac{a_1 d\left(\frac{b_1}{x^{a_1}} S\right)}{dx} = (a+b)\, x^{\frac{b_1}{a_1}} + (2a+b)\, x^{1+\frac{b_1}{a_1}} + \ldots + (na+b)\, x^{n-1+\frac{b_1}{a_1}}.$$

Diesen Ausdruck, der sich übrigens leicht direct summiren lässt, multipliciren wir mit $\alpha x^{\nu} dx$, und integriren. Dies gibt:

$$\alpha a_1 \int x^{\nu} d\,(x^{\frac{b_1}{a_1}} S) = \frac{\alpha a_1 (a+b)}{a_1 + b_1 + \nu a_1}\, x^{1+\frac{b_1}{a_1}+\nu} + \ldots$$

$$+ p a_1 \frac{na+b}{n a_1 + b_1 + \nu a^1}\, x^{n+\frac{b_1}{a_1}+\nu}.$$

Der Factor $na+b$ aber verschwindet, wenn man setzt:

$$n\alpha a a_1 = na, \quad \alpha b a_1 = b_1 + \nu a_1,$$

also:

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad \nu = \frac{b}{a} - \frac{b_1}{a_1};$$

dies gibt:

$$\frac{a_1}{a} \int x^{\frac{b}{a}-\frac{b_1}{a_1}} d\,(x^{\frac{b_1}{a_1}} S) = x^{\frac{b}{a}+1} + x^{\frac{b}{a}+2} + \ldots x^{\frac{b}{a}+n} = x^{\frac{b}{a}+1} \frac{1-x^n}{1-x},$$

woraus dann folgt:

$$S = \frac{a \int x^{\frac{b_1}{a_1}-\frac{b}{a}} d\left\{ x^{\frac{b+a}{a}} \frac{1-x^n}{1-x} \right\}}{a_1 x^{\frac{b_1}{a_1}}}.$$

Betrachten wir jetzt die hypergeometrische Reihe:

$$S = \frac{a}{b} x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} x^3 + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} x^n.$$

Wir multipliciren mit x^p und differenziiren dann:

$$\frac{d(x^p S)}{dx} = \sum_{s=1}^{s=n} (p+s) \frac{a(a+1)\ldots(a+s-1)}{b(b+1)\ldots(b+s-1)} x^{p+s-1},$$

also, wenn man $p = b-1$ setzt, fällt im Faktor der Nenner weg, d. h.:

$$\frac{d(x^{b-1} S)}{dx} = \sum_{s=2}^{s=n} \left(\frac{a\ a+1)\ldots(a+s-1)}{b(b+1)\ldots(b+s-2)} x^{s+b-2} \right) + a x^{b-1}.$$

Wir multipliciren mit x^q und integriren:

$$\int x^q d\,(x^{b-1} S) = \sum_{s=2}^{s=n} \left(\frac{a(a+1)\ldots(a+s-1)\, x^{s+b+q-1}}{b(b+1)\ldots(b+s-2)(s+b+q-1)} \right) + \frac{a x^{b+q}}{b+q},$$

also, wenn man $b+q-1 = a-1$ setzt, wo dann ein Factor des Zählers wegfällt:

Digitized by Google

$$\int x^{a-b} d(x^{b-1} S) = \sum_{s=2}^{s=n} \left(\frac{a(a+1)\dots(a+s-2) x^{a+s-1}}{b(b+1)\cdot\dots\cdot(b+s-2)} \right) + x^a.$$

Die Summe rechts ist offenbar gleich $x^a \left(S - \frac{a(a+1)\dots(a+n+1)x^n}{b(b+1)\dots b+n-1)} \right)$, also wenn man die letzte Gleichung wieder differenziirt:

$$x^{a-b} d(x^{b+1} S) = dx^a \left(S - \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} x^n + 1 \right).$$

Dies ist die Differenzialgleichung, welche unsere Reihe definirt. Zur Bestimmung der Constanten ist noch die Bedingung hinzuzufügen, dass für $x = 0$ auch $S = 0$ ist. Erstreckt sich aber die Reihe ins Unendliche und ist x kleiner als Eins, so erhält man:

$$x^{a-b} d_i(x^{b-1} S) = d[x^a(S+1)],$$

oder:

$$x(1-x)\frac{dS}{dx} + (b - 1 - a_i x) S - a x = 0.$$

Setzt man hierin $S = uv$, so kommt:

$$x(1-x) u \frac{dv}{dx} + x(1-x) v \frac{du}{dx} + (b - 1 + ax) uv - ax = 0,$$

also, wenn man u durch die Gleichung:

$$x(1-x)\frac{du}{dx} + (b-1+ax) u = 0$$

bestimmt, so ist:

$$(1-x) u \frac{dv}{dx} = a.$$

Die vorletzte Gleichung aber gibt:

$$\frac{d \lg u}{dx} = \frac{ax+1-b}{x(1-x)} = \frac{1-b}{x} + \frac{a-b+1}{1-x}$$

also:

$$\lg u = \lg x^{1-b}(1-x)^{a-b+1}, \quad u = x^{1-b}(1-x)^{a-b+1}.$$

Man hat dann:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{a}{(1-x) u}$$

$$v = \int \frac{dx}{(1-x)^{a-b+2} x^{1-b}}$$

also, da $S = uv$ war:

$$S = a x^{1-b}(1-x)^{a-b+1} \int \frac{dx}{(1+x)^{a-b+2} x^{1-b}}.$$

Nehmen wir jetzt die allgemeine hypergeometrische Reihe:

$$S = \frac{\alpha}{\beta} \frac{a}{b} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} \frac{a(a+1)}{b(b+1)} x^2 + \dots,$$

die wir als ins Unendliche fortschreitend betrachten. Sei:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+s-1)} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_s,$$

so ist der Factor von x^s:

Digitized by Google

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_s \left(\frac{a}{b}\right)_s = \frac{\Gamma(b)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+s)\cdot\Gamma(a+s)}{\Gamma(\beta+s)\cdot\Gamma(b+s)}$$
$$= \left(\frac{\alpha+s}{\beta-\alpha}\right)\left(\frac{a+s}{b-a}\right) \frac{\Gamma(b)\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(a)\ \Gamma(\alpha)\ \Gamma(b-a)\ \Gamma(\beta-\alpha)}.$$

Multiplicirt man mit x^s und nimmt die Summe so kommt, wenn:

$$H = \frac{\Gamma(b)\ \Gamma(\beta)}{\Gamma(a)\ \Gamma(\alpha)\ \Gamma(b-a)\ \Gamma(\beta-\alpha)}$$

gesetzt wurde:

$$S = H\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^{b-a-1}v^{\beta-\alpha-1}}{(1+u)^b(1+v)^\beta}$$

$$S = H\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^{b-a-1}v^{\beta-\alpha-1}}{(1+u)^b(1+v)^\beta} \sum_{s=1}^{s=\infty} \left\{\frac{x^s}{(1+u)^s(1+v)^s}\right\} du\,dv$$

$$= H\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x u^{b-a-1}v^{\beta-\alpha-1}}{(1+u)^b(1+v)^\beta} \frac{1}{(1+u)(1+v)-x}\, du\,dv.$$

Bemerkenswerth ist noch der Fall, wo $\beta = 1$ ist. Es ist dann:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_s = (-1)^s(-\alpha)_s,$$

wo $(-\alpha)_s$ der entsprechende Binomialcoefficient sein soll, und man hat:

$$(-\alpha)_s\left(\frac{a}{b}\right)_s = (-\alpha)_s \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}\left(\frac{a+s}{b-a}\right).$$

Also, wenn $G = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}$ gesetzt wird:

$$S = G\int_0^\infty \frac{u^{b-a-1}}{(1+u)^b} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s(-\alpha)_s x^s}{(1+u)^s}$$

und da die Summe den Werth hat: $\left(1-\frac{x}{1+u}\right)^\alpha - 1$ so kommt:

$$S = G\int_0^\infty \frac{u^{b-a-1}}{(1+u)^b}\left[\left(1-\frac{x}{1+u}\right)^\alpha - 1\right] du.$$

Durch eine Differenzialgleichung lässt sich die Reihe ganz wie der obige specielle Fall definiren.

Nehmen wir schliesslich noch die Reihe:

$$S = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \ldots$$

die wir uns gleich als ins Unendliche fortschreitend denken. Differenziirt man, und multiplicirt dann mit x, so kommt:

$$x\frac{dS}{dx} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} + \ldots$$

Differenziirt man abermals, so ergibt sich:

$$\frac{dS}{dx} + x\frac{d^2S}{dx^2} = -x\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \ldots\right).$$

Der Ausdruck in der Klammer ist wieder die ursprüngliche Reihe.

Man hat also:

$$\frac{dS}{dx} + x\frac{d^2S}{dx^2} + xS = 0.$$

Digitized by Google

Da diese Gleichung von zweiter Ordnung ist, so sind zwei Constanten zur vollständigen Definition nöthig. Offenbar nun ist für $x = 0$:

$$S = 1 \text{ und } \frac{dS}{dx} = 0,$$

womit diese Constanten bestimmt sind.

Relativ.

In Beziehung zu andern Gegenständen. Man spricht von dem relativen Orte eines Körpers, worunter man seine Stellung zu andern Körpern versteht, wobei die letztern selbst in Bewegung sein können. Relative Bewegung ist die Aenderung des relativen Ortes. Denke man sich z. B. zwei Punkte A und B, welche sich in grader Linie von einander entfernen, so dass A in der Secunde 2, B aber 3 Fuss zurücklegt; so ist hiermit ihre absolute Bewegung charakterisirt. Die relative Bewegung von B zu A besteht aber darin, dass sich ersterer Punkt in der Secunde $2+3$ oder 5 Fuss von A entfernt und dies ist die relative Geschwindigkeit von B. Es ist klar, dass ein Körper in Ruhe sein kann, und doch in Bezug auf einen andern bewegten eine relative Bewegung hat (vergl. den Artikel: Bewegung). In der Astronomie, wo es sich um die Stellung der Sterne zur Erde und Sonne handelt, ist immer von relativen Orten und Bewegungen die Rede. Insofern das ganze Sonnensystem noch eine gemeinschaftliche Bewegung haben kann, und bewiesener Maassen haben muss, die sich aber unserer Beobachtung entzieht, kann von genauerer Kenntniss der absoluten Bewegung und Orte der Himmelskörper nicht die Rede sein.

Rente. (Praktisches Rechnen.)

Rente im allgemeineren Sinne heissen überhaupt die Einkünfte einer Person, sie mögen von Capitalien, Immobilien oder sonstigem Besitz herrühren, der Ertrag einer bestimmten Beschäftigung sein, oder auch von andern Personen oder Instituten, also etwa vom Staate, einer Rentenanstalt, oder einer Privatperson auf Grund irgend eines Abkommens geleistet werden.

Die vom festen Besitze herrührenden Renten sind immerwährende, d. h. sie kommen dem Besitzer und seinem Rechtsnachfolgern zu, so lange überhaupt der Besitz in seinen Händen ist.

Auch von andern Personen oder Instituten zu gewährende Renten können immerwährende sein. Dieser Art z. B. sind die aus dem Erbpachtsverhältniss herrührenden Summen. Auch die Grund- und Capitalsteuern können als dem Staate zu gewährende immerwährende Rente betrachtet werden. Dagegen sind die Summen, welche irgend ein Staat einer Person und deren Rechtsnachfolgern für die Aufgabe von Rechten oder Länderbesitz zu geben verpflichtet ist, immerwährende vom Staate zu zahlende Renten. Derart sind z. B. diejenigen, welche die meisten Deutschen Staaten der Thurn-Taxis'schen Familie für Aufgabe des Postmonopols zahlen.

Die Aufhebung immerwährender Renten wird, abgesehen von den Umständen (erschwerenden oder erleichternden), welche die Gesetzgebung der verschiedenen Staaten vorschreibt, durch die Gewährung eines der Rente entsprechenden Capitals möglich gemacht. Dies Capital müsste, abstract genommen ein solches sein, welches nach Landes üblichem Zinsfusse eine der Rente gleichen Ertrag gibt. Im Allgemeinen aber wird man in den meisten Fällen ein kleineres Capital zu zahlen haben, da in der freien Verfügung über dasselbe ein wichtiges Recht hinzutritt, welches der Rentenempfänger nicht hatte.

Insofern oft bei der Stiftung von Renten, (z. B. bei Fideicommissen) die Rechte späterer Generationen ausdrücklich gewahrt sind, kann aber eine solche Aufhebung oder Ablösung unzulässig werden.

Den immerwährenden Renten gegenüber aber stehen die Renten auf Zeit, oder Renten im engern Sinne. Es sind dies solche, die auf eine bestimmte oder unbestimmte Zeit, also etwa während einer Anzahl von Jahren oder auch während der Lebensdauer irgend einer Person zu gewähren sind. Diese letztere Art nennt man Leibrenten. Offenbar kann eine immerwährende Rente in eine Zeit- oder Leibrente verwandelt werden, wenn man an die Stelle der ersteren eine angemessene erhöhte Rente der letzteren Art eintreten lässt. Hieran kann man auch diejenigen Renten reihen, welche von einem entfernteren (bestimmten oder unbestimmten) Zeitpunkte an zu zahlen sind, und hierbei wären noch die Fälle zu unterscheiden, wo ein Endtermin in der Zahlung der Rente eintritt oder nicht. Wir wollen diese verschiedenen Arten von Renten an einigen Beispielen erläutern.

A. Ein Beamter erhält durch Bezahlung gewisser Pensionsbeiträge das Recht, von der eintretenden Arbeitsun-

fähigkeit an bis zu seinem Tode eine gewisse jährliche Summe zu erhalten. Hier ist Anfangs- und Endpunkt der Rente vorhanden, aber unbestimmt. Dasselbe ist bei den Wittwengehalten der Fall.

B. Durch Testamentsverfügung ist festgesetzt, dass eine Person, von ihrer Grossjährigkeit an in den Besitz eines Hauses, welches einen gewissen Ertrag hat, treten soll. Die Rente ist eine immerwährende mit festem Anfangspunkt. Soll aber eine dritte Person den Niessbrauch dieses Hauses haben, und erst bei ihrem Tode die erstere in Besitz treten, so ist der Anfangspunkt unbestimmt.

C. Der erwähnten Person, welche nach einer bestimmten oder unbestimmten Zeit in Besitz des Hauses tritt, wird von einem Andern oder einer Gesellschaft jährlich eine gewisse Rente zu ihrem Lebensunterhalte gewährt, wofür der Geber bei der Uebernahme der Erbschaft dem Vertrage gemäss zu entschädigen ist. Die Rente ist hier eine Zeitrente mit festem Schlusstermin im ersten Falle, mit unbestimmtem im letztern.

Dem Prinzipe nach sind zu den Renten mit Anfangs- und Schlusstermin, auch die Lebensversicherungssummen, Sterbe- und Aussteuergelder, welche Personen oder Gesellschaften zu leisten haben, zu rechnen. Nur dass hier die Rente eben nur ein einziges Mal zu bezahlen ist.

Rentenanstalten und Gesellschaften haben den Zweck, Renten irgend einer der erwähnten Arten denjenigen Personen zuzusichern, welche dafür eine gewisse, in einem oder mehreren Terminen zu zahlende Summe erlegen.

Insofern hier unbestimmte Anfangs- und Schlusstermine eintreten, sind diese auf gewisse Durchschnittszahlen, (mittlere Lebensdauer eines Menschen, mittlere Zeit des Eintritts der Arbeitsunfähigkeit, u. s. w.) zurückzuführen.

Die verschiedenen Fälle, welche hierbei eintreten können, lassen sich folgenden Fundamentalaufgaben unterordnen.

Aufgabe 1. Von einem Capital C, welches zu p Procent n Jahre lang aussteht, sollen die einlaufenden Zinsen immer wieder ausgeliehen werden, welches ist der Werth K des Capitals nach Verlauf der n Jahre.

Auflösung. Die Lösung der Aufgabe gibt die Zinszinsrechnung. Nach Verlauf eines Jahres wächst das Capital an zu

$$C + \frac{Cp}{100} = C\left(1 + \frac{p}{100}\right) = Cq,$$

wenn man $q = 1 + \frac{p}{100}$ setzt. Diese Grösse q wollen wir den Zinsfuss nennen. Es ist also das Capital mit q zu multipliciren. Da nun für das zweite Jahr Cq das Capital ist, so wächst dies nach zwei Jahren zu $Cq \cdot q = Cq^2$ u. s. w. also nach n Jahren zu Cq^n heran; man hat also:

$$K = Cq^n$$

Diese Grösse K heisst der zukünftige Werth von C nach n Jahren.

Soll also eine bestimmte Summe K durch allmäliges Anwachsen eines Capitals C gewonnen werden, und ist C gesucht, so hat man:

$$C = \frac{K}{q^n}.$$

Diese Summe C heisst der jetzige Werth einer nach n Jahren fälligen Summe K.

Die allgemeinste Aufgabe der Rentenrechnung ist nun die folgende:

Aufgabe 2. Einer Person oder Gesellschaft A werden gezahlt die Summen $C, C_1, C_2 \ldots$ in den Zeiträumen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ Dagegen ist A verpflichtet, bezüglich nach Verlauf der Zeiträume $\beta, \beta_1, \beta_2 \ldots$ die Rente $R, R_1, R_2 \ldots$ zu zahlen. Welche Beziehung findet zwischen diesen Grössen statt.

Auflösung. Sei M der jetzige Werth der vom Versicherten zu gewährenden Zahlung, N der jetzige Werth der Zahlung, welche der Versicherer zu leisten hat, so ist offenbar:

$$1) \quad M = \frac{C}{q^\alpha} + \frac{C_1}{q^{\alpha_1}} + \frac{C_2}{q^{\alpha_2}} + \ldots$$

$$2) \quad N = \frac{R}{q^\beta} + \frac{R_1}{q^{\beta_1}} + \frac{R_2}{q^{\beta_2}} + \ldots$$

$$3) \quad M = N$$

und dies sind die Fundamentalgleichungen der Rentenrechnung.

Die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \beta_1, \beta_2 \ldots$ sind in der practischen Anwendung oft nicht genau zu ermitteln, sondern insofern es sich um die Lebensdauer, Arbeitsunfähigkeit u. s. w. handelt, muss man die Gesetze der Wahrscheinlichkeit anwenden. Dazu dienen Tafeln, welche sich auf die Erfahrungen langer Zeiträume gründen. Insofern die Versicherer

gewöhnlich Gesellschaften sind (Rentenbanken, Wittwenkassen, Lebensversicherungsanstalten), die gleiche Verträge mit vielen Personen eingehen, wird hier eine Ausgleichung eintreten, da der langen Lebensdauer einer Person, die kurze einer andern gegenüberstehen wird.

Sollen aus Gleichung 3) die Grössen C oder R ermittelt werden, so müssen alle C oder alle R in einer bekannten Beziehung stehen. Oft wird diese Beziehung die der Gleichheit sein, und man hat dann:

$$4)\quad C\left(\frac{1}{q^{\alpha}}+\frac{1}{q^{\alpha_1}}+\frac{1}{q^{\alpha_2}}+\ldots\right) = R\left(\frac{1}{q^{\beta}}+\frac{1}{q^{\beta_1}}+\frac{1}{q^{\beta_2}}+\ldots\right).$$

Findet die Einzahlung C oder die Auszahlung R nur einmal statt, so sind die übrigen C oder die übrigen R der Null gleich.

Sind die Zeiträume, in welchen die Zahlungen erfolgen, in Gleichung 4) gleich, so hat man:

$$\alpha_2-\alpha=2(\alpha_1-\alpha),$$
$$\alpha_3-\alpha=3(\alpha_1-\alpha),$$
$$\beta_2-\beta=2(\beta_1-\beta),$$
$$\beta_3-\beta=3(\beta_1-\beta).$$

Sei noch $\alpha=0$, d. h. finde die erste Zahlung gleich statt, so ist, wenn man wieder unter M den Werth der zu empfangenden, unter N den der zu leistenden Zahlung versteht, und s Zahlungen geleistet, t empfangen würden:

$$M=C\left(1+\frac{1}{q^{\alpha_1}}+\frac{1}{q^{2\alpha_1}}+\ldots+\frac{1}{q^{(t-1)\alpha_1}}\right)$$

$$N=\frac{R}{q^{\beta}}\left(1+\frac{1}{q^{\beta_1-\beta}}+\frac{1}{q^{2(\beta_1-\beta)}}+\ldots+\frac{1}{q^{(s-1)(\beta_1-\beta)}}\right)$$

und da beide Ausdrücke geometrische Reihen sind, so hat man:

$$5)\quad M=\frac{C[q^{t(\alpha_1-\alpha)}-1]}{q^{(t-1)(\alpha_1-\alpha)}(q^{\alpha_1-\alpha}-1)}$$

$$6)\quad N=\frac{R[q^{s(\beta_1-\beta)}-1]}{q^{\beta+(s-1)(\beta_1-\beta)}(q^{\beta_1-\beta}-1)}.$$

Was die Anwendung der Formeln 1) bis 3) auf Fälle, die den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit unterliegen, anbetrifft, so ist Folgendes zu bemerken. Es ist dann den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemäss anzunehmen, dass derselbe Vertrag mit einer grösseren Anzahl also mit n Personen gemacht werde. Von diesen werden nach Verlauf der α, α_1, α_2 . . . Jahre bezüglich m, m_1, m_2 . . . nach den für diesen Zweck entworfenen Tafeln, noch in der Lage oder verpflichtet sein zu zahlen, (also z. B. noch am Leben, oder noch arbeitsfähig, wie eben der Vertrag lautet), dagegen werden nach β, β_1, β_2 . . . Jahren p, p_1, p_2 . . . in der Lage sein die Rente zu empfangen, (z. B. die Wittwen der Gestorbenen, u. s. w.). In den meisten Fällen werden für β, β_1, β_2 . . . die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 . . . zu setzen sein, insofern in jedem Jahre dergleichen eintritt, auch wird die Rente R gewöhnlich für jedes Jahr dieselbe sein. Es sind also im allgemeinen Falle von dem Versicherer vereinnahmt statt der Summen C, C_1, C_2 . . . bezüglich die Summen mC, m_1C_1, m_2C_2 . . . und zu verausgaben die Summen pR, p_1R_1, p_2R_2 . . . , so dass man hat:

$$1a)\quad M=\frac{mC}{q^{\alpha}}+\frac{m_1C_1}{q^{\alpha_1}}+\frac{m_2C_2}{q^{\alpha_2}}+\ldots$$

$$2a)\quad N=\frac{pR}{q^{\beta}}+\frac{p_1R_1}{q^{\beta_1}}+\frac{p_2R_2}{q^{\beta_2}}+\ldots$$

Wenden wir dies zunächst auf ein Zahlenbeispiel an.

Beispiel. Ein 30jähriger Mann will sich durch Zahlung einer bestimmten Summe das Recht sichern, vom 50. Jahre bis zu seinem Tode eine Rente von 200 Thalern zu beziehen. Wieviel hat er zu zahlen?

Wir geben zuerst die gewöhnliche Auflösung dieser Aufgabe, jedoch nur um das Unzureichende derselben zu zeigen.

Die mittlere Lebenserwartung eines 30jährigen Mannes ist für Berlin noch 26 Jahr, er würde also die Rente nach 20 Jahren und dann noch sechsmal beziehen.

Es ist dann da die Einzahlung nur einmal und gleich erfolgt:

$$\alpha=0,\quad C_1=C_2=\ldots=0,$$

also:

$$M=C,$$

dagegen ist in Formel 6) zu setzen:

Digitized by Google

$\beta = 20$, $t = 7$, $\beta_1 - \beta = 1$, $R = 200$, also:

$$C = \frac{200}{q^{26}} \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1}.$$

Also, wenn etwa 4½ pCt. gerechnet werden, also $q = 1{,}045$ ist:

$$C = \frac{200 \cdot 0{,}360682}{0{,}045 \cdot 3{,}140679} = 510\tfrac{1}{4} \text{ Thlr.}$$

Diese Auflösung ist jedoch eine höchst ungenaue und zwar zum Nachtheil des Versicherers. Der Ausgleichung wegen, muss nämlich jeder Chance, welcher eine längere Auszahlung der Rente entspricht, eine entgegengesetzte vorhanden sein, welche sie compensirt. Da nun jedenfalls unter den 30 jährigen Leuten viele älter als 56 Jahr alt werden, so stehen allerdings denjenigen die das 57 ste, 58 ste bis 63 ste Jahr erreichen, diejenigen gegenüber, die im 55 sten, 54 sten bis 50 sten Jahre sterben. Denen aber, die älter als 63 Jahre werden, stehen für das Interesse des Versicherers keine solche gegenüber. Es müsste dann, um vollständig gleiche Chancen zu haben, von den Erben derer, die von dem 56 sten Jahre sterben, eine abermalige Zahlung an die Gesellschaft verlangt werden, was doch schwerlich angemessen wäre. Es ist also folgendermassen zu verfahren.

Nach der den Erfahrungen der Preussischen Wittwenkasse entnommenen Sterblichkeitsliste erreichen von 9361 30 jährigen Männern

				das 50 ste Jahr
				7223 Männer,
das 51 ste	52 ste	53 ste	54 ste	
7077	6926	6770	6608	
55 ste	56 ste	57 ste	58 ste	
6439	6263	6080	5890	
59 ste	60 ste	61 ste	62 ste	
5693	5489	5279	5063	
63 ste	64 ste	65 ste	66 ste	
4841	4613	4379	4139	
67 ste	68 ste	69 ste	70 ste	
3893	3642	3388	3133	
71 ste	72 ste	73 ste	74 ste	
2878	2624	2374	2132	
75 ste	76 ste	77 ste	78 ste	
1902	1687	1488	1305	
79 ste	80 ste	81 ste	82 ste	
1137	982	838	708	
83 ste	84 ste	85 ste	86 ste	
575	452	334	220	
87 ste	88 ste Jahr			
109	0 Männer.			

Nimmt man also an, dass mit 9361 Männern von 30 Jahren in der That dieser Vertrag geschlossen sei, so ist in Formel 2 a):

$$R = R_1 = R_2 = 200$$

zu setzen:

$$\beta = 20, \quad \beta_1 = 21, \quad \beta_2 = 22 \ldots$$
$$p = 7223, \quad p_1 = 7077 \ldots;$$

man hat dann:

$$N = 200 \left\{ \frac{p}{q^{20}} + \frac{p_1}{q^{21}} + \frac{p_2}{q^{22}} + \ldots + \frac{p^{37}}{q^{57}} \right\}$$

wo $p = 1{,}045$ ist. Man erhält durch Einsetzen der Werthe von $\frac{1}{q^{20}}$, $\frac{1}{q^{21}} \ldots$:

$$\frac{N}{200} = \begin{array}{rrrr} & p & \frac{1}{q^\beta} & p & \frac{1}{q^\beta} \\ & 7223 & \cdot\ 0{,}41464 & + 5489 & \cdot\ 0{,}26700 \\ + & 7077 & \cdot\ 0{,}39679 & + 5279 & \cdot\ 0{,}25550 \\ + & 6926 & \cdot\ 0{,}37970 & + 5063 & \cdot\ 0{,}24450 \\ + & 6770 & \cdot\ 0{,}36335 & + 4841 & \cdot\ 0{,}23397 \\ + & 6608 & \cdot\ 0{,}34770 & + 4613 & \cdot\ 0{,}22390 \\ + & 6439 & \cdot\ 0{,}33273 & + 4379 & \cdot\ 0{,}21425 \\ + & 6263 & \cdot\ 0{,}31840 & + 4139 & \cdot\ 0{,}20508 \\ + & 6080 & \cdot\ 0{,}30469 & + 3893 & \cdot\ 0{,}19620 \\ + & 5890 & \cdot\ 0{,}29157 & + 3642 & \cdot\ 0{,}18775 \\ + & 5693 & \cdot\ 0{,}27902 & + 3388 & \cdot\ 0{,}17967 \end{array}$$

Digitized by Google

p	$\frac{1}{q^\beta}$	p	$\frac{1}{q^\beta}$
+ 3133 ·	0,17193	+ 1137 ·	0,11569
+ 2878 ·	0,16453	+ 982 ·	0,11071
+ 2624 ·	0,15744	+ 838 ·	0,10594
+ 2374 ·	0,15066	+ 703 ·	0,10138
+ 2132 ·	0,14417	+ 575 ·	0,09701
+ 1902 ·	0,13796	+ 452 ·	0,09284
+ 1687 ·	0,13202	+ 334 ·	0,08884
+ 1488 ·	0,12634	+ 220 ·	0,08501
+ 1305 ·	0,12090	+ 109 ·	0,08135

Die Logarithmen sind:

Log. der Zahlen p	der Zahlen $\frac{1}{q^\beta}$	Log. $\frac{p}{q^\beta}$	Numerus.
3,85872	0,61763 — 1	3,47635	2995
3,84985	0,59857 — 1	3,44842	2808
3,84048	0,57368 — 1	3,41416	2595
3,83059	0,56038 — 1	3,39097	2460
3,82007	0,54120 — 1	3,36127	2298
3,80882	0,52205 — 1	3,33087	2142
3,79678	0,50297 — 1	3,29975	1994
3,78390	0,48387 — 1	3,26777	1853
3,77012	0,46180 — 1	3,23192	1706
3,75539	0,44560 — 1	3,20097	1588
3,73949	0,42651 — 1	3,16600	1466
3,72255	0,40739 — 1	3,12994	1349
3,70441	0,38828 — 1	3,09269	1239
3,68494	0,36922 — 1	3,05416	1159
3,66398	0,35005 — 1	3,01403	1033
3,64137	0,33102 — 1	2,97239	938
3,61690	0,31175 — 1	2,92865	849
3,59028	0,29270 — 1	2,88298	764
3,56134	0,27346 — 1	2,83480	684
3,52993	0,25455 — 1	2,78448	609
3,49596	0,23528 — 1	2,73124	539
3,45909	0,21617 — 1	2,67526	473
3,41896	0,19700 — 1	2,61596	413
3,37548	0,17911 — 1	2,55359	358
3,32879	0,15897 — 1	2,48776	307
3,27921	0,13968 — 1	2,41909	262
3,22712	0,12057 — 1	2,34769	223
3,17260	0,10140 — 1	2,27400	188
3,11561	0,08243 — 1	2,19804	158
3,05576	0,06371 — 1	2,11947	132
2,99211	0,04415 — 1	2,03626	109
2,92324	0,02490 — 1	1,94814	89
2,84696	0,00561 — 1	1,85257	71
2,75967	0,98682 — 2	1,74649	56
2,65514	0,96774 — 2	1,62288	42
2,52375	0,94861 — 2	1,47236	30
2,34242	0,92947 — 2	1,27239	19
2,08743	0,91086 — 2	0,94779	9

$$\frac{N}{200} = 36007$$

Es ist zu bemerken, dass bei den Logarithmen von $\frac{1}{q^\beta}$ nur vier Stellen berücksichtigt sind, was hier ausreicht. Es ist also:

Digitized by Google

$$N = 200 \cdot 36000 = 7200000.$$

Was die Grösse M anbetrifft, so ist $\alpha = 0$, und da einmalige Zahlung angenommen wurde

$$C_1 = C_2 = \ldots = 0,$$

also:

$$M = mC = 9361\,C,$$

es kommt also:

$$C = \frac{7200000}{9361} = 769 \text{ Thaler.}$$

Man sieht, wie bedeutend dies von der obigen ungenauen Lösung abweicht. Uebrigens werden Versicherungsanstalten nur einen geringeren Zinsfuss als $4\frac{1}{2}$ Procent bewilligen, auch Verwaltungskosten berechnen, wonach also die Versicherungssumme steigt. Die Rechnung ist, wie man sieht, eine ziemlich langwierige, und sie muss durch Tafeln vereinfacht werden.

Wenn der Versicherte statt eines bestimmten Capitals C jährlich eine gewisse Summe zahlen wollte, so ist in 1a) $m = 9361$ zu setzen, $m_1 = 9291$, da von 9361 30jährigen Männern 9291 das 31ste Jahr erreichen, $m_2 = 9219$, u. s. w., es ist ferner $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ u. s. w. zu nehmen und bis $\alpha_{19} = 19$ fortzufahren, indem man die Factoren m der Sterblichkeitstafel entnimmt. Schliesslich ist wieder $M = N$ zu setzen; sind alle C gleich, so kann auf diese Weise die jährlich zu zahlende Prämie ermittelt werden. Wir entschlagen uns im Uebrigen der zu berechnenden Beispiele, da diese ganz wie das eben gegebene Zahlenbeispiel zu behandeln sind.

Noch mehr Rechnung als die vorige Aufgabe, welche ins Gebiet der Alterversorgung gehört, machen die Wittwenpensionen. Ihnen liegt folgendes Princip zu Grunde:

Sei μ das Alter des Mannes, ν das der Frau, der erstere zahlt gleich die Summe C, und dann jährlich die Summe C_1 bis zu seinem Tode, oder falls seine Frau vor ihm stirbt, bis zum Tode der letzteren. Ueberlebt sie ihn, so soll sie von seinem Tode bis zu dem ihren die Rente R beziehen.

Man fingirt, um die Relation zwischen C, C_1 und R festzustellen, wieder das von einer grösseren Anzahl, also P Männern, dieselben Bedingungen eingegangen seien. Nehmen wir an, von P Männern von μ Jahren, wären nach 1, 2 ... Jahren noch P_1, P_2 am Leben nach Ausweis der Sterblichkeitslisten, von ihren ν Frauen aber $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ ... Es ist nun in Formeln 1a) und 2a) zu setzen:

$$C_2 = C_3 \cdot \ldots = C_1, \quad R = R_1 = R_2 = \ldots$$
$$\alpha = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2 \ldots$$

Da schon nach dem ersten Jahre im Durchschnitt eine gewisse Anzahl von Männern stirbt, ist zu setzen:

$$\beta = 1, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 3 \ldots$$

Es ist ferner $m = P$. Die Zahl m_1 würde gleich P_1 sein, wenn alle Ueberlebenden weiter zahlten, jedoch zahlen die von ihnen nur, deren Frauen noch leben, da nun im ersten Jahre von P Frauen $P^{(1)}$ noch am Leben sind, so sind von P_1 noch $\frac{P_1 P^{(1)}}{P}$ am Leben, so dass man hat:

$$m_1 = \frac{P_1 P^{(1)}}{P},$$

ebenso ist

$$m_2 = \frac{P_2 P^{(2)}}{P} \ldots$$

Die Anzahl der verstorbenen Männer des ersten Jahres würde $P - P_1$ sein, jedoch ist von dieser Zahl nur die Anzahl der überlebenden Wittwen zu nehmen, also:

$$p = (P - P_1)\frac{P^{(1)}}{P};$$

in gleicher Weise findet man:

$$p_1 = (P - P_1)\frac{P^{(2)}}{P}$$

u. s. w. so dass man hat:

I. $$M = PC + \frac{C_1}{P}\left(\frac{P_1 P^{(1)}}{q} + \frac{P_2 P^{(2)}}{q^2} + \ldots\right)$$

II. $$N = R\left(\frac{P^{(1)}}{q} + \frac{P^{(2)}}{q^2} + \ldots\right) - \frac{R}{P}\left(\frac{P_1 P^{(1)}}{q} + \frac{P_2 P^{(2)}}{q^2} + \ldots\right),$$

dadurch, dass $\frac{C_1}{P}$ und $\frac{R}{P}$ mit demselben Factor multiplicirt sind, wird die Rechnung bedeutend erleichtert.

Digitized by Google

Soll der Wittwe oder irgend einer andern Person aber nur beim Todesfall eine Summe verabreicht werden, ein Fall den man als Lebensversicherung zu Gunsten eines dritten bezeichnet, so ist der Ausdruck für M der eben entwickelte, wenn man die Grössen $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ auf die Person bezieht, zu deren Gunsten die Versicherung erfolgt. Die Zahlen p aber beziehen sich dann auf die Anzahl der in dem vorangegangenen Jahre Verstorbenen, mit Abzug der bereits verstorbenen Versicherten, diese Zahlen sind also:

$$p = (P - P_1)\frac{P^{(1)}}{P}, \quad p_1 = (P_1 - P_2)\frac{P^{(2)}}{P}, \quad p_2 = (P_2 - P_3)\frac{P^{(3)}}{P} + \ldots$$

also:

$$\text{III.} \quad N = \frac{R}{P}\left(\frac{PP^{(1)}}{q} + \frac{P_1P^{(2)}}{q^2} + \frac{P_2P^{(3)}}{q^3} + \ldots\right) - \frac{R}{P}\left(\frac{P_1P^{(1)}}{q} + \frac{P_2P^{(2)}}{q^2} + \ldots\right).$$

Lautet die Versicherung zu Gunsten keiner bestimmten Person, sondern ist überhaupt beim Tode des Versicherten eine Summe zu entrichten, so spielen die Zahlen $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ ... keine Rolle, sind somit in dem obigen Formeln der Einheit gleich zu setzen.

Es kommen öfter auch gegenseitige Versicherungen vor. D. h. es wird eine Summe und ein jährlicher Beitrag von zwei Eheleuten oder andern Personen eingezahlt unter der Bedingung, dass nach dem Tode desjenigen, der am frühesten stirbt, der andere von diesem Termine ab bis zu seinem Tode, jährlich oder einmal eine gewisse Summe empfange. Der Werth von M ist ganz wie der obige zu berechnen. Der von N aber setzt sich aus Theilen zusammen, da beide bei den Renten betheiligt sind. Der eine Theil ist also bezüglich der in den Formeln II) und III), der andere ist diesem analog, nur dass die Sterblichkeitsverhältnisse beider Personen nach Alter und Geschlecht, d. h. die Zahlen P_1, P_2 ... und $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ ... bezüglich zu vertauschen sind. Man erhält also, wenn eine jährliche Rente beansprucht wird:

$$\text{IV.} \quad N = R\left(\frac{P_1 + P^{(1)}}{q} + \frac{P_2 + P^{(2)}}{q^2} + \ldots\right) - \frac{2R}{P}\left(\frac{P_1P^{(1)}}{q} + \frac{P_2P^{(2)}}{q^2} + \ldots\right),$$

oder bei einmaliger Zahlung:

$$\text{V.} \quad N = \frac{R}{P}\left(\frac{P[P_1 + P^{(1)}]}{q} + \frac{P_1P^{(2)} + P_2P^{(1)}}{q^2} + \frac{P_2P^{(3)} + P_3P^{(2)}}{q^3} + \ldots\right) - \frac{2R}{P}\left(\frac{P_1P^{(1)}}{q} + \frac{P_2P^{(2)}}{q^2} + \ldots\right).$$

Eine viel einfachere Berechnung verlangen die Leibrenten. Das gewöhnliche Verhältniss ist dasjenige, dass sich eine Person gegen Einzahlung eines Capitals C eine Rente, die bis zu ihrem Tode fortgeht, sichern will. Es kann dann als Anzahl der Jahre, durch welche die Rente zu zahlen ist, die mittlere Lebenserwartung des Versicherten genommen werden. Ist dieselbe gleich s Jahren, so kann man in Formel 6) $\beta = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$ u. s. w. setzen, während M das einzuzahlende Capital C ist, und man hat:

$$C = R \cdot \frac{q^s - 1}{q^{s-1}(q-1)}.$$

Es ist hier vorausgesetzt, dass die erste Rente sogleich gezahlt wird, sonst wäre $\beta = 1$, $\beta_1 = 2$ ... zu nehmen.

Digitized by Google

Tontinen oder Gesellschaftsrenten sind Renten, zu deren Ankauf sich eine Gesellschaft verbindet. Die Rente wird dann bis zum Tode des letzten Mitgliedes derart bezahlt, dass die den verstorbenen Mitgliedern zukommende Rente den andern ertheilt wird, und so ihre Rente wächst.

Die Rentenzahlung kann gleich oder nach einer bestimmten Anzahl von Jahren beginnen.

Um zunächst die jährliche Gesammtrente zu ermitteln, hat man in Formel 6) also:

$$M = \frac{q^s - 1}{q^{\beta+s-1}(q-1)}$$

zu setzen:

$$\beta_1 - \beta = 1, \quad \beta_2 - \beta = 2 \ldots$$

Es ist hier angenommen, dass die Zahlung nach β Jahren beginne, s ist die wahrscheinliche Lebensdauer der am längsten lebenden Person von Zahlung der ersten Rente an, M die von sämmtlichen Mitgliedern aufgebrachte Rente. Um nun die wahrscheinliche Rente nach einer Anzahl von Jahren zu ermitteln, ist die Gesammtrente R durch die Anzahl der wahrscheinlich Ueberlebenden zu dividiren.

Beispiel. 100 Personen von 30 Jahren treten zu einer Gesellschaftsrente zusammen. Jeder legt eine Summe von 500 Thalern nieder. Wir nehmen an, dass die letzte Person in ihrem 95sten Jahre sterben werde. Soll die Rentenzahlung nun ein Jahr nach dem Einkauf beginnen, so ist $s = 94 - 30 = 64$, $\beta = 1$. Der Zinsensatz sei 4 Procent, also $9 = 1{,}04$, und $M = 50000$, man hat also:

$$R = \frac{50000 \cdot 1{,}04^{64} \cdot 0{,}04}{1{,}04^{64} - 1} = \frac{50000 \cdot 12{,}306}{282{,}66} = 2170 \text{ Thaler (ungefähr).}$$

Fragen wir nun, welche Rente ein Mitglied wahrscheinlich nach 20 Jahren erhalten werde? Von 732 Männern von 30 Jahren erreichen (nach der Finlaison'schen aus Beobachtungen bei den englischen Staats-Tontinen geschöpften Tafel) 561 das 50ste Jahre, also von 100 Personen dieses Alters:

$$\frac{561 \cdot 100}{732} = 76,$$

und die Rente eines jeden ist also:

$$\frac{2170}{76} = 28\tfrac{1}{2} \text{ Thaler.}$$

Viel günstiger stellt sich die Sache wenn die Mitglieder in frühester Kindheit eingekauft werden, und bei einem bestimmten Lebensjahre die Auszahlung beginnt.

Die Formeln 1) und 2) oder 1a) und 2a) reichen in jedem Falle aus, und sind nach ihnen alle Fälle, welche bei Rentenbanken, Lebensversicherungsanstalten u. s. w. vorkommen können, gewöhnlich noch in viel leichterer Weise als die oben mitgetheilten schwierigeren Fälle zu ermitteln.

Es handelt sich nämlich sehr oft um ganz bestimmte Zahlen, nicht um Wahrscheinlichkeitsangaben, z. B. bei aufgeschobenen Renten, d. h. solchen, die bei einem gewissen Lebensjahre beginnen, oder bei aufhörenden, die bei einem gewissen Lebensjahre aufhören, (z. B. bei Renten für Waisen). Hierbei gewinnt natürlich die Rechnung an Einfacheit und Sicherheit.

Die Einrichtung und der Geschäftsbetrieb der Versicherungsanstalten ist dem Zwecke dieses Wörterbuches fremd, und ist auf die entsprechenden Werke (z. B. Redens allgemeine Handelsgeographie) zu verweisen.

Repartitionsrechnung. (Gesellschaftsrechnung, praktisches Rechnen.)

Der Zweck der Gesellschaftsrechnung ist im Allgemeinen, eine gewisse Zahl derart zu theilen, dass die Theile in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen. Diese Rechnung wird z. B. angewandt, wenn mehrere Personen mit ungleichen Einlagen bei einem Geschäfte betheiligt sind, wo dann der Gewinn unter sie im Verhältnisse der Einlagen zu vertheilen ist. Oft wird diese Rechnung verwickelter, wenn die Verhältnisszahlen der Theilung keine einfachen sind, sondern sich aus verschiedenen Umständen, z. B. Einlagen, längerer oder kürzerer Verbleib derselben, Bemühungen für das Geschäft zusammen setzen. Einige Beispiele möge das Gesagte erläutern.

Beispiel 1. Drei Gläubiger haben an eine Masse von 12000 Thalern zu fordern: A: 9000 Thaler, B: 6500 Thaler, C: 3800 Thaler. Wieviel erhält Jeder?

Auflösung. Die Gesammtforderung aller drei ist:

Digitized by Google

9000
+ 6500
+ 3800
19300 Thaler

und diese muss sich zur ganzen Masse also zu 12000 verhalten, wie die Forderung jedes einzelnen, zu dem ihm zukommenden Antheile. Man hat also drei Ansätze zu machen:

$$19300 : 12000 = 9000 : x$$
$$19300 : 12000 = 6500 : y$$
$$19300 : 12000 = 8800 : z$$

$$x = \frac{90 \cdot 12000}{193} = 5595\frac{165}{193} \text{ Thaler},$$

$$y = \frac{65 \cdot 12000}{193} = 4041\frac{87}{193} \text{ Thaler},$$

$$z = \frac{38 \cdot 12000}{193} = 2262\frac{134}{193} \text{ Thaler}.$$

Die Summe von x, y und z muss 12000 betragen, und dies ist die Probe der Rechnung.

Beispiel 2. Drei Kaufleute machen gemeinschaftlich ein Geschäft. *A* gibt 500 Thaler 16 Monat lang, *B* 1400 Thaler 9 Monat lang. Der Gewinn ist 380 Thaler. Wie viel erhält Jeder davon?

Auflösung. Die Theilung geschieht im Verhältnisse der Einlagen und der Zeit.

$500 \cdot 16 = 8000$
$1400 \cdot 9 = 12600$
$700 \cdot 12 = 8400$
29000

$$29000 : 380 = 8000 : x$$
$$29000 : 380 = 12600 : y$$
$$29000 : 380 = 8400 : z$$

$$x = \frac{8 \cdot 380}{29} = 104\frac{24}{29} \text{ Thaler},$$

$$y = \frac{126 \cdot 38}{29} = 165\frac{3}{29} \text{ Thaler},$$

$$z = \frac{84 \cdot 38}{29} = 110\frac{2}{29} \text{ Thaler}.$$

Beispiel 3. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt *A* 6000 Thaler, *B* 5333 Thlr. 10 Sgr., *C* 4666 Thlr. 20 Sgr. Das Geschäft ist nach 9 Monaten beendet und bringt 2100 Thaler Gewinn. Drei Monate vorher entnahmen jedoch *A* 500 Thaler, *C* 300 Thaler der Gesellschaftskasse. Dagegen erhält *A* 6 Procent vom Gewinn für die Geschäftsführung. Welcher Antheil kommt Jedem zu?

Auflösung. Zunächst sind die dem *A* bewilligten 6 Procent abzuziehen.

$$100 : 6 = 2100 : x \qquad x = 126$$
$$2100 - 126 = 1974 \text{ Thaler}.$$

Diese 1974 Thaler kommen nun zur Vertheilung.

A gibt 6000 Thaler, davon indess 5500 Thlr. auf 9 Monat $5500 \cdot 9 = 49500$
500 „ „ 6 „ $500 \cdot 6 = 3000$
52500

B gibt $5333\frac{1}{3}$ „ „ 9 „ $5333\frac{1}{3} \cdot 9 = 48000$

C gibt $4666\frac{2}{3}$ „ „ 9 „ $4666\frac{2}{3} \cdot 9 = 89900$
300 „ „ 6 „ $300 \cdot 6 = 1800$
41100

Die Verhältnisszahlen sind also:

52500
48000
41100

oder wenn man durch 300 dividirt, was das Verhältniss nicht ändert:

175
160
137
472.

Es sind also drei Ansätze zu machen:

$$472 : 1974 = 175 : x$$
$$472 : 1974 = 160 : y$$
$$472 : 1974 = 137 : z$$

$$x = \frac{987 \cdot 175}{236} = 731 \text{ Thlr. } 26 \text{ Sgr. } 7 \text{ Pf.}$$

$$y = \frac{987 \cdot 160}{236} = 669 \text{ „ } 4 \text{ „ } 7 \text{ „}$$

$$z = \frac{987 \cdot 137}{236} = 572 \text{ „ } 28 \text{ „ } 10 \text{ „}$$

wo die Pfennigbrüche weggelassen sind.

Google

Um den Gesammtantheil des A zu finden, sind aber noch die obigen 126 Thaler zuzuzählen. Es erhält also:

A : 857 Thlr. 26 Sgr. 7 Pf.
B : 669 „ 4 „ 7 „
C : 572 „ 28 „ 10 „

Repartitionsinstrumente (Messkunst).

So heissen diejenigen Messinstrumente, welche zum wiederholten Messen derselben Grösse, also zum Controliren der Messungen bestimmt sind.

Residuum (Analysis).

Im Allgemeinen gleichbedeutend mit Rest. Im Besonderen versteht Cauchy darunter in der Entwickelung der eindeutigen Function $f(x+u)$ nach positiven und negativen Potenzen von u, den Coefficienten von $\frac{1}{u}$. Es ist also:

$$\text{Res}\left(\frac{1}{x+u}\right)=1,$$

da $\frac{1}{x+u}=\frac{1}{u}\left(1-\frac{x}{u}+\frac{x^2}{u^2}-\ldots\right)$ ist.

Die Grundzüge der Residuenrechnung findet man in dem Artikel: Quantität (imaginäre).

Rest (Arithmetik).

Das Resultat der Subtraction wird Rest auch Unterschied oder Differenz genannt.

Ist $a-b=c$ (a minus b gleich c), so ist c der Rest des Subtrahendus b vom Minuendus a.

Der Rest zum Subtrahendus addirt gibt den Minuendus, also $b+c=a$. Diese Regel und Formel enthält zugleich die Definition der Subtraction und der Reste.

Der Rest ist negativ, wenn b grösser als a ist, z. B. $4-7=-3$.

Die Regel des Subtrahirens mit positiven und negativen Zahlen ist allgemein: „Man verändert das Vorzeichen des Subtrahendus und addirt", also:

$$\begin{aligned} 4-(-7)&= 4+7 &&= 11,\\ -4-(+7)&=-4+(-7)&&=-11\\ -4-(-7)&=-4+7 &&= 3\\ 4-(+7)&= 4+(-7)&&=-3. \end{aligned}$$

(Vergleiche den Artikel: Quantitäten.)

Die Regel des Subtrahirens mit Decimalbrüchen ist: Man schreibt die Brüche so, dass Komma unter Komma steht und rechnet wie mit ganzen Zahlen, so dass im Reste das Komma dieselbe Stelle einnimmt.

$$\begin{array}{r} 47{,}926\\ -\,11{,}235\\ \hline 36{,}691. \end{array}$$

Offenbar hat man, wenn man die Ziffern ihrem wahren Werthe als Zehner, Einer, Zehntel u. s. w. sich vorstellt, nur gleichbenannte Zahlen gleichbenannten abgezogen, und einen gleichbenannten Rest erhalten. In den Ziffern, wo der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, wie 2 und 3, hat man eine Einheit der nächst höheren Stelle (hier Zehntel) zum Theilminuend hinzugenommen, wo sie natürlich zehn Einheiten der betreffenden Stelle bedeutet.

Brüche werden subtrahirt, indem man ihnen gleiche Nenner gibt, und die Zähler abzieht. Z. B.:

$$\tfrac{3}{5}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{12}{20}-\tfrac{5}{20}=\tfrac{7}{20}$$
$$\tfrac{7}{15}-\tfrac{4}{15}=\tfrac{14}{30}-\tfrac{8}{30}=\tfrac{6}{30}=\tfrac{3}{15}.$$

Divisionsrest ist der Zähler des echten Bruches, welcher im Quotienten zweier ganzen Zahlen vorkommt. Z. B. bei 71 dividirt durch 7 ist 1 der Divisionsrest, da $\frac{1}{7}=10\frac{1}{7}$ ist. Ist der Dividendus also kleiner als der Divisor, so ist ersterer der Divisionsrest.

Potenzreste sind die Divisionsreste der Potenzen ganzer Zahlen durch einen gegebenen Divisor. Es ist z. B.

$$\frac{7^3}{5}=\frac{343}{5}=68\tfrac{3}{5},$$

also 3 ist der Rest der dritten Potenz von 7 für Divisor (Modul) 5. (Siehe über diesen Gegenstand den Artikel: Quadratischer Rest, wo auch die wichtigsten Eigenschaften der Potenzreste im Allgemeinen erwiesen sind.)

Ausführliche Untersuchungen über Potenzreste lässt der hoffentlich bald erscheinende zweite Band von Gauss's sämmtlichen Werken erwarten, welcher die bisher nicht veröffentlichte *Sectio octava* der *Disquisitiones arithmeticae* enthalten soll, deren Inhalt nach Gauss's Angabe, namentlich diesen Gegenstand behandelt.

Resultante (Mittelkraft, Mechanik).

Die Kraft, welche einer Anzahl andere sich in demselben Punkt schneidenden Kräfte nach dem Parallelogramm der Kräfte gleich zu setzen ist. Man spricht auch von den Resultanten der Drehungen, und Kräftepaare, welche Grössen bekanntlich auch analog dem

Digitized by Google

Parallelogramm der Kräfte zu behandeln sind.

Reversionspendel (Mechanik).

Der Zweck dieses von Bohnenberger angegebenen Instrumentes ist es, die Länge eines mathematischen Pendels zu ermitteln, welches mit einem physikalischen gleiche Schwingungszeit hat.

Nennt man Schwingungspunkt denjenigen Punkt, dessen Entfernung vom Aufhängepunkt des physikalischen Pendels gleich einem mathematischen Pendel von gleicher Schwingungsdauer ist, so hat man den Satz, dass, wenn das Pendel im Schwingungspunkt aufgehängt wird, der Aufhängepunkt zum Schwingungspunkt wird, d. h. die Schwingungszeit unverändert bleibt.

Denke man sich nun ein Pendel mit zwei einschneidenden Axen *C* und *K* (Fig. 338), mit zwei Laufgewichten *P*

Fig. 338.

und *O* versehen, wovon das eine durch eine Schraube gestellt werden kann. Durch Verschieben derselben bringt man es nun dahin, dass die Schwingungsdauer des Pendels dieselbe bleibt, es möge in *C* oder *K* aufgehängt werden. Dann ist *CK* die Länge eines mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer.

Revolution (Umlauf, Astronomie).

Im engern Sinne die Bewegung eines Planeten (oder Cometen) um die Sonne, im weitern, die eines Gestirns um seinen Centralkörper, also auch der Monde um die Planeten, und der Fixsterne, welche Doppelsterne bilden, um einander.

Man hat selbst versucht, die Bewegung der Sonne um eine hypothetische Centralsonne zu ermitteln, und Mädler gibt sogar (vermuthungsweise) die Revolutionszeit der Sonne an. Vergleiche über diesen Gegenstand: „Der Himmel und die Weltkörper", populäre Astronomie vom Verfasser dieses Wörterbuchs.

Rheometer (Hydrometer, Hydrodynamik).

Instrument, welches zur Bestimmung der Geschwindigkeit des strömenden Wassers dient. Die Einrichtungen der Rheometer sind sehr verschieden und verweisen wir in Bezug auf ihre Beschreibung auf den Artikel: Hydraulik.

Rhomboid (Geometrie).

Ein Parallelogramm, wo weder alle Seiten gleich, noch die Winkel rechte sind.

Rhombus (Geometrie).

Ein Parallelogramm mit gleichen Seiten, ohne das die Winkel rechte zu sein brauchen. Grundeigenschaft des Rhombus ist, dass die Diagonalen desselben auf einander senkrecht stehen. (Vergleiche den Artikel: Raumlehre.)

Riccatische Gleichung (Analysis).

Eine Differenzialgleichung von der Form:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m.$$

Sie ist erster Ordnung aber nicht linear. Die Fälle, wo sie sich auf Quadraturen zurückführen lässt, und ihre anderweitigen Auflösungen sind gegeben in dem Artikel: Quadraturen (Zurückführung auf).

Riemenrad (Maschinenlehre) s. Rad.

Ring (Geometrie).

Ebener Ring ist der Flächenraum zwischen zwei concentrischen Kreisen. Zuweilen wird der Raum zwischen zwei beliebigen geschlossenen Figuren, wovon die kleinere ganz innerhalb der grösseren liegt unter diesem Ausdruck verstanden.

Sind r, ϱ die Radien zweier Kreise, so ist $\pi(r^2 - \varrho^2)$ der Flächeninhalt des zwischen ihnen liegenden Ringes.

Körperlicher Ring wird derjenige Körper genannt, welcher durch Drehung einer geschlossenen Figur um eine ausserhalb derselben befindliche Axe entsteht. Ein Ring ist somit als Rotationskörper zu behandeln. Die Quadraturen

Digitized by Google

eines solchen Ringes der durch Drehung eines Kreises entsteht, gibt der Artikel: Quadratur (geometrische).

Röhrenbrücke (Wasserbaukunst).

Eine Brücke, deren Träger aus Eisenblech von röhrenförmiger Gestalt bestehen. Nach Fairbairns Construction tragen zwei Röhrenbalken die Brücke, nach Stephensons Construction sind die Röhren einfach. Die Röhrenform dient, um den Widerstand der Balken gegen seitliche Ausbiegungen zu erhöhen.

Röhrenleitung (Maschinenlehre) siehe Wasserleitung.

Röhrenventil siehe Ventil.

Römerzinszahl (Chronologie).

Die Zahl, welche die Stelle angibt, die irgend ein Jahr in der von Constantin eingeführten 15 Jahre umfassenden Periode einnimmt, welche 3 Jahre v. Chr. Geburt beginnt. Diese Periode diente wahrscheinlich Steuerzwecken. In unsern Kalendern ist dieselbe überflüssiger Weise enthalten. Um die Zinszahl eines Jahres n zu ermitteln, nimmt man den Rest von $\frac{n+3}{15}$. Für 1864 ist also 7 die Zinszahl.

Rösselsprung.

Rösselsprung nennt man die bekannte Schachaufgabe, den Springer, welcher bekanntlich immer von seinem Felde zwei Felder weiter in grader Linie und eins in darauf senkrechter Richtung geht, auf alle 64 Felder zu bringen, ohne dass er zweimal auf dasselbe gelangt. Euler hat dieser Aufgabe (*Mémoires de l'academie de Berlin, T. XV.* 1795) eine mathematische Behandlung gegeben.

Wir geben seine Behandlungsmethode auszugsweise.

I. Man fängt mit einem beliebigen Felde an, und führt den Springer auf beliebigem Wege so weit als es möglich ist, d. h. bis er auf ein schon besetztes Feld kommt. Die betretenen Felder werden dann der Reihe nach, wie sie betreten werden mit den natürlichen Zahlen besetzt. Es bleiben dann gewisse Felder leer, die man mit Buchstaben ausfüllt. Z. B :

34	21	54	9	32	19	48	7
55	10	33	20	53	8	31	18
22	35	62	*a*	40	49	6	47
11	56	41	50	59	52	17	30
36	23	58	61	42	39	46	5
57	12	25	38	51	60	29	16
24	37	2	43	14	27	4	45
1	*b*	13	26	3	44	15	28

Es ist hier links unten in dem mit 1 bezeichnetem Felde begonnen worden. Der Springer geht hier derart, dass 62 Felder besetzt, und nur das vierte der dritten und das zweite der achten Columne, die bezüglich mit *a* und *b* bezeichnet sind übrig bleiben.

II. Die Zahlen in den durchschrittenen Feldern können nun variirt werden. Von einem Felde an, kann man zu mehreren (höchstens 8) gelangen. Betrachtet man nun zwei Felder, zu denen man von einem gegebenen gelangen kann, so kann die Ordnung der Züge zwischen diesen beiden ersteren offenbar vertauscht werden. Denn wenn ein Rösselsprung von α nach β führt, so führt ein solcher auch von β nach α zurück.

Beispiel. Von 46 in unserm Schema gelangt man natürlich nach 47, man kann aber auch durch einen Rösselsprung von 46 nach 50 gelangen, es lässt sich also die Ordnung der Züge 47 bis 50 umkehren.

III. Durch wiederholte Versetzungen dieser Art kann man den letzten Zug

Digitized by Google

an eine beliebige Stelle unter den mit Zahlen besetzten verlegen. Man nimmt nämlich irgend ein Feld, von wo man zum letzten (hier 62) gelangen kann. Ein solches ist hier z. B. 23, da nun 23 auch nach 24 führt, so kann die Ordnung 24 bis 62 umgekehrt werden, durch Wiederholung dieses Verfahrens, gibt man der 62 eine beliebige Stelle.

IV. Es lässt sich so die Zahl 62 in ein Feld bringen, dass nach *a* führt. In unserm Falle z. B. kann 10 nach *a* führen, und da Feld *a* sowohl nach 10 als nach 62 führt, so kehrt man die Ordnung 10 bis 62 um, es wird dann 62 nach *a* führen, also bei der neuen Anordnung statt *a*, 63 zu schreiben sein.

Die Ordnung ist also:

1, 2 . . . 9, 62, 61 . . . 10, 63

In derselben Weise wird nun 63 auf ein Feld gebracht, welches nach *b* führt. Sind mehr Felder durch Buchstaben besetzt, so ist ebenso fortzufahren, so dass schliesslich das ganze Schachbrett mit Rösselsprüngen ausgefüllt ist. In unserm Beispiele sucht man zwei Felder von denen eins nach 63, das andere nach *b* führt, und deren Zahlen sich um 1 unterscheidet, jedoch so, dass die zu 63 führende Zahl die grössere ist. Es führt nun 58 nach 63 und 57 nach *b*. Die Anordnung lässt sich also wieder ändern in:

1 . . . 9, 62 . . . 58, 63, 10 . . . 57, *b*.

Setzt man diese Anordnung der Züge fest, so kann man 64 für *b* schreiben.

Man hat also folgendes Schema eines Rösselsprunges.

40	27	60	9	38	25	54	7
61	16	39	26	59	8	37	24
28	41	10	15	46	55	6	53
17	62	47	56	13	58	23	36
42	29	14	11	48	45	52	5
63	18	31	44	57	12	35	22
30	43	2	49	20	33	4	51
1	64	19	32	3	50	21	34

Natürlich ist die Anzahl der möglichen Rösselsprünge eine sehr grosse, und man kann dieselben durch mancherlei Bedingungen erschweren.

Ein einfaches Mittel einen Rösselsprung durchs Schachbrett zu machen, gibt Colini.

Man sondre vom Brette die mittleren 16 Felder ab, es zerfällt dann das Brett in zwei Theile einen inneren, der ein Quadrat von 16 Feldern bildet, und eine äussere Einfassung von 48 Feldern, die an jeder der vier Seiten aus zwei Streifen besteht. Man lässt nun in irgend einem dieser vier Gebiete von zwei Streifen den Springer vier Schritte thun, von denen zwei gleichzeitig den angrenzenden Gebieten angehören, macht nun der Springer in einem dieser Gebiete und dem daran grenzenden je drei Schritte, im letzten aber zwei, so liegen in jedem Gebiete vier Schritte, zusammen aber nur 12, beim 13ten Schritte geht der Springer ins 16feldige Quadrat hinein, wo er bis zum 16ten Sprunge verweilt, mit dem 17ten Sprunge geht er wieder in die Einfassung, und nach viermaligem Wiederholen dieser Sprünge ist das Brett ausgefüllt.

Von den mannigfachen Anordnungen dieser Art folgt auf der nächsten Seite ein Beispiel.

Mit der Theorie der Rösselsprünge haben sich auch Vandermande (1771) und in neuester Zeit Minding beschäftigt.

Wir erwähnen bei dieser Gelegenheit noch einer andern durch Rechnung zu lösenden Aufgabe, zu welcher das Schachspiel Anlass gegeben hat, und die mit dem Rösselsprunge eine gewisse Analogie hat.

Es handelt sich darum, auf ein Schachbrett 8 Königinnen aufzustellen, derart, dass keine irgend eine der andern, nach dem Gang, welchem die Königin auf

Digitized by Google

36	23	54	9	38	21	56	7
53	10	37	22	55	8	39	20
24	35	14	63	30	47	6	57
11	52	31	46	15	64	19	40
34	25	62	13	48	29	58	5
51	12	45	32	61	16	41	18
26	33	2	49	28	43	4	59
1	50	27	44	3	60	17	42

dem Schachbrette folgt, zu schlagen im Stande ist.

Es lässt sich dieser Aufgabe ein rein mathematischer Ausdruck geben.

„Es sind acht Felder gegeben, deren Reihenfolge durch eine darüber geschriebene Zahl angezeigt ist, welche wir Ordnungszahl nennen. Es soll in jedes der acht Felder eine andere der ersten acht natürlichen Zahlen derart geschrieben werden, dass die Differenz zweier darunter nicht gleich der Differenz ihrer Ordnungszahlen ist. Steht also im dritten Felde eine 4, so darf z. B. im fünften weder eine 9 noch eine 2 stehen, weil $4-2=6-4=5-3$ ist."

Bedeuten dann die Ordnungszahlen die Felder einer Columne des Schachbrettes, und die Zahlen der Felder selbst die Stelle, welche die betreffende Königin in ihrer Horizontalreihe einnimmt, so gibt die nach diesem Gesetze gebildete Zahlenreihe die Stellung der 8 Königinnen.

Ist eine Auflösung dieser Aufgabe gefunden, so ergeben sich aus ihr im Allgemeinen sieben andere, da man das Schachbrett viermal um einen rechten Winkel drehen und statt jeder dieser vier Stellungen die symmetrische (das Spiegelbild) nehmen kann.

Zahlentheoretisch drückt sich der Zusammenhang dieser acht Stellungen so aus. „Man kann aus einer Auflösung sieben andere gewinnen, indem man 1) die Ordnung der Felder umkehrt, 2) statt der Zahlen in den Feldern ihre Differenzen von 9 nimmt, diese ist dann wieder umzukehren, so dass man jetzt vier Zahlenreihen hat, 3) endlich kann man in jeder dieser vier Reihen die Zahlen in den Feldern mit den Ordnungszahlen vertauschen, also, wenn z. B. die Reihe ist:

1 5 8 6 3 7 2 4

dafür schreiben:

1 2 5 8 2 4 7 3.

Diese letztere Reihe entsteht so: in der ursprünglichen war die zweite Ziffer eine 5, es ist also in der neuen als fünfte Ziffer eine 2 zu nehmen. Es war die sechste Ziffer eine 7, es ist also als siebente eine 6 zu nehmen u. s. f. So entstehen in der That acht Reihenfolgen aus einer. Eine Ausnahme machen nur diejenigen Reihenfolgen, welche an sich symmetrisch sind, aus diesen entstehen nur drei andere."

Alles dies ist leicht ersichtlich.

Um die Auflösungen der Aufgabe zu ermitteln, gibt es wohl keine andere Verfahrungsweise als Ausschliessung der Anordnungen, welche der Aufgabe nicht entsprechen, wobei sich allerdings mancherlei Erleichterungen ergeben.

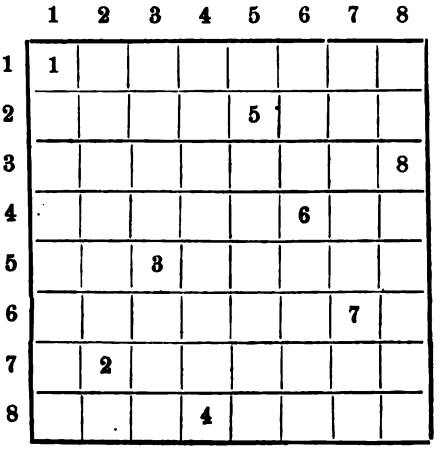
Als selbstständige Lösungen bezeichnen wir alle, die nicht unter die acht gehören, welche aus einander entstehen. Es gibt im Ganzen zwölf selbstständige Lösungen, worunter eine symmetrische, aus denen sich also im Ganzen 92 ergeben.

Diese selbstständigen Lösungen sind:

Digitized by Google

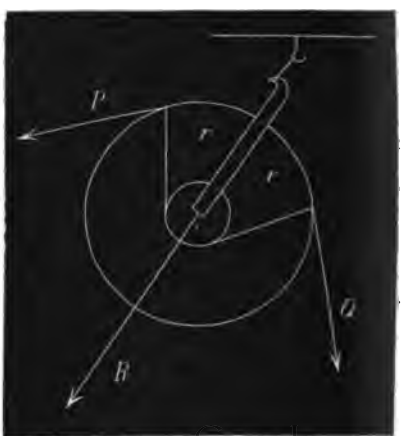
Ordnungszahl:	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	5	8	6	3	7	2	4
	1	6	8	3	7	4	2	5
	2	5	1	6	8	3	7	4
	2	5	7	1	3	8	6	4
	2	5	7	4	1	8	6	3
	2	6	1	7	4	8	3	5
	2	6	8	3	1	4	7	5
	2	7	3	6	8	5	1	4
	2	7	5	8	1	4	6	3
	(3	5	2	8	1	7	4	6)
	3	5	8	4	1	7	2	6
	3	6	2	5	8	1	7	4

Die eingeklammerte Lösung ist die symmetrische. Wir wollen die erste Lösung auch in der Stellung geben, wie sie sich auf dem Schachbrette zeigt.



Rolle (Maschinenlehre).

Fig. 339.



1) Feste und lose Rolle.

Rolle ist eine kreisförmige Scheibe, welche um eine Axe gedreht werden kann. An ihrem Umfange befindet sich ein an den Enden von zwei Kräften gespanntes Seil. Man unterscheidet feste und lose Rollen, je nachdem das Gehäuse, worin die Axen ruhen (Zapfenlager) fest oder beweglich ist.

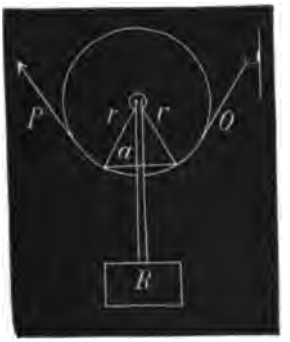
Nehmen wir auf die Widerstände (Steifigkeit und Reibung der Seile so wie auf die Zapfenreibung) keine Rücksicht, so müssen bei der festen Rolle, die beiden Kräfte P und Q, welche das Seil spannen (Fig. 339), im Falle des Gleichgewichts gleich sein. Denn ist r der Halbmesser der Rolle, so sind rP und rQ die statistischen Moment, also $rQ = rP$, beide setzen sich zu einer

Digitized by Google

Mittelkraft $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$ zusammen, die im Zapfenlager wirkt, und wo α der Winkel zwischen den beiden Seilrichtungen ist.

Auch bei der losen Rolle sind die Kräfte P und Q (Fig. 340) gleich; da-

Fig. 340.



mit nämlich die Spannungen P und Q, der im Zapfen wirkenden Kraft R das Gleichgewicht halten, müssen sie nach dem Parallelogramm der Kräfte gleiche Winkel $\frac{\alpha}{2}$ mit R machen, und die auf der Richtung von R senkrechten Kräfte, $P\sin\frac{\alpha}{2}$ und $Q\sin\frac{\alpha}{2}$ sind gleich, also $P = Q$, ausserdem $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$.

Bei der losen Rolle hat man also nun $P = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Bezeichnen wir die Sehne AB, deren Bogen vom Seile bedeckt wird mit a, so ist: $a = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$, woraus sich dann ergibt:

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{a}.$$

„Die Kraft verhält sich zur Last, wie der Radius der Rolle zur Sehne des Seilbogens."

Sind beide Seilrichtungen vertikal, so ist $a = 2r$, also $P = \frac{R}{2}$.

Die feste Rolle dient eben nur um die Richtungen der Kraft zu ändern, sie wird deshalb auch Leitrolle genannt. Die lose Rolle heisst auch Kraftrolle; wenn r kleiner als a ist, wird nämlich eine grössere Last durch eine kleinere Kraft gehoben.

2) Einfluss der Widerstände.

Sei r der Halbmesser der Rolle, ϱ der des Zapfens, G das Gewicht der Rolle, d die Seilstärke, Q die auf die Rolle wirkende Last, S der Steifigkeitswiderstand, F die Zapfenreibung, reducirt auf den Umfang der Rolle, so ist die ganze zu überwindende Last.

$$P = F + S + Q.$$

Was die Grösse S anbetrifft, so setzt Prony für schwache Hanfseile:

$$S = \frac{d^n}{r}(K + rQ),$$

dagegen nimmt Weissbach für starke Hanfseile und Drahtseile $S = K + \frac{\nu Q}{r}$, wo n, K und ν Erfahrungsconstanten sind.

Prony setzt z. B., wenn r und d in Linien, Q und S in Pfunden gegeben sind, nach preussischem Maass und Gewicht, für neue Seile:

$$n = 1{,}7,\ K = 3{,}31,\ \nu = 0{,}295$$

für alte Seile:

$$n = 1{,}4,\ K = 6{,}39,\ \nu = 0{,}141.$$

Bei grösseren Spannungen setzt Eitelwein:

$$n = 2,\quad \nu = \frac{1}{3500},\quad K = 0.$$

Was die Weissbach'sche Formel anbetrifft, so ist z. B., wenn r in Zollen gegeben ist und Q in Pfunden (preussisch) für ein Hanfseil von 1,6 Zollstärke:

$$K = 3,\quad \nu = 0{,}216 \text{ (Pfunde)}.$$

Die auf den Umfang reducirte Zapfenreibung ist:

$$F = \frac{\mu\varrho}{r}(Q + G + P),$$

oder annähernd:

$$F = \frac{\mu\varrho}{r}(2Q + G),$$

wo μ der Reibungscoefficient ist. Man erhält also bei Anwendung der Prony'schen Formel:

$$P = Q + \frac{d^n}{r}(K + \nu Q) + \frac{\mu\varrho}{r}(P + Q + G)$$

und wenn man die Weissbach'sche nimmt:

$$P = Q + K + \frac{\nu Q}{r} + \mu\frac{e}{r}(P + Q + G).$$

Diese Formeln gelten für die Leitrolle, woraus sich dann ergibt:

Digitized by Google

$$P = \frac{r + \mu\varrho + \nu d^n}{r - \mu\varrho} Q + \frac{\mu\varrho G + d^n K}{r - \mu\varrho},$$

oder wenn:

$$\frac{r + \mu\varrho + \nu d^n}{r - \mu\varrho} = \alpha, \quad \frac{\mu\varrho G + d^n K}{r - \mu\varrho} = \beta$$

gesetzt wird:

$$P = \alpha Q + \beta.$$

Aus der zweiten Formel ergibt sich ebenfalls:

$$T = \alpha Q + \beta$$

wenn man setzt:

$$\alpha = \frac{r + \mu\varrho + \nu}{r - \mu\varrho}, \quad \beta = \frac{\mu\varrho G}{r - \mu\varrho}.$$

Für die Kraftrolle, welche wir uns mit der Leitrolle verbunden denken, wirkt, wenn die Seilrichtungen vertikal sind, Last $Q + G$ am Zapfen, also am Hebelarm ν, Kraft P am Umfang, also am Hebelarm 2ν. Wenn somit R die Seilspannnng bei der Aufwickelung ist:

$$2Pr = (Q + G)r + \mu Q\varrho + d^n(K + \nu R)$$

oder da $P + R = Q + G$ ist, wenn man:

$$\frac{r + \mu\varrho + \nu d^n}{2r + \nu d^n} = \alpha_1,$$

$$\frac{(r + \nu d^p)G + d^n K}{2r + \nu d^n} = \beta_1$$

setzt:

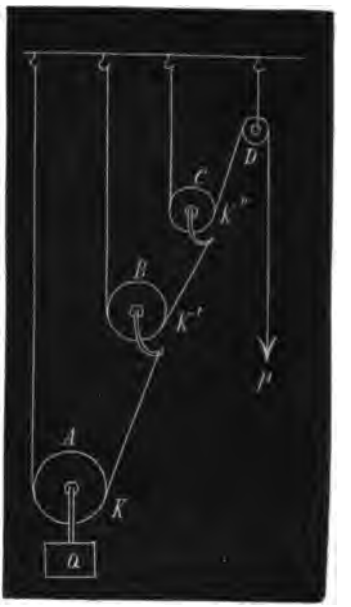
$$P = \alpha_1 Q + \beta_1.$$

3) Rollenzüge und Flaschenzüge.

Rollenzüge sind Verbindungen mehrerer Rollen, die einzeln unter einander hängen. Es hängt Last C (Fig. 341) an der losen Rolle A, von dieser geht ein Seilende nach der losen Rolle B u. s. w. Von der obersten losen Rolle geht dann das Seilende über die feste Rolle D, wo Kraft P wirkt. Wirke nun in A Kraft K_1, in B Kraft K_2 u. s. w., so ist:

$$K_1 = \alpha_1 Q + \beta_1,$$
$$K_2 = \alpha_1 K_1 + \beta_1 = \alpha_1^2 Q + (\alpha_1 + 1)\beta_1$$
$$K_3 = \alpha_1 K_2 + \beta_1 = \alpha_1^3 Q + (\alpha_1^2 + \alpha_1 + 1)\beta_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_n = \alpha_1^n Q + (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha^{n-1})\beta_1,$$

Fig. 341.



d. h.:

$$K_n = \alpha_1^n Q + \frac{1 - \alpha_1^n}{1 - \alpha_1}\beta_1.$$

Endlich:

$$P = \alpha K_n + \beta$$

oder:

$$P = \alpha\left(\alpha_1^n Q + \frac{1 + \alpha_1^n}{1 - \alpha_1}\beta_1\right) + \beta.$$

Nimmt man auf die Hindernisse keine Rücksicht, so ist zu setzen:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0,$$

und wegen der Formel $P = \frac{P_1}{2}$ in Abschnitt 1):

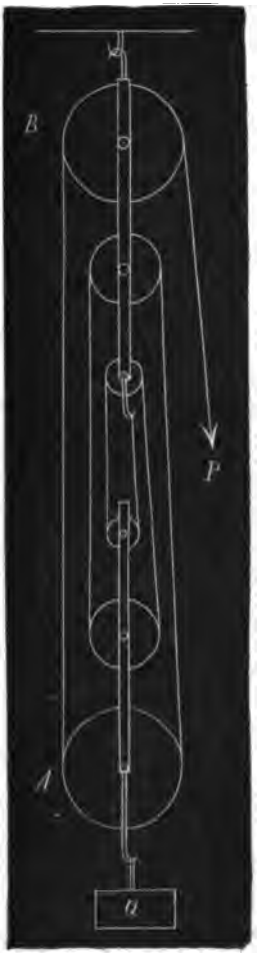
$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \beta_1 = 0,$$

also:

$$P = \frac{1}{2^n} Q.$$

Der Flaschenzug (Fig. 342), besteht aus zwei Kloben, auf deren oberen sich feste auf dem unteren lose Rollen befinden. Die Last Q befindet sich am untern Kloben, Kraft P an einem Ende des Seiles, welches abwechselnd über die festen und losen Rollen geht. Wendet

Fig. 342.



man die obigen Formeln an, so ist für die unteren Rollen die Formel

$$P = \alpha Q + \beta$$

zu nehmen, da hier nicht im Zapfen an der Rollen unmittelbar eine Last wirkt, und sie somit ganz wie feste Rollen zu betrachten sind; auch kann man setzen $G = 0$, und somit:

$$\beta = \frac{d^n K}{\nu - \mu\varrho},$$

weil das Gewicht der Rolle die Zapfenreibung an der untern Rolle soviel vermindert, als sie es an der obern vermehrt, und somit ausser Acht bleibt. — Sei die Spannung des ersten Seiles GH s_1, die des zweiten s_2 u. s. w., so haben wir, da s_1 bei Rolle G als Last wirkt:

$$s_2 = \alpha s_1 + \beta,$$

ferner:

$$s_3 = \alpha s_2 + \beta = \alpha^2 s_1 + (\alpha + 1)\beta$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$s_n = \alpha^{n-1} s_1 + (\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} + \ldots + \alpha + 1)\beta$$

d. h.:

$$s_n = \alpha^{n-1} s_1 + \frac{\alpha^{n-1} - 1}{\alpha - 1}\beta.$$

Nun ist aber, wenn G das Gewicht des untern Kloben anzeigt:

$$Q + G = s_1 + s_2 + \ldots + s_n,$$

also:

$$Q + G = (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}) s_1 + (\alpha^{n-1} - 1 + \alpha^{n-2} - 1 + \ldots + \alpha - 1 + 1 - 1)\frac{\beta}{\alpha - 1},$$

oder:

$$Q + G = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} s_1 + \left(\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} - n\right)\frac{\beta}{\alpha - 1},$$

oder wenn man hierin setzt:

$$\alpha^{n-1} s_1 = s_n - \frac{\alpha^{n-1} - 1}{\alpha - 1}\beta$$

$$Q + G = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n-1}(\alpha - 1)}\left(s_n - \frac{\alpha^{n-1} - 1}{\alpha - 1}\beta\right) + \left(\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} - n\right)\frac{\beta}{\alpha - 1},$$

also:

Digitized by Google

$$s_n = \frac{(\alpha-1)\alpha^{n-1}}{\alpha^n-1}(Q+G)+\left\{\frac{n\alpha^{n-1}}{\alpha^n-1}-\frac{1}{\alpha-1}\right\}\beta.$$

Es ist ferner:

$$P = \alpha s_n + \beta,$$

also:

$$P = \frac{(\alpha-1)\alpha^n}{\alpha^n-1}(Q+G)+\left\{\frac{n\alpha^n}{\alpha^n-1}-\frac{1}{\alpha-1}\right\}\beta.$$

Vernachlässigt man die Widerstände, setzt also $\alpha = 1$, $\beta = 0$, so kommt:

$$\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} = 1+\alpha+\alpha^2+\ \ldots\ +\alpha^{n-1} = n,$$

also:

$$P = \frac{1}{n}(Q+G).$$

Rollen oder Walzen (Cynematik).

Die Bewegung eines festen Körpers auf einer festen Unterlage, derart, dass der bewegte Körper immer eine augenblickliche Drehung um den Punkt oder diejenige Grade macht, in welcher seine Begrenzung grade die Unterlage berührt.

Rollenzug siehe Rolle.

Rostpendel. (praktische Mechanik).

Die gebräuchlichste Art des Compensationspendel. Dergleichen Pendel dienen dazu, um den Einfluss der Wärme auf die Ausdehnung des Pendels und die somit erfolgende Aenderung der Schwingungszeit zu compensiren. Sie bestehen aus Körpern von verschiedenen Ausdehnungsverhältnissen, s. B. zusammengelöthete Metalle.

Das Rostpendel besteht aus einer Reihe paralleler Metallstäben, etwa Eisen und Messing, die durch Querarme so verbunden sind, dass die Ausdehnungen der verschiedenen Metalle sich compensiren.

Seien (Fig. 343) *AB*, *AB*, *EF*, *EF*, *KL* Eisenstäbe und *CD*, *CD*, *GH*, *GH* Messingstäbe. Dehnen sich nun die Eisenstäbe eben so weit nach unten als die Messingstäbe nach oben aus, so erfüllt das Pendel seinen Zweck. Sei

$$OM + AB + EF + KL = l,$$

$$CD + GH = l_1,$$

so ist die Pendellänge:

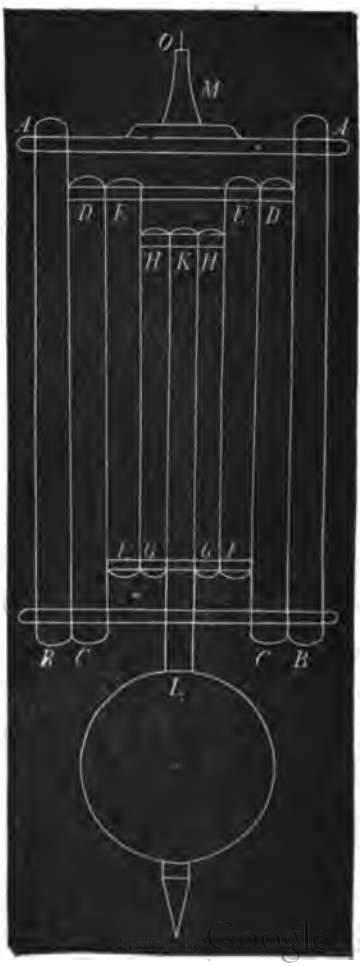
$$LO = \lambda = l - l_1.$$

Seien die Ausdehnungscoefficienten des Eisens δ, des Messings δ_1, t die Zunahme der Temperatur, so ist die Pendellänge:

$$L = l(1+\delta t) - l_1(1+\delta_1 t),$$

also die Zunahme der Länge:

Fig 343.



$$L - \lambda = (l\vartheta - l_1\vartheta_1)\,t;$$

damit diese gleich Null sind, ist zu setzen:

$$\frac{l}{l_1} = \frac{\vartheta}{\vartheta_1},$$

d. h. die Längen der Stäbe verhalten sich wie die Ausdehnungscoefficienten.

Rotation eines Körpers um eine feste Axe (Dynamik).

1) Allgemeines.

Rotation eines Körpers um eine feste Axe wird diejenige Bewegung genannt, wo eine im Körper befindliche oder mit ihm fest verbundene Linie (Axe) ihren absoluten Ort nicht ändert, und alle übrigen Punkte des Körpers ihre Stellung zu einander nicht ändern. Das Erstere setzt im Allgemeinen voraus, dass die Axe absolut fest sei, das Letztere, dass man es mit einem festen Körper zu thun habe.

Es folgt hieraus 1) dass jeder Punkt A des Körpers einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunkt der Schnittpunkt des von A auf die Axe gezogenen Lothes mit der letztern ist. Denn alle Punkte dieses Lothes dürfen weder ihre Stellung zu einander noch zur Axe verändern, was nur bei der bezeichneten Bewegung möglich ist. 2) Die Bogen, welche alle Punkte des Körpers zu irgend einer Zeit zurückgelegt haben, müssen zu gleichen Centriwinkeln gehören. Legt mand urch beliebige Punkte A, B, C Lothe durch die Axe, so würden diese Lothe ihre Stellung zu einander verändert haben, wenn es anders wäre.

Nennt man ϑ den Winkel, welchen das durch A gehende Loth auf die Axe mit einer absolut festen durch letztere gelegten Ebene macht, so heisst $\frac{d\vartheta}{dt}$ Winkelgeschwindigkeit des Körpers.

Die Winkelgeschwindigkeit ist somit für alle Punkte des Körpers dieselbe. Im Uebrigen wird sie im Allgemeinen von der Zeit abhängen, kann aber auch constant sein. Welche Kräfte oder Geschwindigkeiten auch auf einen festen Körper mit einer absolut festen Axe wirken, so kann man zu jeder derselben U zwei Kräfte hinzufügen V und $-V$ die beide gleich U, und wovon V mit U gleich gerichtet, $-V$ entgegengesetzt gerichtet ist. V wird nicht beachtet, weil diese Kraft durch einen festen Punkt geht, U und $-V$ bilden ein Kräftepaar. Zerlegen wir dasselbe in drei andere, in eins, senkrecht auf der festen Axe, und zwei, welche durch die Axe gehen, im Uebrigen auf einander und dem ersten senkrecht stehen, so üben die beiden letzteren keine Wirkung aus, eben weil sie durch eine feste Axe gehen, und es bleibt also von der auf A wirkenden Kraft nur das auf der festen Axe senkrechte Kräftepaar übrig. Die allen Punkten entsprechenden Kräftepaare setzen sich dann zu einem einzigen zusammen. Sei nun P die Kraft, welche auf Punkt A senkrecht auf der festen Axe wirkt, p die Entfernung der Richtung dieser Kraft von der festen Axe, so ist die Ebene von P und p auf der letzteren senkrecht, mithin Pp das Moment des in Betracht kommenden Kräftepaares. Geht ΣPp auf alle den Punkten des Körpers entsprechenden Momente, so ist also ΣPp das Moment des aus allen zusammengesetzten, auf der Axe senkrechten Gesammt-Kräftepaares.

Was nun die Geschwindigkeiten anbetrifft, so sei r die Entfernung des Punktes A von der Axe, dann ist $r\vartheta$ derjenige Bogen, welchen A in einer gewissen Zeit zurückgelegt hat, also $r\frac{d\vartheta}{dt}$ die wahre Geschwindigkeit von A, $mr\frac{d\vartheta}{dt}$ die dieser Geschwindigkeit entsprechende Kraft, wenn m die Masse des Punktes A ist. Das entsprechende Moment in Bezug auf die feste Axe ist dann $mr^2\frac{d\vartheta}{dt}$, da r auf dem unendlich kleinen Bogen $rd\vartheta$ senkrecht steht. Handelt es sich um den Zuwachs der Geschwindigkeit, so ist derselbe $r\frac{d^2\vartheta}{dt}$ und $mr^2\frac{d^2\vartheta}{dt}$ das zugehörige Moment. Alle diese Momente setzen sich zusammen zu $\frac{d\vartheta}{dt}\Sigma(mr^2)$ beziehlich $\frac{d^2\vartheta}{dt}\Sigma(mr^2)$, wo m und r auf alle Punkte des Körpers sich beziehen. Versteht man unter P continuirliche Kräfte, unter Π Stosskräfte, welche auf die Punkte des Körpers wirken, so gibt das d'Alembert'sche Prinzip:

1) $$\Sigma\Pi p = \frac{d\vartheta}{dt}\Sigma(mr^2)$$

2) $$\Sigma Pp = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}\Sigma(mr^2).$$

Der Ausdruck $\Sigma(mr^2)$ spielt also hierbei eine wichtige Rolle. Es ist dies die Summe der Produkte der Quadrate, der

Entfernungen aller Punkte A von der festen Axe A in die Massen dieser Punkte. Dieser Ausdruck heisst „Trägheitsmoment in Bezug auf die feste Axe."

Ist der Körper ein continuirlicher, dm die Masse eines Punktes, so ist also das Trägheitsmoment gleich $\int r^2\,dm$, wo das Integral sich über den ganzen Körper erstreckt.

Es wird gut sein, die Trägheitsmomente zunächst einer besonderen Untersuchung zu unterwerfen.

2) Von den Trägheitsmomenten.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich namentlich auf die Reduction des Trägheitsmomentes eines Körpers, welches auf eine willkürliche Axe bezogen ist, auf gewisse andere Axen.

Setzen wir drei auf einander senkrechte, im Körper feste Coordinatenaxen X, Y, Z voraus, die durch Punkt O des Körpers gehen, so sind bezüglich die auf sie bezogenen Trägheitsmomente:

$$\Sigma m(y^2+z^2),\quad \Sigma m(x^2+z^2),$$
$$\Sigma m(x^2+y^2).$$

Wir bezeichnen dieselben bezüglich mit Mk^2, Mk^2, Ml^2, indem wir unter M die Gesammtmasse des Körpers verstehen. Ziehen wir eine andere Axe der Z parallel durch einen beliebigen Punkt A des Körpers, und sei, wie dies noch immer geschehen kann, die Verbindungslinie der Schnittpunkte beider Axen mit der Ebene XY die Axe der Y, sei a die Entfernung beider Axen, so ist das auf die letztere Axe bezogene Trägheitsmoment offenbar

$$\Sigma m[(x-a)^2+y^2] = Ml^2 - 2a\Sigma mx + \Sigma ma^2.$$

Ist nun ξ die Abscisse des Schwerpunktes, so hat man bekanntlich

$$\Sigma mx = \xi M,$$

und ausserdem ist

$$\Sigma ma^2 = Ma^2,$$

also, wenn man das auf die neue Axe bezogene Trägheitsmoment mit Mq^2 bezeichnet:

$$Mq^2 = M(l^2+a^2) - 2Ma\xi.$$

Unter Ml^2, Mq^2 sind hier die Trägheitsmomente, bezüglich auf zwei sonst beliebige einander parallele Axen verstanden, a ist der Abstand beider Axen von einander, ξ das vom Schwerpunkte auf diejenige Ebene gefällte Loth, welches durch die erste Axe geht und auf a senkrecht steht.

Es hängt also das letzte Trägheitsmoment nur von Entfernung a ab. „Es ist mithin dasselbe gleich für alle Seiten eines graden Cylinders, dessen Axe durch den Schwerpunkt geht."

Aus der allgemeinen Formel ergibt sich noch:

$$Mq^2 - Ml^2 = M(a-\xi)^2 - M\xi^2$$

d. h.:

„Die Differenz der Trägheitsmomente in Bezug auf zwei parallele Axen ist gleich der Masse des Körpers, multiplicirt in den Unterschied der Quadrate ihrer Abstände vom Schwerpunkte."

Auch ergibt sich leicht aus der vorletzten Formel:

„Von allen einander parallelen Axen hat die durch den Schwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment."

Gehe jetzt eine Axe U durch den Anfangspunkt O und mache die Winkel α, β, γ mit den Coordinatenaxen. Fällt man von einem Punkte A ein Loth auf U, welches diese Axe im Punkte B schneidet, so ist:

$$AU^2 = OU^2 - AB^2 = x^2+y^2+z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

oder wenn wir AU mit r bezeichnen:

$$r^2 = x^2\sin\alpha^2 + y^2\sin\beta^2 + z^2\sin\gamma^2 - 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma;$$

und wenn wir dass zu U gehörige Trägheitsmoment Σmr^2 mit Mu^2 bezeichnen:

$$Mu^2 = A\sin\alpha^2 + B\sin\beta^2 + C\sin\gamma^2 - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta,$$

wo gesetzt wurde:

$$A=\Sigma mx^2,\ B=\Sigma my^2,\ C=\Sigma mz^2,\ D=\Sigma myz,\ E=\Sigma mxz,\ F=\Sigma mxy.$$

Ziehen wir nun durch O beliebige Grade, die wir als Axen betrachten, und tragen

Digitized by Google

auf jeder davon die Länge $OB = \frac{1}{u\sqrt{M}}$ ab, so bildet der Punkt B eine geschlossene Oberfläche. Sind x, y, z die Coordinaten von N, so ist:

$$\cos\alpha = ux\sqrt{M}, \quad \cos\beta = uy\sqrt{M}, \quad \cos\gamma = uz\sqrt{M},$$

also auch:

$$Mu^2(x^2+y^2+z^2)' = 1.$$

Wenn man aus diesen Gleichungen und dem eben berechneten Werth von Mu^2: α, β, γ eliminirt, so ergibt sich als Gleichung der Oberfläche, welcher den Ort des Punktes B bildet:

1) $$x^2(B+C)+y^2(A+C)+z^2(A+B)-2yzD-2xzE-2xyF=1.$$

Dies ist offenbar ein Ellipsoid, da die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 wesentlich positiv sind. Wir nennen dies mit Poinsot das Centralellipsoid. Wenn man einen Punkt der Oberfläche desselben mit dem Umfangspunkt O verbindet, und die Verbindungslinie als Axe betrachtet, so ist die Länge derselben also gleich $\frac{1}{u\sqrt{M}}$ oder der umgekehrte Werth der Wurzel des zugehörigen Trägheitsmomentes. Die Coordinatenaxen sind hier ganz beliebig gewählt; immer also kann man die Hauptaxen des zu Punkt O gehörigen Centralellipsoids als Coordinatenaxen betrachten, und in diesem Falle ist $D=E=F=0$, also:

$$\Sigma myz = \Sigma mxz = \Sigma mxz = 0,$$

d. h. es gibt für jeden Punkt O drei auf einander senkrechte Richtungen, für welche diese drei Summen oder Integrale verschwinden. Diese Richtungen nennen wir auch hier Hauptaxen. Sind zwei der Hauptaxen für Punkt O gleich, so ist das Centralellipsoid ein zweiaxiges, und dann ist eine Grade, und jede auf derselben senkrechte durch O gehende Richtung als Hauptaxe zu betrachten. Sind alle drei Hauptaxen gleich, so wird das Centralellipsoid eine Kugel, und jede durch deren Mittelpunkt gehende Richtung ist eine Hauptaxe. — Die zu den Hauptaxen gehörigen Trägheitsmomente nennen wir „Hauptträgheitsmomente."

Um die Gleichungen der zu O gehörigen Hauptaxen zu finden, braucht man also nur die Hauptaxen des durch Gleichung 1) gegebenen Ellipsoids zu bestimmen. Es geschieht dies bekanntlich auf folgende Weise.

Seien λ, μ ν, λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2 bezüglich die Cosinus der Winkel der Hauptaxen mit den zuerst gewählten Coordinatenaxen, so sind die Gleichungen der ersteren:

$$\frac{x}{\lambda}=\frac{y}{\mu}=\frac{z}{\nu}, \quad \frac{x}{\lambda_1}=\frac{y}{\mu_1}=\frac{z}{\nu_1}, \quad \frac{x}{\lambda_2}=\frac{y}{\mu_2}=\frac{z}{\nu_2},$$

und es handelt sich um die Bestimmung dieser neun Cosinus. Sind noch ξ, η, ζ, die auf die Hauptaxen bezogenen Coordinaten eines Punktes A, so ist

$$x=\lambda\xi+\lambda_1\eta+\lambda_2\zeta, \quad y=\mu\xi+\mu_1\eta+\mu_2\zeta, \quad z=\nu\xi+\nu_1\eta+\nu_2\zeta$$

und wenn man diese Ausdrücke in 1) einsetzt, wo wir noch substituiren:

$$B+C=a, \quad A+C=b, \quad A+B=c.$$

(Es stellen dann offenbar a, b, c die drei Hauptträgheitsmomente vor.)

1) $$\begin{aligned}&(a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2-2D\mu\nu-2E\lambda\nu-2F\lambda\mu)\xi^2\\&+(a\lambda_1^2+b\mu_1^2+c\nu_1^2-2D\mu_1\nu_1-2E\lambda_1\nu_1-2F\lambda_1\mu_1)\eta^2\\&+(a\lambda_2^2+b\mu_2^2+c\nu_2^2-2D\mu_2\nu_2-2E\lambda_2\nu_2-2F\lambda_2\mu_2)\zeta^2\\&-2[D(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)+E(\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1)+F(\mu_2\lambda_1+\mu_2\lambda_1)\\&\qquad -a\lambda_1\lambda_2-b\mu_1\mu_2-c\nu_1\nu_1]\eta\zeta\\&-2[D(\mu\nu_2+\nu\mu_2)+E(\lambda\nu_2+\nu\lambda_2)+F(\mu\lambda_2+\lambda\mu_2)\\&\qquad -a\lambda\lambda_2-b\mu\mu_2-c\nu\nu_2]\xi\zeta\\&-2[D(\mu\nu_1+\nu\mu_1)+E(\lambda\nu_1+\nu\lambda_1)+F(\mu\lambda_1+\lambda\mu_1)\\&\qquad -a\lambda\lambda_1-b\mu\mu_1-c\nu\nu_1]\xi\eta=1.\end{aligned}$$

Damit dieses die Hauptaxen seien, müssen die Coefficienten der drei letzten Glieder links verschwinden. Es ist also zu setzen:

Digitized by Google

$$D(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)+E(\lambda_1\nu_2+\lambda_2\nu_1)+F(\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_1)=a\lambda_1\lambda_2+b\mu_1\mu_2+c\nu_1\nu_2$$
$$D(\mu\nu_2+\nu\mu_2)+E(\lambda\nu_2+\nu\lambda_2)+F(\mu\lambda_2+\lambda\mu_2)=a\lambda\lambda_2+b\mu\mu_2+c\nu\nu_2$$
$$D(\mu\nu_1+\nu\mu_1)+E(\lambda\nu_1+\nu\lambda_1)+F(\mu\lambda_1+\lambda\mu_1)=a\lambda\lambda_1+b\mu\mu_1+c\nu\nu_1.$$

Diese Gleichungen nebst den sechs bekannten zwischen den Grössen $\lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ stattfindenden reichen zur Bestimmung derselben hin. Multipliciren wir die vorletzte dieser Gleichungen mit λ, und die letzte mit λ_2 und subtrahiren, so ergibt sich mit Hülfe der bekannten Gleichungen:

$$\lambda=\mu_1\nu_2-\nu_1\mu_2$$

u. s. w. leicht:

$$D(\nu^2-\mu^2)-E\lambda\mu+F\lambda\nu=(b-c)\mu\nu.$$

In gleicher Weise ergeben sich, wie auch selbstverständlich ist, wenn man bezüglich mit $\mu_1\mu_2$, $\nu_1\nu_2$ multiplicirt:

$$E(\lambda^2-\nu_2)-F\mu\nu+D\lambda\mu=(c-a)\nu\lambda$$
$$F(\mu^2-\lambda^2)-D\nu\lambda+E\mu\nu=(a-b)\lambda\mu.$$

Da diese Gleichungen in Bezug auf λ, μ, ν homogen sind, setzen wir $\mu=v\lambda$, $\nu=w\lambda$ und erhalten:

$$-D(v^2-w^2)-Fv+Fw=(b-c)vw$$
$$-E(w^2-1)-Fvw+Dv=(c-a)w$$
$$-F(1-v^2)-Dw+Evw=(a-b)v.$$

Da die letztere in Bezug auf w linear ist, so kann man den daraus berechneten Werth von w bilden und in die vorhergehenden einsetzen; dies gibt:

2) $$w(D-Ev)=-F(1-v^2)+(b-a)v$$

3) $$v^3[D(E^2-F^2)-EF(b-c)]+v^2[-FD(c+b-2a)+E^2-2ED^2+EF^2+E(b-a)(c-b)]+v[2E^2D+F^2D+D^2+EF(2b-a-c)-D(b-a)(c-a)]+E(D^2-F^2)+DF(c-a)=0.$$

Die letztere cubische Gleichung muss drei reelle Wurzeln haben. Da ja die entsprechende Fläche drei reelle Axen hat. Sind diese gefunden, und bezeichnen wir sie mit v, v_1, v_2, so gibt Gleichung 2) die entsprechenden Werthe w, w_1, w_2 und zwar zu jedem v nur ein w; sind v und w bestimmt, so hat man:

4) $$\mu=v\lambda, \quad \nu=w\lambda,$$
$$\mu_1=v_1\lambda_1, \quad \nu_1=w_1\lambda_1,$$
$$\mu_2=v_2\lambda_2, \quad \nu_2=w_2\lambda_2.$$

Da sich die Axen gleichmässig verhalten, also da $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=1$ ist:

5) $$\lambda^2=\frac{1}{1+v^2+w^2}, \quad \lambda_1^2=\frac{1}{1+v_1^2+w_1^2}, \quad \lambda_2^2=\frac{1}{1+v_2^2+w_2^2}.$$

Diese Werthe in die Gleichungen 4) gesetzt, lösen dann die Aufgabe vollständig. Nimmt man wieder x, y, z, die schon auf die Hauptaxen bezogenen Coordinaten, so nimmt übrigens die Gleichung 1) die Gestalt an:

6) $$ax^2+by^2+cz^2=1.$$

Um das Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine durch O gehende Axe zu finden, bemerke man, dass

$$x=\frac{\alpha}{u\sqrt{M}}, \quad y=\frac{\beta}{u\sqrt{M}}, \quad z=\frac{\varepsilon}{u\sqrt{M}}$$

die Coordinaten des Punktes B sind, worin diese Axe die Oberfläche des Centralellipsoids schneidet. Setzt man diese Werthe in die Gleichung 6) so kommt also:

7) $$Mu^2=a\cos\alpha^2+b\cos\beta^2+c\cos\gamma^2.$$

Digitized by Google

Der Ausdruck rechts ist offenbar kleiner als der grösste der Werthe a, b, c, und grösser als der kleinste davon.

Unter den Hauptträgheitsmomenten ist also das grösste und kleinste Trägheitsmoment jedenfalls enthalten.

Ist $a = b$, so ist:

$$Mu^2 = a(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2) + c\cos\gamma^2 = a + (c-a)\cos\gamma^2.$$

Die Trägheitsmomente sind dann für alle Axen gleich, welche mit der Rotationsaxe des Centralellipsoids gleiche Winkel γ machen. Sind für irgend ein System von rechtwinkligen Coordinaten:

$$D = \Sigma m z y = 0 \quad \text{und} \quad E = \Sigma m x z = 0,$$

so ist die Gleichung des Centralellipsoids:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 - 2Fxy = 0.$$

Es ist dann offenbar nur die Axe der z eine Hauptaxe.

Es fragt sich jetzt in welchen Punkten A eines Körpers das Centralellipsoid eine Kugel, also jede durchgelegte Linie eine Hauptaxe ist. — Nehmen wir als Coordinatenaxen die zum Schwerpunkt gehörigen Hauptaxen an. x_0, y_0, z_0 seien dann die Coordinaten von A, x, y, z die eines beliebigen Punktes. Legt man durch A drei Axen parallel denen der x, y, z so sollen dies sonach Hauptaxen sein und somit:

$$\Sigma m(y-y_0)(z-z_0) = 0, \quad \Sigma m(z-z_0)(x-x_0) = 0, \quad \Sigma m(x-x_0)(y-y_0) = 0.$$

Es war aber, da die Coordinatenaxen gleichfalls Hauptaxen sind:

$$\Sigma m y z = 0, \quad \Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m x y = 0$$

und da diese durch den Schwerpunkt gehen:

$$\Sigma m x = \Sigma m y = \Sigma m z = 0.$$

Aus der Vereinigung dieser neuen Gleichungen folgt:

$$y_0 z_0 = x_0 z_0 = x_0 y_0 = 0.$$

Es sind also jedenfalls zwei der Grössen x_0, y_0, z_0 der Null gleich. Sei $x_0 = y_0 = 0$, dann sind die Momente in Bezug auf die durch A gelegten Axen offenbar:

$$a + Mz_0^2, \quad b + Mz_0^2, \quad c$$

z_0 ist nämlich die Entfernung der durch A gelegten x und y parallelen Axen von den entsprechenden durch den Schwerpunkt gelegten, während die Entfernung der dritten Axen von einander gleich Null ist.

Ist nun das Centralellipsoid eine Kugel für Punkt A, und a_1 die Grösse des zu A gehörigen Hauptträgheitsmomentes, so ist für eine beliebige durch A gehende Axe:

$$Mu^2 = a_1(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) = a_1.$$

Also: „Alle diese Trägheitsmomente sind gleich." Somit ist auch:

$$a = b \quad \text{und} \quad a + Mz_0^2 = c.$$

Es sind also für den fraglichen Körper zwei der auf den Schwerpunkt bezogenen Hauptmomente gleich. Dies ist die erste Bedingung. Die zweite ist die, dass alle Punkte, welche die verlangte Eigenschaft haben, auf der dritten Hauptaxe des Schwerpunktes sich befinden. Ausserdem muss das dritte Hauptmoment c grösser als a sein. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gibt es zwei Punkte, welche die fragliche Eigenschaft haben; ihre Entfernung vom Schwerpunkte ist:

$$z_0 = \pm\sqrt{\frac{c-a}{M}}.$$

Ist die Axe der z wieder eine der durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen, und verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach einem Punkte dieser Axe, welche die Entfernung e vom Schwerpunkte hat, und sei z_1 die neue Ordinate, so ist:

$$z = z_1 + e.$$

Wir hatten aber:

$$\Sigma m y z = \Sigma m x z = \Sigma m x y = 0,$$

Digitized by Google

also:

$$\Sigma m y z = \Sigma m y z_1 + e \Sigma m y,$$

und da $\Sigma m y$ der Null gleich ist:

$$\Sigma m y z_1 = 0.$$

Ebenso ist auch:

$$\Sigma m x z_1 = 0.$$

D. h.:

„Jede durch den Schwerpunkt gehende Hauptaxe ist auch Hauptaxe zu jedem in ihr befindlichen Punkte, und die beiden andern zugehörigen Hauptaxen sind dann den zu dem Schwerpunkt gehörigen parallel."

Die Formel:

$$M q^2 = M (l^2 + a^2)$$

gibt leicht, wenn man das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe hat, das Trägheitsmoment für die durch einen beliebigen Punkt gehende parallele Axe. Die Formeln 2) bis 5) in Verbindung mit A) geben die Trägheitsmomente für die drei Hauptaxen, welche zu irgend einem Punkt gehören, wenn man die Trägheitsmomente für drei beliebig durch diesen Punkt gehende auf einander senkrechte Axen hat. Die Gleichung 7) gibt aus den Hauptträgheitsmomenten ein beliebiges Trägheitsmoment für eine Axe, die durch denselben Punkt geht. Die Aufgabe das Trägheitsmoment für iene beliebige Axe zu finden, kommt also immer auf die Auffindung der auf den Schwerpunkt bezogenen Hauptträgheitsmomente zurück.

Es ist aber auch klar, dass bei homogenen Körpern, die so beschaffen sind, dass man durch einen Punkt derselben eine Ebene derart legen kann, dass jede auf der Ebene senkrechte Linie durch die Ebene und zwei Punkte der Oberfläche in zwei gleiche Theile getheilt wird, immer die Bedingung

$$\Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m y z = 0$$

erfüllen wird, wenn man diese Ebene als Ebene der xy nimmt; es gehören nämlich dann zu jedem x und jedem y zwei z, die gleich sind bis auf das Vorzeichen, welches entgegengesetzt ist.

Lassen sich also durch einen Punkt auf einander senkrechte Ebenen von der besagten Eigenschaft legen, so ist auch $\Sigma m x y = 0$. Die drei Hauptaxen werden durch diese Ebenen so bestimmt, dass ihr Durchschnitt die eine, die auf diesen in jeder Ebene senkrechte Linie eine der beiden anderen ist.

Beispiel. Sei ein homogenes rechtwinkliges Parallelepipedon gegeben, so sind nach dem Obigen die drei durch den Mittelpunkt den Kanten parallel gezogenen Linien die Hauptaxen.

Seien a, b, c die halben Kanten, so ist, wenn ϱ die Dichtigkeit ist:

$$\int (x^2 + y^2)\, dm = 8 \varrho c \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=a} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

d. h. wenn $M = 8 \varrho abc$ die Masse des Parallelepipedons ist:

$$\int (x^2 + y^2)\, dm = \frac{M}{3} (a^2 + b^2).$$

Eben so ergeben sich für die beiden andern Hauptträgheitsmomente:

$$\frac{M}{3} (b^2 + c^2), \quad \frac{M}{3} (c^2 + a^2).$$

Macht also irgend eine Grade die Winkel α, β, γ mit den Kanten, und ist h ihre Entfernung vom Mittelpunkte, so hat man für das auf sie bezogene Trägheitsmoment:

$$\frac{M}{3} [\cos \alpha^2 (b^2 + c^2) + \cos \beta^2 (c^2 + a^2) + \cos \gamma^2 (a^2 + b^2)].$$

Sehr leicht kann man auch das Trägheitsmoment eines homogenen Umdrehungskörpers in Bezug auf seine Rotationsaxe finden.

Ist $x = f(z)$ die Gleichung der einfach gekrümmten Linie, welche durch Drehung um die Axe der z, die Oberfläche des Umdrehungskörpers erzeugte, so ist $r = f(z)$ die Gleichung der letztern, und $\int r^2 dm$ das gesuchte Trägheitsmoment. — Das Massen-Element ist dann, $\varrho r dr d\vartheta ds$, wo ϑ der Winkel ist, welchen irgend eine Richtung von r mit einer festen durch die Rotationsaxe gelegten Ebene macht. Das Trägheitsmoment ist also gleich:

$$2\pi \varrho \int \int r^3 dr\, ds.$$

Digitized by Google

Also, wenn z_1, z_2 der grösste und der kleinste Werth von z sind, (vorausgesetzt, dass die Oberfläche von einer Ebene nur in einer einfachen Curve geschnitten wird) erhält man dafür:

$$\frac{\pi\varrho}{2}\int_{z_1}^{z_2}[f(z)]^4\,dz.$$

Z. B. für einen Rotationscylinder, wo man r constant hat, ergibt sich:

$$\pi\varrho\,\frac{z_2-z_1}{2}\,r^4,$$

und für eine Kugel, wo $r^2+z^2=a^2$, $z_2=+a$, $z_1=-a$ ist:

$$\frac{\pi\varrho}{2}\int_{-a}^{+a}(a^2-z^2)^2\,dz=\frac{8\pi\varrho a^5}{15}.$$

Sei schliesslich noch ein homogenes Ellipsoid gegeben. Die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen sind nach Obigem die des Ellipsoids selbst. Dessen Gleichung sei:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe der z ist:

$$\varrho\int(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Die Grenzen von z sind:

$$z_1=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad z_2=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}};$$

man erhält also:

$$2\varrho c\int\int(x^2+y^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Dieses Integral zerfällt in zwei:

$$2\varrho c\int x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy,$$

$$2\varrho c\int y^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy.$$

Das erstere wird nach y in den Grenzen $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ und $+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ integrirt; offenbar aber ist dann:

$$\int dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\int dy\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}$$

die Fläche eines Halbkreises mit Halbmesser $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Man erhält also dafür $\frac{\pi b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, und es ist also noch zu bestimmen:

$$\pi bc\varrho\int_{-a}^{+a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\pi bca^3\varrho=\frac{Ma^2}{5},$$

wo M die Masse des Ellipsoids ist. Eben so gibt das zweite Integral $\frac{Mb^2}{5}$, so dass also das Trägheitsmoment in Bezug auf die Axe der z ist: $\frac{M}{5}(a^2+b^2)$. Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die beiden andern Trägheitsmomente.

Digitized by Google

3) Weitere Entwickelung der Gleichungen für die Rotation.

Die in Abschnitt 1) entwickelten Formeln 1) und 2) nehmen jetzt die Gestalt an:

$$1) \qquad \Sigma \Pi p = M \frac{d\vartheta}{dt}(k^2 + l^2)$$

$$2) \qquad \Sigma P p = M \frac{d^2\vartheta}{dt^2}(k^2 + l^2).$$

Mk^2 ist das Trägheitsmoment in Bezug auf eine der gegebenen parallele durch den Schwerpunkt gehende Axe, l der Abstand der gegebenen vom Schwerpunkte.

Sind die Kräfte, welche auf den Körper wirken, nicht von der Zeit abhängig, so ist ΣPp eine Function von ϑ allein. Setzen wir dann: $\frac{\Sigma P p}{M(k^2+l^2)} = \Theta$. Es kann dann eine erste Integration der Gleichung 2) vollzogen werden. Es ist $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) = \Theta$. Also, wenn man mit $2d\vartheta$ multiplicirt und integrirt:

$$3) \qquad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \Theta d\vartheta + \tau^2.$$

Es ist hier ϑ_0 der Anfangswerth von ϑ, τ der der Winkelgeschwindigkeit. Der letztere ist bestimmt durch Formel 1), welche die Gestalt annimmt:

$$4) \qquad \Sigma \Pi p = M\tau(k^2 + l^2).$$

$\Sigma(\Pi p)$ ist das Moment der im Anfang wirkenden Stosskräfte. Durch eine abermalige Quadratur wird das Problem vollständig gelöst. Von den sechs Gleichungen, welche die Bewegung eines festen Körpers bestimmen, wurde hier nur eine gebraucht. Aber auch die fünf andern werden nöthig, wenn es darauf ankommt, den Druck, oder falls Stosskräfte wirken, den Stöss gegen die Drehaxe zu berechnen.

Sei r der Abstand eines Punktes A von der Drehaxe, die wir jetzt als Axe der z betrachten, und bezeichnen wir mit τ die momentane Winkelgeschwindigkeit, so ist:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \tau.$$

also:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\tau^2 - y\frac{d\tau}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y\tau^2 + x\frac{d\tau}{dt}.$$

Wirken auf Punkt A, dessen Masse m sei, die Kräfte x, y, z nach den 3 Axen, so ist in die sechs Gleichungen der Bewegung noch der Druck auf die Axe einzuführen. Wie derselbe beschaffen sei, so lässt er sich in drei Kräfte a, b, c, welche im Anfangspunkte parallel den Axen und in drei Paare A, B, C, deren Axen den Coordinatenaxen parallel sind, zerlegen, und diese sind mit entgegengesetzten Vorzeichen in die Gleichungen der Bewegung mit aufzunehmen.

Man erhält auf diese Weise:

$$a = \Sigma m X + M\xi\tau^2 + M\eta\frac{d\tau}{dt}$$

$$b = \Sigma m Y + M\eta\tau^2 - M\xi\frac{d\tau}{dt}$$

$$c = \Sigma m Z,$$

ξ, η, ζ sind die Coordinaten des Schwerpunktes.

$$A = \Sigma m(yZ - zY) - \tau^2\Sigma myz + \frac{d\tau}{dt}\Sigma mxz$$

$$B = \Sigma m(zX - xZ) + \tau^2\Sigma mxz + \frac{d\tau}{dt}\Sigma myz.$$

Es wird aber $C = 0$, da dieser Ausdruck das eine Paar ist, dessen Axe die der z ist, und sich hierfür nach Gleichung 2) Null ergibt.

Die Kräfte a, b, c und die Paare A, B bringen also den Druck auf die Axe hervor.

Es fragt sich jetzt, in welchen Fällen dieser Druck verschwindet.

Es sei die Axe der z eine Hauptaxe in Bezug auf den Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man

$$\Sigma mxz = \Sigma myz = 0.$$

Wirken ferner keine continuirlichen Kräfte, so ist auch $X = Y = Z = 0$, mithin also $C = 0$ und $A = B = 0$. Es wirken also nur die auf der Drehaxe senkrechten, durch den Anfangspunkt gehenden Kräfte a und b. Wenn nun die Axe der z nicht fest wäre, sondern nur der Anfangspunkt, im Anfange aber eine Drehung um die Axe der z erfolgt, so könnte diese nur durch einen Druck auf die Drehaxe geändert werden, welcher durch einen nicht festen Punkt derselben gehen muss. Es haben also die zu einem Punkte gehörigen Hauptaxen die Eigenschaft, dass wenn dieser Punkt fest, und im Anfange eine Drehung um eine der Hauptaxen erfolgt, dabei aber keine continuirliche Kraft wirkt, sich die Bewegung um diese Hauptaxe gleichmässig

fortsetzt, also keine Aenderung der Drehaxe während der Bewegung erfolgt. Ist der Anfangspunkt zugleich Schwerpunkt, so ist $\xi = \eta = \zeta = 0$, also $a = b = 0$. Es erfolgt gar kein Druck, und es wird also, wenn im Anfang eine Drehung um eine zum Schwerpunkt gehörige Hauptaxe erfolgt, dieselbe fortdauern, ohne dass der Schwerpunkt fest zu sein braucht.

4) Drehung unter dem Einflusse von Stosskräften.

Wirke jetzt eine einzige Stosskraft auf den Körper, in Punkt x, y, z, deren Componenten X, Y, Z seien.

Setzen wir $\frac{d\vartheta}{dt} = \tau$, so ist die entsprechende Formel:

$$\Sigma \Pi p = M(k^2 + l^2)\tau;$$

z kann gleich Null gesetzt werden, wenn man zum Angriffspunkt den Durchschnitt der Stosskraft mit der Ebene x, y wählt.

Sei $\frac{d\tau}{dt} = 0$, d. h. wirke keine continuirliche Kraft, dann ist $\tau = \frac{\Sigma \Pi p}{M(k^2 + l^2)}$, also constant.

Was den gegen die feste Axe, die wir als Axe der z betrachten, ausgeübten Stoss anbetrifft, so kann man wieder setzen:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad \tau = \frac{d\vartheta}{dt},$$

also:

$$\frac{dx}{dt} = -\tau y, \quad \frac{dy}{dt} = \tau x.$$

Der Stoss zerfällt jedenfalls in drei im Anfangspunkte der Coordinaten den Axen parallelen Stösse a, b, c und in Paare A, B, C, deren Axen den Coordinatenaxen parallel sind. Es ist also:

$$a = X + \tau M\eta, \quad b = Y - \tau M\xi, \quad c = Z,$$

$$A = yZ + \tau \Sigma m z, \quad B = -xZ + \tau \Sigma m yz,$$

während C der Null gleich ist.

Soll die feste Axe gar keinen Stoss erleiden, so muss sein:

$$a = b = c = 0, \quad A = B = 0.$$

Geht die Ebene xz durch den Schwerpunkt, wie sie doch immer gelegt werden kann, so ist also $\eta = 0$, und somit:

$$Z = 0, \quad X = 0, \quad Y = N\xi\tau, \quad \Sigma m xz = 0,$$

$$\Sigma m yz = 0, \quad aY = \tau \Sigma m r^2.$$

Die letzte Gleichung ist nämlich identisch mit $\Sigma \Pi p = M(k^2 + l^2)\tau$. Die beiden vorletzten der sechs Bedingungen zeigen, dass die Axe eine Hauptaxe in Bezug auf den Anfangspunkt ist, die erste und zweite, dass die Kraft senkrecht steht auf der durch die Hauptaxe und den Schwerpunkt gehenden Ebene. Der Abstand a der Kraftrichtung von der Drehaxe ist noch gegeben durch die Gleichung:

$$a = \frac{\Sigma m r^2}{M\xi},$$

oder wenn Mk^2 das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende der gegebenen parallelen Axe ist:

$$a = \xi + \frac{k^2}{\xi}.$$

Also, damit die Drehaxe keinen Stoss erleide, ist nöthig und ausreichend:

1) dass die Stosskraft senkrecht auf der durch Drehaxe und Schwerpunkt gehenden Ebene steht, 2) dass die Drehaxe eine Hauptaxe ist in Bezug auf ihren Durchschnittspunkt mit derjenigen darauf senkrechten Ebene, in welcher die Kraft liegt, 3) dass die Entfernung der Kraft von der Drehaxe gleich $\xi + \frac{k^2}{\xi}$ ist.

Die letztere Bedingung ist unerfüllbar, wenn der Schwerpunkt in der Drehaxe liegt, da dann $\xi = 0$ wird.

Der Durchschnitt der Richtung der Kraft mit der Ebene in welcher die Drehaxe und der Schwerpunkt liegen, heisst Mittelpunkt des Stosses.

5) Anwendung auf das physikalische Pendel.

Möge auf den Körper die Schwere allein wirken. Wir nehmen an, dass die Drehaxe horizontal und die Axe der y sei. Die z Axe nehmen wir der Richtung der Schwere entgegengesetzt. Als Winkel ϑ kann der betrachtet werden, welchen die Ebene yz mit der durch Drehaxe und Schwerpunkt gelegten Ebene macht, er wachse zwischen den positiven Seiten der Axen y und z. Das statische Moment der Schwere an dem Punkte A ist dann gleich gmx, und alle diese setzen sich zusammen zur Grösse $gM\xi$. Die Gleichung 2) des Abschnitt 3) wird also:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{g\xi}{k^2 + l^2}.$$

Oder da man hat $\xi = l\sin\vartheta$:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{gl}{k^2 + l^2}\sin\vartheta.$$

Digitized by Google

Beschränkt sich der Körper auf einen Punkt, der sich um eine feste Axe dreht, so ist zu setzen $k = 0$, da der bewegte Punkt mit dem Schwerpunkte zusammenfällt. Setzen wir in diesem Falle L für l, so ist L die Entfernung der Drehaxe vom bewegten Punkte und

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{g}{L}\sin\vartheta.$$

Die Vorrichtung ist in diesem Falle ein mathematisches Pendel. Im Allgemeinen nennen wir einen Körper der unter Einfluss der Schwere sich um eine feste Axe dreht physikalisches Pendel. Letzteres also stimmt in seiner Bewegung ganz mit einem mathematischen überein, dessen Länge ist:

$$L = \frac{k^2 + l^2}{l} = l + \frac{k^2}{l}.$$

Schwingungspunkt eines physikalischen Pendels ist jeder Punkt dessen Entfernung von der Axe gleich $l + \frac{k^2}{l}$ ist, welche durch Axe und Schwerpunkt geht. Ein solcher bewegt sich also ganz so, als wenn er allein wäre, da auch die Anfangswerthe von ϑ und $\frac{d\vartheta}{dt}$ für die p Punkte des mathematischen Pendels übereinstimmen. Hauptschwingungspunkt ist der, dessen senkrechte Entfernung von der Axe durch den Schwerpunkt geht, seine Entfernung vom Schwerpunkte ist also $\frac{k^2}{l}$.

Legt man durch den Hauptschwingungspunkt eine feste horizontale Axe, so ist in dem Ausdrucke L' für das entsprechende mathematische Pendel, für l zu setzen $\frac{k^2}{l}$, also für $\frac{k^2}{l}$ kommt l, es wird also $L' = L$, d. h. die Bewegung des Pendels bleibt dann ungeändert. Die frühere Drehaxe enthält dann den Hauptschwingungspunkt. Auf dieser Eigenschaft beruht das Reversionspendel (siehe den entsprechenden Artikel).

Rotation eines Körpers um einen festen Punkt (Dynamik).

1) Allgemeines.

Rotation eines Körpers um einen Punkt ist diejenige Bewegung, bei welcher ein Punkt seine Stellung überhaupt und alle andern Punkte ihre Stellung zu ihm und zu einander nicht ändern. Damit diese Bewegung also eintrete, muss im Allgemeinen der Körper ein fester und der Drehpunkt absolut fest sein.

Um die drehende Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt O zu charakterisiren, denken wir uns diese Bewegung nur eine unendlich kleine Zeit lang fortgesetzt, wo dann nach allgemeinen mechanischen Prinzipien die zurückgelegte Bahn als gradlinig oder, wenn man will, als Bogen irgend einer anderen continuirlich gekrümmten Curve betrachtet werden kann.

Sei A (Fig. 344) ein beliebiger Punkt des Körpers, A' die Lage dieses Punktes nach einer, unendlich kleinen Bewe-

Fig. 344.

gung, also AA' seine Bahn. Die Linie OA wird dann nach unendlich kleiner Zeit die Lage OA' annehmen, und die zurückgelegte Bahn AOA' dieser Linie, kann als ein Theil der Oberfläche eines Rotationskegels betrachtet werden, dessen Seite OA ist. Liegt Punkt a auf OA, und ist aa' die Bahn desselben, so ist $Oa = Oa'$, also $aa' \neq AA'$, d. h. alle Punkte auf OA haben parallele Bahnen. Legt man nun durch OA auf AA' senkrecht eine Ebene AOC, so wird wenn A nach A' gelangt ist, jeder Punkt dieser Ebene sich in der Ebene $A'OC$ befinden, welche die erste Lage in einer durch O gehenden Linie OC schneidet und Winkel $AOC = A'OC$, da die Lage der Ebene sich nur unendlich wenig ändert. Ist OB irgend eine durch O gehende Richtung in der Ebene, $OB' = OB$ die Lage dieser Linie nach unendlich kleiner Zeit, so muss OB' eben so gegen OA' liegen, wie OB gegen OA, also Winkel $AOB = A'OB'$, und also Winkel $COB' = COB$ sein. Es hat also OB einen Theil einer Rotationkegelfläche zurückgelegt, deren Axe OC ist, und somit bleibt OC während der Bewegung fest. Daraus folgt:

„Jede Drehung eines Körpers um einen festen Punkt O ist zugleich eine Dre-

hung um eine durch diesen Punkt gehende Axe OC. Diese Axe ist aber veränderlich, d. h. sie wird im Allgemeinen in jedem Moment eine andere sein."

Man kann also wie bei der Drehung um eine feste Axe auch die Winkelgeschwindigkeit berechnen, es ist dies der Differenzialquotient des Winkels nach der Zeit genommen, welcher eine beliebige durch die Axe gehende Ebene mit einer ebenfalls durch letztere gehende absolut festen Ebene macht. Die momentane Bewegung eines festen Körpers um Punkt O ist dann vollständig bekannt, wenn man die momentane Axe und die Winkelgeschwindigkeit der Grösse und dem Sinne nach, wie dieselbe stattfindet, kennt.

Dies gibt Veranlassung, die Drehungen ganz so wie die Kräfte und die Kräftepaare durch Linien zu bezeichnen. Die Lage einer solchen Linie gibt nämlich die Lage der Axe an, sie muss natürlich durch den festen Punkt O gehen. Die Länge dieser Linie aber bestimmt die Grösse der Winkelgeschwindigkeit. Zugleich gibt der Sinn, in welchem die Linie gezogen ist, an, ob diese Winkelgeschwindigkeit in einem oder dem anderen Sinne (z. B. wie der Zeiger einer Uhr oder entgegengesetzt dieser Bewegung) wirke, und ist dann eine (also z. B. die erstere Bewegung) als positiv, die andere als negativ zu bezeichnen

2) Zusammensetzung und Zerlegung der Drehungen.

Versteht man unter Drehung jetzt immer die unendlich kleine, also gradlinig zu denkende Bewegung, welche ein Körper um eine irgendwie liegende Axe annehmen kann, so kann man auch auf ihn gleichzeitig zwei und mehrere Drehungen wirken lassen, d. h. man kann die Bewegungen betrachten, welche jeder Punkt des Körpers bei der einen und der andern Drehung annehmen würde, und diese nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammensetzen. Es ist dabei nicht einmal nöthig, dass die entsprechenden Drehaxen alle durch einen Punkt gehen. Geschieht dies indess, so ist bei allen diesen Drehungen dieser Punkt offenbar als fest zu betrachten, und das Resultat der Drehungen ist dann nach dem Obigen immer wieder eine Drehung um diesen Punkt, d. h. um eine andere durch ihn gehende Axe. In der Auffindung derselben und der zugehörigen Winkelgeschwindigkeit besteht die Zusammensetzung der Drehungen. Ebenso wie sich Drehungen zusammensetzen lassen, kann man sie auch zerlegen. Wir werden bei diesen Betrachtungen die Drehungen durch grade Linien darstellen, und nach Poinsot zeigen, dass sie ganz ähnlich wie Kräfte behandelt werden können.

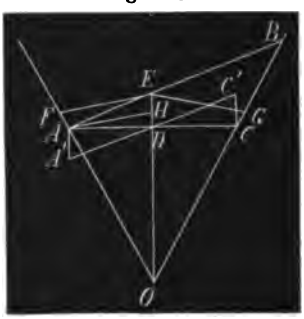
Zunächst bemerken wir aber noch Folgendes:

Wenn ein Punkt A zweien gleichviel welchen Bewegungen eine unendlich kleine Zeit unterliegt, so sind, wie schon oben gesagt, diese Bewegungen als gradlinig zu betrachten. Die Diagonale des von ihnen gebildeten Parallelogramms gibt immer die resultirende Bewegung. Liesse man nun den Punkt nur unter Einfluss der einen Bewegung, und gelangte er in unendlich kleiner Zeit nach B, liesse man dann eine gleiche Zeit lang die zweite Bewegung wirken, und führte dieselbe um seinen Punkt nach C, so ist C offenbar derselbe Ort, wohin er bei gleichzeitiger Einwirkung nach dem Parallelogramm der Kräfte geführt wird. D. h.:

„Bei unendlich kleinen Bewegungen (also auch bei Drehungen) ist es, wenn man den Ort eines Punktes sucht, gleichgültig, ob man auf denselben die einzelnen Bewegungen gleichzeitig oder nach einander wirken lässt."

Mögen jetzt auf einen Körper zwei Drehungen OA und OB (Fig. 345), die

Fig. 345.



sich in einem Punkte schneiden, einwirken. D. h. mögen OA und OB die Richtungen der Axen sein, die also durch denselben Punkt gehen, und seien zugleich OA und OB der Länge und dem Sinne nach die Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeiten. Man kann dann nach dem Obigen beide Drehungen auch nach einander betrachten. Wir schneiden von OB $OC = OA$ ab. Unter Einfluss der ersten Bewegung steht A still, und C beschreibt eine auf Ebene AOC senkrechte

Digitized by Google

Linie (oder einen kleinen Bogen), ist k deren Länge, h das von C auf OA gefällte Loth, μ die zugehörige Winkelgeschwindigkeit, so ist $k = \mu h$. Unter Einfluss der zweiten Bewegung steht C still, A beschreibt eine auf derselben Ebene senkrechte Linie, ist l deren Länge und ν die zugehörige Winkelgeschwindigkeit, so ist $l = \nu h$, und man hat

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{k}{l}.$$

Sind A' und C' die Lagen von A und C am Schlusse dieser Bewegungen, also $CC' = k$, $AA' = l$, so schneiden sich die Linien $A'C'$ und AC in einem Punkte D, der also nach Schluss der Bewegung seinen anfänglichen Platz wieder einnimmt. Es hat also D seinen Ort nicht geändert, und ist somit ein Punkt der Axe der zusammengesetzten Bewegung, und OD diese Axe selbst.

Es ist ferner offenbar:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AA'}{CC'} = \frac{l}{k} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Mögen jetzt Linie AB die Linie OD in E schneiden, EF und EG senkrecht auf OA und OB stehen, so ist auch:

$$\frac{EF}{EG} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Die Dreiecke AOE und BOB verhalten sich nun einerseits wie

$$AO \cdot EF : BO \cdot EG$$

und andererseits wie

$$AE : BE,$$

also:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AO \cdot EF}{BO \cdot EG} = \frac{\mu\nu}{\mu\nu} = 1,$$

d. h.:

$$AE = BE.$$

Wie aber in einem Dreiecke AOB die Transversale OE die Seite AB in E halbirt, so ist offenbar OE die Richtung der Diagonale eines Parallelogramms, welches AO und BO zu Seiten hat. Also:

„Die Richtung der Axe der zusammengesetzten Drehung wird bestimmt durch die Diagonale des Parallelogramms, welches die beiden ursprünglichen Drehungen zu Seiten hat."

Was nun die Winkelgeschwindigkeit der zusammengesetzten Drehung anbetrifft, so fälle man z. B. von A Loth AH auf OD und die Winkelgeschwindigkeit ist dann gleich

$$\frac{AA'}{AH} = \frac{l}{AH} = \frac{\nu h}{AH}.$$

Es ist aber, wenn Winkel $\alpha = AOD$, $\beta = AOB$ gesetzt wird:

$$h = AO \sin(\alpha + \beta), \quad AH = AO \sin \alpha.$$

Also, wenn λ die resultirende Winkelgeschwindigkeit ist:

$$\lambda = \frac{\nu \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{BO \sin AOB}{\sin AOE}.$$

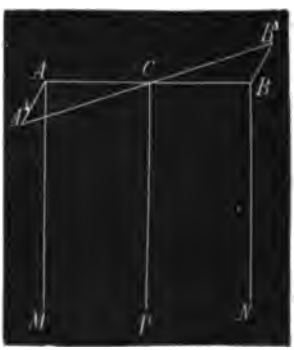
Offenbar ist dies der Ausdruck für die Diagonale eines Parallelogramms, worin AO und BO aneinanderstossende Seiten sind, wie sich augenblicklich verificiren lässt. Also:

„Die aus zwei gleichzeitigen Drehungen resultirende Drehung wird dargestellt durch die Diagonale des aus ihnen gebildeten Parallelogramms, vorausgesetzt, dass die Längen der Seiten und der Diagonale die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten, die Lagen die der Axen angeben."

Dies ist der Satz vom Parallelogramm der Drehungen, der somit völlig analog dem vom Parallelogramm der Kräfte ist. Diese Analogie aber geht noch weiter. Seien jetzt die beiden Axen parallel. Man könnte dieselben dann als solche betrachten, die sich in unendlicher Entfernung schneiden. Indessen wollen wir diesen Fall direct erledigen.

Seien demnach MA und NB (Fig. 346) zwei parallele Drehaxen, und sei AB

Fig. 346



auf beiden senkrecht. Vermöge der Drehung um NB wird B still stehen, und A den Weg AA' senkrecht auf der Ebene beider Axen zurücklegen, vermöge der Drehung um MA, die wir der ersteren wieder folgen lassen, behält A' dann seinen Platz, und B legt Weg BB' parallel AA' zurück. Der Punkt C,

Digitized by Google

wo sich AB und $A'B'$ schneiden, kommt also auf seinen anfänglichen Ort zurück, und ist als fest zu betrachten. Offenbar gilt dies von allen Punkten, die in der auf AB senkrechten durch C gehenden Linie CP sich befinden, da die entsprechenden Punkte der Axe AM und BN dasselbe Resultat geben. Es ist also Axe CP als fest zu betrachten, und um sie erfolgt die sich ergebende zusammengesetzte Drehung.

Was nun die Lage der Axe CP anbetrifft, so seien $\mu\nu$ die Winkelgeschwindigkeiten um MA und NB, also:

$$\mu = \frac{BB'}{AB}, \quad \nu = \frac{AA'}{AB}, \quad \frac{AC}{AB} = \frac{\nu}{\mu + \nu}$$

und ausserdem

$$\mu \cdot AC = \nu CB.$$

Ist λ die Winkelgeschwindigkeit der zusammengesetzten Drehung, so hat man

$$\lambda = \frac{AA'}{AC} = \mu + \nu.$$

D. h:

„Zwei parallele Drehungen setzen sich in eine zusammen, deren Grösse (nach der obigen Bezeichnung) gleich ihrer Summe, deren Richtung parallel der beiden gegebenen, und derart bestimmt ist, dass die Producte der Abstände der mittleren Drehung von den Componenten in die Grösse derselben gleich sind. Die parallelen Drehungen setzen sich also ebenfalls ganz wie die parallelen Kräfte zusammen."

Wir haben beide Drehungen hier als in demselben Sinne erfolgend (etwa wie der Zeiger einer Uhr) angenommen. Erfolgen sie in entgegengesetztem Sinn, so ist die für ν, $-\nu$ zu setzen, also:

$$\lambda = \mu - \nu,$$

und die Gleichung:

$$\mu AC = -\nu CB,$$

zeigt, dass die Richtung CB die entgegengesetzte wie früher ist, d. h. dass Punkt C über B hinausliegt, ganz wie dies bei parallelen Kräften der Fall ist.

Betrachten wir im Besonderen den Fall, wo $\mu = \nu$ ist, so müsste $AC = -CB$ sein, was nur möglich, wenn O in die Unendlichkeit fällt. Direct betrachtet entspricht dieser Fall aber offenbar dem, was man Kräftepaar nennt, und Poinsot bezeichnet ihn als „Drehungspaar."

Ein solches besteht aus zwei Drehungen um parallele Axen mit gleicher aber entgegengesetzter Winkelgeschwindigkeit. Allein aus dem Parallelogramm der Kräfte folgen die bekannten Sätze über Kräftepaare, und es finden daher völlig analoge über Drehungspaare statt. Man kann dieselben also durch Linien repräsentiren, deren Richtung senkrecht auf der Ebene der Axen steht, und deren Länge das Product aus der Winkelgeschwindigkeit in die Entfernung der Axen ist. Drehungspaare bei denen diese Linien parallel und gleich (auch im gleichen Sinne gezogen) sind, können dann einander ersetzen, und je zwei können nach dem Parallelogramm der Paare wieder in Eins zusammengesetzt werden. Prüfen wir aber auch die Bedeutung eines Drehungspaares. Je weiter die Drehungsaxe von den bewegten Punkten eines festen Körpers entfernt ist, desto mehr werden die absoluten Geschwindigkeiten sich der Gleichheit nähern. Bei einer unendlich entfernten Axe aber sind diese dann völlig gleich. Vermöge eines Paares von Drehungen beschreiben die Punkte des Körpers also parallele Bahnen, welche senkrecht auf der Ebene der Axen, oder parallel den Linien sind, welche das Paar darstellen. Diese Bewegung ist also eine fortschreitende.

Was die Grösse derselben anbetrifft, so betrachte man einen Punkt der einen Axe AM. Bei der Drehung um AM bleibt derselbe in Ruhe, bei der um BN ist seine Geschwindigkeit gleich der Winkelgeschwindigkeit mal der Entfernung der Axen, d. h. gleich der Linie, welche das Paar darstellt. Also:

„Ein Drehungspaar repräsentirt eine fortschreitende Bewegung, und wird durch eine Linie dargestellt, deren Richtung und Grösse mit dieser Bewegung und ihrer Geschwindigkeit übereinstimmt."

Aus dieser Bemerkung kann man auch direct die Sätze von den Drehungspaaren ableiten. Nämlich fortschreitende Bewegungen setzen sich nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen. In unserem Falle aber können zwei parallele mit einander vertauscht werden, weil diese nur die Richtung der Bewegung anzeigen, und es nicht darauf ankommt, durch welchen Punkt man sie legen will.

Wie auch ein fester Körper bewegt sei, er kann nur fortschreitende und drehende Bewegungen haben. Alle diese aber lassen sich somit an eine mittlere Drehung und in ein Drehungspaar zusammensetzen, und zwar auf unendlich viel Arten, ganz wie dies bei den Kräften geschieht (s. den Artikel: Statik). Man kann also das Paar so legen, dass die Linie, welche es repräsentirt, mit der mittleren Drehung zusammenfällt.

Digitized by Google

Die Bewegung ist dann so zu betrachten, dass sich der Körper um eine Axe dreht, zugleich sich aber die Axe in ihrer eigenen Richtung fortbewegt, (also z. B. hebt oder senkt, wenn diese Axe vertikal ist). Dies ist die Bewegung „einer Schraube in ihrer Mutter", und auf eine solche kommt also die augenblickliche Bewegung eines festen Körpers immer zurück.

Ist ein Punkt des Körpers absolut fest, so kann derselbe keine fortschreitende Bewegung haben, es wirkt also nur eine Drehung um eine feste durch diesen Punkt gehende Axe. Auch diese Bewegung lässt sich durch ein einfaches Bild darstellen. Man fixire die augenblickliche Drehaxe, und denke sich eine mit ihr zusammenfallende im Raume feste, und eine andere mit ihr zusammenfallende im Körper feste Linie. Zur Zeit, wo die Drehung um diese Axe erfolgt, fallen also beide Linien zusammen, um sich im nächsten Moment zu trennen. Denken wir uns auf gleiche Weise alle Drehaxen, wie sie sich bei der Bewegung nach einander zeigen, zugleich im Raume und im Körper fest, so bilden beide Schaaren von Linien Kegelflächen, eine im Raume feste und eine im Körper feste. Die erste bewegt sich dann so auf der zweiten, dass immer die momentane Berührungslinie (Drehaxe) unbeweglich ist. Diese Bewegung ist also eine rollende (s. den Artikel: Rollen), d. h.:

„Die Bewegung eines festen Körpers, von dem ein Punkt absolut fest ist, kann immer dargestellt werden als das Rollen einer Kegelfläche auf einer andern Kegelfläche, welche letztere absolut fest ist.

3) Gleichungen der drehenden Bewegung unter dem Einflusse continuirlicher Kräfte.

Die Gleichungen der Bewegung eines festen Körpers zerfallen in drei, welche anzeigen, dass die verlorenen Kräfte sich in Gleichgewicht halten, und in drei andere, welche zeigen, dass auch die Summe der Paare oder Momente der verlorenen Kräfte sich in Gleichgewicht halten.

Da man die Kräfte alle nach dem festen Punkte verlegen kann, so fallen die drei ersten Gleichungen aus, und haben eben nur die Bedeutung, dass sie den Druck messen, welcher auf den festen Punkt erfolgt. Es bleiben also nur die Momentengleichungen.

Seien jetzt X, Y, Z die Componenten der wirkenden Kräfte, ferner x, y, z Coordinaten eines beliebigen Punktes von der Masse m, dieselben sollen auf einander senkrechten, durch den festen Punkt O gehenden, und im Raume festen Axen parallel sein.

Setzt man:

$$1)\quad \Sigma(yZ - zY) = L,\quad \Sigma(zX - xZ) = M,$$
$$\Sigma(xY - yX) = N,$$

so wird:

$$2)\quad L = \Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$
$$M = \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$
$$N = \Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Damit diese Gleichungen das Nöthige zur Berechnung geben, müssen die Coordinaten jedes Punktes durch so viel Grössen als Gleichungen sind, d. h. durch drei ausgedrückt werden.

Nehmen wir noch drei Axen an, x_1, y_1, z_1, die im Körper fest sind und durch den Punkt O gehen, seien bezüglich:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$$

die Cosinus der Winkel:

$$(x_1x),\ (x_1y),\ (x_1z),\ (y_1x),\ (y_1y),\ (y_1z)$$
$$(z_1x),\ (z_1y),\ (z_1z),$$

welche die neuen Axen mit den alten machen, dann ist bekanntlich:

$$3)\quad x_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$
$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z,$$
$$z_1 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$

$$3a)\quad x = \alpha x_1 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 z_1,$$
$$y = \beta x_1 + \beta_1 y_1 + \beta_2 z_1,$$
$$z = \gamma x_1 + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 z_1.$$

Zwischen den neun Cosinus aber finden sechs Relationen statt, die sich auf verschiedene Weise darstellen lassen:

$$4)\quad \alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$
$$\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1,$$
$$\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1,$$
$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_2\alpha + \beta_2\beta + \gamma_2\gamma = 0$$

$$4a)\quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$
$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$
$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$$
$$\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0$$
$$\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = 0$$
$$\gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = 0.$$

Digitized by Google

Von diesen beiden Systemen ist jedes die Folge des andern. Aber es nehmen diese Beziehungen noch eine andere Form an:

5)
$$\alpha = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2, \quad \beta = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2, \quad \gamma = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$$
$$\alpha_1 = \beta_2\gamma - \gamma_2\beta, \quad \beta_1 = \gamma_2\alpha - \alpha_2\gamma, \quad \gamma_1 = \alpha_2\beta - \beta_2\alpha$$
$$\alpha_2 = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1, \quad \beta_2 = \gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1, \quad \gamma_2 = \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1,$$

von denen drei eine Folge der übrigen sind. Endlich lehrt Euler alle 9 Winkel durch drei andere Ausdrücke finden.

Sei ψ der Winkel, welchen der Durchschnitt der Ebene Yx und Y_1x_1 mit der Axe der positiven x macht, φ der Winkel dieses Durchschnittes mit der Axe x_1, endlich ϑ der Winkel zwischen den Axen der z und z_1, so erhält man:

6)
$$\alpha = -\sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta + \cos\varphi\cos\psi$$
$$\alpha_1 = -\sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\cos\psi$$
$$\alpha_2 = \sin\psi\sin\vartheta$$
$$\beta = \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\psi$$
$$\beta_1 = \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\psi$$
$$\beta_2 = -\cos\psi\cos\vartheta$$
$$\gamma = \sin\varphi\sin\vartheta, \quad \gamma_1 = \cos\varphi\sin\vartheta, \quad \gamma_2 = \cos\vartheta.$$

Es sind nun noch die Beziehungen zwischen den Differenzialen dieser Ausdrücke zu finden. Nehmen wir an, alle Winkel seien von einer einzigen Variablen t, worunter wir hier die Zeit verstehen, abhängig, und setzen:

7)
$$pdt = \alpha_2 d\alpha_1 + \beta_2 d\beta_1 + \gamma_2 d\gamma_1$$
$$qdt = \alpha d\alpha_2 + \beta d\beta_2 + \gamma d\gamma_2$$
$$rdt = \alpha_1 d\alpha + \beta_1 d\beta + \gamma_1 d\gamma,$$

so geben die Gleichungen 4) auch:

7a)
$$pdt = -(\alpha_1 d\alpha_2 + \beta_1 d\beta_2 + \gamma_1 d\gamma_2)$$
$$qdt = -(\alpha_2 d\alpha + \beta_2 d\beta + \gamma_2 d\gamma)$$
$$rdt = -(\alpha d\alpha_1 + \beta d\beta_1 + \gamma d\gamma_1).$$

In diesen Gleichungen sind zwei, welche nur $d\alpha_2$, $d\beta_2$, $d\gamma_2$ enthalten:

$$-pdt = \alpha_1 d\alpha_2 + \beta_1 d\beta_2 + \gamma_1 d\gamma_2$$
$$qdt = \alpha d\alpha_2 + \beta d\beta_2 + \gamma d\gamma_2.$$

Verbinden wir diese mit dem Differenzial der dritten Gleichung 4a):

$$0 = \alpha_2 d\alpha_2 + \beta_2 d\beta_2 + \gamma_2 d\gamma_2,$$

so ergeben sich die Werthe von $d\alpha_2$, $d\beta_2$, $d\gamma_2$ und durch cyklisches Vertauschen Entsprechendes für die andern Differenziale der 9 Cosinus, also:

8)
$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 r - \alpha_2 q, \quad \frac{d\beta}{dt} = \beta_1 r - \beta_2 q, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 r - \gamma_2 q$$
$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 p - \alpha r, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 p - \beta r, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 p - \gamma r$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha q - \alpha_1 p, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \beta q - \beta_1 p, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma q - \gamma_2 p.$$

Man kann aber auch die Gleichung 6) differenziiren, und statt der 9 Cosinus φ, ψ und ϑ einführen. Auf diese Weise erhält man:

9)
$$p = \cos\varphi\frac{d\vartheta}{dt} + \sin\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}$$
$$q = -\sin\varphi\frac{d\vartheta}{dt} + \cos\varphi\sin\vartheta\frac{d\psi}{dt}$$
$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\psi\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Diese Gleichungen sind zur Lösung des Problems nöthig.

Digitized by Google

Seien jetzt u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit nach den Axen der x_1, y_1, z_1, U, V, W die Componenten der Zunahmen der Geschwindigkeit nach denselben Axen, so kann man statt der Gleichungen 2) auch die Momente der verlorenen Kräfte nach den beweglichen Axen nehmen, also setzen:

10) $L_1 = \Sigma m(y_1 W - z_1 V)$, $M_1 = \Sigma m(z_1 U - x_1 W)$, $N_1 = \Sigma m(x_1 V - y_1 U)$,

wo zu setzen ist:

10a) $L_1 = \alpha L + \beta M + \gamma N$, $M_1 = \alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N$, $N_1 = \alpha_2 L + \beta_2 M + \gamma_2 N$.

Zur Bestimmung der Grössen u, v, w, U, V, W, hat man die Gleichungen:

$$u = \alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \gamma\frac{dz}{dt}, \quad v = \alpha_1\frac{dx}{dt} + \beta_1\frac{dy}{dt} + \gamma_1\frac{dz}{dt}, \quad w = \alpha_2\frac{dx}{dt} + \beta_2\frac{dy}{dt} + \gamma_2\frac{dz}{dt},$$

während zu setzen ist:

$$\frac{dx}{dt} = x_1\frac{d\alpha}{dt} + y_1\frac{d\alpha_1}{dt} + z_1\frac{d\alpha_2}{dt},$$

und ähnliche Ausdrücke für $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$. Setzt man diese in die vorletzten Gleichungen ein, und berücksichtigt die Gleichung 7) so kommt:

11) $$u = qz_1 - ry_1, \quad v = rx_1 - pz_1, \quad w = py_1 - qx_1.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich leicht die mechanische Bedeutung von p, q, r. Für jeden Punkt der augenblicklichen Drehaxe ist nämlich $u = v = w = 0$, also:

12) $$x_1 : y_1 : z_1 = p : q : r.$$

Setzt man noch:

12a) $$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

so sind $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ die Cosinus der Winkel der Drehaxe mit den Coordinatenaxen.

Für einen Punkt der Axe z_1 ist nun $x_1 = y_1 = 0$, also wegen 11):

$$u = qz_1, \quad v = -pz_1, \quad w = 0.$$

Der betreffende Punkt hat also eine auf der Axe der y_1 senkrechte Geschwindigkeit qz_1, und eine auf der Axe x_1 senkrechte $-pz_1$, von beiden Axen aber die Entfernung z_1. Dem entsprechen offenbar zwei Drehungen um die betreffenden Axen mit Winkelgeschwindigkeiten, deren absolute Werthe bezüglich q und p sind. Um die Vorzeichen derselben zu bestimmen, nehmen wir die Drehungen als positiv, welche die positive Axe x_1 nach der positiven y_1, y_1 nach z_1, z_1 nach x_1 drehen. Es ist dann sogleich zu sehen, dass wenn p und q positiv sind, die Geschwindigkeiten qz_1 und $-pz_1$ eine positive Drehung bewirken. Untersucht man noch einen Punkt der Axe x_1, so hat derselbe eine Drehung um die Axe z_1 mit Winkelgeschwindigkeit r. p, q, r sind also die Componenten der augenblicklichen Drehung nach den beweglichen Axen.

Was die Grössen U, V, W anbetrifft, so ist z. B.:

$$U = \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Man hat aber:

$$\frac{dx}{dt} = u\alpha + v\alpha_1 + w\alpha_2,$$

also, wenn man hier für u, v, w die in 11) gegebenen Werthe einsetzt:

A) $$\frac{dx}{dt} = p(\alpha_2 y_1 - \alpha_1 z_1) + q(\alpha z_1 - \alpha_2 x_1) + r(\alpha_1 x_1 - \alpha y_1).$$

Diese Gleichung gibt differenziirt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt}(\alpha_2 y_1 - \alpha_1 z_1) + \frac{dy}{dt}(\alpha z_1 - \alpha_2 x_1) + \frac{dr}{dt}(\alpha_1 x_1 - \alpha y_1) + \frac{d\alpha}{dt}(qz_1 - ry_1)$$
$$+ \frac{d\alpha_1}{dt}(rx_1 - pz_1) + \frac{d\alpha_2}{dt}(py_1 - qx_1).$$

Digitized by Google

Aehnliche Ausdrücke folgen für $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$; setzt man diese in den Werth von U ein, und bildet die entsprechenden Gleichungen für V und W, so kommt:

13)
$$U = z_1\frac{dq}{dt} - y_1\frac{dr}{dt} - r(rx_1 - pz) + q(py_1 - qx_1)$$
$$V = x_1\frac{dr}{dt} - z_1\frac{dp}{dt} - p(py_1 - qx_1) + r(qz_1 - ry_1)$$
$$W = y_1\frac{dp}{dt} - x_1\frac{dq}{dt} - q(qz_1 - ry_1) + p(rx_1 - pz_1).$$

Diese Werthe sind in die Gleichungen 10) einzusetzen. Da die Grössen p, q, r und die 9 Winkel α, β, γ . . . , von drei Grössen abhängen, so kann man dieselben hieraus ermitteln, und geben dann die Gleichungen 3a) die Coordinaten x, y, z jedes Punktes als Functionen der Zeit.

Es handelt sich jetzt noch um den Anfangszustand.

Sind ξ, η, ζ die nach den festen Axen zerlegten Anfangsstösse, und setzt man:

14)
$$\lambda = \Sigma(y\zeta - z\eta), \quad \mu = \Sigma(z\xi - x\zeta), \quad \nu = \Sigma(x\eta - y\xi).$$

so hat man:

15)
$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \lambda, \quad \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \mu, \quad \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \nu;$$

zerlegt man die Momente links und rechts nach den beweglichen Axen, so erhält man $\Sigma m(y_1W - z_1V) = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$ und zwei entsprechende Gleichungen. Setzt man hier für u, v, w die Werthe aus 11) ein, so sind A, B, C die Trägheitsmomente, ausserdem $\Sigma my_1z_1 = D$, $\Sigma mz_1x_1 = E$, $\Sigma mx_1y_1 = F$, so kommt:

16)
$$Ap - Fq - Er = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$
$$Bq - Dr - Fp = \alpha_1\lambda + \beta_1\mu + \gamma_1\nu$$
$$Cr - Ep - Dq = \alpha_2\lambda + \beta_2\mu + \gamma_2\nu.$$

Diese Gleichungen geben den Anfangswerth der Winkelgeschwindigkeiten und somit die nöthigen Constanten. Die Ausdrücke p, q, r, α, β . . . beziehen sich auf den Anfangszustand.

4) Vereinfachung der Gleichungen der Bewegung. Integrale derselben.

Bedeutend vereinfachen sich aber die Gleichungen, wenn man, statt die Axen x_1, y_1, z_1 willkürlich zu nehmen, die zum festen Punkte gehörigen Hauptaxen als solche nimmt. Es sind dann A, B, C die Hauptträgheitsmomente, und $D = E = F = 0$.

Die Gleichungen 10) geben dann, wenn man die aus 13) genommenen Werthe einsetzt:

I)
$$A\frac{dp}{dt} = (B - C)qr + L_1$$
$$B\frac{dq}{dt} = (C - A)rp + M_1$$
$$C\frac{dr}{dt} = (A - B)pq + N_1$$

Um den Anfangszustand zu bestimmen, setzen wir fest, dass die Axe der z senkrecht auf der Ebene des Paares stehe, welches sich aus den im Anfange wirkenden Stössen zusammensetzen lässt; es ist dann $\lambda = \mu = 0$, also wenn p_0, q_0, r_0 die Winkelgeschwindigkeiten im Anfange, γ^0, γ_1^0, γ_2^0 die Anfangswerthe von γ, γ_1, γ_2 sind, so hat man:

II)
$$Ap_0 = \gamma^0\nu, \quad Bq_0 = \gamma_1^0\nu, \quad Cr_0 = \gamma_2^0\nu.$$

Wenn es sich um die Integration der Gleichungen I) handelt, so sind besondere Annahmen zu machen. – Bekanntlich haben die mechanischen Gleichungen immer dann ein Integral, das der lebendigen Kräfte, wenn die continuirlichen Kräfte X, T, Z, X', Y', Z' die Differenzialquotienten einer Function φ bezüglich nach

den Grössen $x, y, z, x', y', z' \ldots$ sind. Es findet dies immer statt, wenn nur Einwirkungen der Punkte des Systems auf einander und solche die von festen Punkten ausgehen, stattfinden, also z. B. wenn nur die Schwere wirkt. Wir wollen indess das betreffende Integral hier direct ableiten. — Zu dem Ende multipliciren wir die Gleichungen I) mit p, q, r und addiren, dies gibt:

$$\frac{d}{dt}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = L_1 p + M_1 q + N_1 r.$$

Es war nun z. B. $L_1 = \alpha L + \beta M + \gamma N$, und wenn man für L, M, N die Werthe aus I) setzt oder berücksichtigt, dass jetzt

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist, so erhält man:

$$L_1 = \Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\beta z - \gamma y) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\gamma x - \alpha z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\alpha y - \beta x)\right),$$

Wenn man nun die zwei letzten Gleichungen 3a) bezüglich mit γ und β multiplicirt und subtrahirt, so kommt mit Berücksichtigung von 5):

$$\beta z - \gamma y = \alpha_2 y_1 - \alpha_1 z_1.$$

Diesen Ausdruck und die entsprechenden setzen wir in den Werth von L_1 ein, und erhalten:

$$L_1 = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\alpha_2 y_1 - \alpha_1 z_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\beta_2 z_1 - \beta_1 x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\gamma_2 x_1 - \gamma_1 y_1);$$

bildet man die entsprechenden Ausdrücke für M_1 und N_1 und berücksichtigt die Werthe von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ wie sie die Gleichung A) des vorigen Abschnittes gibt, so kommt:

$$pL_1 + qM_1 + rN_1 = \Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d\varphi}{dt},$$

und somit:

III) $$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \varphi + h,$$

wo h die Integrationsconstante ist. Sie wird bestimmt durch die Anfangswerthe. Ist φ_0 der Anfangwserth von φ, so geben die Gleichungen II) nämlich:

IIIa) $$\frac{\gamma_0^2}{A} + \frac{\gamma_1^2}{B} + \frac{\gamma_2^2}{C} = \frac{\varphi_0 + h}{\nu^2}$$

Drei andere Integrale ergeben sich, wenn der Flächensatz gilt, d. h. wenn $L = M = N = 0$ ist. Derselbe findet bekanntlich dann statt, wenn als continuirliche Kräfte nur Anziehungen und Abstossungen zwischen den Punkten des Systems unter einander, und ausserdem solche wirken, deren Resultante durch den festen Punkt geht. Da für diesen $x = y = z = 0$ ist, so verschwinden die entsprechenden Theile aus den Gleichungen 1). Da übrigens in unserem Falle das System ein festes ist, so findet der Flächensatz nur statt, wenn nur Kräfte der letzteren Art wirken, also z. B. wenn die Schwere wirkt, und der Schwerpunkt des Körpers fest ist, oder wenn ein beliebiger Punkt unbeweglich ist, aber keine continuirlichen Kräfte wirken. Dann geben die Gleichungen 2):

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0, \text{ also } \Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{const.}$$

Diese Constante bestimmt sich aus dem Anfangszustande, und muss daher nach 15) gleich ν sein, eben so sind die beiden anderen Geschwindigkeitsmomente gleich λ und μ, also wenn man die z Axe wieder senkrecht auf der Ebene des Paares ν nimmt, so ist $\lambda = \mu = 0$ und

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \nu.$$

Digitized by Google

Die Gleichungen II) gelten zu jeder Zeit, da man ja jede als Anfang der Bewegung betrachten kann. Nur muss für ν das Moment der augenblichlich wirkenden Geschwindigkeit, für $\gamma^0, \gamma_1^0, \gamma_2^0$; p_0, q_0, r_0 die momentanen Werthe von $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, p, q, r$ genommen werden. Also, da nun ν constant ist:

IV) $$Ap = \gamma\nu, \quad Bq = \gamma_1\nu, \quad Cr = \gamma_2\nu,$$

woraus sich auch ergibt:

IVa) $$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \nu^2.$$

Gilt auch der Satz der lebendigen Kräfte, so ist φ nur von den Coordinaten des festen Punktes abhängig, denn auf jeden andern Punkt wirken keine Kräfte, es ist also $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$, daher muss φ eine Constante sein.

Setzen wir $\frac{\varphi + h}{\nu^2} = l^2$, so kommt:

V) $$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \nu^2 l^2$$

und wegen IV:

Va) $$\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma_1^2}{B} + \frac{\gamma_2^2}{C} = l^2$$

wo die Constante l^2 sich ergibt, wenn man $\gamma^0, \gamma_1^0, \gamma_2^0$ für $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ setzt.

5) Ueber den Fall, wo keine constante Kräfte wirken.

Nur in dem Falle wo keine constanten Kräfte wirken finden die Gleichungen IV) und V) Anwendung. In diesem Falle sind die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r vermöge der Gleichungen IVa) und V) durch eine von diesen Grössen bestimmt. Setzt man z. B. die Werthe von p und q durch r ausgedrückt in eine der Gleichungen I) ein, so hat man eine Differenzialgleichung zwischen r und t, welche t als Function von r durch ein elliptisches Integral erster Ordnung gibt. Denkt man sich umgekehrt r als Function von t, so geben die Gleichungen 9) die Winkel φ, ψ, ϑ, und zwar ist nur eine Integration nöthig, welche zu einem elliptischen Integral dritter Ordnung führt. Weierstrass hat jedoch gezeigt, wie in einfacher Weise die 9 Cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1 \ldots$ als Functionen der Zeit direct auszudrücken sind. (Abhandlungen der Berliner Akademie). Wir wollen dieser Methode hier folgen. Setzt man die Ausdrücke IV) in die Werthe von $\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}$ der Gleichungen 8) des dritten Abschnittes ein, so kommt:

1) $$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\nu(B-C)}{CB}\gamma_1\gamma_2, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{\nu(C-A)}{AC}\gamma\gamma_2, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \frac{\nu(A-B)}{AB}\gamma\gamma_1.$$

Indess braucht man von diesen Ausdrücken nur einen. Die andern ergeben sich ohne Integration aus der Gleichung Va) in Verbindung mit $\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$. Nämlich man erhält:

2) $$\gamma^2 = \frac{A(Cl^2-1)}{C-A}\left(1 - \frac{C-B}{Cl^2-1}\frac{\gamma_1^2}{B}\right), \quad \gamma_2^2 = \frac{C(Al^2-1)}{A-C}\left(1 - \frac{A-B}{Al^2-1}\frac{\gamma_1^2}{B}\right)$$

Diese Ausdrücke in Verbindung mit der zweiten Gleichung 1) geben γ_1 durch eine Quadratur, welche zu einem elliptischen Integrale erster Ordnung führt, dann aber γ und γ_2 direct.

Was nun die andern Winkel anbetrifft, so gehen wir von einer Formeln aus, die ganz allgemein gilt. Es ist:

$$d\lg(\alpha + \beta i) = \frac{d(\alpha + \beta i)}{\alpha + \beta i} = \frac{\alpha d\alpha + \beta d\beta + i(\alpha d\beta - \beta d\alpha)}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Nun hat man:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2, \quad \alpha d\alpha + \beta d\beta = -\gamma d\gamma$$

und wegen der Gleichungen 8):

$$\alpha d\beta - \beta d\alpha = dt\,[(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)r - (\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2)q],$$

also mit Hülfe der Gleichungen 5):

$$\alpha d\beta - \beta d\alpha = dt\,(\gamma_2 r + \gamma_1 q).$$

Digitized by Google

Man hat also die allgemein gültigen Formeln:

3)
$$d\lg(\alpha+\beta i)=\frac{-\gamma d\gamma+i dt(\gamma_2 r+\gamma_1 q)}{1-\gamma^2}$$
$$d\lg(\alpha_1+\beta_1 i)=\frac{-\gamma_1 d\gamma_1+i dt(\gamma p+\gamma_2 r)}{1-\gamma_1^2}$$
$$d\lg(\alpha_2+\beta_2 i)=\frac{-\gamma_2 d\gamma_2+i dt(\gamma_1 q+\gamma p)}{1-\gamma_2^2}.$$

Für unsern Fall aber sind die Werthe von p, q, r einzusetzen. Dies gibt z. B. für die zweite Gleichung 3):

$$d\lg(\alpha_1+\beta_1 i)=\frac{-\gamma_1 d\gamma_1+i dt\left(\frac{\gamma^2}{A}+\frac{\gamma_2^2}{C}\right)\nu}{1-\gamma_1^2}.$$

oder wenn man sich der Gleichung Va) bedient:

3a)
$$d\lg(\alpha_1+\beta_1 i)=\frac{-\gamma_1 d\gamma_1+i r dt\left(l^2-\frac{\gamma_1^2}{B}\right)}{1-\gamma_1^2}.$$

Der reelle Theil des Ausdruckes rechts ist gleich α_1, der imaginäre gleich β_1. Um α, β, α_2, β_2 zu finden, bedarf es keiner Quadratur. Es ist nämlich:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha_1+\beta_1 i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\alpha_1-\beta_1 i)}{\alpha_1^2+\beta_1^2}=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1-i(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)}{\alpha_1^2+\beta_1^2}$$

und da $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=-\gamma\gamma_1$, $\alpha\beta_1-\beta\alpha_1=\gamma_2$ ist, so hat man:

4)
$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha_1+\beta_1 i}=-\frac{\gamma\gamma_1+i\gamma_2}{1-\gamma_1^2}$$
$$\frac{\alpha_2+\beta_2 i}{\alpha_1+\beta_1 i}=-\frac{\gamma_1\gamma_2+i\gamma}{1-\gamma_1^2}.$$

Ehe wir jedoch die Integration dieser Gleichungen durch elliptische Functionen ausführen, sollen noch einige Betrachtungen nach Poinsot an diese Aufgabe geknüpft werden.

6) Bewegungsgesetze für den Fall, wo nur ein Anfangsstoss wirkt.

Setzt man $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ wieder gleich ω, so sind $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ die Cosinus der Winkel der momentanen Drehaxe mit den Hauptaxen, während die Cosinus der Winkel, welche das mittlere Paar mit den beweglichen Axen macht nach II) des Abschnittes 4) bezüglich gleich

$$\frac{Ap}{\nu}, \quad \frac{Bq}{\nu}, \quad \frac{Cr}{\nu}$$

sind, wie man erhält, wenn man den augenblicklichen Zustand als Anfangszustand betrachtet. Ist also ε der Winkel, welchen die Drehungsaxe mit der Axe des augenblicklichen mittleren Paares macht, so hat man:

$$\cos\varepsilon=\frac{Ap^2+Bq^2+Cr^2}{\nu\omega}.$$

Also wegen Gleichung V) des Abschnittes 4): $\omega\cos\varepsilon=\nu l^2$. d. h.:

„Wenn man die augenblickliche Drehung in zwei Componente zerlegt, die eine nach der Axe des mittleren Paares, die andere senkrecht darauf, so ist die erstere Componente ($\omega\cos\varepsilon$) constant für die ganze Bewegung.“

Die Winkel, welchen die Normale an das Centralellipsoid mit den Hauptaxen macht, ergeben sich aus der Gleichung dieses Ellipsoids

$$Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2=1.$$

(Vergleiche den vorigen Artikel.)

Die Cosinus dieser Winkel sind nach einem bekannten geometrischen Satze bezüglich proportional Ax_1, By_1, Cz_1. Da nun die Axe des mittleren Paares Winkel mit den Hauptaxen macht, deren Cosinus proportional Ap, Bq, Cr sind und sollen diese Grössen gleich sein, so muss $\frac{x_1}{p}=\frac{y_1}{q}=\frac{z_1}{r}$ sein, und dies sind die Gleichungen der augenblicklichen Drehaxe. D. h.:

„Wenn man an das Centralellipsoid eine Tangentialebene legt, welche der Ebene des mittleren Paares parallel ist,

so ist die vom festen Punkte nach dem Berührungspunkte gezogene Grade die augenblickliche Drehaxe."

Der Punkt, wo diese Drehaxe die Oberfläche des Ellipsoids schneidet, soll jetzt Drehpol heissen. Für ihn gelten also die Gleichungen:

$$\frac{x_1}{p}=\frac{y_1}{q}=\frac{z_1}{r}=\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{\omega}=\frac{\sqrt{Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2}}{\nu l}$$

$$=\frac{\sqrt{A^2x_1^2+B^2y_1^2+C^2z_1^2}}{\nu}.$$

Die letzten drei Ausdrücke ergeben sich aus den ersteren, wenn man Zähler und Nenner ihrer Quadrate mit 1, 1, 1, A, B, C, A^2, B^2, C^2 multiplicirt und die Quadrate addirt. Ist R der Abstand des Drehpols vom Mittelpunkte, ϱ das Loth vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene, die durch den Drehpol geht, so kann man für die drei letzten Ausdrücke schreiben:

$$\frac{R}{\omega}=\frac{1}{\nu l}=\frac{1}{\varrho\nu} \text{ oder } \omega=R\nu l,\quad \varrho=l,$$

D. h.:

„Die Winkelgeschwindigkeit ist proportional demjenigen Halbmesser des Ellipsoids, welcher mit der Drehaxe zusammenfällt"

und

„Das Loth vom festen Punkt auf die durch den Drehpol gehende Tangentialebene ist constant."

Da diese Ebene parallel der des mittleren Paares, und diese constant ist, so ist die Lage dieser Ebene im Raume fest, also:

„Das Ellipsoid berührt stets eine dem mittleren Paare parallele Ebene, deren Entfernung vom festen Punkte gleich ist. Der Berührungspunkt ist der Drehpol, dieser hat also im Augenblick der Berührung die Geschwindigkeit Null."

Das Centralellipsoid rollt also auf einer Ebene, so dass der Drehpol immer Berührungspunkt ist. Ausserdem bleibt der Mittelpunkt des Ellipsoids fest, wodurch seine Bahn völlig bestimmt ist.

Man kann also den Körper durch ein auf einer Ebene rollendes im Mittelpunkte festes Ellipsoid ersetzen.

Kommt es bloss auf die geometrische Bahn an, so kann man umgekehrt die Ebene auf dem fest gedachten Ellipsoid sich bewegen lassen.

Erstere wird dann immer das Ellipsoid und eine concentrische Kugel mit Radius l berühren. Verfolgt man hierbei auf dem Ellipsoid die Reihe der Berührungspunkte, so entsteht eine Curve, die man Poloide nennt. Die Gleichungen derselben sind:

$$Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2=1$$

und

$$A^2x_1^2+B^2y_1^2+C^2z_1^2=\frac{1}{l^2}$$

(die letztere Gleichung folgt nämlich unmittelbar aus $\varrho=l$). Aus diesen Gleichungen folgt:

$$A(1-Al^2)x_1^2+B(1-Bl^2)y_1^2$$
$$+C(1-Cl^2)z^2=0.$$

Dies ist die Gleichung einer Kegelfläche zweiten Grades, welche mit dem Centralellipsoid dieselben Hauptaxen hat. Diese Kegelfläche ist also der Ort aller im Körper festgedachten Drehaxen.

Die Punkte, welche nach einander auf der Berührungsebene den Berührungspunkten des Ellipsoids entsprechen, bilden eine Curve, die man Serpoloide nennt. Sie hat im Allgemeinen unendlich viel Windungen. Legt man durch sie und den festen Punkt eine Schaar grader Linien, so hat man eine Kegelfläche mit unendlich viel Windungen, welche die im Raume festgedachte Schaar der Drehaxe vorstellt. Es kann also die Bewegung immer gedacht werden als das Rollen eines Kegels zweiten Grades auf einem festen Kegel mit unendlich viel Windungen (vergl. den Abschnitt 1), dessen Basis eben die Serpoloide ist.

Um die Art der Bewegung noch etwas genauer zu bestimmen, bezeichnen wir mit A das grösste, mit C das kleinste Trägheitsmoment.

Die Entfernung l des Mittelpunktes von der Tangentialebene ist offenbar kleiner als der grösste Halbmesser und grösser als der kleinste des Ellipsoids, die bezüglich gleich $\frac{1}{rC}$ und $\frac{1}{rA}$ sind, also $l^2C<1$, $l^2A>1$.

Ist also $1-Bl^2$ positiv, so sind die der Ebene x_1y_1 parallelen Schnitte des im Körper festen Kegels Ellipsen, ist $1-Bl^2$ negativ, so findet dies mit den der Ebene y_1z_1 parallelen Schnitten statt.

Der ersteren Ebene aber entspricht das kleinste, der letzteren das grösste Trägheitsmoment. Wäre $B = C$, so hätte man einen Rotationskegel, dessen Rotationsaxe die der x_1 ist, wäre $B = A$, so wäre die Axe der z_1 die Rotationsaxe. Für $A = B = C$ sind p, q, r constant, wie sich aus den Gleichungen I) ergibt Die Bewegung geschieht dann um eine feste Axe. Ist l^2 gleich einer der Grössen $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$, so ist der Kegel ein System von zwei Ebenen, von denen jedoch natürlich nur eine die Drehungsaxe enthält.

Findet aber keiner dieser Fälle statt, ist also $1 - Cl^2$ positiv und $1 - Al^2$ negativ, so kann noch $1 - Bl^2$ der Null gleich sein. In diesem Falle aber ist:

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} = \frac{C(1 - Cl^2)}{A(Al^2 - 1)} = \frac{C(B - C)}{A(A - B)}.$$

Es ist dies ein System von zwei Ebenen, welche durch die Axe y_1 gehen, und mit der Ebene $y_1 z_1$ gleiche Winkel machen. Sie schneiden das Ellipsoid in zwei Ellipsen, welche die Orte der Pole sind.

Offenbar also ist in diesem Falle die Entfernung des Mittelpunkts von der durch diese Pole gelegten Tangentialebene constant und gleich dem mittleren halben Durchmesser.

Ist aber $1 - Bl^2$ nicht Null, so sind die Fälle zu unterscheiden, wo dieser Ausdruck positiv oder negativ ist. Im ersteren Falle gibt die Gleichung des Kegels:

$$\frac{x_1^2}{z_1^2} > \frac{C(1 - Cl^2)}{A(Al^2 - 1)} > \frac{C(B - C)}{A(A - B)}.$$

Das letztere folgt, weil $\frac{1}{B} > l^2$ sein muss.

Nimmt man an, dass die Axe z_1 vertikal sei, so befinden sich im ersten Falle alle Kegelseiten oder Drehaxen zwischen den beiden Ellipsen. Ist $1 - Bl^2$ negativ, so befinden sich die Kegelseiten ausserhalb der beiden Ellipsen. Beide Ebenen theilen das Ellipsoid in vier Räume. Befindet sich die augenblickliche Drehaxe zu irgend einer Zeit in einem derselben, so tritt sie nicht heraus. Liegt sie in einer der vier Begrenzungen, welche von den beiden Ebenen gebildet werden, so bleibt sie ebenfalls in derselben. Noch lässt sich zeigen, dass wenn zwei der Hauptaxen des Ellipsoids nicht nahezu gleich, und die anfängliche Drehaxe sich sehr nahe der grössten oder kleinsten Hauptaxe befindet, sie während der ganzen Bewegung sich nicht weit von ihr entfernt.

Sind aber zwei Hauptaxen noch gleich, so ist nur die Bewegung um die dritte eine stabile..

Schliesslich soll noch die Lage der Axe des mittleren Paares, welche im Raume fest ist, für den Körper gegeben werden. Es war:

$$x_1 : y_1 : z_1 = Ap : Bq : Cr$$

für jeden Punkt dieser Axe. Nun geben die Gleichungen IVa) und V):

$$Ap^2(1 - Al^2) + Bq^2(1 - Bl^2) + C_1^2(1 - Cl^2) = 0,$$

also:

$$(1 - Al^2)x_1^2 + (1 - Bl^2)y_1^2 + (1 - Cl^2)z_1^2 = 0.$$

Das ist wieder ein Kegel zweiten Grades. Die elliptischen Schnitte desselben sind in der Ebene des grössten oder kleinsten Trägheitsmomentes. Es wird ein Rotationskegel, wenn $B = C$ oder $B = A$ ist. Für

$$A = B = C \text{ ist } l^2 = \frac{1}{A}$$

und man hat:

$$x_1 : y_1 : z_1 = p : q : r,$$

d. h. die Axe des mittleren Paares fällt in die Drehaxe, Letzteres ist also fest.

7) Vollständige Lösung des Rotationsproblems für den Fall, wo keine continuirlichen Kräfte stattfinden mit Hülfe der elliptischen Functionen.

Die vollständige Lösung des hier besprochenen Problems rührt von Jakobi her (vergleiche Crelles Journal). Wir folgen hier der bereits erwähnten Methode von Weierstrass, welcher statt zunächst die Winkel φ, ψ, ϑ zu suchen, die 9 Cosinus α, β, γ, α_1 ... unmittelbar bestimmt.

Es sei zunächst B immer das mittlere Trägheitsmoment, indem wir es vor der Hand noch unbestimmt lassen, welches das grösste und welches das kleinste sei. Jedenfalls aber haben $Ck^2 - 1$ und $Ak^2 - 1$ entgegengesetzte Vorzeichen, wie im vorigen Abschnitt gezeigt worden ist.

Setzen wir jetzt:

$$1) \qquad s = \frac{C - B}{Cl^2 - 1} \frac{\gamma_1^2}{B},$$

so ist der Coefficient von γ_1^2 immer positiv, und man erhält aus den Gleichungen 2) des Abschnittes 5):

2) $$\gamma^2 = \frac{A(Cl^2-1)}{C-A}(1-s),$$

$$\gamma_2^2 = \frac{C(Al^2-1)}{A-C}(1-k^2s),$$

wo gesetzt wird:

3) $$k^2 = \frac{Cl^2-1}{Al^2-1}\,\frac{A-B}{C-B},$$

wo also k^2 jedenfalls positiv ist. Es lassen sich aber die Trägheitsmomente A und C jetzt so bestimmen, dass k^2 kleiner als 1 ist. Da man nämlich hat:

$$\frac{A-B}{Al^2-1} - \frac{C-B}{Cl^2-1} = \frac{(A-C)(Bl^2-1)}{(Al^2-1)(Cl^2-1)},$$

Ist Bl^2-1 nun positiv, so wird der ganze Ausdruck negativ, so bald $A > C$ ist, ist Bl^2-1 negativ, so tritt dasselbe ein, wenn $C > A$ ist.

Setzen wir also, wie dies von nun an geschehen soll, A oder C für das grösste Trägheitsmoment, je nachdem Bl^2-1 positiv oder negativ ist, so wird immer

$$\frac{A-B}{Al^2-1} < \frac{C-B}{Cl^2-1}$$

sein, und somit k^2 kleiner als Eins. Die zweite Gleichung 1) des Abschnitts 5) gibt nun:

4) $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4n^2s(1-s)(1-k^2s),$$

wo gesetzt wurde:

5) $$n = \nu\sqrt{\frac{(C-B)(1-Al^2)}{ABC}}.$$

Aus der Gleichung 4) und aus der Gleichung 2) folgt dann:

6) $$s = sn(nt+C, k),$$

$$\gamma_1 = \pm\sqrt{\frac{B(Cl^2-1)}{C-B}}\,sn(nt+C)$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{A(Cl^2-1)}{C-A}}\,cn(nt+C), \quad \gamma_2 = \pm\sqrt{\frac{C(Al^2-1)}{C-A}}\,dn(nt+C)$$

sn, *cn*, *dn* sind, hier die Gudermann'schen Bezeichnungen, also:

$$snu = \sin amu, \quad cnu = \cos amu, \quad dnu = \triangle amu.$$

Zu den Ausdrücken für γ, γ_1, γ, gehört der Modul k. Was die Vorzeichen anbetrifft, so soll die Wurzel in γ_1 immer mit positiven, die in γ mit negativen Vorzeichen genommen werden. Im Anfange der Bewegung ist nämlich:

$$\gamma_1^0 = \pm\sqrt{\frac{B(Cl^2-1)}{C-B}}\cdot snc,$$

und c kann so gewählt werden, dass die Wurzel positiv wird. Vertauscht man dann nöthigen Falls C mit $2K-C$, wie dies ja geschehen kann, ohne dass snc sich ändert, so kann man auch der Wurzel in γ^0 ein beliebiges, also das negative Zeichen geben.

Was den Ausdruck für γ^2 anbetrifft, so gab die dritte Gleichung 1) des Abschnitts 5):

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = \nu\frac{A-B}{AB}\gamma\gamma_1,$$

und durch Vergleich der Ausdrücke links und rechts erhält man, wenn $u = nt+C$ gesetzt wird:

$$\pm nk^2 cnusnu = -cnu\sin u\frac{A-B}{AB}\nu.$$

Wir wollen, wie es geschehen kann, uns ν immer positiv denken. Für die Wurzel, welche in γ_2 vorkommt, ist also das positive oder negative Zeichen zu nehmen, je nachdem A das grösste oder kleinste Trägheitsmoment ist. Durch diese Betrachtungen sind die Vorzeichen von γ, γ_1, γ_2 immer bestimmt. Wir setzen jetzt:

7) $$s_0 = \frac{C-B}{B(Cl^2-1)}, \quad 1-s_0 = \frac{C(Bl^2-1)}{B(Cl^2-1)}, \quad 1-k^2s_0 = \frac{A(Bl^2-1)}{B(Al^2-1)},$$

wo die beiden letzten Gleichungen eine Folge der ersten sind. Die Gleichung 8a) des Abschnitts 5) gibt dann:

Digitized by Google

$$d\lg(\alpha_1+\beta_1 i)=\frac{i\nu dl}{B}-\frac{\gamma_1 d\gamma_1}{1-\gamma_1^2}+i\nu\frac{\left(l^2-\frac{1}{B}\right)}{1-\gamma_1^2}dl.$$

Es folgt aber aus den Gleichungen 5) und 7):

$$8)\qquad i\nu\frac{(Bl^2-1)}{Bn}s_0=\pm\sqrt{s_0(1-s_0)(1-k^2s_0)}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist vor der Hand noch nicht bestimmt. Ist $A>B$, also Bl^2-1 positiv, so wird der Ausdruck rechts, welcher einen imaginären Werth haben muss, positiv, wenn man ihn durch i dividirt, das Gegentheil tritt ein wenn $A<B$ ist. Die Wurzel durch i dividirt, würde also immer das entgegengesetzte Vorzeichen als die in γ_1 haben. Schreiben wir also dieselbe mit dem Minuszeichen, so hat sie mit der in γ_2 immer gleiches Vorzeichen. Setzt man unter dieser Voraussetzung den oben gefundenen Werth in die vorletzte Gleichung ein, so kommt:

$$d\lg(\alpha_1+\beta_1 i)=\frac{i\nu dl}{B}+\tfrac{1}{2}d\lg\frac{s_0-s}{s_0}-\frac{n\sqrt{s_0(1-s_0)(1-k^2s_0)}\,dl}{s_0-s}.$$

Der Gleichung 7) wegen ist die Wurzel im letzten Gliede immer imaginär, und es muss deshalb s_0 zwischen 1 und $\frac{1}{k^2}$ liegen. Wir setzen jetzt wieder:

$$s_0=snv^2,$$

v ist hier imaginär und abgesehen vom Vorzeichen ist

$$1<snv=\frac{1}{k}.$$

Diese Bedingung wird erfüllt wenn man setzt: $v=K\pm iw$, wo K der eine elliptische Quadrant ist, und w zwischen 0 und K' liegt, unter K' den anderen Quadranten verstanden.

Was das Vorzeichen von w anbetrifft, so war angenommen, dass

$$\frac{1}{i}\sqrt{s_0(1-s_0)(1-k^2s_0)}=\frac{1}{i}snv\,cnv\,dnv,$$

dass dieser Ausdruck positiv war, wenn A das grösste Trägheitsmoment ist. Nun erhält man:

$$\frac{1}{i}sn(K+iw)\,cn(K\pm iw)\,dn(K\pm iw)=\mp\frac{k'^2\,cn\,iw\,sniw}{i\,dn^2iw}$$
$$=\mp\frac{sn(w,k')\,cn(w,k)}{dn^2(w,k')}.$$

Ist also A das grösste Trägheitsmoment, so ist w mit dem negativen Vorzeichen zu verstehen, ist A das kleinste, so wird w positiv. Indem wir den ersteren als den Normalfall betrachten, setzen wir somit:

$$9)\qquad v=K-iw$$

und es ergibt sich:

$$10)\qquad s_0=snv^2=\frac{1}{dn(w,k')}.$$

Man erhält nun, wenn wieder $u=nt+C$ gesetzt wird:

$$11)\qquad d\lg(\alpha_1+\beta_1 i)=\frac{i\nu du}{nB}+\tfrac{1}{2}d\lg\left(1-\frac{snu^2}{snv^2}\right)-\frac{snv\,cnv\,dnv}{snv^2-snu^2}du.$$

Nach bekannten Formeln aber ist, wenn unter H, Θ, H_1, Θ_1, die von Jakobi eingeführten Reihen, unter H', Θ' . . . die Differenzialquotienten derselben verstanden werden:

Digitized by Google

$$1-\frac{snu^2}{snv^2}=\frac{2k'K}{\pi}\,\frac{H(u+v)\,H(u-v)}{\Theta^2(u)\,(H^2(v)}$$

$$\int_0^u \frac{du\,snv\,cnv\,dnv}{snc^2-snu^2}=-u\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}+\tfrac{1}{2}\lg\frac{H(u+v)}{H(v-u)},$$

ist also N die Integrationsconstante, so erhält man:

$$12)\qquad \alpha_1+\beta_1 i=Ne^{\left(\frac{\nu}{nB}+\frac{\Theta'(v)}{i\,\Theta(v)}\right)ui}\,\frac{H(u-v)}{\Theta(u)}.$$

Es sind noch die Ausdrücke für die Constanten festzustellen. Zunächst erhält man:

$$13)\qquad k'^2=1-k^2=\frac{C-A}{B-C}\,\frac{1-Bl^2}{Al^2-1}.$$

Die Factoren, womit in den Gleichungen 6) die Cosinus γ, γ_1, γ_2 behaftet sind, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$14)\qquad \sqrt{\frac{B(Cl^2-1)}{C-B}}=\frac{1}{\sqrt{s_0}}=\frac{1}{snv}=dn(w,k')$$

$$\sqrt{\frac{A(Cl^2-1)}{C-A}}=\frac{1}{k'},\quad \sqrt{\frac{1-k^2s_0}{s_0}}=\frac{dnv}{k'snv}=cn(w,k')$$

$$\sqrt{\frac{C(Al^2-1)}{C-A}}=\frac{\sqrt{s_0-1}}{k'\sqrt{s_0}}=\frac{scnv}{ik'snv}=\frac{sn(w,k')}{cn(w,k')}.$$

Von diesen Ausdrücken sind der erste und zweite positiv, ob w positiv oder negativ sei. Dagegen ist der dritte mit w positiv oder negativ, wie dies auch sein muss, da dem Coefficienten von γ_2 das positive oder negative Zeichen zu geben ist, je nachdem A das grösste oder kleinste Trägheitsmoment ist. In γ_1 ist dem zweiten Ausdrucke das negative Vorzeichen zu geben. Man hat also:

I)
$$\gamma=-cn(w,k')\,cn(u,k)=-\frac{dnv\,cnu}{k'snv}$$

$$\gamma_1=\quad dn(w,k')\,sn(u,k)=\frac{snu}{snv}$$

$$\gamma_2=\quad tn(w,k')\,dn(u,k)=\frac{cnv\,dnv}{ik'snv},$$

wo $tn\,w=\operatorname{tg} am\,w$ zu setzen ist.

Was nun die übrigen Cosinus anbetrifft, so mögen α^0, β^0, α_1^0, β_1^0, α_2^0, β_1^0, ihre Anfangswerthe sein. Dann ist:

$$\alpha_1^0+\beta_1^0 i=Ne^{n'ci}\,\frac{H(c-v)}{\Theta(c)},$$

wo noch gesetzt ist:

$$15)\qquad n'=\frac{\nu}{nB}+\frac{\Theta'(v)}{i\,\Theta(v)}.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass immer n' eine reelle Constante ist. Man kann aber immer setzen:

$$\gamma_1^0=\cos\varrho,\quad \alpha_1^0=\sin\varrho\cos\tau,\quad \alpha_2^0=\sin\varrho\sin\tau,$$

wo sich dann ergibt:

$$\alpha_1^0+\beta_1^0 i=\sin\varrho\,e^{\tau i},$$

also:

$$\alpha_1+\beta_1 i=\sin\varrho\,e^{(n'(u-c)+\tau)i}\,\frac{\Theta(c)}{H(c-v)}\,\frac{H(u-v)}{\Theta(u)}.$$

Digitized by Google

Die Gleichungen 4) des Abschnitts 5) waren:

$$(\alpha+\beta i) = -\frac{(\alpha_1+\beta_1 i)(\gamma\gamma_1+i\gamma_2)}{1-\gamma_1^2}$$

$$(\alpha_2+\beta_2 i) = -\frac{(\alpha_1+\beta_1 i)(\gamma_1\gamma_2+i\gamma)}{1-\gamma_1^2}.$$

Es ist aber:

$$-\frac{\gamma\gamma_1+i\gamma_2}{1-\gamma_1^2} = \frac{dnv\,snu\,cnu - snv\,cnv\,dnu}{k'(snv^2-snu^2)}$$

$$= \frac{1-k^2snu^2snv^2}{k'(snv^2-snu^2)}\,sn(u-v)\,dn(u+v)$$

$$-\frac{\gamma_1\gamma_2+i\gamma}{1-\gamma_1^2} = \frac{i(cnv\,snu\,dnu+dnv\,snv\,cnu)}{k'(snv^2-snu^2)}$$

$$= \frac{i(1-k^2snu^2snv^2)}{k'(snv^2-snu^2)}\,sn(u+v)\,dn(u-v).$$

Diese Formeln sind zu verbinden mit der folgenden:

$$\frac{snv^2-snu^2}{1-k^2snu^2snv^2} = sn(u+v)\,sn(v-u),$$

so dass man erhält:

$$-\frac{(\gamma_1\gamma_2+i\gamma)}{1-\gamma_1^2} = -\frac{i}{k'}\frac{dn(u-v)}{sn(u-v)} = -i\sqrt{\frac{k}{k'}}\frac{\Theta_1(u-v)}{H(u-v)}$$

$$-\frac{(\gamma\gamma_1+i\gamma_2)}{1-\gamma_1^2} = -\frac{dn(u+v)}{k'sn(u+v)} = -\sqrt{\frac{k}{k'}}\frac{\Theta_1(u+v)}{H(u+v)},$$

woraus sich dann ergibt:

II) $$\alpha+\beta i = -\sqrt{\frac{k}{k'}}\sin\varrho\,e^{[n'(u-c)+\tau]i}\,\frac{\Theta(c)}{H(c-v)}\,\frac{H(u-v)\,\Theta_1(u+v)}{H(u+v)\,\Theta(u)}$$

$$\alpha_1+\beta_1 i = \sin\varrho\,e^{[n'(u-c)+\tau]i}\,\frac{\Theta(c)}{H(c-v)}\,\frac{H(u-v)}{\Theta(u)}$$

$$\alpha_2+\beta_2 i = -\sqrt{\frac{k}{k'}}\sin\varrho\,e^{[n'(u-c)+\tau)i}\,\frac{\Theta(c)}{H(c-v)}\,\frac{\Theta_1(u-v)}{\Theta(u)}$$

Sondert man die reellen und imaginären Theile, so hat man die sechs Winkel α, α_1, α_2, β, β_1, β_2, während die Gleichungen I) die übrigen geben. Was die Winkelgeschwindigkeiten anbetrifft, so war:

$$p=\frac{\gamma\nu}{A},\quad q=\frac{\gamma_1\nu}{B},\quad r=\frac{\gamma_2\nu}{C},$$

und diese Ausdrücke sind also bezüglich gleich den Produkten von *cnu*, *snu*, *dnu* in gewisse Constanten, so dass die Gleichungen der momentanen Drehaxe in Besug auf den Körper die Gestalt haben:

$$x_1 : y_1 : z_1 = a\,cnu : a_1\,snu : a_2\,du\,u.$$

Was die Gleichungen der momentanen Drehaxe im Raume anbetrifft, so ist für diesen:

$$x : y : z = \alpha p+\alpha_1 q+\alpha_2 r : \beta p+\beta_1 q+\beta_2 r : \gamma p+\gamma_1 q+\gamma_2 r$$

oder:

$$x=\frac{\alpha p+\alpha_1 q+\alpha_2 r}{\omega},\quad y=\frac{\beta p+\beta_1 q+\beta_2 r}{\omega},\quad z=\frac{\gamma p+\gamma_1 q+\gamma_2 r}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2} = r\sqrt{\frac{\gamma^2}{A^2}+\frac{\gamma_1^2}{B^2}+\frac{\gamma_2^2}{C^2}}.$$

Also auch:

Digitized by Google

$$x+yi=\frac{(\alpha+\beta i)p+(\alpha_1+\beta_1 i)q+(\alpha_2+\beta_2 i)r}{\omega}$$

ein Ausdruck, der sich leicht mittelst der Formel II) berechnen lässt. Während man für z erhält:

$$z=\frac{\nu}{\omega}\left(\frac{\gamma^2}{A}+\frac{\gamma_1^2}{B}+\frac{\gamma_2^2}{C}\right)=\frac{rl^2}{\omega}.$$

Rotationsfläche (Geometrie).

Rotationsfläche ist eine Oberfläche, welche entsteht, indem man eine beliebige Curve um eine feste Axe bewegt. Es folgt hieraus unmittelbar, dass jede auf der Axe senkrechte Ebene die Rotationsfläche in einem Kreise schneidet.

Um die Gleichung einer Rotationsfläche zu bestimmen, nehmen wir die Rotationsaxe als Axe der z; sind dann

$$f(x,y,z)=\varphi(x,y,z)=0$$

die Gleichungen der Curve, so ist

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

der Abstand eines Punktes derselben von der Axe, und da dieser für gegebenes z constant bleibt, so braucht man aus den drei Gleichungen:

$$f(x,y,z)=0,\quad \varphi(x,y,z)=0,$$
$$r^2=x^2+y^2$$

nur x und y zu eliminiren, und nach ausgeführter Rechnung wieder

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

zu setzen, um die verlangte Gleichung zu erhalten. Es ist nämlich

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

auch der Abstand eines Punktes der Rotationsfläche von der Axe.

Ist die gegebene Curve eine ebene, so nehmen wir an, dass sie in der Ebene xz liegt. Sei $\varphi(x,z)=0$ ihre Gleichung; also $y=0$, so wird $r=x$, und man hat:

$$\varphi(r,z)=0,\quad r^2=x^2+y^2$$

als Gleichung der Rotationsfläche. Auf diesen Fall kann man aber jede Rotationsfläche zurückführen, denn legt man durch die Axe irgend eine Ebene, so schneidet diese die Rotationsfläche in einer ebenen Curve, die man immer als diejenige betrachten kann, durch deren Drehung die Fläche entstanden ist.

Beispiele. Sei die Curve ein Kreis, also ihre Gleichung

$$x^2+z^2=a^2;$$

dreht dieselbe sich um ihren Durchmesser, so kommt:

$$r^2+z^2=a^2 \text{ oder } x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Die Fläche ist eine Kugel.

Sei sie eine Grade, und $x=\alpha z$ ihre Gleichung, so kommt:

$$x^2+y^2=\alpha^2 z^2.$$

Die Fläche ist ein Rotationskegel.

Ist die Grade der Axe der z parallel, also $x=h$ ihre Gleichung, so wird $x^2+y^2=h^2$ die Gleichung der Fläche, welche einen Rotationskegel vorstellt.

Um die Formeln für Quadratur und Cubatur der Rotationskörper zu erhalten, denke man zwei einander unendlich nahe Ebenen senkrecht durch die Rotationsaxe gelegt; sie schneiden von der Fläche einen abgestumpften Kegel ab. Der Mantel desselben ist $\pi s(r+\varrho)$, sein Inhalt $\pi h(r^2+r\varrho+\varrho^2)$, wo r, ϱ die Radien der Grenzflächen, h die Höhe, s die Seite ist. (S. den Artikel: Raumlehre). Nun ist hier

$$\varrho=r+dr,\quad h=dz,\quad ds=\sqrt{dz^2+dr^2},$$

also, wenn man die unendlich Kleinen zweiter Ordnung weglässt, so ergibt sich, wenn z_0, z_1 die Coordinatenwerthe z sind, zwischen welchen das aufzufindende Stück liegt, und F die Oberfläche, J den körperlichen Inhalt anzeigt:

$$F=2\pi\int_{z_0}^{z_1} r\sqrt{dz^2+dr^2},$$

$$J=\pi\int_{z_0}^{z_1} r^2 dz.$$

Anwendungen dieser Formeln gibt der Artikel: Quadratur.

Rotationskörper, der von einer Rotationsfläche begrenzte Körper.

Rotationszeit (Astronomie).

Die Zeit, in welcher ein Himmelskörper seine Axendrehung vollendet.

Die Rotationszeiten der Sonne und sämmtlicher Planeten sind constant. Wir fügen dieselben hier hinzu:

Digitized by Google

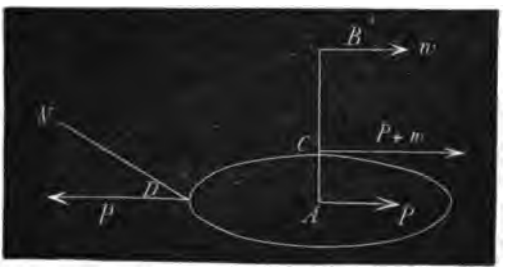
Sterne	Stunden	Minuten	Secunden
Sonne . . .	610	—	—
Merkur . . .	24	5	—
Venus . . .	23	21	21
Erde	23	56	4
Mars	24	37	22
Jupiter . . .	9	55	26
Saturn . . .	10	29	17
Uranus . . .	?	?	?
Neptun . . .	?	?	?
Erdmond . .	708	44	2,9

Die Rotationszeit des Mondes ist gleich seiner synodischen Umlaufszeit. Aehnliches scheint bei den Monden der andern Planeten stattzufinden.

Rudern (angewandte Hydraulik).

Rudern heisst dem Schiff Bewegung in der Art geben, dass der Motor seinen Stützpunkt in einer bewegten Masse, nämlich dem Wasser findet. Es geht also hierbei ein Theil des Nutseffectes verloren. — Die Bewegung wird verursacht durch eine feste Fläche, das Ruder, welches der Bewegung des Schiffes möglichst entgegengesetzt gegen das Wasser geschlagen wird. Soll das Schiff *DE* (Fig. 347) sich bewegen, so wird Ruder *AB* gegen den Bolzen *C* an der breiten Seite des Fahrzeuges gelehnt, in *A* wirkt eine Kraft *P* in der Bewegungsrichtung. Das andere Ende des Ruders, welches möglichst viel Fläche darbietet, schlägt

Fig. 347.



also in entgegengesetzter Richtung gegen das Wasser, welches den Widerstand w gegen die Bewegung des Schiffes darbietet. Auf den Bolzen *C* wirkt also der Druck $P + w$. Bei der Ausübung der Kraft *P* wird nun zugleich in der entgegengesetzten Richtung von dem Ruderer eine Kraft $-P$ auf das Schiff ausgeübt, so dass nur die Kraft w, zugleich aber das Kräftepaar $P + w$, $-(P + w)$ übrig bleibt. Das Moment dieses Paares ist das Product von $P + w$ in die Entfernung *AC* des Ruderers vom Bolzen. Dies Paar strebt dem Fahrzeug eine drehende Bewegung zu geben, welche durch ein zweites auf der andern Seite des Schiffes angebrachtes Ruder, oder durch die Einwirkung des Steuers *DN*, welches auf die Seite des Ruders gestellt werden muss, vernichtet wird.

Ruderrad siehe Wasserrad.

Ruderschaufel siehe Wasserrad.

Ruthe (Messkunst).

Die Benennung eines Längenmaasses in den meisten Ländern Deutschlands. Wir geben einige der gebräuchlichsten Ruthenmaasse:

Land.	Anzahl der Fusse.	Länge d. Ruthe in Metern.
Preussen	12	26,55166
Baiern	10	34,26310
Hannover	16	21,39717
Sachsen	15½	23,28262
Braunschweig	16	21,90197
Würtemberg	10	34,90519
Baden und Schweiz	10	33,33333

Rückkehrpunkt, Spitze (Geometrie).

Derjenige Punkt, wo sich zwei Aeste einer Curve berühren und gleichzeitig aufhören (vergleiche: Singuläre Punkte).

Rückläufig (Astronomie).

So heisst ein Gestirn, dass sich von Osten nach Westen durch die Ekliptik, also entgegengesetzt der Folge der Zeichen bewegt.

Rücklaufende Reihe s. Reihe.

Rückschlägiges Wasserrad siehe Wasserrad.

Digitized by Google

S.

Säculum (Chronologie) gleichbedeutend mit Jahrhundert.

Säculare Störungen (Astronomie).

Derjenige Theil der Störungen der Planeten und Cometen, welche entweder gar nicht periodisch, oder dessen Periode doch nach Jahrhunderten zu zählen ist, im Gegensatze zu demjenigen Theil, welcher kürzere Perioden hat und periodische Störungen genannt wird.

Wenn in der Länge der Periode allerdings kein specifischer Unterschied gefunden werden kann, so ist doch dieser Unterschied um so mehr in der Art der Berechnung vorhanden, weshalb diese Unterscheidung eine wichtige ist. — Indess hat man auch einen specifischen Unterschied zwischen periodischen und säcularen Störungen zu machen gesucht. Da zwei Körper *A* und *B* auf einander störend einwirken, so wird, wenn man die Einwirkung von *B* auf *A* betrachtet, der störende Körper *B* selbst veränderliche Elemente haben. Derjenige Theil der Störungen nun, der von den unveränderlich gedachten Elementen von *B* herrührt, bildet den periodischen Theil, und die Aenderung der Elemente von *B* bildet den säcularen Theil der Störungen. Es muss indess bemerkt werden, dass diese letztere Definition insofern nicht ganz mit der ersteren übereinstimmt, als Störungen die von den unveränderlich gedachten Elementen des einen Körpers herrühren, Perioden von Jahrhunderten haben können, wie z. B. die eine Störung zwischen Jupiter und Saturn, deren Periode 930 Jahre umfasst. (Vergleiche den Artikel: Perturbationen.)

Säule (Architektur).

Eine vertikale, zum Stützen bestimmte Vorrichtung deren Höhe die beiden anderen Dimensionen bedeutend übertrifft. Im Besonderen aber wird darunter diejenige Stütze verstanden, welche horizontale Theile und Wölbungen eines Gebäudes zu tragen bestimmt ist. — Jede Säule besteht aus drei Haupttheilen, Fuss, Schaft und Kapitäl. Hierzu kommt ein Unterbau, der entweder nur eine Säule oder eine Säulenreihe trägt. Er heisst Säulenstuhl oder Postament.

Das Postament kann einfach sein, und heisst dann Plinthus, oder aus mehreren Gliedern bestehen, diese Glieder sind der Fuss, der Würfel und der Kranz. Derjenige horizontale Theil des Gebäudes, den die Säule trägt, heisst Gebälk. Das Gebälk besteht aus dem Architrav, d. h. der wagerechten Verbindung des Gebäudes in der Richtung der Säulenreihen, dem Fries, d. h. der wagerechten Querverbindung, endlich dem Kranz oder der Dachverbindung.

Man unterscheidet gewisse Säulenordnungen, welche die Form der Säulen bestimmen; dieser Ordnungen unterscheidet man 3 oder 5, nämlich die dorische, ionische und korinthische, wozu noch die hetrurische und römische kommen. Die dorische ist die älteste und einfachste der drei Hauptordnungen, sie hat keinen Fuss, sondern ruht auf dem Plinthus. Die ältesten dorischen Säulen hatten 4 bis 5 Durchmesser zur Höhe, später 6 bis 7, in neuerer Zeit endlich 8, von denen 7 auf den Schaft kommen. Das Gebälk hat ¼ der Säule, theilt man dies in 8 Theile, so kommen 2 auf den Architrav, 3 auf den Fries, 3 auf den Kranz.

Den dorischen Säulen ist der Charakter der Stärke und Festigkeit aufgeprägt.

Die ionischen sollen den Eindruck zierlicher Einfachheit machen. Ihre Höhe hat 8 bis 9 Säulendurchmesser, sie haben Schnecken am Kapitäl, oft flach cannelirte Säulenschäfte, dreistreifige Architrave und Friese, die oft mit Sculpturen bedeckt sind.

Die korinthische Säule zeichnet sich durch einen Kranz mit Zahnschnitten

Digitized by Google

und Sparrenköpfen, oft auch durch tiefere Cannelirungen aus. Sie ist die zierlichste von allen.

Die römische Säulenordnung ist insofern keine neue, als ihr Kapitäl aus dem der ionischen und korinthischen zusammengesetzt ist.

Die hetrurische ist nur eine ganz einfache dorische Säule.

Der Schaft einer Säule erleidet von unten nach oben eine Verjüngung.

Was die Tragfähigkeit der Säulen anbetrifft, so vergleiche den Artikel: Tragfähigkeit.

Säulenweite ist die Entfernung zweier Säulen von einander.

Säulenzahl (Arithmetik).

So heisst das Produkt einer Polygonalzahl in ihre Seite. Z. B.:

Seite	1	2	3	4	5	6
Triangularzahl	1	3	6	10	15	21
Säulenzahl	1	6	18	40	75	126
Seite	1	3	5	7	9	11
Tetragonalzahl	1	4	9	16	25	36
Säulenzahl	1	12	45	112	225	396

Da die Polygonzahlen eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, so bilden die Säulenzahlen eine solche dritter Ordnung.

Sagitta, Pfeil (Trigonometrie).

Die Entfernung der Mitte eines Bogens von der Mitte der dazu gehörigen Sehne.

In der Trigonometrie wird hierbei gewöhnlich der Radius des Bogens gleich Eins gesetzt. Ist α dann der Bogen oder der zugehörige Centriwinkel, so ist

$$\text{sagitta } (\alpha) = 1 - \cos\frac{\alpha}{2} = \text{sin vers}\,\frac{\alpha}{2} = 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\text{sagitta } (2\pi - \alpha) = 1 + \cos\frac{\alpha}{2} = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Also, wenn sich zwei Winkel zu vier Rechten ergänzen, so ergänzen sich ihre Sagitten zu zwei Radien oder zum Durchmesser. In neueren Schriften wird der Ausdruck Sagitta nicht mehr gebraucht.

Saite (Akustik).

Ein elastischer gewöhnlich an beiden Endpunkten befestigter und gespannter Faden, der durch Berührung in Schwingungen geräth und somit die Entstehung eines Tons veranlasst. (Vergleiche den Artikel: Schwingungen.)

Sammelglas (Optik).

Eine Linse, die entweder nach beiden Seiten convex oder doch so gekrümmt ist, dass die beiden Seiten eine scharfe Schneide mit einander bilden, wozu nöthig ist, dass wenigstens eine Seite, und zwar die am meisten gekrümmte convex sei. — Die Sammelgläser geben von entfernten Gegenständen ein umgekehrtes Bild auf der andern Seite des Glases. In dieser Eigenschaft finden sie ihre Verwendung als Brenngläser, Objective an Fernröhren und Mikroscopen, der Camera obscura u. s. w.

Nahe Gegenstände rücken die Sammelgläser scheinbar weiter hinaus, ohne dass der Gesichtswinkel sich ändert. Diese Eigenschaft macht sie zu Lupen, Brillen für Fernsichtige, Oculären an Fernröhren und Mikroskopen geeignet. (Vergl. den Artikel: Linse.)

Satellit (Astronomie).

Satellit, Trabant oder Mond heisst ein Planet der einem grösseren so nahe ist, dass er ausser der Revolution um die Sonne, welche er mit diesem gemein hat, noch eine solche um den Hauptplaneten vollführt.

Ausser dem Satelliten unserer Erde, sind vier dergleichen bei Jupiter, acht beim Saturn, vier beim Uranus bekannt. Vom Neptun ist einer bisher entdeckt, ein zweiter fraglich. Unser Mond dreht sich in gleichmässiger Bewegung um seine Axe in derselben Zeit als er seine Revolution um die Erde vollführt. Dies hat, wie La Place theoretisch zeigt, immer stattgefunden, obgleich die Revolutionszeit des Mondes sich ändert. Auch hat die Beobachtung dasselbe Gesetz für drei Jupitermonde ergeben. Von den übrigen ist es aus theoretischen Gründen mindestens als sehr wahrscheinlich anzunehmen.

Die Bewegung um den Hauptplaneten geschieht gemäss der Keppler'schen Gesetze, also abgesehen von den hier allerdings bedeutenden Störungen in einer Ellipse, deren Brennpunkt der Hauptplanet einnimmt. Setzt man die beiden Bewegungen um die Sonne und um den Hauptplaneten zusammen, so entsteht eine Linie, welche sich bei unserm Monde wellenförmig über die vom Hauptplaneten durchschrittene Bahn hebt und senkt.

Bei den Jupiters- und Saturnsmonden hat diese Linie jedoch Schleifen (d. h. sie schneidet sich selbst). Es tritt dies ein, wenn der Trabant sich schneller um den Hauptplaneten, als dieser um die Sonne bewegt. Gewöhnlich unterscheidet man beim Erdmonde drei Hauptstörungen, neben denen es jedoch noch viele andere gibt. Die erstere ist: Die Evection, welche Ptolomäus entdeckt hat. Sie hängt vom Abstande des Mondes von der Sonne ab. Sie kann machen, dass der Mond seine Stellungen in der Bahn bis auf 1° 20′ ändert. Die zweite Störung heisst Variation, und ist von Tycho de Brahe entdeckt. Sie ist am grössten, wenn der Mond 45° oder 132° nach der einen oder der andern Seite von der Sonne entfernt ist, also in den Zeiten, welche in der Mitte zwischen Vollmond und letztem Viertel, oder zwischen letztem Viertel und Neumond, Neumond und erstem Viertel, erstem Viertel und Vollmond liegen. Die dritte Störung kommt von der Stellung der Erde zur Sonne her; sie macht, dass im Winter, wo Sonne und Erde sich näher sind, der Mondlauf langsamer als im Sommer ist. Die Rotation des Mondes ist keiner periodischen Störung unterworfen. Durch die ungleichmässige Bewegung des Mondes um die Erde verglichen mit der gleichmässigen Rotation, entsteht ein periodisches Schwanken (Libration genannt), welches bewirkt, dass wir nicht immer genau dieselbe Mondhälfte sehen.

Die Störungen bewirken, dass die Neigung der Mondbahn zur Ekliptik und die Durchschnitte beider Bahnen veränderlich sind. Die Knotenlinie macht schon in 8 Jahren 218 Tagen 21 Stunden 22 Minuten 46 Secunden einen Winkel von 360° entgegengesetzt der Bewegung des Mondes um die Erde. Diese Bewegungen aber ändern sich im Laufe der Jahrtausende. Auch die Umlaufszeit der Mondbahn ist, wie theoretische Betrachtungen zeigen, veränderlich. Sie nimmt ab, freilich in Jahrtausenden nur um Hunderttheile von Secunden. Dieses Abnehmen wird erst nach Verlauf von mehreren Jahrtausenden wieder in ein Zunehmen übergehen.

Die grosse Axe der Mondbahn durchläuft in 310 Tagen 13 Stunden 48 Minuten 53 Secunden den ganzen Himmel im Sinne der Mondbewegung, jedoch ungleichmässig. Die Theorie der Störungen unseres Mondes ist höchst schwierig. Noch schwieriger indess ist die der Jupiters- und Saturnsmonde, da bei denselben nicht nur die Sonne und der Hauptplanet auf die einzelnen Monde, sondern auch diese auf einander störend einwirken. Aus der Einwirkung, die ein Planet auf seine Trabanten ausübt, kann man die Masse des ersteren berechnen, ganz wie man die Masse der Sonne aus ihrer Einwirkung auf die Erde bestimmt.

Es folgen hier die Zahlenangaben für die Trabanten unseres Sonnensystems:

	Umlaufszeit wahre				Umlaufszeit synodische				Exentricität	Neigung der Bahn.		
Erdmond.												
	27 T.	7 h	43′	11,5″	29 T.	12 h	44′	2,9″	0,0548442	5°	8′	49″
Jupitersmonde.												
1	1 T.	18 h	27′	33,50″	1 T.	18 h	28′	35,95″	0	3°	5′	24″
2	3	13	13	42,04	3	13	17	53,37	0	3	4	25
3	7	7	42	33,36	7	3	59	35,82	0,001348	3	0	28
4	16	16	32	11,27	16	18	5	7,02	0,007275	2	40	58
Saturnsmonde.												
Mimas	0 T.	22 h	36′	17,06″	— T.	22 h	36′	24,04″	0,06889			
Enceladus	1	8	52	57,80	1	8	53	12,92	?			
Tethys	1	21	13	32,96	1	21	13	49,0	0,00551	1° 33′ 16″ (gegen die Ringebene)		
Dione	2	17	44	51	2	17	45	51	?			
Rhea	4	12	25	11	4	12	27	55	?			
Titon	5	22	41	25,1	15	23	15	32,0	0,02922326	27	33	46,4 (gegen die Ekliptik)
Hyperion	21	4			21	6			0,115			
Japetus	79	7	54		79	22	4		?			

Digitized by Google

	Umlaufszeit wahre				synodische				Neigung der Bahn.
Uranusmonde									
Ariel	2T.	12h	29′	20,66″	2T.	12h	29′	38,57″	?
Umbriel	4	3	28	8,00	4	3	28	46,50	?
Titania	8	17	1	19,3	8	17	4	52,9	?
Oberon	13	11	5	1,5	13	11	13	32,1	? 99° 43′ 53,3″
Neptunsmond									
	5T.	21h	4′	9″	5T.	21h	4′	58″	0,02106 34 7 1 (gegen die Ekliptik.)

Die Neigung der Bahn ist im Verhältniss zur Bahn des Hauptplaneten zu verstehen, wenn keine andere Angabe gemacht ist.

	Abstand in Meilen kleinster	mittlerer	grösster	Masse im Verhältniss zum Planeten	Dichtigkeit im Verhältniss zu der der Erde	Durchmesser in Meilen
Erdmond						
	48961	51808	54644	1 : 81	0,6050	468
Jupitersmonde						
1	—	58294	—	1 : 57710	0,2005	529
2	—	92827	—	1 : 43088	0,8711	475
3	147905	148078	148251	1 : 11800	0,3244	776
4	258555	260450	262345	1 : 28442	0,2469	664
Saturnsmonde						
Mimas	23886	25600	27364	—	—	—
Enceladus	—	32866	—	—	—	—
Tethys	40492	40700	40908	—	—	—
Dione	—	52164	—	—	—	—
Rhea	—	71410	—	—	—	—
Titon	163866	168800	173734	—	—	360?
Hyperion	181425	205000	228575			
Japetus	—	524686	—			
Uranusmonde						
Ariel	—	—	—			
Umbriel	—	—	—			
Titania	—	63543	—			
Oberon	—	84933	—			
Neptunsmond						
	52919	54057	55195			

Sattelrad (Maschinenlehre).

Ein hölzernes Wasserrad mit Armgevieren, welche die vierkantige Welle umfassen. Bei hohen Rädern sind zwischen den Armgevieren noch sogenannte Helfarme anzubringen.

Saturn (Astronomie).

Der sechste von den grössten Planeten. Er erscheint uns in der Helligkeit eines Fixsternes erster Grösse, hat wie alle oberen Planeten mit Ausnahme des Mars keine Phasen. Seine scheinbare Grösse

schwankt zwischen 15 und 20 Secunden. Kurz nach Entdeckung der Fernröhre bemerkte man an ihm eine Unregelmässigkeit in der Gestalt, die sich je nach der Entfernnng von der Erde bald mehr bald weniger deutlich derart zeigt, dass gleichsam zwei Henkel an ihm sichtbar werden. Es war aber erst Huyghens (1650) vorbehalten, die Entdeckung zu machen, dass diese Erscheinungen von einem frei um den Saturn schwebenden Ringe herrührt. Dieser Ring macht einen Winkel von 28° 10′ 34″ mit der Ekliptik. Die Kleinheit dieses Winkels ist die Ursache, dass sich der Ring niemals ganz getrennt vom Saturn uns darstellt. Dieser Ring ist kein einfacher; man nahm früher drei concentrische Ringe an, indessen haben sich in neuester Zeit noch mehr Theilungen gezeigt. Wahrscheinlich dreht sich dieser Ring um den Saturn. Jedenfalls ist er elliptisch, und nach Bessel beträgt seine Abplattnng $\frac{1}{10,2}$ des Halbmessers. Am Saturn finden sich Streifen und Flecken. Aus der Veränderung der Lage dieser letzteren schliesst Herschel auf eine Axendrehung von $10^h\ 29'\ 17''$ Dauer. Der acht Trabanten des Saturn ist in dem Artikel: Satelliten erwähnt. Auffälliger Weise machen dieselben nicht mit der Ekliptik wie die Monde der andern Planeten, sondern mit der Ringebene nur sehr kleine Winkel. Bei der Gelegenheit der Entdeckung des Saturnringes ist noch die Art zu erwähnen, wie sich Huyghens seine Entdeckung sicherte, ohne sie zu publiciren. Er theilt nämlich eine Anzahl Buchstaben mit, aus denen sich durch richtige Zusammenstellung die Worte ergaben: *„annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato.“*

Nächst dem Jupiter hat Saturn die grösste Masse von allen Planeten. Sie beträgt die 101,6 fache Masse der Erde, (die des Jupiters die 339,2 fache). Von den andern Planeten ist der nächste Neptun mit der 24,6 fachen Erdmasse. Dass sich im Sonnensystem zwei Körper von so weit gegen die andern überwiegender Masse befinden, ist wichtig in Bezug auf die Stabilität des Systems. Namentlich bewirkt dies hauptsächlich, dass die Länge der grossen Axen und folglich die Umlaufszeit der Planeten keinen säcularen Aenderungen unterworfen sind. Sehr schwierig zu berechnen sind die Störungen, welche Jupiter und Saturn auf einander ausüben, und finden hierbei eigenthümliche Umstände statt. Während die grosse Axe der Saturnsbahn sich immer mehr vergrössert, verkleinert sich die der Jupitersbahn. Würde dies als eine säculare oder gar als eine immer in demselben Sinne fortwirkende Störung betrachtet, so stände diese Erscheinung mit dem eben aufgestellten von La Place herrührenden Gesetze, dass die grossen Axen keine solche Störungen haben, in Widerspruch. Es wäre dann zu befürchten, und es ist früher angenommen worden, dass sich Jupiter nach und nach bis zur Sonne selbst annähere, Saturn aber aus dem Sonnensystem entfernen würde. Indess hat schon La Place gefunden, dass diese Störung in die Gattung der periodischen gehört, obgleich sie Perioden von mehr als 900 Jahren umfasst. Der Grund dieser Eigenthümlichkeit ist die Thatsache, dass die Geschwindigkeit vom Jupiter zu der des Saturn nahezu in dem Verhältnisse 5:2 steht. Dieses einfache Verhältniss bewirkt, dass in den Formeln für die Störungen gewisse Glieder die bei den übrigen Planeten nur klein sind, hier sehr gross werden, und so eine lange Periode bewirken. — Was die Elemente des Saturn anbetrifft, so vergleiche den Artikel: Planeten. Hier bemerken wir nur, dass seine mittlere Entfernung von der Sonne 9,539 mal die der Erde übertrifft, und seine tropische Umlaufszeit 10746 Tage $22^h\ 30'\ 10''$ beträgt.

Saturnsmonde
Saturnring } siehe Saturn.

Satz.

So wird im Allgemeinen jede mathematische Wahrheit genannt.

Man theilt die Sätze in Lehrsätze (*theorema*), welche eine neue des Beweises bedürfende Wahrheit aussprechen; in Zusätze (*corollarium*), welche eine an einen andern Satz geknüpfte, leicht aus ihm folgende Wahrheit geben und in Grundsätze (*axioma*), welche eine Wahrheit geben, von der man entweder annimmt, dass sie an sich einleuchte, also keines Beweises bedarf, oder, dass ein Beweis sich davon nicht finden lasse. Dies letztere Kriterium ist allerdings ein sehr wenig wissenschaftliches. Es würde nach ihm ein unbewiesener Satz so lange Grundsatz sein, bis von ihm ein Beweis gefunden wird, wo er dann zum Lehrsatze befördert werden muss.

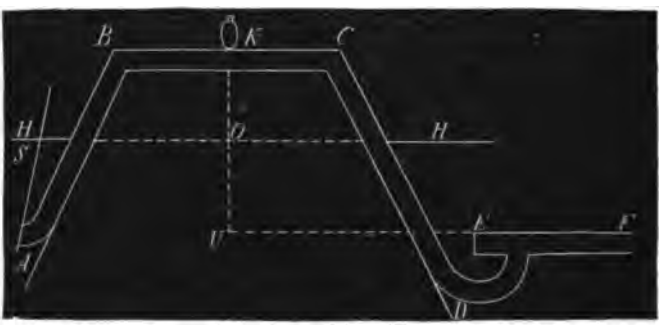
Indess scheint uns, dass der Unterschied zwischen Lehrsatz und Grundsatz aus einer andern Betrachtung entnommen werden müsse. Wir behaupten nämlich,

dass in der eigenlich reinen Grössen- oder Zahlenlehre gar keine Grundsätze vorkommen. Denn selbst Sätze, wie die von der Gleichheit: „Jede Grösse ist sich selbst gleich“ — „Wenn zwei Grössen einzeln einer dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich“ scheinen uns keine Grundsätze zu sein, sondern aus der Definition der Gleichheit sich zu ergeben, welche so gefasst werden muss: „Zwei Grössen *a* und *b* nennen wir gleich, wenn jede statt der anderen gesetzt werden kann.“ Diese Erklärung reicht in der reinen Grössenlehre immer aus. — Wird aber die Grössenlehre auf irgend ein Gebiet von Erscheinungen, also z. B. auf Raumgrössen angewandt, so wird in dem Gebiete des Raumes eine Reihe von thatsächlich Vorhandenem mit aufgenommen, dessen Dasein eben nicht *a priori* zu erweisen, sondern als bestehend anzunehmen ist. Wenigstens hat die Mathematik keine Mittel für solchen Nachweis. So sind z. B. die drei Ausdehnungen des Raumes, die derartige Beschaffenheit desselben, dass sich zwischen zwei Punkten nur eine grade Linie ziehen lässt, dergleichen thatsächlich bestehende Wahrheiten, also Grundsätze, für deren Beweis die Mathematik keine Mittel besitzt. Ganz Aehnliches findet in der Mechanik statt und sind dergleichen Sätze z. B. der von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, der gradlinigen Wirkung der Kräfte u. s. w.

Saugheber (Hydrodynamik).

Saugheber ist eine gebogene Röhre, welche, wenn die Luft in ihr verdünnt ist, dazu dient, das Wasser über eine Erhöhung zu befördern. In physikalischen und chemischen Laboratorien hat man bekanntlich kleine Saugheber von Glas oder Metall, auch zum Ueberfüllen der Flüssigkeiten von einem Fass in das andere, dienen ähnliche Vorrichtungen. Der Heber findet aber auch im Grossen Anwendung z. B zum Ableiten des Wassers aus Sümpfen und Tiefen. Er besteht dann aus drei gusseisernen Röhren, dem steigenden Schenkel *AB* (Fig. 348), dem (horizontalen) Mittelstücke *BC*

Fig. 348.



und dem fallenden Schenkel *CD*. An der Einmündung *A* befindet sich der Regulirungsschieber *S*, bei der Ausmündung *D* ist eine Abzugsrinne *EF* mit einem Klappenventil *E*. Auf ein Mittelstück *BC* ist ein mit einem Stöpsel luftdicht zu verschliessendes Mundstück *K* angebracht. Man schliesst zunächst den Schieber *S* und das Ventil *E*, und führt durch *K* Wasser ein, bis der Heber gefüllt ist. Dann wird *K* verschlossen, *S* und *E* geöffnet, das Wasser des Teiches folgt dann dem fallenden Strome nach und gelangt in *E* zum Ausflusse. Es wird aber dieser Ausfluss nur so lange dauern, als der Spiegel *H* im Speisereservoir über der Ausmündung *E* sich befindet. Dies sieht sich leicht ein, wenn man bedenkt, dass die Geschwindigkeit des Wassers in *E* gleich $\mu\sqrt{2gh}$ ist, wo μ den Ausflusscoefficienten, h die Druckhöhe angibt; steht also *H* in gleicher Höhe mit *E*, so ist $h = 0$, also auch die Geschwindigkeit gleich 0.

Auch darf die Höhe $KO = h_1$ des Mittelstücks über dem Wasserspiegel *H* nicht die dem Atmosphärendrucke entsprechende Wasserhöhe von 33 Fuss geben, weil sonst das Wasser nur bis zu dieser Höhe emporsteigen würde. Jedenfalls ist der Druck des Wassers im Mittelstück kleiner als der Atmosphärendruck. Es wird sich also die im Wasser enthaltene Luft doch nach und nach dermaassen ansammeln, dass der Ausfluss aufhört. Diese wird dann von Zeit zu Zeit durch Schliessen der Mündungen und Nachfüllen mit Wasser entfernt.

Die Bewegung des Wassers im Saugheber ergibt sich aus der Bewegung desselben in Leitungsröhren überhaupt. Sei h die Druckhöhe RE, l die Axenlänge des Hebers, d seine Weite, v die Ausflussgeschwindigkeit, ζ der Reibungscoefficient des Wassers, ζ' der Widerstandscoefficient für den Eintritt in den Heber, ζ'', ζ''' die Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch die Knieröhre, so ist bekanntlich:

$$2gh = v^2\left(1+\zeta\frac{l}{d}+\zeta'+\zeta''+\zeta'''\right)$$

also die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers:

$$v=\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(1+\zeta\frac{l}{d}+\zeta'+\zeta''+\zeta'''\right)}}.$$

Das Ausflussquantum in der Secunde:

$$Q=\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2gh}{1+\zeta\frac{l}{n}+\zeta'+\zeta''+\zeta'''}}.$$

Sei k die Höhe KO des Mittelstücks über dem Spiegel H, z die zugehörige Druckhöhe, k die Wasserbarometerhöhe, l_1 die Axenlänge von ABK, d. h von der Einmündung bis zum Scheitel des Hebers, so ist:

$$k-h_1-z=\left(1+\zeta\frac{l_1}{d}+\zeta'+\zeta''\right)\frac{v^2}{2g},$$

also die Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{k-h_1-z}{1+\zeta\frac{l_1}{d}+\zeta'+\zeta''}.$$

Setzt man den sich hieraus ergebenden Werth von v dem vorhergehenden gleich, so ergibt sich daraus:

$$z=k-h_1-\left\{\frac{1+\zeta\frac{l_1}{d}+\zeta'+\zeta''}{1+\zeta\frac{l}{d}+\zeta'+\zeta''+\zeta'''}\right\}k.$$

Ist die Mittelröhre sehr lang, so ist l_1 nahe gleich l, und in diesem Falle also:

$$z=k-h-h_1.$$

Das stetige Fliessen macht es nöthig, dass nicht allein h sondern auch v positiv sei. Es muss also sein:

$$\frac{1+\zeta\frac{l_1}{d}+\zeta'+\zeta''}{1+\zeta\frac{l}{d}+\zeta'+\zeta''+\zeta''}k+h_1<k,$$

oder wenn die Mittelröhre lang ist:

$$h+h_1<k.$$

D. h. die Höhe über dem Wasserspiegel muss kleiner als die Wasserbarometerhöhe d. h. als 33 Fuss sein.

Saughöhe siehe Saugpumpe.

Saugpumpe (Hydrodynamik).

1) Verschiedene Arten von Pumpen (*pompe, pump*).

Die Saugpumpe dient dazu, das Wasser mittels eines auf- und niedergehenden Kolbens durch hydrostatischen Druck in die Höhe zu heben. Sie hat folgende Haupttheile:

1) den Pumpencylinder, (Pumpenstiefel, Kolbenrohr),

2) den im Cylinder beweglichen Kolben,

3) die Ventile, welche die Communication zwischen Cylinder und Pumpenröhren abwechselnd zulassen und aufheben.

Der Ventile sind zwei, das Admissions- und das Emissionsventil.

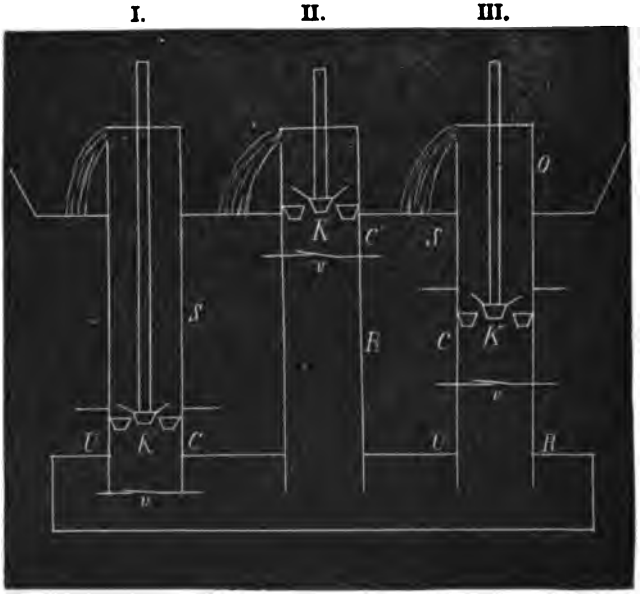
Je nachdem das eine dieser Ventile an dem Kolben sitzt oder nicht, sind die Saugpumpen zu theilen in solche mit massivem und solche mit ventilirtem (durchlöchertem) Kolben.

Ein Pumpenrohr, Steigröhre genannt, führt das Wasser von dem Cylinder fort, das andere führt das Wasser in den Pumpenkörper und heisst Einfallsröhre oder Saugröhre, je nachdem Ersteres fallend oder steigend eingeführt wird.

Wenn man den Cylinder unmittelbar in das Unterwasser setzt, kann das zweite Rohr, wenn man ihn in das Oberwasser münden lässt, das erstere wegfallen. Pumpen, bei denen das Saugrohr wegfällt, heissen Hubpumpen, wenn das Steigerohr über dem Kolben mündet; geschieht es unter dem Kolben, so heisst die Pumpe Druckpumpe. Eine Pumpe ohne Steigerohr heisst Saugepumpe (im engeren Sinne), sind beide Rohre vorhanden, so heisst die Pumpe Saug- und Hub- oder Saug- und Druckpumpe.

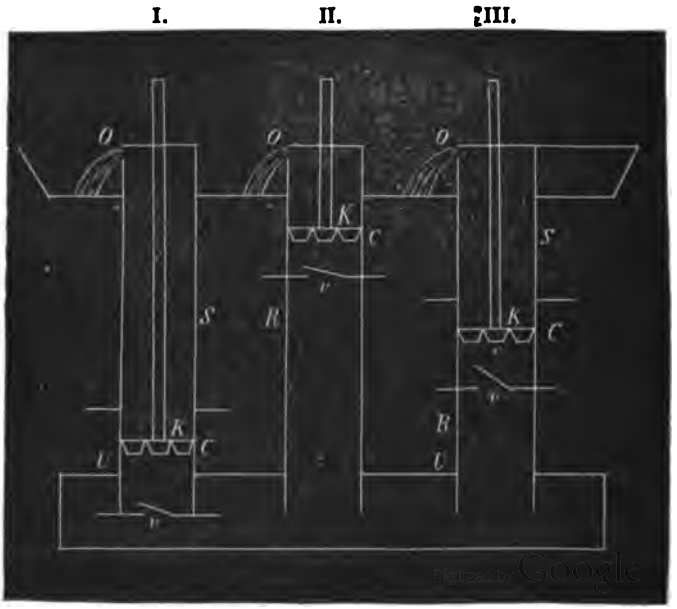
Die Figuren (Fig. 349 u. 350) stellen das Spiel der Ventile vor. In I. ist eine Hubpumpe, in II. eine Saugpumpe, in III. eine Saug- und Hubpumpe gegeben. C ist das Kol-benrohr, K der mit zwei Ventilen versehene Kolben, V das Saugventil, S das Steigerohr (es fehlt also in II.), R das Saugrohr (fehlt in I.). In der ersten Figur hebt sich der Kolben, der Luftdruck auf das Unterwasser öffnet das Ventil C. Das Wasser unter dem Kolben vermehrt sich also, während ein Theil des über

Fig. 849.



dem Kolben befindlichen zugeschüttet schliessen. Das zwischen Saugeventil und wird. Beim Niedergange in der zweiten Kolben befindliche Wasser steigt über Figur öffnet der Luftdruck die Kolben- den Letzteren empor, und füllt den freien ventile', während sich die Saugventile Raum daselbst. Nur so viel Wasser

Fig. 350.



fliesst dabei aus, als die Kolbenstange verdrängt.

Sei jetzt k die Wasserbarometerhöhe (33 Fuss), h_1 die Wasserhöhe über dem Kolben, h_2 die Höhe des Wassers vom Unterwasserspiegel bis zum Kolben, h die Gesammthöhe des Wassers, F der Flächeninhalt des Kolbendurchschnittes, γ die Dichtigkeit des Wassers, R_1 der Druck der Luft und des Wassers von oben nach unten, R_2 der Druck von unten nach oben. Beim Aufgange ist dann:

$$R_1 = F(k + h_1)\gamma, \quad R_2 = F(k - h_2\gamma).$$

Die Kraft zum Aufziehen P ist dann die Druckdistanz:

$$P = F(h_1 + h_2)\gamma = Fh\gamma,$$

d. h.:

„Die Kraft zum Aufziehen ist constant, weder vom Kolbenstande noch vom atmosphärischen Drucke abhängig, übrigens dem Gewicht einer Wassersäule gleich, welche den Kolbendurchschnitt zur Basis und die Gesammthöhe zur Höhe hat."

Das Wasser kann übrigens dem Kolben so lange folgen, als h_2 kleiner als k ist.

Das während des Aufganges ausgegossene Wasserquantum V ist offenbar

$$V = Fs,$$

wenn s der Kolbenweg ist.

Beim Niedergange ist der Druck über und unter dem Kolben derselbe, also die dazu nöthige Kraft gleich Null, wenn man von den Nebenhindernissen absieht.

Die mechanische Arbeit A, welche zum Heben nöthig ist, wird also sein:

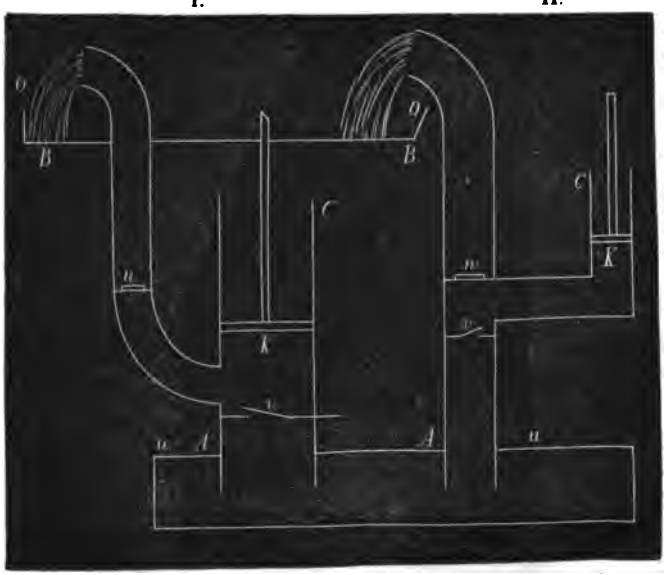
$$A = Ps = Fh\gamma s = V\gamma h = Gh,$$

wo $G = V\gamma$ das Gewicht des gehobenen Wassers ist.

Wir haben noch auf die Pumpen mit Massivkolben einzugehen.

Beim Aufgange (Fig. 351) bildet in I. die Saugröhre, die Fortsetzung des Pumpencylinders, in II. findet dies mit der Steigeröhre statt. Das Saugventil V ist geöffnet, das Steigeventil W geschlossen. Beim Niedergange (Fig. 352) findet das Entgegengesetzte statt. Bei der ersten Thätigkeit wird der durch den Aufgang des Kolbens freie Theil des Cylinders mit Wasser gefüllt, welches beim Niedergange der Kolben in die Steigeröhre drückt, und zum Ausflusse bringt. Behalten wir die obigen Bezeichnungen bei, so ist während des Aufgangs:

Fig. 351.



$$R_1 = Fk\gamma, \quad R_2 = (Fk - h_1)\gamma.$$

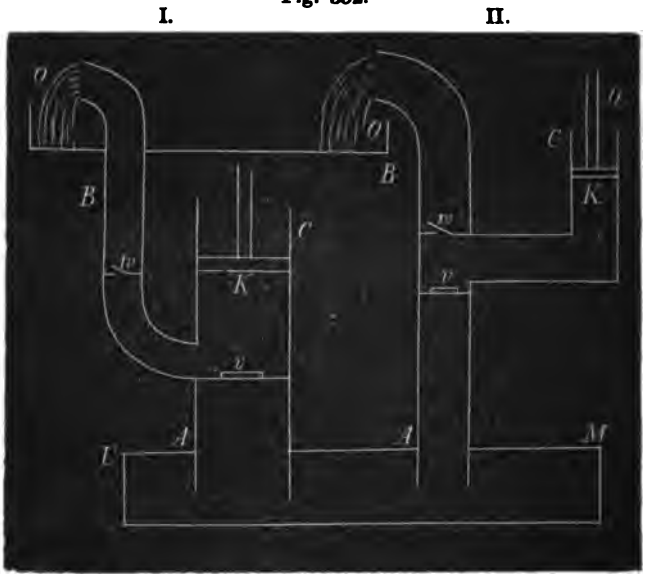
Also die zum Aufziehen nöthige Kraft:

$$P_1 = R_1 - R_2 = Fh_1\gamma.$$

R_1 ist der Druck der Atmosphäre von

Digitized by Google

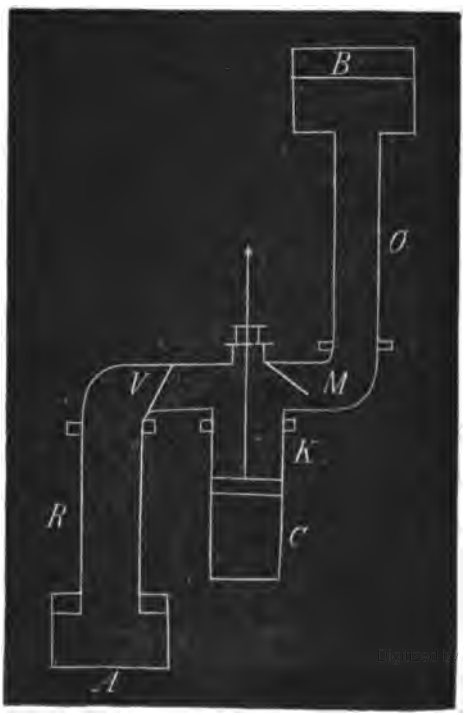
Fig. 352.



oben nach unten, R_2 der des Wassers und der Atmosphäre von unten nach oben.

Sei noch der Druck des Wassers von unten nach oben gleich R_3, so ist während des Niederganges:

Fig. 353.



Digitized by Google

$$R_2 = F(k + h_2)\gamma$$

und also die Kraft zum Niederücken des Kolbens:

$$P_2 = R_2 - R_1 = Fh_2\gamma.$$

Die Höhen h_1 und h_2 sind veränderlich, folglich auch P_1 und P_2.

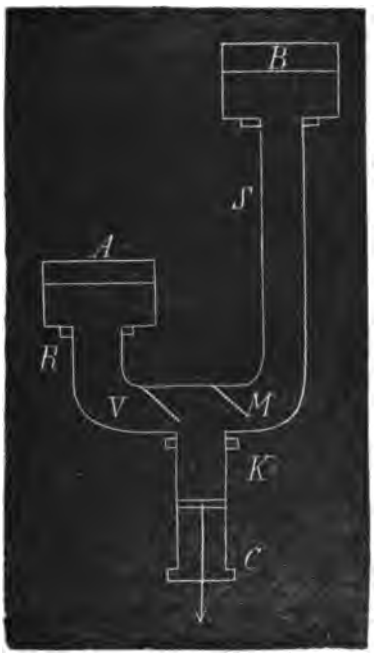
Nimmt man für h_1, h_2 die entsprechenden Höhen bei halber Kolbenerhebung und Kolbensenknng, so hat man aber auch Mittelwerthe von P_1 und P_2. Ist s der ganze Kolbenhub, so kann man dann für die Arbeit setzen:

$$A = P_1 s + P_2 s = Fsh\gamma = Vh\gamma = Gh$$

ganz wie oben.

Es gibt auch Cylinder, deren offenes Ende nach unten gerichtet ist. Bei denselben ist die Kolbenstange entweder durch eine Stopfbüchse zu führen (Fig. 353) oder nach unten zu richten (Fig. 354) die erste Abbildung ist die einer

Fig. 354.



Sang- und Druckpumpe, R das Saugrohr, V das Saugventil, S das Steigerohr, M das Steigventil. Beim Niedergange des Kolbens wird Wasser angesaugt, beim Aufgange in das Steigerohr gedrückt.

Die andere Figur ist die einer Druckpumpe, bei niedergehenden Kolben, R das Einfallrohr. Der Kolben ist hier unter der Oberfläche des Unterwassers, weshalb der Abstand h_1 negativ ist. Man hat also:

$$P_1 = -Fh_1\gamma,$$
$$P_2 = Fh_2\gamma,$$
$$A = Fsh\gamma = Vhg,$$

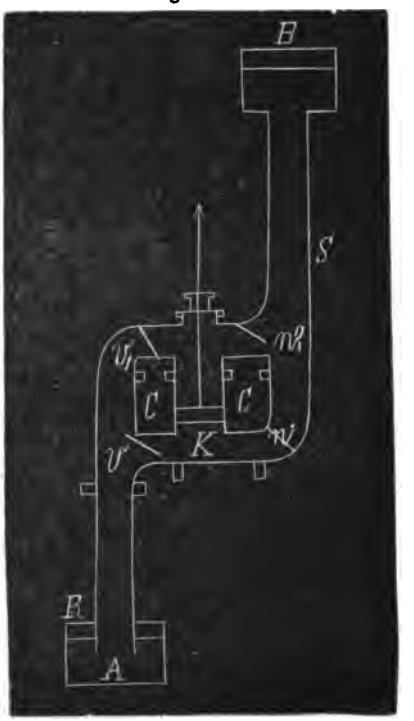
wo $h = h_2 - h_1$ gesetzt ist.

Bei der Saugdruckpumpe dagegen gelten die obigen Formeln.

Ein stetiger Ausfluss wird durch eine doppelwirkende Pumpe erzielt.

Dieselbe hat einen Pumpencylinder C, der an beiden Enden mit der Saugröhre R und der Steigeröhre S in Verbindung ist (Fig. 355), wozu also vier

Fig. 355.



Communicationsröhren, zwei Saugventile V, V_1 und zwei Steigeventile W, W_1 nöthig sind. Bei einer Kolbenhebung öffnet sich auf einer Seite das Saugventil V und auf der andern das Steigeventil W_1, bei der Senkung öffnen sich V_1 und W, es wird also gleichzeitig Wasser angesaugt und ausgetrieben.

Dasselbe kann man durch zwei einfache Pumpen erreichen, von denen der eine Kolben heraufgeht, wenn der an-

dere heruntergeht. Endlich kann man an den Pumpen mit Ventilkolben eine dicke Kolbenstange anbringen. Ist deren Querschnitt F_1, so wird beim Niedergang das Quantum $F_1 s$ verschüttet, beim Aufgange $(F-F_1)s$. Beide Ausdrücke werden gleich, wenn man $F_2 = \frac{1}{2}F$ nimmt.

Sei dann die Kraft beim Aufgehen P_1, beim Niedergehen P_2, so ist:

$$P_1 = Fh_1\gamma - (F-F_1)h_2\gamma = Fh\gamma - F_1h_2\gamma$$
$$P_2 = Fh_2\gamma - (F-F_1)h_2\gamma = F_1h_2\gamma.$$

Also für $F_1 = \frac{1}{2}F$:

$$P_1 = F(h - \tfrac{1}{2}h_2)\gamma, \quad P_2 = \tfrac{1}{2}Fh_2\gamma.$$

Für die einfache Hubpumpe ist $h^2 = h$, $h_1 = 0$ zu setzen, also:

$$P_1 = P_2 = \tfrac{1}{2}Fh\gamma.$$

2) Ueber die Saughöhe.

Die Saughöhe darf zunächst nicht die des Wasserbarometers übersteigen. Dies reicht indess noch nicht hin. Damit bei jedem Kolbenspiel ein Quantum Fs angesaugt wird, muss der Cylinder stets mit Wasser gefüllt sein. Es darf also die Kolbengeschwindigkeit beim Aufsteigen nicht grösser als die des aufsteigenden Wassers sein.

Sei k wieder die Wasserbarometerhöhe, h_0 die des tiefsten Kolbenstandes über dem Unterwasser, x der veränderliche Kolbenweg, der von h_0 bis v wächst, so ist die auf die Bewegung des Wassers verwendete Druckhöhe: $k - h_0 - x$. Ist v die Geschwindigkeit des Wassers in der Kolbenröhre, v_1 die in der Saugröhre, v_2 die des durch den Querschnitt F_2 der Ventilöffnung fliessenden Wassers, d der Durchmesser der Kolbenröhre, d_1 der Saugröhre, l_1 die Länge derselben, ζ der Coefficient der Wasserreibung, α der Contractionscoefficient, so ist nach dem hydraulischen Gesetze:

$$k - h_0 - x = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_2-v)^2}{2g} + \zeta\frac{l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}$$
$$= \frac{v^2}{2g}\left[\left(1 + \frac{F}{\alpha F_2} - 1\right)^2 + \zeta\frac{l_1}{d_1}\left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right],$$

also

$$v = \mu\sqrt{2g(k - h_0 - x)}$$

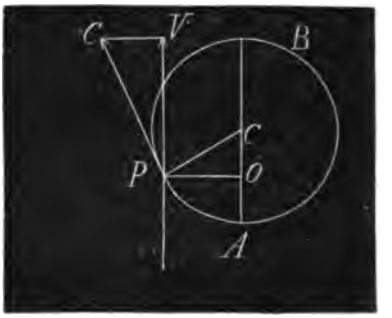
wo μ den Ausflusscoefficienten

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_2} - 1\right)^2 + \zeta\frac{l_1}{d_1}\left(\frac{d}{d_1}\right)^4}}$$

vorstellt. Diese Geschwindigkeit darf also nicht kleiner als die des aufsteigenden Kolbens sein.

Wird die Pumpe durch eine Kurbel bewegt, so sei $r = CA$ der Kurbelarm (Fig. 356) und dieser ist gleich dem halben Kolbenhube s, also $r = \frac{s}{2}$, die dem Kolbenwege $AO = x$ entsprechende Kolbengeschwindigkeit $Pv = v_1$, ist gleich der Projection der Warzengeschwindigkeit $Pc = c_1$, parallel zur Bewegungsrichtung AB des Kolbens

Fig. 356.



$$OP = \sqrt{x(s-x)},$$

also:

$$\frac{v}{c} = \frac{OP}{CP} = \frac{2\sqrt{x(s-x)}}{s}.$$

Soll also die Kolbengeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit des aufsteigenden Wassers sein, so ergibt sich:

$$x^2 - \left(1 + \mu^2\frac{2g}{c^2}\frac{s}{4}\right)sx$$
$$= -\mu^2 2g\frac{s^2}{4}(k - h_0),$$

also:

$$x = \left(1 + \mu^2\frac{2gs}{4c^2}\right.$$
$$\left. \pm\sqrt{\left[1 + \mu^2\frac{2gs}{4c^2} - \frac{\mu^2}{c^2}(k-h_0)2g\right]}\right)\frac{s}{2}.$$

Damit überhaupt die Trennung unmöglich sei, muss die Wurzel imaginär sein. also:

$$\frac{2g\mu^2}{c^2}(k - h_0) > \left(1 + \mu^2\frac{2sg}{4c^2}\right)^2,$$

woraus sich dann für die Saughöhe ergibt:

$$h_0 < k - \frac{s}{2} - \frac{c^2}{2g\mu^2} - \frac{2g\mu^2}{c^2}\left(\frac{s}{4}\right)^2,$$

wofür auch gesetzt werden kann, wenn t die Zeit des Kolbenschubes, also $0 = \frac{\pi s}{2t}$ ist:

$$h_0 < k - \frac{s}{2} - \frac{s}{2g}\left(\frac{\pi s}{2\mu t}\right)^2 - 2g\left(\frac{\mu t}{2\pi}\right)^2.$$

Digitized by Google

Ist t sehr klein, also die Kolbenbewegung sehr schnell, so wird:

$$h_e < k - \frac{s}{2} - \frac{1}{2g}\left(\frac{\pi s}{2\mu t}\right)^2.$$

Ist noch:

$$h_e = k - \frac{s}{2} - \frac{c^2}{2g\mu^2} - \frac{2g\mu^2}{c^2}\left(\frac{s}{4}\right)^2,$$

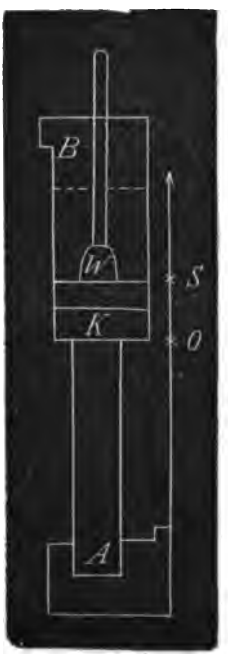
so wird der Kolbenweg

$$x = \left(1 + \frac{2g\mu^2 s}{4c^2}\right)\frac{s}{4},$$

also höchstens $x = s$ sein. Ein Lostrennen tritt also dann auch in diesem Grenzfalle nicht ein, wenn $\frac{1 + 2g\mu^2 s}{4c^2} > 2$ ist, also wenn $\frac{c^2}{2g} < \frac{\mu^2 s}{4}$ ist. Hieraus ergibt sich aber $h_e < k - s$.

Die Saughöhe wird indess noch vermindert durch den sogenannten schädlichen Raum, d. h. durch den Raum zwischen dem tiefsten Kolbenstamme und dem Saugventil, da sich in demselben Luft ansammelt und dem Aufsaugen entgegenwirkt. Stehe das Wasser in der Saugröhre bis zum Saugventil W, und möge die im schädlichen Raume WK (Fig 357), dessen Höhe gleich σ sein

Fig. 357.



soll, zurückgebliebene Luft den Druck k der äusseren Luft haben. Ist nun der Kolbenhub s erreicht, so ist nach dem Mariotteschen Gesetze der Spannung k_1 der zurückgebliebenen Luft gleich $\frac{\sigma k}{s + \sigma}$. Die Wassersäule AW drückt mit Kraft $k - h_e$ von unten, es muss also, damit das Ventil sich öffne, sein $k = h_e > k_1$, also:

$$h_e < k - \frac{\sigma k}{s + \sigma}$$

oder

$$h_e < \frac{sk}{s + \sigma}.$$

Diese Bedingung ist also immer zu erfüllen. Je grösser der schädliche Raum σ ist, desto kleiner muss die Saughöhe h_e sein. Es kann aber der erstere nicht unter zwei bis drei Zoll genommen werden, um dem Oeffnen des Saugventils keine Hindernisse zu bereiten.

Sei $h = h_e + \sigma + s$ die ganze Förderungshöhe der Saugpumpe, so ist:

$$h_e(h - h_e) < sk,$$

und da $h_e(h - h_e)$ einen grössten Werth für $h_e = \frac{h}{2}$ hat,

$$\frac{h^2}{4} < sk \text{ oder } s > \frac{h^2}{4k}.$$

Der Kolbenhub muss also grösser sein, wenn die Förderhöhe wächst.

3) Ueber die Beschaffenheit der Pumpentheile.

Die Kolbenröhre ist in der Regel aus Gusseisen, nur bei rohen Anlagen aus Ahorn- und Eichenholz. Die Weite schwankt von wenigen Zollen bis auf 1½ Fuss, bei sehr grossen Anlagen selbst bis zu 7 Fuss. Die Wandstärke gibt die Formel:

$$e = 0{,}0025\,pd + 1{,}25$$

in Zollen, wo d die Röhrenweite, p den Druck in Atmosphären anzeigt. Bei gewöhnlichen Saugepumpen, ist $e = 1{,}25$ zu setzen, da die drückende Wassersäule nur einige Zoll Höhe hat.

Die Saug- und die Steigröhren sind aus Metall oder Holz angefertigt, im letzteren Falle mit eisernen Ringen umgeben. Die Weite ist ⅓ bis ¼ Kolbendurchmesser. Für die Wandstärke hat man die Erfahrungsformel:

$$e = \mu pd + e_1$$

wo p der innere Ueberdruck (in Atmo-

Digitized by Google

sphären), d die Röhrenweite ist. Soll e in Zollen gegeben sein, so ist zu setzen:

	μ	e_1
für Schmiedeeisen . . .	0,0009	$\frac{1}{6}$
„ Gusseisen	0,0025	$\frac{1}{2}$
„ Blei	0,0040	$\frac{1}{3}$
„ Holz , ...	0,0050	2

Die Einmündung der Saugeröhre ist abzurunden, um die Contraction des eintretenden Wassers zu vermeiden. An das untere Ende der Saugeröhre wird oft, um den Unrath abzuhalten, ein Seiherkasten angebracht.

Die Ventile befinden sich in den Ventilkammern, welche mit den Röhren ein Ganzes bilden, und mit verschliessbaren Seitenöffnungen versehen sind, welche zur Untersuchung der Ventile dienen. Die Ventile können ferner einfach oder zusammengesetzt sein. Im ersteren Falle sind es Klappventile, die sich wie eine Fallthüre um ihre Angeln drehen, oder Hubventile, die sich in ihrer Axe heben oder senken. Nach ihrer Gestalt heissen sie Kegel- oder Kugelventile. Muschelventile sind hohle Kegelventile.

Sei $r = CD$ bei einem Hubventil der Halbmesser der Ventilkammer (Fig. 358)

Fig. 358.

oder Kolbenröhre, $r_1 = CB$ der mittlere Halbmesser eines Hubventils BB, oder der Apertur AA, s der Ausschub AB des Ventils, so ist der Inhalt der Mündung AA gleich πr_1^2, die Ringfläche zwischen DD und BB $\pi (r^2 - r_1^2)$ und die Cylinderfläche $ABBA = 2\pi r_1 d$. Damit das Wasser durch diese drei Querschnitte mit gleicher Geschwindigkeit gehe, ist zu setzen:

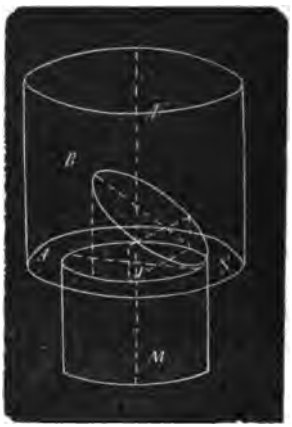
$$\pi r_1^2 = \pi (r^2 - r_1^2) = 2\pi r_1 s,$$

woraus sich ergibt:

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, r, \quad s = \frac{r}{\sqrt{8}} = 0{,}3535\, r.$$

Beim Klappenventil BS (Fig. 359) sei $ASB = \beta$ der Oeffnungswinkel, die Pro-

Fig. 359.



jection des Ventils im Röhrenquerschnitt ist dann eine Ellipse mit den Halbaxen r, und $r_1 \cos\beta$, die mittlere Oeffnungshöhe EC kann gleich $r_1\beta$ gesetzt werden. Es sind also die Querschnitte des Wasserstroms bezüglich:

$$\pi r_1^2, \quad \pi r^2 - \pi r_1^2 \cos\beta, \quad 2\pi r_1^2 \beta$$

woraus sich ergibt:

$$\beta = \tfrac{1}{2} = 28\tfrac{1}{2}^\circ,$$

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{1 + \cos\beta}} \text{ oder: } r_1 = 0{,}730\, r.$$

Hieraus folgt, dass bei beiden Ventilarten der mittlere Halbmesser über sieben Zehntel des Halbmesser der Kolbenröhre β, der Ausschub eines Hubventils die Hälfte des Ventildurchmessers, der Ausschlag des Klappventils $28\frac{1}{2}^\circ$ haben muss. Bei grösseren Anlagen bedient man sich oft der doppelsitzigen Ventile. Das glockenförmige Ventil BDC (Fig. 360) ruht mit der weiteren Mündung BB auf einem ringförmigen Sitze AA, mit der engeren auf dem tellerförmigen Sitze FF. Bei der Oeffnung sind also zwei ringförmige Mündungen $ABBA$, $FEEF$ vorhanden.

Seien $r = CD$, $r_1 = CE$ die Halbmesser derselben, $S = AB = FE$ die Schubhöhe, so ist der Inhalt der Querschnitte dieser Mündungen:

$$F = 2\pi s (r + r_1).$$

Digitized by Google

Fig. 360.

Ist s die Differenz zwischen dem Wasserdrucke unter und über dem Ventil, gemessen durch die Höhe einer Wassersäule, so hebt das Wasser das Ventil mit der Kraft $\pi(r_1^2 - r^2)s\gamma$, (wo γ die Dichtigkeit des Wassers vorstellt) es muss also dieser Ausdruck grösser als das Ventilgewicht sein. Uebrigens ist bei Saugpumpen $z = h - h_0$,

Die massiven Kolben bestehen entweder aus dem niedrigen Cylinder (Kolbenstock) und den ihn umgebenden Liderungen, oder aus einem ungeliderten Cylinder (Mönch). Letztere werden durch die im Pumpencylinder feste Liderung abgedichtet. Der Kolbenstock ist aus Buchenholz, Eisen oder Bronce, die Liderung besteht aus Lederstreifen, bei den Warmwasser- und Luftpumpen der Dampfmaschinen aus Hanfzöpfen. Die Breite des Liderungskranzes ist in Zollen $2 + 0{,}1\,d$, zu nehmen, wo d der Kolbendurchmesser ist.

Die Ventilkolben haben Kolbenstücke, die in der Axenrichtung durchlocht und mit Klappventilen versehen sind. Der Durchgangsöffnung ist ein möglichst grosser Querschnitt zu geben. Wird das Ende der Kolbenstange nicht gegabelt, sondern durch den Kolbenstock geführt, so hat letzterer zwei Durchgänge und zwei Ventilklappen.

4) Ueber die Nebenhindernisse.

Ist der Kolbenquerschnitt gleich F, und der Kolbenhub gleich S, so wird bei einer einfach wirkenden Pumpe jedem Kolbenspiel das Quantum $V = Fs$, also wenn n Spiele in der Minute stattfinden, das Quantum:

$$Q = \frac{nFs}{60} = \frac{Fv}{2},$$

in der Secunde gefördert, wo $v = \frac{2ns}{60}$ die mittlere Kolbengeschwindigkeit vorstellt. Bei der doppelt wirkenden Pumpe ist:

$$Q = \frac{2nFs}{60} = Fv.$$

Hierbei ist aber von den Nebenhindernissen abgesehen. Das geforderte Quantum ist in der That geringer. Weil Liderung und Ventile nicht völlig schliessen, und die letztern nicht momentan sondern nur allmälig zurückfallen, wird auch ein Theil des gehobenen Wassers zurückfallen.

Ist die Förderhöhe h, so wird dies fallende Wasser die Geschwindigkeit $w = \sqrt{2gh}$ haben. Ist also f der Querschnitt einer kleinen von der Liderung oder einem Ventil gelassenen Oeffnung, so geht ein Quantum $q = fw = f\sqrt{2gh}$ in der Secunde verloren, und es ist

$$\frac{q}{Q} = \frac{f\sqrt{2gh}}{Fv}.$$

Also der relative Verlust ist desto grösser, je kleiner F und v und je grösser h ist.

Die Wassermenge, welche während des Zufallens der Ventile verloren geht, ist folgendermassen zu bestimmen.

Sei V_1 das Volum, ε das specifische Gewicht eines Körpers, der sich unter Wasser befindet, so ist seine Acceleration

$$\frac{V_1\gamma(\varepsilon - 1)}{V_1\gamma\varepsilon}g,$$

nämlich gleich der Kraft durch die Masse, also wenn p diese Acceleration vorstellt:

$$p = g\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}.$$

Ist also s_1 die Fallhöhe des Ventils, t_1 die Fallzeit, so hat man:

$$s_1 = \frac{pt_1^2}{2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{gt_1^2}{2}$$

oder:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\varepsilon s^1}{(\varepsilon - 1)g}};$$

Sei noch F_1 der Querschnitt der Durchgangsöffnung und setzt man für die Fallzeit t_1 den mittleren Werth $\frac{1}{2}F_1$ voraus, so ist das zurückfallende Wasserquantum während des Ventilspiels:

$$V_1 = \tfrac{1}{2}F_1wt_1 = F_1\sqrt{\frac{\varepsilon hs_1}{\varepsilon - 1}}.$$

also wenn q_1 dies Quantum für die Secunde ist:

$$\frac{q_1}{Q} = \frac{V_1}{V} = \frac{F_1}{Fs}\sqrt{\frac{\varepsilon hs_1}{\varepsilon - 1}},$$

Digitized by Google

Der Verlust wächst mit dem Verhältnisse der Querschnitte der Förderhöhe und dem Ventilhube, aber verhält sich umgekehrt wie der Kolbenhub. Um die Verluste in Rechnung zu bringen, setzt man gewöhnlich $V = \mu Fs$, und nimmt $\mu = 0{,}85$ an. μ heisst der Ausgusscoefficient. Es ist daher für einfach wirkende Pumpen:

$$Q = 0{,}425\, Fv, \quad F = 2{,}353\, \frac{Q}{v}$$

und man hat für den Kolbendurchmesser:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 1{,}1284\sqrt{F} = 1{,}781\sqrt{\frac{Q}{v}}\ \text{(Fuss)} = 20{,}77\sqrt{\frac{Q}{v}}\ \text{(Zoll)}.$$

Bei doppelt wirkenden Pumpen ist:

$$Q = 0{,}85\, Fv, \quad F = 1{,}1765\, \frac{Q}{v}$$

$$d = 1{,}1284\sqrt{F} = 1{,}2239\sqrt{\frac{Q}{v}}\ \text{(Fuss)} = 14{,}69\sqrt{\frac{Q}{v}}\ \text{(Zoll)}.$$

Es ist auch jetzt die zur Bewegung der Pumpen nöthige Kraft unter Berücksichtigung der Nebenhindernisse zu bestimmen. Es war bei den Pumpen mit Ventilkolben die Kraft zum Aufziehen ohne Berücksichtigung der Nebenhindernisse: $P = Fh\gamma$. Zunächst wird nur der Stulp mit einer Wassersäule von der Höhe $h_1 + h_2 = h$ an die innere Wand der Kolbenröhre gedrückt, es ergibt sich also die Kolbenreibung:

$$W = 4\varphi\, \frac{b}{d}\, Fh\gamma,$$

wo φ der Reibungscoefficient, b die Breite des an die Kolbenröhre anliegenden Theiles des Liderungstulpes und d den Durchmesser der Kolbenröhre anzeigt. Es ist $\varphi = 0{,}25$.

Sei ferner ζ der Widerstandscoefficient für den Eintritt des Wassers in die Saugröhre, d_1 die Weite der letztern, v_2 die Geschwindigkeit beim Eintritt, v_1 die des aufsteigenden Kolbens, so ist die Widerstandshöhe für den Eintritt:

$$z_0 = \frac{\zeta v_2^2}{2g} = \zeta\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Ist die Mündung cylindrisch und gut abgerundet, so ist $\zeta_0 = 0{,}100$; ist sie nicht abgerundet, $\zeta_0 = 0{,}505$.

Die Widerstandshöhe der Reibung des Wassers in der Saugröhre ergibt sich:

$$z_1 = \zeta_1\, \frac{l_1}{d_1}\, \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_1\, \frac{l_1}{d_1}\, \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Hier ist l_1 die Länge der Röhre, $\zeta_1 = 0{,}024$ der Widerstandscoefficient.

Endlich ist die Widerstandshöhe für den Durchgang durchs Saugventil:

$$z_2 = \zeta_2\, \frac{v_1^2}{2g},$$

wo sich ζ_2 ergibt, wenn α der Contractionscoefficient, F, F_2 die Querschnitte des Kolbens und der Ventilöffnung sind:

$$\zeta_2 = \left(\frac{F}{\alpha F_2} - 1\right)^2.$$

Die Reibung des Wassers in der Kolbenröhre, deren Länge gleich l sei, wird:

$$z_3 = \zeta_3\, \frac{l}{d}\, \frac{v_1^2}{2g}.$$

Endlich ist für die Steigeröhre, wo l_2 die Länge, d_2 die Weite, ζ_4 der Reibungscoefficient sein soll:

$$z_4 = \zeta_4\, \frac{l_2}{d_2}\, \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_4\, \frac{l_2}{d_2}\, \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Die Erzeugung der Geschwindigkeit v_2 des Wassers in die Steigeröhre verlangt endlich noch die Kraft:

$$z_5 = \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Alle diese Widerstände repräsentiren nun die hydraulische Last:

$$W = (z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)\, Fh\gamma = \left[\zeta_2 + \zeta_3\, \frac{l}{d} + \left(\zeta + \zeta_1\, \frac{l_1}{d}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \left(1 + \zeta_4\, \frac{l_2}{d_2}\right)\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \frac{v_1^2}{2g} F\gamma$$

und die Gesammtkraft zum Aufziehen des Ventilkolbens:

Digitized by Google

$$P_1 = \left[\left(1+4\varphi\frac{b}{d}\right)h+W\right]F\gamma$$
$$= \left[\left(1+4\varphi\frac{b}{d}\right)h+k\frac{v_1^2}{2g}\right]F\gamma$$

wenn $k=\frac{W}{F\gamma}$ gesetzt wird.

Beim Niedergange ist das Kolbenventil geöffnet und das Saugventil geschlossen.

Werden die Nebenhindernisse nicht berücksichtigt, so ist die Kraft Null. Ist die Kolbenliderung vollständig elastisch, so verschwindet auch die Kolbenreibung, da Wasser am Kolbenumfange von unten nach oben fliesst, und die Liderung vom Röhrenumfange abdrückt. Es ist also die Kraft nöthig, um dem durch das Kolbenventil strömenden Wasser die Geschwindigkeit v_4 zu geben. Es soll hier F der Querschnitt der Ventilöffnung sein, und es muss dann die durchströmende Wassermenge, gleich der sein, welche der Kolbenstock mit seinem Querschnitte $F-F_2$ verdrängt, also:

$$F_2 v_4 = (F-F_2)v_2,$$
$$v_4 = \frac{F-F_2}{F_2}v_2;$$

v_2 ist die Geschwindigkeit des niedergehenden Kolbens. Die Geschwindigkeitshöhe ist:

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{F-\alpha_2 F_2}{\alpha_2 F_2}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g},$$

wo α_2 der durch Erfahrung zu bestimmende Contractionscoefficient ist. Die Kraft beim Niedergange ist:

$$P_2 = k_1 \frac{v_2^2 F\gamma}{2g},$$

wo

$$k_1 = \left(\frac{F-\alpha_2 F_2}{\alpha_2 F_2}\right)^2$$

gesetzt wurde.

Bei 30° Oeffnung der Klappe, und wenn $\frac{F_2}{F}$ ungefähr gleich $\frac{1}{2}$ ist, erhält man $k_1 = 30$. Das Gewicht des Kolbens kann ausser Acht bleiben, eben so wie der Auftrieb des Wassers, da diese Grössen beim Aufziehen und Abziehen sich vollständig compensiren.

Sei A die mechanische Arbeit beim Kolbenspiel, so ist:

$$A = (P_1+P_2)s = \left[\left(1+4\varphi\frac{b}{d}\right)h+\left(k\frac{v_1^2}{2g}+k_1\frac{v_2^2}{2g}\right)\right]V\gamma,$$

wo V das Hubwasserquantum Fs ohne Rücksicht auf die Nebenhindernisse anzeigt. Macht die Pumpe n Spiele in der Minute, so ist die Arbeit L in der Secunde:

$$L = \left[\left(1+4\varphi\frac{b}{d}\right)h+k_1\frac{v_1^2}{2g}+k_1\frac{v_2^2}{2g}\right)\frac{n}{60}V\gamma = \frac{anV\gamma}{60} = aQ\gamma\Big],$$

wo a die in der Klammer enthaltene Grösse, $Q_1 = 0{,}85Q$ gesetzt, Q die sich ohne Berücksichtigung der Nebenhindernisse ergebende Hubwassermenge war. Oben setzten wir die wirkliche Hubwassermenge $Q_1 = 0{,}85\,Q$, woraus dann folgt: $L = 1{,}18\,a\,Q_1\gamma$, und somit ist der Wirkungsgrad der Pumpe:

$$\eta = \frac{Q_1 h\gamma}{L} = \frac{\mu h}{a}.$$

Man setzt bei sehr guten Pumpen $\eta = 0{,}80$, bei solchen von mittlerer Vollkommenheit $\eta = 0{,}75$ und bei den gewöhnlichen $\eta = 0{,}65$ bis $0{,}70$.

Bei den massiven Kolben ist zu unterscheiden, ob das offene Ende des Cylinders nach oben oder nach unten gerichtet sei. Wir setzen das Erste voraus.

Sei h_1 die mittlere Saughöhe, d der Kolbendurchmesser, b die Liderungsbreite, v_1^2 das mittlere Quadrat der Kolbengeschwindigkeit, k die Summe der Widerstandscoefficienten von allen hydraulischen Hindernissen, F der Querschnitt des Kolbens, so ist die Kraft zum Aufziehen (annähernd):

$$P_1 = \left[\left(1+4\varphi\frac{b}{d}\right)h_1+k\frac{v_1^2}{2g}\right]F\gamma.$$

Ist h_2 die mittlere Steighöhe, v_2^2 das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit des niedergehenden Kolbens, k_1 die Summe der Widerstandscoefficienten, so ist die Kraft beim Niedergange:

$$P_2 = \left[\left(1+4\varphi\frac{b}{d}\right)h_2+k_1\frac{v_2^2}{2g}\right]F\gamma,$$

also die Arbeit beim Kolbenspiel:

$$A = (P_1+P_2)s = \left[\left(1+4\varphi\frac{b}{d}\right)h + \frac{kv_1^2}{2g}+\frac{k_1 v_2^2}{2g}\right]V\gamma,$$

wo $h = h_1+h_2$ die Förderhöhe anzeigt.

Es ist zu bemerken, dass die Grössen k und k_1 von den beim Ventilkolben sich ergebenden abweichen.

Digitized by Google

Sei nämlich l die Länge der Kolbenröhre, l_1, d_1, l_2, d_2 bezüglich Länge und Weite der Saug- und Steigröhre, ζ der Widerstandscoefficient beim Eintritt in die Steigeröhre, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ die Reibungscoefficienten des Wassers bezüglich in der Saug-, Steig- und Kolbenröhre, ζ_4, ζ_5 die Widerstandscoefficienten für die Ventile, ζ_6, ζ_7 die den Querschnitts- und Richtungsveränderungen des Kommunicationsrohrs entsprechenden Widerstandscoefficienten, so ist:

$$k = \zeta_3 \frac{l}{d} + \left(\zeta + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1} + \zeta_4 + \zeta_6\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4$$

$$k_1 = \zeta_3 \frac{l}{d}\left(1 + \zeta_2 \frac{l_2}{d_2} + \zeta_5 + \zeta_7\right)\left(\frac{d}{d_2}\right)^4.$$

Seien ferner v_3, v_4 die Geschwindigkeiten des Wassers in den Ventilkammern, h_3, h_4 die zugehörigen Widerstandshöhen, F_1, F_2 die Querschnitte dieser Kammern, F_3, F_4 die Querschnitte der Ventilmündungen, α_3, α_4 die Contractionscoefficienten, so ist:

$$h_3 = \left(\frac{F_1}{\alpha_3 F_3} - 1\right)^2 \frac{v_3^2}{2g} = \left(\frac{F_1}{\alpha_3 F_3} - 1\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}$$

$$h_4 = \left(\frac{F_2}{\alpha_4 F_4} - 1\right)^2 \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 \frac{v_2^2}{2g},$$

woraus sich dann ergibt:

$$\zeta_3 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = \left(\frac{F_1}{\alpha_3 F_3} - 1\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2,$$

und

$$\zeta_4 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = \left(\frac{F_2}{\alpha_4 F_4} - 1\right)^2 \left(\frac{F}{F_2}\right)^2.$$

Die mechanische Arbeit für die Secunde ist:

$$L = \frac{naFs\gamma}{60} = aQ\gamma$$

und a ist durch denselben Ausdruck gegeben wie bei Ventilkolben.

Ist die Oeffnung des Cylinders unten, so ist eben nur P_1 mit P_2 zu vertauschen, L bleibt somit unverändert. Bei doppelt wirkenden Pumpen, eben so bei zweistiefligen ist $Q = \frac{2nFs}{60}$, also auch für L der doppelte Werth zu nehmen.

Saugröhre siehe Saugpumpe.

Saugschwungheber siehe Centrifugalpumpe.

Saugstrahlpumpe siehe Gebläse.

Saugventil siehe Saugpumpe.

Saugventilator siehe Ventilator.

Scala siehe Theilung.

Scenographie (Perspective), eine perspectivische Zeichnung.

Schacht (Markscheidekunst).

Schacht ist der in die Tiefe gehende Weg, wodurch der Grubenbau mit der Tagesoberfläche verbunden ist. Die Schachtförderung, d. h. das zu Tage bringen der Bergbauproducte bildet einen wichtigen Theil der Maschinenlehre.

Eine Schachtförderungsmaschine besteht aus einer Radwelle mit Seilen, an deren Enden zwei Fördergefässe angebracht sind. Je nachdem diese Maschine nach einer oder der andern Richtung gedreht wird, wickelt sich das eine oder andere Seil auf die Welle, wodurch das volle Gefäss emporgehoben, das leere niedergelassen werden kann.

Schacht (Messkunst), ein Körpermaass mit quadratischer Basis, dessen Höhe den zehnten Theil der Länge beträgt. Also eine:

Schachtruthe hat zur Basis eine Quadratruthe und einen Decimalfuss Höhe.

Schädlicher Raum siehe Saugpumpe.

Schaft siehe Säule.

Schall siehe Ton und Schwingungen.

Schaltjahr
Schaltmonat } siehe Jahr.
Schalttag

Schatten (Optik).

Die dunkele Stelle eines erleuchteten Raumes. Schatten tritt ein, wenn zwischen den leuchtenden Punkten und dem

Digitized by Google

erleuchteten Raume sich undurchsichtige Körper befinden. — Der Schatten wird in Kernschatten und Halbschatten getheilt. Der erstere ist derjenige Raum, in welchen gar kein Licht gelangt. Es findet nur Kernschatten statt, wenn ein leuchtender Punkt vorhanden ist. Halbschatten heisst derjenige Raum, in welchen nicht von allen leuchtenden Punkten Licht hingelangt. Er tritt also ein, wenn das Licht von einem Körper oder mehreren Punkten kommt. Im ersteren Falle ist leicht zu sehen, dass die vollständige Beleuchtung durch den Halbschatten allmälig in den Kernschatten übergehen muss, da von ersterer nach letzterem hin ein immer geringerer Theil des leuchtenden Körpers sein Licht spendet. Ist nur ein leuchtender Punkt vorhanden, so wird der Schatten eines Körpers, der auf eine Ebene fällt, offenbar eine perspectivische Abbildung sein, wenn man den leuchtenden Punkt als Augenpunkt betrachtet. Es folgt dies aus der gradlinigen Fortbewegung des Lichtes. Kann der leuchtende Punkt, wie z. B. die Sonne, als unendlich weit betrachtet werden, so bildet der Schatten die Projection des Körpers (vergleiche den Artikel: Licht, Orthoptrik, Optik).

Schattenconstruction (beschreibende Geometrie und Perspective).

Die Lehre von der Zeichnung der Schatten. Sie ist wichtig für die Zeichenkunst, insofern ohne sie kein der Natur entsprechendes Bild hervorgebracht werden kann. Besteht der abzubildende Gegenstand, wie dies in der Wirklichkeit doch nahe zutrifft, lediglich in einer Ebene und darüber sich erhebenden Körpern, und geht die Erleuchtung von einem als unendlich weit entfernt zu denkendem Punkte aus, so gibt es offenbar gar keinen Schatten, wenn sich der leuchtende Punkt über der Grundebene befindet, also so, dass seine Strahlen senkrecht auf dieselben fallen. Befindet er sich dagegen in der Fortsetzung der Grundebene, so sind die Schatten der Erhebungen unendlich gross. Ersteres ist zwar nicht genau in unsern Gegenden um die Mittagszeit der Fall, jedoch sind um diese Zeit die Schatten am kleinsten, während bei Sonnenuntergang das zweite stattfindet. Um beide Extreme zu vermeiden, gibt man bei Charten, Baulichkeiten und Maschinenzeichnungen dem leuchtenden Punkte eine Höhe von 45° über dem Horizont (vergleiche den Artikel: Beschreibende Geometrie).

Schattenriss (Zeichenkunst).

Die Abbildung des Schattens einer Person oder eines Gegenstandes, welche zugleich eine perspectivische Zeichnung des Gegenstandes gibt.

Schattenzeiger (Gnomonik).

Der Stift an einer Sonnenuhr, dessen Schatten die wahre Sonnenzeit angibt.

Schaufel (Maschinenlehre).

Instrument zum Heben loser, fester oder flüssiger Körper auf kleine Höhen (vergleiche den Artikel: Wasserschaufel).

Schaufelrad siehe Wasserrad.

Schaufelwerk (Hydraulik).

Dieselben dienen namentlich um das Grundwasser auf mässige Höhen zu heben. Sie bestehen aus einer doppelten Kette ohne Ende und rechtwinkligen Holzschaufeln von 12 — 16 Zoll Länge, 6 — 8 Zoll Höhe und 1 — 1½ Zoll Dicke, die inmitten der Gelenke der Kettenglieder senkrecht auf denselben befestigt sind. — Die Kettenglieder haben 6 — 8 Zoll Länge und ebensoweit sind also auch zwei Schaufeln von einander entfernt. Die Doppelkette läuft über ein Getriebe gewöhnlich mit sechs Triebstöcken. Beim Emporsteigen zieht sich die Kette durch die sogenannte Steigerinne, worin sie am obern Rande und an den Seiten der Schaufeln einen Spielraum von ¼ bis ½ Zoll hat. Beim Niedergehen ist die Kette durch ein Laufbrett oder durch eine offene Laufrinne gestützt, die 15 bis 30 Fuss lang und 10 bis 30 Grad gegen den Horizont geneigt ist. Die Maschine wird vom Getriebe aus durch Menschenhände oder auch durch Pferde bewegt, wo dann ein Pferdegöpel anzubringen ist.

Scheibenkunst (Hydraulik).

Eine dem Schaufelwerk ähnliche Vorrichtung, wo die Kette aber statt der Schaufeln kreisförmige Scheiben trägt, und in einer vertikalen Röhre (Steigröhre) emporsteigt.

Scheinbare Bewegung (Astronomie).

Die Aenderung in der Lage des scheinbaren Ortes eines Sternes.

Scheinbare Grösse (Optik).

Der Winkel, welchen die von beiden Endpunkten einer Linie nach dem Mittel-

punkte der Pupille eines Beobachters gezogenen Strahlen mit einander machen. Ist der beobachtete Gegenstand eine Fläche oder ein Körper, so ist diejenige Linie in ihm, deren scheinbare Grösse man sucht, zu bezeichnen. Bei einem Kreise nimmt man den Durchmesser. Auch könnte man unter scheinbarer Grösse von Flächen und Körpern an sich reden, und dieselbe auf folgende Weise bestimmen. Man ziehe vom Auge als Scheitelpunkt einen Kegel, der die beobachtete Fläche als Basis hat, oder den beobachteten Körper berührt, lege durch diesen Kegel eine Kugel deren Mittelpunkt das Auge, und deren Radius der Einheit gleich ist. Das von der Kegelfläche begrenzte Stück der Kugeloberfläche kann dann als scheinbare Grösse bezeichnet werden. In der Astronomie hat man es mit Kugeln zu thun, deren Dimensionen gegen die Entfernung vom Beobachter sehr klein sind. Ist e die Entfernung, r der Durchmesser der Kugel, α die scheinbare Grösse, so kann r auch als ein kleiner Kreisbogen betrachtet werden, und man hat:

$$r = \frac{e\alpha\pi}{180}, \qquad \alpha = \frac{180\,r}{e\pi},$$

wenn α in Graden gegeben ist.

„Die scheinbaren Grössen verhalten sich wie die wahren (r) und umgekehrt wie die Entfernungen (e).“

Scheinbarer Ort (Astronomie).

Die grade Linie, welche durch einen Stern und das Auge des Beobachters geht, oder auch der Punkt, in welchem diese Linie eine Kugelfläche, welche das Auge zum Mittelpunkt und die Einheit zum Radius hat, schneidet.

Scheitel siehe Scheitelpunkt.

Scheitelkreise (Astronomie).

Die grössten Kreise auf der Kugeloberfläche, welche das Himmelsgewölbe repräsentirt, und das Auge des Beobachters, (oder genauer genommen den Mittelpunkt der Erde) zum Mittelpunkt hat, und welche durch den Zenith des Beobachters gehen.

Scheitellinie, Zenithlinie (Astronomie).

Die durch das Auge des Beobachters (oder durch den Mittelpunkt der Erde) gehende Grade, welche auf dem Horizont senkrecht steht.

Scheitelpunkt (Geometrie).

So wird bei Winkeln derjenige Punkt genannt, in welchem sich die Schenkel schneiden, bei Dreiecken der Scheitel desjenigen Winkels, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, im Besonderen bei gleichschenkligen Dreiecken der Scheitel des Winkels, welcher der ungleichen Seite gegenüber liegt. Bei Kegeln heisst so der Punkt, in dem sich alle Kegelseiten schneiden.

Scheitelpunkt (Astronomie).

Der Punkt, in welchem die Scheitellinie das Himmelsgewölbe schneidet.

Scheitrecht (Architektur), gleichbedeutend mit gradlinig.

Schenkel (Geometrie).

Bei Winkeln, die Linien, welche den Winkel bilden; bei gleichschenkligen Dreiecken die gleichen Seiten; bei Curven die Theile aus welchen die Curve besteht, und welche entweder in einer Spitze oder einem Durchschnittspunkte zusammentreffen.

Schepel (Messkunst).

Der holländische Ausdruck für ein Litre.

Schieber, Schiebersteuerung, Schieberventil (Maschinenlehre) siehe Ventil, Steuerung, Dampfmaschine, Wassersäulenmaschine.

Schiebbock siehe Schiebkarre.

Schiebkarre (Maschinenlehre).

Ein einrädriges durch Menschenkraft bewegtes Fuhrwerk. Schiebbock heisst dies Fuhrwerk, wenn es nur eine über das Rad greifende Rücklehne statt des Kastens zur Aufnahme der Last hat. Das Fördergefäss des Schiebkarren kann auf den Karrenschenkeln aufsitzen, oder daran hängen (Auslaufkarre).

Sei $CA = a$ der Abstand der Kraft P (Fig. 861), von der Axe C des Karrens, $CB = b$, der Abstand der Axe C, von der durch den Schwerpunkt S gehenden Vertikalen, Q die Last, Q_1 das Gewicht des Karrens selbst, R der Druck der Radaxe, so hat man, da hier ein einarmiger Hebel vorhanden ist:

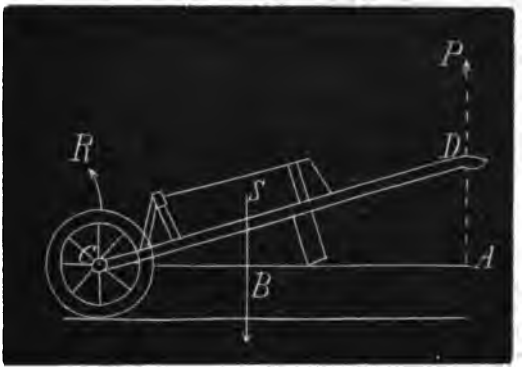
$$Pa = (Q + Q_1)\,b$$

$$R = Q + Q_1 - P = \frac{a-b}{a}(Q + Q_1).$$

Dieser Druck erzeugt am Fussboden eine Reibung und eine Zapfenreibung. Bei festem Fussboden betragen beide Reibungen nur $\frac{1}{10}$ des Druckes, zu welchem

digitized by Google

Fig. 361.



jedoch das Gewicht des Rades Q_2 hinzukommt. Diese Reibung kann bei annähernder Rechnung vernachlässigt werden. Ist der Fussboden jedoch nicht horizontal, sondern um Winkel α gegen den Horizont geneigt, so ist zu setzen:

$$P = \frac{b}{a}(Q+Q_1)+(Q+Q_1+Q_2+G)\sin\alpha,$$

wo G das Gewicht des Arbeiters ist.

Diese Formel gilt nicht allein fürs Aufsteigen, sondern auch fürs Abwärts gehen, wenn die Beschleunigung des Karrens aufgehoben werden muss.

Wenn auf einer horizontalen Bahn ein Arbeiter immer wieder leer zurückfährt, so kann er mittels des Karrens 128 Pfund mit einer Geschwindigkeit von 1,6 Fuss eine zehnstündige Arbeitszeit hindurch wegschaffen, was täglich 73730000 Fusspfund Arbeit beträgt.

Schief (Geometrie) nicht rechtwinklig.

Schiefe der Ekliptik (Astronomie).

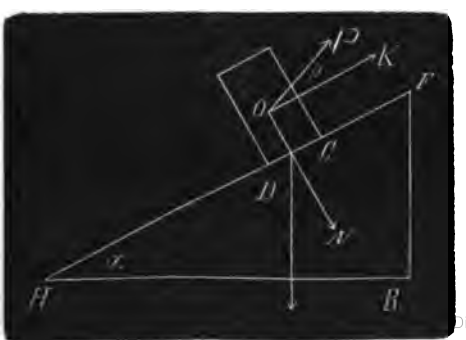
Der Winkel, welchen der Aequator der Erde mit der Ekliptik macht. Derselbe beträgt 23° 27′, ist aber einer säcularen und einer periodischen Störung unterworfen.

Schiefe Ebene (Mechanik).

Die Bewegung und das Gleichgewicht der Körper auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene ist bei verschiedenen Maschinen von Wichtigkeit.

Mache Ebene HF (Fig. 362) Winkel α mit dem Horizonte, befinde sich auf ihr ein Körper O, in dessen Schwerpunkt eine Kraft P wirkt, welche den Winkel $\beta = POK$ mit der schiefen Ebene mache, so zerlegt sich die Kraft P in eine Componente senkrecht auf der schiefen Ebene $P\sin\beta$, und in eine parallel derselben $P\cos\beta$. Die erstere wird durch den Widerstand der Ebene aufgehoben und bringt nur einen Normaldruck hervor. Wirken mehrere Kräfte, so sind die entsprechenden Ausdrücke zu addiren. Möge z. B. ausser der Kraft P noch die Schwere g wirken, und P so beschaffen sein, dass sie der letzteren Gleichgewicht halte; die Schwere zerfällt dann in die

Fig. 362.



Digitized by Google

Componente $g \cos \alpha$ senkrecht auf und $g \sin \alpha$ parallel der schiefen Ebene. Es ist somit:

$$g \sin \alpha + P \cos \beta = 0, \quad P = -\frac{g \sin \alpha}{\cos \beta}.$$

Während man für den Normaldruck erhält:

$$N = g \cos \alpha + P \sin \beta = g \left(\cos \alpha - \sin \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \right),$$

also:

$$N = g \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta}.$$

Es ist hier vorausgesetzt, dass die Kraft P durch den Schwerpunkt gehe, und dass der letztere gestützt sei. Ist letzteres nicht der Fall, d. h. geht die Kraftrichtung nicht durch die Basis des Körpers, so wird derselbe sich um eine Kante drehen und umstürzen können. Wirkt die Schwere allein, so muss also, damit dies nicht eintrete, die durch den Schwerpunkt gezogene Vertikale durch die Basis gehen.

Wir haben bei der Berechnung des Gleichgewichts eines Körpers auf einer schiefen Ebene aber auch auf die Reibung Rücksicht zu nehmen. Ist μ der Reibungscoefficient, so ergibt sich, da die Reibung S dem Drucke N proportional ist:

$$S = \mu (g \cos \alpha + P \sin \beta).$$

Soll diese Kraft P den Körper heraufziehen, so wirkt die Reibung im Sinne der Schwere, ist also positiv zu nehmen, soll aber nur das Hinabgleiten verhindert werden, so ist die Reibung negativ. Man hat also bezüglich:

$$g \sin \alpha + P \cos \beta \pm \mu (g \cos \alpha + P \sin \beta) = 0,$$

also:

$$P = -\frac{g (\sin \alpha \pm \mu \cos \alpha)}{\cos \beta \pm \mu \sin \alpha}.$$

Setzt man $\mu = \operatorname{tg} \varrho$, wo ϱ der Reibungswinkel ist (siehe den Artikel: Reibung), so kommt:

$$P = -g \frac{\sin (\alpha \pm \varrho)}{\cos (\beta \mp \varrho)},$$

das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem Bewegung hervorgebracht oder verhindert werden soll. Was den Normaldruck anbetrifft, so ist:

$$N = g \cos \alpha + P \sin \beta$$

$$= g \frac{\cos \alpha \cos (\beta \mp \varrho) - \sin \beta \sin (\alpha \pm \varrho)}{\cos (\beta \mp \varrho)}$$

woraus sich ergibt:

$$N = \frac{g \cos (\alpha + \beta) \cos \varrho}{\cos (\beta \mp \varrho)}.$$

Schiefwinklig (Geometrie).

Spitzwinklig oder Stumpfwinklig.

Schiff (Hydraulik).

Fahrzeug zur Beförderung von Personen oder Lasten auf dem Wasser.

Ueber die Fortbewegung der Schiffe, siehe die Artikel: Ruder, Schaufelrad, Wasserrad. Auch ist der Artikel: Stabilität zu vergleichen.

Schlagwerk (Mechanik) siehe Uhr.

Schleuse (Hydraulik).

Ein Bauwerk, welches zum Reguliren des Wassers dient, namentlich in Bezug auf die Schifffahrt. Es hat dann den Zweck, das Schiff aus einem höher gelegenen Wasser (Oberwasser) in tiefer gelegenes (Unterwasser) oder umgekehrt zu führen. Die Theile der Schleuse sind: die Schleusenwände, welche das Ufer abschliessen, der Schleusenboden und die Schleusenthore.

Die letzteren bestehen aus zwei vertikalen Säulen und einer Anzahl von Querriegeln. Da diese den Druck des Wassers auszuhalten haben, welcher von oben nach unten zunimmt, so ist den Querriegeln nicht gleiche Entfernung zu geben.

Seien EE_1, FF_1, GG_1 ... (Fig. 363) die Querriegel. Ist $b = AB$ die Breite,

Fig. 363.

$a = AD$ die Höhe der Thore, so ist der ganze Druck gleich $P = \frac{1}{2} b a^2 \gamma$ (γ die Dichtigkeit des Wassers). Dagegen der Druck auf ein Feld $ABEE_1$ von der Höhe a_1 wird $P_1 = \frac{1}{2} b a_1^2 \gamma$, man hat also:

$$P_1 : P = a_1^2 : a = \triangle BKE = BDC.$$

Die Riegel sind also so anzulegen, dass das Dreieck BCD in gleiche Theile getheilt wird. Dies geschieht folgendermaassen:

Theile DC in gleiche Theile, errichte darüber einen Halbkreis, in den Theilpunkten 1, 2, 3, 4 die Lothe 1α, 2β, 3γ . . ., ziehe $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$ . . ., mache $D\alpha_1 = D\alpha$, $D\beta_1 = D\beta$ . . . theile also DC durch Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1 . . ., ziehe $\alpha_1 E$, $\beta_1 F$, $\gamma_1 G$ . . . parallel mit DB, so sind E, F, G, H . . . die Punkte, in welchen die Querriegel anzubringen sind.

$$\frac{\triangle BKE}{\triangle BDC} = \frac{KE^2}{DC^2} = \frac{D\alpha_1^2}{DC^2} = \frac{D1}{DC}$$

und indem man ähnliche Betrachtungen für $\triangle BFL$ macht:

$$\frac{\triangle BFL}{\triangle BDC} = \frac{D2}{DC},$$

also:

$$\frac{KEFL}{\triangle BDC} = \frac{\triangle BFL - \triangle BKE}{\triangle BDC} = \frac{D_2 - D_1}{DC} = \frac{1 \cdot 2}{DC}$$

und da $1 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \ldots$ ist, so ist:

$$\triangle BEK = KEFL = LFGM \ldots$$

Schnecke (Maschinenlehre).

Dieser Ausdruck wird oft als gleichbedeutend mit Schraube gebraucht. Namentlich versteht man bei Uhren darunter den spiralförmig aber aufsteigend gewundenen Theil, um welchen sich die Kette legt. Durch die nach unten hin zunehmenden Windungen der Schnecke wird die beim Aufwinden der Kette immer mehr abnehmende Kraft der Feder wieder regulirt (vergleiche den Artikel: Uhr).

Schneckenlinie (Geometrie) s. Spirale,

Schneckenrad (Hydraulik).

Rad zum Wasserschöpfen mit Spiralgängen. Durch Mündungen am Radumfange wird das Wasser aufgenommen und dem Innern des Rades zugeführt. Das Rad wird durch eine Welle in langsame Umdrehungen gesetzt, und hierbei das gehobene Wasser durch die Räume zwischen den Armen und dem sie umgebenden trichterförmigen Reifen ausgeschüttet. Die Spiralgänge werden gewöhnlich nach Kreisevolventen geformt.

Schnellwaage (Statik) siehe Waage.

Schnurrad (Maschinenlehre) s. Rad.

Schöpfrad (Hydraulik).

Jedes Rad zum Wasserschöpfen, welches das Wasser in Zellen oder Gefässen emporhebt. Die Gefässe können beweglich oder fest sein. Im erstern Falle hängen die Eimer an runden Nägeln, an der Peripherie des Rades, so dass sie um dieselben sich drehen können. Während einer Umdrehung tauchen die unten befindlichen Eimer unter, während die oben befindlichen sich in einem Trog entleeren.

Sind die Eimer fest, so müssen sie derart angebracht sein, dass sie sich unten füllen, oben entleeren. Sie werden also entweder schräg auf dem Radkranze aufsitzen, (chinesisches Schöpfrad) oder abgestumpfte Kegel bilden, deren Axen, den Sehnen der von ihnen bedeckten Radstücke parallel sind (fränkisches Schöpfrad).

Was die Leistungen eines Schöpfrades anbetrifft, so sei V das Wasserquantum eines Gefässes n die Anzahl derselben, u die Anzahl der Drehungen in einer Minute, h die Höhe, auf welche das Rad gehoben wird, γ das Gewicht eines Cubikfusses Wasser. Dann wird in der Secunde gehoben:

$$Q = \frac{nuV}{60}$$

und die zugehörige Arbeit ist:

$$L = Qh\gamma = \frac{nuVh\gamma}{60}.$$

Das ausgegossene Wasser hat beim Ausflusse die Geschwindigkeit v des Radumfanges, und die Ueberwindung seiner Trägheit erfordert also noch die Arbeit: $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$. Damit es ungehindert ausfliesse, ist es ferner noch zu einer Höhe h_1 über das Oberwasser zu heben, wozu die Arbeit $Qh_1\gamma$ gehört. Man hat also die Gesammtarbeit:

$$L_1 = \left(h + h_1 + \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(h + h_1 + \frac{v^2}{2g}\right) \frac{nuV}{60} \gamma.$$

Digitized by Google

Diese Formeln sind auch auf Schneckenräder anwendbar, wenn man berücksichtigt, dass das in jedem Gange enthaltene Wasser ein Segment bildet, welches genau oder annähernd berechnet werden kann.

Scholium (allgemeine Mathematik).

Eine Bemerkung, welche einem Satze oder einer Erklärung hinzugefügt wird, und in der Regel eine Erläuterung eines schwierigen Punktes, oder einer Hinweisung auf Früheres, oder auch eine Anleitung zum Gebrauche des Satzes gibt. Auch kann wohl eine historische oder literarische Nachricht in einem Scholium gegeben werden. Der Ariikel „Raumlehre" enthält verschiedene Scholien.

Schraube (Statik, Dynamik).

1) Allgemeines.

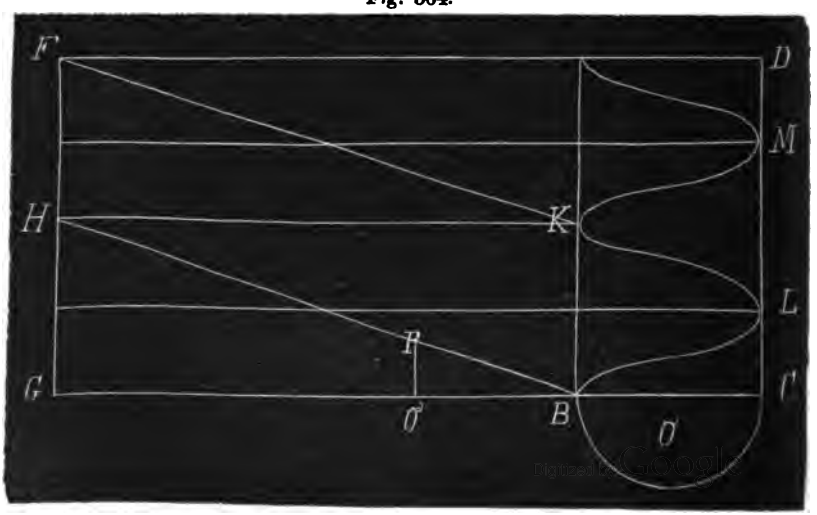
Die Schraube gehört zu den wichtigsten Maschinen, und dient hauptsächlich dem Zwecke, eine kreisförmige Bewegung in eine gradlinige Bewegung senkrecht auf der Ebene des Kreises auszuüben. Es wird hierbei eine sehr starke Spannung erzeugt, wenn die Bewegung auch eine sehr geringe ist. Schrauben dienen daher auch namentlich zum Pressen, und zum Befestigen, auch zum Einstellen von Instrumenten (z. B. als Mikrometerschrauben).

Die Theorie der Schraube beruht auf den Eigenschaften der Schraubenlinie und der Schraubenfläche.

Da sich eine Cylinderfläche in eine Ebene abwickeln lässt, so lässt sich umgekehrt auch eine Ebene auf eine Cylinderfläche aufwickeln. Denkt man sich auf einer solchen Ebene vor dem Aufwickeln eine Grade gezeichnet, so wird diese auf dem Cylinder eine doppelt gekrümmte Linie bilden, welche man Schraubenlinie nennt. Ist die aufzuwickelnde Ebene unbegrenzt, so wird sie sich in beliebige Anzahl von Malen auf dem Cylinder wickeln lassen, wobei jedesmal die zugehörige Strecke der Graden eine Schraubenwindung oder einen Schraubengang bildet. Die Senkrechte auf der Basis des Cylinders zwischen den Endpunkten zweier auf einanderfolgenden Schraubengänge heisst Höhe derselben. Der Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen die Basis des Cylinders ist constant. Denkt man sich aber die Ebene begrenzt, und zwar als die abgewickelte Cylinderfläche selbst, so wird sie ein Parallelogramm bilden, ein Rechteck, wenn der Cylinder ein grader ist. Man denke sich in diesem Parallelogramm (Fig. 364) eine Reihe Linien in gleicher Entfernung und parallel der Basis gezogen, *BG*, *HK*, *FE* ..., und zu den entstehenden Rechtecken die Diagonalen *BK*, *KF* ... gebildet, so werden letztere in ihrer Gesammtheit beim Aufwickeln eine Schraubenlinie, jede Diagonale einen Schraubengang bilden. Die Entfernung *BK* zweier nächsten Parallelen ist die Höhe desselben, Winkel *HBG* der Neigungswinkel.

Wir setzen im Folgenden immer einen Rotationscylinder voraus, wenn auch geo-

Fig. 364.



metrisch betrachtet, die Schraubenlinie sich auf jeden Cylinder (im weitern Sinne sogar auf jede abwickelbare Fläche) beziehen kann.

Sei jetzt r die Basis des Cylinders, so ist die Länge $BG = 2\pi r$. Ist α der Neigungswinkel, h die Höhe des Schraubenganges, so hat man $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r}$. Wenn man von irgend einem Punkte P der Schraubenlinie ein Loth $PO = y$ auf die Basis des Cylinders zieht, zu welchem die Abscisse BO oder auf der Cylinderfläche Bogen BO und Centriwinkel β auf der Basis gehört, so ist:

$$y = BO \operatorname{tg}\alpha, \text{ d. h. } y = r\beta \operatorname{tg}\alpha.$$

Die Länge s eines beliebigen Bogens ist gegeben durch die Formel:

$$s = \frac{r\beta}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha}$$

und die Länge einer Windung l, wo $\beta = 2\pi$ ist, durch die Formel:

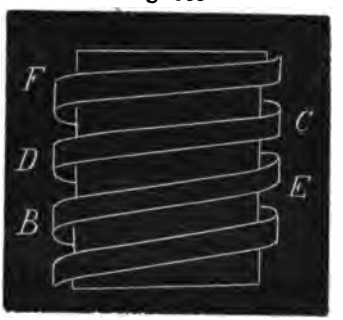
$$l = \frac{2\pi r}{\cos\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Eine Schraubenfläche entsteht, wenn eine Grade sich so bewegt, dass sie stets durch eine Schraubenlinie und durch die Axe des Cylinders geht, mit welcher sie einen constanten Winkel bildet. Je nachdem diese Erzeugungslinie rechtwinklig oder schiefwinklig auf der Cylinderaxe steht, hat man eine grade oder schiefe Schraubenfläche. Wird statt der graden Linie eine Verbindung von zwei in einer Ebene liegenden Graden, welche zwei verschiedene Schraubenflächen beschreiben, genommen, so hat man ein Schraubengewinde. Auch kann man diese Linien als Sehnen beliebiger Curven betrachten und den Weg verfolgen, welche diese Curven selbst beschreiben. Gewöhnlich unterscheidet man die flachgängigen und die scharfgängigen Gewinde.

Bei der ersteren ist der Durchschnitt des Schraubenganges ein Rechteck, sie entsteht also aus zwei parallelen Graden (Fig. 365); bei der letzteren ein Dreieck, sie entsteht aus zwei Graden, die sich auf der Cylinderfläche selbst schneiden (Fig. 366). Die flachgängige Schraube hat ein grades, die scharfgängige ein schiefes Gewinde.

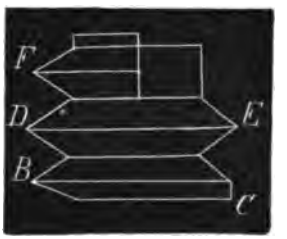
Um der Schraube die nöthige Bewegung zu geben, bedarf man ausser dem erhabenen noch ein zweites vertieftes Gewinde „die Schraubenmutter." Im Gegensatz zu letzterer wird das erhabene Gewinde auch Schraubenspindel genannt.

Fig. 365.



Die Windung einer Schraube ist rechtsgängig, wenn sie für den aussen Stehenden von links nach rechts hinaufsteigt, sonst linksgängig. Endlich unterscheidet man noch einfache und mehrfache Schrauben, die letzteren haben mehrere Gewinde, d. h. ihre Gänge bilden verschiedene Schraubenlinien.

Fig. 366.



2) Schraubenbewegung.

Die Bewegung der Schraube ist offenbar zugleich eine drehende und eine fortschreitende. Dies Fortschreiten findet senkrecht auf der Ebene der Drehung statt. Diese Bewegung ist (vergl. den Artikel: Rotation) übrigens die allgemeinste, welche ein fester Körper annehmen kann. Nur muss man sich die Axe D den Schraubengang in jedem Moment geändert denken, was freilich bei der Schraube selbst nicht stattfinden kann.

Uebrigens können beide Bewegungsarten, die fortschreitende und die drehende entweder der Spindel oder der Mutter, oder eine davon der Spindel, die andere aber der Mutter zukommen. Beim Einbohren der Schraube in Holz, vertritt das Holz selbst die Stelle der Mutter, und hier kommen also der Spindel beide Bewegungen zu, ebenso bei der Schraubenpresse, wo die Schraube eine Tafel gegen einen in einem festen Rah-

men befindlichen Körper drückt. Beim Schraubenstocke dagegen befindet sich die Mutter in einer Führung, die Spindel in Lagern, erstere hat also ausschliesslich eine fortschreitende, letztere eine drehende Bewegung. Bei Schrauben, welche zur festen Verbindung zweier Körper dienen, hat die Mutter beide Bewegungen. Es ist dann durch die zu verbindenden Körper ein Bolzen gesteckt, der am freien Ende schraubenförmig zuläuft, eine hineinzusteckende Mutter presst dann durch ihre Drehung die Körper zusammen. Bei Wagenwinden endlich dreht sich die Mutter, während die Spindel fortschreitet, letztere liegt nämlich auf einer Lagerplatte, und zieht die Spindel so empor.

Schrauben werden entweder unmittelbar durch die menschliche Hand oder mittels des Schraubenziehers oder Schraubenschlüssels gedreht. Im ersteren Falle ist der Kopf der Schraube mit Hebeln versehen, oder am Anfang gerändert, oder hat Flügel, Schwengel u. s. w. Ein Schraubenzieher dient zum Drehen der Spindel, ein Schraubenschlüssel zum Drehen der Mutter. Beides sind Hebel, welche in den quadratisch oder sechseckig geformten Schraubenkopf eingreifen.

3) Verhältnisse der Schraube.

Ist Q die Axenkraft der Schraube, K die Festigkeit, r der Halbmesser, so muss offenbar sein

$$Q = \pi r^2 K, \quad r = \sqrt{\frac{Q}{\pi K}}.$$

Ausserdem aber hat die Schraube noch eine Torsionskraft, welche Q proportional ist, auszuhalten, es ist somit r etwas grösser zu nehmen. Ist $d = 2r$ die Dicke der Schraube, so setzt man:

für eiserne Spindeln: $d = 0{,}02\sqrt{Q}$ (Zoll)
für hölzerne: $d = 0{,}05\sqrt{Q}$ (Zoll)

Dies ist der innere Durchmesser des Cylinders ohne Rücksicht auf die Schraubenfläche.

Wird der äussere $d_1 = 1{,}2d$ genommen, so ist:

$$d_1 = 0{,}024\sqrt{Q}, \quad d_1 = 0{,}06\sqrt{Q}$$

bezüglich für eiserne und hölzerne Schrauben. Ist α_1 der Steigewinkel der äusseren Schraubenlinie, h die Ganghöhe, so kommt:

$$h = \pi d_1 \operatorname{tg} \alpha_1$$

Reuleaux setzt für dreiseitige Gewinde:

$$h = 0{,}04 + 0{,}08\, d_1 \text{ (Zoll)}$$

und für vierseitige:

$$h = 0{,}08 + 0{,}09\, d_1 \text{ (Zoll)}.$$

4) Theorie der flachgängigen Schraube.

Die Schraube ist wie die schiefe Ebene zu behandeln. Es wirkt die Last Q auf den mit der Mutter in Berührung befindlichen Theil der Schraubenfläche parallel den Schraubenaxe, und die Umdrehungskraft P, welche wir uns in die Mitte der Breite der Schraubenfläche angreifend denken.

Sei die Schraube flachgängig, α der Steigewinkel, ϱ der Reibungswinkel (vgl. den Artikel: schiefe Ebene), so ist:

$$P = Q \operatorname{tg} (\alpha \pm \varrho).$$

Das obere oder untere Zeichen ist zu nehmen, je nachdem eine Umdrehung bewirkt oder verhindert werden soll. Wegen $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$ kann man noch setzen:

$$P = \frac{h \pm 2q\pi r}{2\pi r \mp qh} Q,$$

wo q der Reibungscoefficient ist. $2r = d_0$ ist hier der mittlere Durchmesser der Schraube. Er bestimmt sich aus den beiden äusseren Durchmessern durch die Formel:

$$d_0 = \frac{d + d_1}{2}.$$

(Dieser Ausdruck ist eigentlich nicht ganz genau. Da die Reibung auf die Schraubenfläche gleichmässig wirkt, so kann man die einzelnen Reibungsflächen als kleine Ringstücke betrachten, in deren Schwerpunkten die Reibung angreift. Diese Schwerpunkte bilden eine Schraubenlinie, deren Durchmesser d_0 gegeben ist, durch die Formel:

$$d_0 = \frac{2}{3}\frac{d_1^3 - d^3}{d_1^2 - d^2} = \frac{d + d_1}{2} + \frac{(d_1 - d)^2}{6(d_1 + d)},$$

welche den Schwerpunkt eines solchen Ringstückes finden lehrt, und in dieser Schraubenlinie muss man sich auch die Kraft P angreifend denken. — Indess ist $d_1 - d$ so klein, dass das zweite Glied vernachlässigt werden kann).

Würde die Reibung nicht berücksichtigt, so erhielt man:

$$P = Q \operatorname{tg} \alpha.$$

Es ist also:

$$W = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varrho)}$$

der Wirkungsgrad einer zur Arbeit dienenden Schraube. Derselbe ist Null wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha + \varrho = 90°$ ist. Ein Maximum ist w, wenn:

Digitized by Google

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varrho)}\right)=0,$$

also für

$$\alpha = 45° - \frac{\varrho}{2}$$

und zwar ist dann dieser Wirkungsgrad

$$W = \operatorname{tg}\left(45° - \frac{\varrho}{2}\right)^2.$$

Für metallene Schrauben ist:

$$\varphi = \operatorname{tg}\varrho = 0{,}12, \quad \varrho = 6° 51'.$$

Hieraus ergibt sich:

$$W = \operatorname{tg}(41° 34' 30'')^2 = 0{,}7869.$$

Es ist also immer ein starker Verlust mit der Anwendung der Schraube als Arbeitsmaschine verbunden.

Die Umdrehungskraft P_1 wirkt zunächst an einem Hebelarm a, und man hat daher:

$$P_1 a = \frac{Pd}{2},$$

also:

$$P_1 = \frac{h \pm \varphi\pi d}{\pi d \mp \varphi h}\,\frac{d}{2a}\,Q = \frac{r}{a}\,Q\operatorname{tg}(\alpha \pm \varrho).$$

Wenn die Kraft an einem einarmigen Hebel angreift, so findet in der Schraubenmutter aber noch eine Seitenreibung statt. Sei h_1 die Höhe der Mutter, l, l_1 die Abstände der Umdrehungsebene von den beiden Grundflächen der ersteren, so wirkt an der obern Grundfläche in der Richtung der Kraft der Druck:

$$R = \frac{lP_1}{h_1},$$

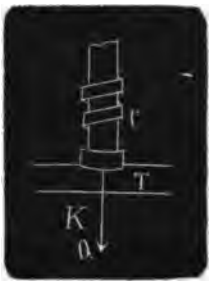
und an der unteren in entgegengesetzter Richtung $R_1 = \frac{l_1 P_1}{h_1}$. Es entsteht also die Seitenreibung:

$$F = \frac{\varphi d_1}{2a}(R + R_1) = \frac{\varphi d_1}{2ah_1}(l + l_1)P_1.$$

Es kommt vor, dass die Last sich nicht mit der Schraube umdreht, wo dann am Schraubenende eine Reibung stattfindet. Es kann dann das Schraubenende einen stehenden Zapfen E bilden (Fig. 367) (siehe den Artikel: Reibung), der sich in einer Pfanne F dreht, und den darunter befindlichen Körper mit Kraft Q zusammendrückt. Sei r_0 der Halbmesser des (kugelförmigen) Schraubenendes, so ist die Reibung:

$$F_1 = \tfrac{2}{3}\,\frac{\varphi r_0 Q}{a}.$$

Fig. 367.



Auch kann die Last mittels des Oehres FH (Fig. 368) an dem Schraubenende E, welches mit Knopf G versehen ist, hängen. Sind dann die Halbmesser der

Fig. 368.

ringförmigen Berührungsfläche FF des Kopfes r_1 und r_2, so erhält man:

$$F_1 = \tfrac{2}{3}\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\,\frac{\varphi Q}{a}.$$

In dem Vorigen war angenommen worden, dass die Schraubenspindel beide Bewegungsarten habe. Jetzt soll die Spindel sich drehen, und dadurch die Mutter fortschieben. Es muss dann der Hals der Spindel durch zwei Stossscheiben F und G (Fig. 369), welche gegen das Lager HH gestemmt sind, begrenzt sein. — Um das Umdrehen der Mutter zu verhindern, gibt man ihr eine armförmige Gestalt KK_1, und lässt ihre Enden durch die Leitung HH gehen. Dann hat die Kraft P_1 ausser der an der Mutter wirkenden Last Q und ihrer Reibung, noch die Reibung der Stossscheibe F oder G auf der Lagerplatte und die der Arme K in der Führung zu überwinden. Für letztere ist:

$$F = \frac{\varphi_1 d}{2a_1} P,$$

Digitized by Google

Fig. 369.

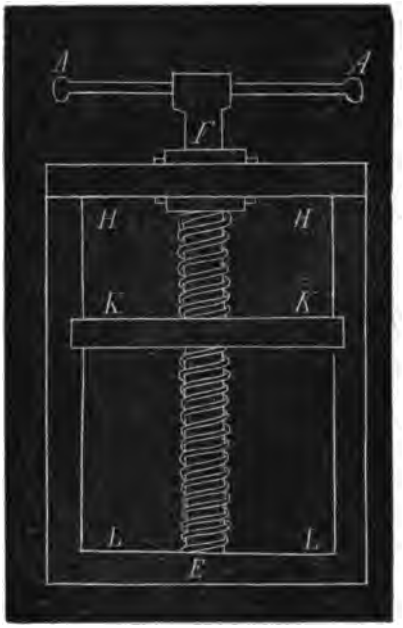
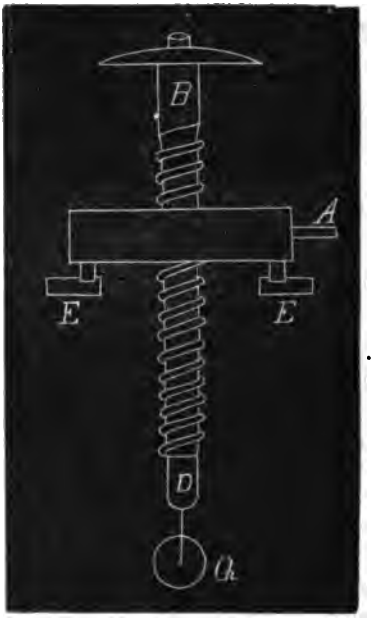


Fig. 370.



wo a_1 die Armlänge BK, φ_1 den Reibungscoefficienten an der Führung bezeichnet. Es ist also:

$$P = (Q + F)\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varrho)$$

oder:

$$P = \frac{Q\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varrho)}{1 - \varphi_1 \frac{d}{2a_1}\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varrho)}.$$

Seien noch r_1 und r_2 die Halbmesser der Reibungsflächen F und G, so ist das Moment dieser Reibung:

$$\varphi\,(Q+F)\,\tfrac{2}{3}\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2},$$

und das Moment der am Hebelarm $CA = a$ wirkenden Umdrehungskraft P_1:

$$P_1 a = \varphi\,(Q+F)\,\tfrac{2}{3}\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} + \frac{Pd}{2},$$

woraus sich ergibt:

$$P_1 = \frac{\frac{d}{a}\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varrho) + \frac{2}{3}\,\varphi\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\,\frac{Q}{a}}{1 - \varphi_1 \frac{d}{2a_1}\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varrho)}.$$

Wird umgekehrt die Spindel BD (Fig. 370) mit der Last Q durch Umdrehung der Mutter mittels eines Hebels $CA = a$ gehoben, so ist ausser der Reibung in den Gewinden noch die in der Ringfläche E zu überwinden. Seien r_1, r_2 die Radien dieser Ringfläche, so ist das entsprechende Reibungsmoment:

$$\tfrac{2}{3}\,Q\varphi\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$$

und man erhält:

$$P_1 = \frac{d}{2}\left(\mathrm{tg}\,(\alpha+\varrho) + \tfrac{2}{3}\,\varphi\,\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right)\frac{Q}{a}.$$

Wirkt die Kraft nur an einem Arm, findet also die Seitenreibung φP_1 in den Schraubengängen statt, so ist statt des Factors $\frac{Q}{a}$ zu nehmen:

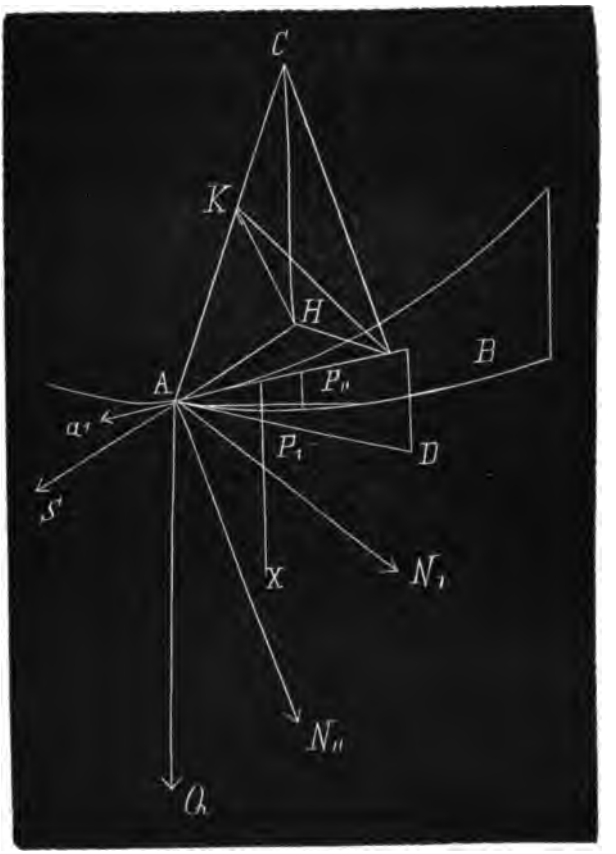
$$\frac{Q}{a - \frac{\varphi d}{2}}.$$

5) Theorie der scharfgängigen Schraube.

Bei der scharfgängigen Schraube ist die Reibung noch grösser als bei der flachgängigen. Sei wieder Q die parallel der Axe wirkende Last, die Umdrehungskraft im mittleren Schraubengewinde gleich P, α der Ansteigewinkel, die Steigung der Erzeugungslinie CA der Schraube (Fig. 371) gegen die Basis AH derselben gleich β.

In A mögen die Kräfte wirksam sein, werde hier eine Tangentialebene an den Cylinder gelegt, in derselben sei AB die

Fig. 371.



Tangente an die Schraubenlinie, AN_2 darauf senkrecht. Die Kräfte P und Q werden dann zerlegt nach diesen Richtungen bezüglich in P_2, N_1 und Q_2, N_2. Sei F die Reibung, so ist dann:

$P_2 = Q_2 \pm F$, d. h. $P\cos\alpha = Q\sin\alpha \pm F$.

Der Druck

$$N_1 + N_2 = P\sin\alpha + Q\cos\alpha$$

ist hier nicht normal, auf der Schraubenfläche zerlegen wir ihn daher in $AS = S$ und $AN = N$ senkrecht darauf. Die letzteren Kräfte erzeugen die Reibung. Es ist also $F = qN$. Sei noch Winkel $NAN_2 = \delta$, so ist $AN = \frac{AN_2}{\cos NAN_2}$, d. h.:

$$N = \frac{N_2}{\cos\delta} = \frac{P\sin\alpha + Q\cos\alpha}{\cos\delta}.$$

N_2 ist senkrecht auf Ebene BAH, N auf BAC, beide Ebenen bilden also den Winkel δ. In dem aus A beschriebenen sphärischen Dreiecke BHK ist also $HK = \beta$, $BH = 90°$, Winkel $H = 90° - \alpha$, $BHK = \delta$, also:

$$\cot\delta = \frac{\cot\beta}{\cos\alpha}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\beta\cos\alpha,\ \cos\delta = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2+\operatorname{tg}\beta^2}},$$

woraus sich dann der Werth von $F = qN$, und sonach auch der von P ergibt, nämlich:

$$P\cos\alpha = Q\sin\alpha \pm q\cos\alpha\,(P\sin\alpha + Q\cos\alpha)\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2+\operatorname{tg}\beta^2},$$

oder:

$$P(1 \mp q\sin\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2+\operatorname{tg}\beta^2}) = Q(\operatorname{tg}\alpha \pm q\cos\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}\alpha^2+\operatorname{tg}\beta^2}).$$

Sei noch A der mittlere Schraubendurchmesser, a der Hebelarm, an welchem die Kraft P_1 wirkt, so ist:

$$P_1 = \frac{d}{2a} P.$$

Wegen der starken Reibung sind scharfgängige Schrauben sehr gut als Befestigungsmittel, aber als Bewegungsmittel nicht anzuwenden. Bei ihnen ist α sehr klein. Man kann daher in der Wurzel auch $\operatorname{tg}\alpha$ weglassen, wo dann

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}\beta^2} = \frac{1}{\cos\beta}$$

wird, also:

$$P_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\beta \mp \varphi\cos\alpha}{\cos\beta \mp \varphi\sin\alpha}\,\frac{d}{2a}\,Q.$$

Setzt man hierin noch $\cos\alpha = 1$, so hat man annähernd:

$$P_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cos\beta \mp \varphi}{\cos\beta \mp \varphi\operatorname{tg}\alpha}\,\frac{d}{2a}\,Q$$

$$= \frac{h\cos\beta \mp \varphi\pi d}{\pi d\cos\beta \mp \varphi h}\,\frac{d}{2a}\,Q,$$

wo h wieder die Ganghöhe ist.

Uebrigens ist bei Befestigungsschrauben das obere Zeichen zu nehmen. Ist $P_1 = 0$, so kommt:

$$h\cos\beta - \varphi\pi d = 0,$$

also:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\pi d} = \frac{\varphi}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\beta}.$$

Bei flachgängigen Schrauben ist $\beta = 0$, also $\alpha = \varrho$. Diese würden nun zurückgehen, wenn der Ansteigewinkel kleiner als der Reibungswinkel ist. Bei scharfgängigen Schrauben von Metall, setzt man $\beta = 25$ bis 30 Grad, bei denen von Holz $\beta = 30$ bis 40 Grad. Es ist also im ungünstigsten Falle:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos 25^\circ} = 1{,}1084\operatorname{tg}\varrho;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos 30^\circ} = 1{,}1546\operatorname{tg}\varrho$$

annähernd ist zu setzen:

$$\alpha = 1{,}10\,\varrho \text{ und } \alpha = 1{,}16\,\varrho$$

für $\beta = 45^\circ$ ist $\alpha = 1{,}44\,\varrho$.

Es können also scharfgängige Schrauben 10 bis 40 Procent mehr Steigung haben als flachgängige. Uebrigens hat man (vergleiche den Artikel: Reibung), bei Metall auf Metall:

$$\varphi = 0{,}18 \quad \varrho = 10^\circ\,12'$$

bei Metall auf Holz

$$\varphi = 0{,}60 \quad \varrho = 30^\circ\,58'$$

bei Holz auf Holz

$$\varphi = 0{,}50 \quad \varrho = 26^\circ\,34'.$$

6) Differenzialschraube.

Ist w die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung, d der mittlere Durchmesser des Schraubenganges, zu welchem die Umfangsgeschwindigkeit v gehört, α wieder der Ansteigungswinkel, so ist offenbar:

$$\frac{w}{v} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\pi d} = 0{,}3183\,\frac{h}{d}.$$

Es kann also die Schraube benutzt werden, um aus einer gegebenen Umdrehungsbewegung eine beliebig langsam fortschreitende Bewegung hervorzubringen. Indess findet dies Verlangsamen bald seine Grenze in der den kleinen Steigewinkeln entsprechenden geringen Dicke und Haltbarkeit der Schraubengänge. — In den Fällen einer langsamen fortschreitenden Bewegung ist daher die Differenzialschraube anzuwenden. Es ist dies eine Schraube mit zwei Gewinden *AA* und *BB*, (Fig. 372). Das eine bewegt sich in der festen Mutter *CC*, das andere in der beweglichen *FF*. Sei h die Ganghöhe der ersten, h_1 die der zweiten Schraube, so wird bei einer Umdrehung mittels des Kopfes *D*, die Spindel nach einer Seite ein Stück h, und die Mutter *FF* nach der entgegengesetzten um h_1 fortgeschoben. Die Axenbewegung der letzteren ist also:

$$h - h_1 = \pi\,(d\operatorname{tg}\alpha - d_1\operatorname{tg}\alpha_1),$$

wo d, d_1 wieder die mittleren Durchmesser, α, α_1 die Steigewinkel sind, und man hat daher, wenn v die Umfangsgeschwindigkeit der Spindel, w die fortschreitende Geschwindigkeit der Mutter *FF* ist:

$$\frac{w}{v} = \frac{h - h_1}{\pi d} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{d_1}{d}\operatorname{tg}\alpha_1$$

und für jede Umdrehung:

$$v = \pi d, \quad w = h - h_1.$$

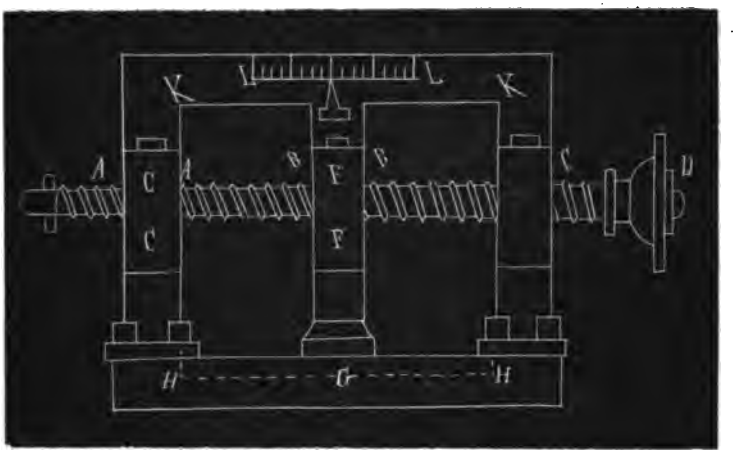
Die Mutter *FF* ist mit Querarm *GZ* verbunden, dessen Enden in den Falzen *HH* und *KK* laufen. Soll diese Schraube als Mikrometerschraube dienen, so ist Zeiger *Z* angebracht, welcher auf der festen Scala *LL* läuft. Ist z. B. $h = 1''$, $h_1 = 0{,}9''$, so ist $h - h_1 = 0{,}1$ und so viel kommt auf jede Umdrehung der Schraube. — Möge an *FF* die Last Q angreifen, und P_1 sei die am Hebelarm a wirkende Kraft, mögen ferner beide Gewinde gleichen mittleren Halbmesser d haben, so ist:

$$P_1 = \frac{d}{2a}\,Q\,[\operatorname{tg}(\alpha+\varrho) - \operatorname{tg}(\alpha_1 - \varrho)]$$

$$\frac{d}{2a}\,Q\,\frac{\sin(\alpha - \alpha_1 + 2\varrho)}{\cos(\alpha+\varrho)\cos(\alpha_1 - \varrho)}.$$

Digitized by Google

Fig. 372.



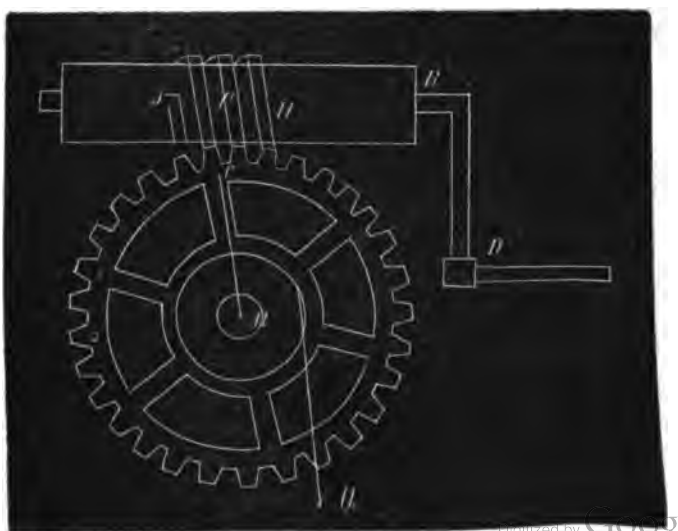
Die doppelte Reibung macht, dass die Schraube übrigens einen noch kleineren Wirkungsgrad hat, als die einfache.

7) Schraube ohne Ende.

Statt in einer Mutter sich zu bewegen, kann die Spindel in ein Zahnrad oder in eine Zahnstange greifen. Man hat dann eine Schraube ohne Ende, welche besonders dann angewandt wird, wenn eine sehr langsame Kreisbewegung entstehen soll, oder wenn eine kleine Umdrehungskraft eine grosse Last heben soll. Durch eine Kurbel *BD* (Fig. 373) wird die Spindel (Schnecke) *AB* in Bewegung gesetzt, welche mit ihrem Gewinde in ein Zahnrad *EF* greift. An der Welle des Rades *ML* befindet sich die Last *Q*. Die Seitenflächen der Zähne müssen die Schraubengewinde längs ihrer ganzen Breite berühren.

Um die Querprofile der Zähne zu finden, kann man ganz die Theorie der Zahnräder und Zahnstangen umgekehrt benutzen (siehe den Artikel: Rad und Zahnstangen). Hat die Spindel rechtwinklige oder cycloidische Querschnitte, so ist demnach den Radzähnen die Evolventen-

Fig. 373.



Digitized by Google

form (welcher Punktzähne oder cycloidische an der Stange entsprechen) zu geben. Was die Dimensionen anbetrifft, so ist auf den Artikel Rad zu verweisen. Hat die Schraube nur ein Gewinde, so setzt man die Grenzhöhe $h = 2{,}16$, wo b die Zahnstärke ist. Sei α der Steigewinkel, r der mittlere Schraubenhalbmesser, so ist:

$$r = \frac{h}{2\pi} \cot \alpha = 0{,}159\, h \cot \alpha,$$

oder wenn $n_1 = \frac{2r}{h}$ genommen wird:

$$r = \frac{n_1 h}{2}.$$

Gewöhnlich setzt man:

$$\frac{d}{h} = 6, \quad r = 3h = 6{,}3\, b.$$

Wirke Kraft P_1 am Hebelarm a, Last Q am Hebelarm b, n die Anzahl der Radzähne. Hat die Schnecke nur ein Gewinde, so ist bei jeder Umdrehung der Weg der Last $\frac{2\pi b}{n}$. Setzt man demnach die Arbeiten der Kraft und Last gleich, so kommt:

$$2\pi a P_1 = 2\pi \frac{bQ}{n}.$$

Sei v die Geschwindigkeit der Kraft, w die der Last, so ist:

$$\frac{v}{w} = \frac{Q}{P_1} = \frac{na}{b}.$$

Hat die Schraube m Gewinde, so rückt während einer Schneckenumdrehung das Rad um m Zähne weiter, es kommt:

$$2\pi a P_1 = 2\pi b Q \frac{m}{n},$$

also:

$$\frac{P_1}{Q} = \frac{w}{v} = \frac{mb}{na}.$$

Was die Reibung anbetrifft, so kann die radiale Bewegung an den Zahnflächen unbeachtet bleiben, da der Reibungsweg in den Schraubengewinden viel grösser ist, man hat dann wie bei der Schraubenspindel und Mutter:

$$P_1 = \frac{r}{a} \frac{h + 2\varphi\pi r}{2\pi r - \varphi h} \frac{b}{r_1} Q,$$

wo r der mittlere Schrauben-, r_1 der mittlere Zahnhalbmesser ist.

Bei einem Gewinde ist $h = \frac{2\pi r_1}{n}$, also:

$$P_1 = \frac{r_1 + \varphi n r}{nr - \varphi r_1} \frac{rb}{r_1 a} Q.$$

Bei m Gewinden hat man $h = \frac{m}{n} 2\pi r_1$, also:

$$P_1 = \frac{mr_1 + \varphi n r}{nr - \varphi m r_1} \frac{r}{r_1} \frac{b}{a} Q.$$

Wird, wie selten geschieht, die Schraube durch das Zahnrad in Bewegung gesetzt, so ist:

$$P_1 = \frac{mr_1 - \varphi n r}{nr + \varphi m r_1} \frac{rb}{r_1 a} Q.$$

Schraubengebläse siehe Gebläse.

Schraubenlinie (Geometrie).

1) Im engeren Sinne wird unter Schraubenlinie diejenige Linie auf einem Rotationscylinder verstanden, welche beim Abwickeln in die Ebene eine Grade gibt. Im weiteren Sinne verstehen wir darunter eine Linie auf irgend einer abwickelbaren Fläche, welche die bezeichnete Eigenschaft hat.

Um Einiges über die Theorie der allgemeinen Schraubenlinie zu geben, glaubt der Verfasser dieses Wörterbuchs zunächst ein neues Coordinatensystem einführen zu müssen, welches sich auf doppelt gekrümmte Linien und abwickelbare Flächen bezieht, da sonst gebräuchliche Systeme, zu den Betrachtungen, welche wir hier anstellen wollen, nicht geeignet sind.

Denken wir uns in einer Curve einen beliebigen festen Punkt A, und zählen von demselben aus die Bogenlängen $AB = s$ als positiv oder negativ je nachdem sie in eine oder die andere Richtung fallen. Dem Endpunkt B des Bogens s gehören dann zwei Krümmungen an, nämlich der Winkel dl, welchen die Tangente an B mit der des nächsten Punktes macht, und der Winkel dm, welchen die durch B gehende Krümmungsebene mit der des nächsten Punktes macht.

Offenbar ist dann l die Summe aller Winkel dl von einem festen aber willkürlichem Punkte an (der nicht mit A zusammenzufallen braucht), und m die Summe aller Winkel dm. Diese Grössen s, l, m bestimmen jeden Punkt B der Curve, und wir betrachten sie daher als die Coordinaten derselben. Eine Transformation der Coordinaten kann dann nur darin bestehen, dass wir die Anfangspunkte der Zählung verlegen. Sind dann s', l', m' die neuen Coordinaten, so ist:

$$s' = a \pm s, \quad l' = b \pm l, \quad m' = c \pm m,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem man die An-

Digitized by Google

fangspunkte auf der einen oder andern Seite von B sich denkt. Diese Transformationsformeln sind die einfachsten, welche überhaupt möglich sind. Unser Coordinatensystem lässt sich also als „das der einfachsten Transformation" bezeichnen.

Jede Curve ist nun gegeben durch zwei Gleichungen von der Form:

$$s = \varphi(l), \quad l = \psi(m).$$

Ist die Curve eine ebene, so ist m constant, also nur die Gleichung $s = \varphi(l)$ vorhanden. Hier bedeutet offenbar l den Winkel, welchen die Tangente in B mit einer beliebigen Richtung in der Ebene macht. l heisst Linienkrümmung, m Flächenkrümmung.

Die Tangenten einer doppelt gekrümmten Linie bestimmen eine abwickelbare Fläche, die ebenfalls gegeben ist, wenn wir die Gleichungen der Curve kennen. Wir nennen diese Curve die Charakteristik der abwickelbaren Fläche. Wird die letztere in die Ebene abgewickelt, so ändern sich die Winkel zweier nächsten Tangenten eben so wenig, als die Bogenlängen, und die erste Gleichung $s = \varphi(l)$ bleibt also bestehen, wir nennen diese Gleichung „Bogengleichung". Die Gleichung $l = \psi(m)$ soll „Krümmungsgleichung" heissen. Von zwei Curven, welche dieselbe Krümmungsgleichung haben, sagen wir, dass sie zu derselben Klasse gehören.

Denken wir uns unter l und m beliebige Coordinaten in der Ebene, so stellt Gleichung $l = \psi(m)$ eine ebene Curve vor, welche wir als „Krümmungsbild" der gegebenen Curve bezeichnen.

Dieselben Ausdrücke beziehen wir auf die abwickelbaren Flächen. Unter allen abwickelbaren Flächen, die zu einer Klasse gehören, gibt es immer eine, deren Characteristik ein Punkt ist. Dies ist offenbar eine Kegelfläche, und die zugehörige Bogengleichung ist

$$s = \text{const.}$$

Zu den abwickelbaren Flächen jeder Klasse gehört also immer ein und nur ein Kegel, den wir als „Krümmungskegel" bezeichnen.

2) Denken wir uns jetzt s, l, m als Coordinaten einer Curve, durch die zugehörige abwickelbare Fläche eine zweite Curve gezogen, deren Coordinaten σ, λ, μ seien.

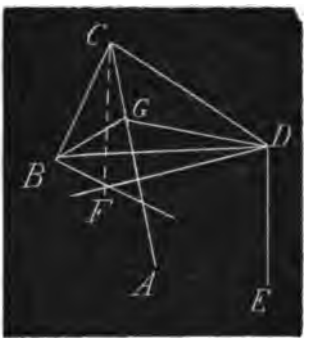
Es soll die Fläche in die Ebene abgewickelt werden, es fragt sich, was aus der Curve $(\sigma\lambda\mu)$ wird.

Denken wir uns die Fläche mit der Charakteristik in der That abgewickelt, so bleiben s, l, σ ungeändert.

Möge die Linienkrümmung, die zum abgewickelten Bogen σ gehört mit λ' bezeichnet werden.

Sei ferner ϑ der Winkel, den irgend eine Krümmungsebene der Curve (slm) mit der zugehörigen von $(\sigma\lambda\mu)$ macht. Sei AC (Fig. 374) eine Tangente der

Fig. 374.



ersten Curve, BC, CD, DE, drei aufeinander folgende Elemente der zweiten, die wir als gleich annehmen, und

CF gleich und parallel DE.

Schneidet man von CA Stücke CG gleich einem der drei Elemente ab, und bildet das sphärische Viereck $BGDF$, dessen Mittelpunkt C ist, so ist BD eine Diagonale, oder:

$$BD = \pi - d\lambda, \quad \text{Winkel } GBD = \vartheta,$$
$$GDF = \vartheta + d\vartheta, \quad \text{Winkel } BGD = \pi - dm,$$
$$\text{Winkel } BDF = d\mu,$$

also:

$$\text{Winkel } GDB = \vartheta + d\vartheta - d\mu.$$

Sei noch:

$$BG = \nu, \text{ so ist } GD = \pi - \nu - d\nu - dl.$$

In Dreieck BGD ist dann:

$$\frac{\sin BG}{\sin D} = \frac{\sin BD}{\sin G} = \frac{\sin GD}{\sin B},$$

also:

$$\frac{\sin \nu}{\sin(\vartheta + d\vartheta - d\mu)} = \frac{\sin d\lambda}{\sin dm} = \frac{\sin(\nu + d\nu + dl}{\sin \vartheta}.$$

Wenn man die unendlich kleinen Grössen als solche in Rechnung bringt, erhält man hieraus:

Digitized by Google

$$\frac{d\lambda}{dm} = \frac{\sin\nu}{\sin\vartheta},$$

$$\sin\vartheta\cos\nu d(\nu+l) = \sin\nu\cos\vartheta d(\vartheta-\mu).$$

Es ist ferner:

$$\cos BD = \cos BG\cos GD + \sin BG\sin GD\cos G,$$

d. h.:

$$\cos dl = \cos\nu\cos(\nu+d\nu+dl) + \sin\nu\sin(\nu+d\nu+dl)\cos dm,$$

oder:

$$(d\lambda)^2 = [d(\nu+l)]^2 + \sin\nu^2\,(dm)^2.$$

Setzt man für $\sin\nu dm$ seinen Werth ein, so ergibt sich hieraus:

$$\cos\vartheta d\lambda = d(\nu+l)$$

und wenn man den Werth von $\cos\vartheta$ in die vorletzte Gleichung einsetzt:

$$d\lambda\sin\vartheta\cos\nu = \sin\nu d(\vartheta-\mu).$$

Die drei bis jetzt gefundenen Gleichungen nehmen dann die bequemere Form an:

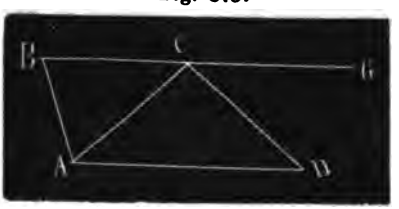
1) $$\sin\vartheta d\lambda = \sin\nu dm,$$

2) $$\cos\vartheta d\lambda = d(\nu+l)$$

3) $$\cos\nu dm = d(\vartheta-\mu).$$

Werden jetzt beide Curven in der beschriebenen Weise in die Ebene abgewickelt, ist dann AA' (Fig. 375) ein Ele-

Fig. 375.



ment der ersten, BC, CD zwei auf einander folgende der zweiten Curve, CC' die Verlängerung von BC, so ist auch: Winkel $BAC = dl$, $AA_1 = ds$, $C'CD = d\lambda'$,

$$BCA = \nu,\quad BC = d\sigma.$$

Setzen wir noch $BA = \varrho$, so kommt:

4) $$\lambda' = l+\nu$$

und im Dreieck BCA:

$$\frac{BA}{\sin C} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A},$$

also:

$$\frac{\varrho}{\sin\nu} = \frac{d\sigma}{dl} = \frac{\nu+d\nu+ds}{\sin(\nu+dl)},$$

woraus sich dann ergibt:

$$\frac{d\sigma}{dl} = \frac{\varrho}{\sin\nu},\quad \sin\nu d(\varrho+s) = \varrho\cos\nu dl,$$

oder wenn man ϱ eliminirt:

5) $$\cos\nu d\sigma = ds + d\left(\sin\nu\frac{d\sigma}{dl}\right).$$

Die Formeln 1) bis 5) lehren sowohl die Gleichung einer doppelt gekrümmten Linie finden, welche entsteht, wenn man eine einfach gekrümmte ($\sigma\lambda'$) mit ihrer Ebene um eine abwickelbare Fläche wickelt, als auch das Umgekehrte.

Sind λ', l und m gegeben, so bestimmen die Formeln 1) bis 4) die Grössen ν, ϑ, λ, μ, ohne dass s und σ vorkommt. D. h.:

Wenn eine ebene Curve auf mehrere abwickelbare Flächen von derselben Klasse gewickelt wird, so gehören auch alle aufgewickelten Curven einer Klasse an.

Sei jetzt die abwickelbare Fläche ein Cylinder, so werden l und s constant sein, es wird also die Formel 2) die einfachere Gestalt haben:

2a) $$\cos\vartheta d\lambda = d\nu.$$

Die Gleichung 5) aber wird unbrauchbar.

Bestimmen wir den Cylinder statt durch die Charakteristik (die hier ein unendlich weit entfernter Punkt ist), durch die auf allen Cylinderseiten senkrechte Curve. Sei S deren Bogenlänge. Ihre Linienkrümmung ist offenbar gleich der Flächenkrümmung m des Cylinders, und ihre Flächenkrümmung constant. Wird der Cylinder in die Ebene abgewickelt, so wird diese Curve offenbar eine Grade. Auch hat man:

5a) $$dS = \sin\nu d\sigma,$$

eine Gleichung, welche die allgemeine Gleichung 5) ersetzt.

3) Die auf die Fläche zu wickelnde Linie soll jetzt eine Grade sein, es wird dann eben die allgemeine Schraubenlinie beim Aufwickeln entstehen.

Es ist dann λ' gleich constant, und die Gleichungen 2) und 4) geben dann:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

während aus 1) und 3) folgt:

$$d\lambda = -\sin(l-\lambda')dm,$$

$$d\mu = -\cos(l-\lambda')dm.$$

Betrachtet man $l-\lambda'$ als Winkel der Tangente einer ebenen Curve mit der Abscissenaxe $m-h$, wo h eine beliebige Constante ist, als Bogenlänge einer ebenen Curve, so sind nach diesen Formeln $A'-\lambda$, $B'-\mu$, wo auch A' und B' belie-

bige Constanten sind, die rechtwinkligen Coordinaten dieser Curve. D. h.:

Die Krümmungsgleichung einer allgemeinen Schraubenlinie ist die Gleichung einer ebenen Curve in rechtwinkligen Coordinaten, deren Coordinaten der einfachsten Transformation die Grössen $l' = l - \lambda'$ (Tangentenwinkel) und $m' = m - h$ (Bogenlänge) sind.

Beispiele. Für den allgemeinen Cylinder ist l constant, also auch

$$l' = l - \lambda'.$$

Diese Gleichung stellt also eine grade Linie vor. Sind $A - \lambda$, und $B - \mu$ die rechtwinkligen Coordinaten derselben, so hat man offenbar:

$$A - \lambda = (B - \mu) \operatorname{tg}(l - \lambda'),$$

oder durch Coordinaten-Transformation:

$$\lambda = \mu \operatorname{tg} \alpha, \text{ wo } \alpha = l - \lambda' \text{ ist}$$

und λ für $A - \lambda$, μ für $B - \mu$ gesetzt ist.

Ist λ' gegeben, so drückt diese Gleichung eine völlig bestimmte Linie aus. Also:

„Alle Schraubenlinien auf Cylinderflächen, welche mit der Cylinderseite gleichen Winkel machen, gehören derselben Klasse an“

und

„Eine lineare Krümmungsgleichung gehört immer einer cylindrischen Schraubenlinie an.“

Betrachten wir die cylindrische Schraubenlinie als Charakteristik einer Fläche, so ist die Krümmungsgleichung derselben $l = m \operatorname{tg} \alpha$ offenbar die Gleichung eines Kreises mit Radius $\cot \alpha$ in Coordinaten der einfachsten Transformation. Um auf dieser Fläche die kürzeste Linie zu bestimmen, so möge die Grade, durch deren Aufwickelung sie entstanden ist, wieder den Winkel λ' mit der Axe der x machen. Sei ferner:

$l' = l - \lambda$, $m' = m - h$ und $h = \lambda' \cot \alpha$,

(es war nämlich h eine beliebige Constante).

Sind also λ, μ rechtwinklige Coordinaten, so hat man als Gleichung des Kreises:

$$\lambda^2 + \mu^2 = \cot \alpha^2$$

und dies ist also die Krümmungsgleichung derjenigen Schraubenlinie, welche auf der durch die cylindrische Schraubenlinie bestimmten abwickelbaren Fläche gezogen ist. Die Gleichung $l = m \operatorname{tg} \alpha$ gehört, wie leicht zu sehen, auch einem Rotationskegel mit Scheitelwinkel α an.

„Es ist also der Rotationskegel der zu den cylindrischen Schraubenlinien gehörige Krümmungskegel, und der Scheitelwinkel $\alpha = l - \lambda'$ ist der Winkel der Schraubenlinie mit der Seite des Cylinders.“ Die Gleichung:

$$\lambda^2 + \mu^2 = \cot \alpha^2$$

ist also auch Krümmungsgleichung einer konischen Schraubenlinie, d. h. derjenigen auf einem Rotationskegel.“

Die Bogengleichung der cylindrischen Schraubenlinie gibt 5a), nämlich:

$$-\sigma \sin(l - \lambda') = S;$$

für den Rotationscylinder mit Radius R, ist $S = Rm$, woraus sich wegen 1) und 3) ergibt:

$$\lambda = m \sin(l - \lambda'), \quad \mu = m \cos(l - \lambda'),$$
$$R\lambda = \sigma \sin(l - \lambda')^2.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit

$$\lambda = \mu \operatorname{tg}(l - \lambda')$$

bestimmt die gemeine Schraubenlinie. Es sind also bei ihr beide Gleichungen linear. Wenn kein Cylinder gegeben ist, gilt die Gleichung 5), welche hier die Form annimmt:

$$ds - \frac{d^2\sigma}{dl} \sin(l - \lambda') = 2d\sigma \cos(l - \lambda').$$

Für die Fläche, deren Charakteristik die gemeine Schraubenlinie ist, hat man nun Gleichungen von der Form:

$$t = Al, \quad l = Bm.$$

Die Gleichung gibt also in diesem Falle durch Integration:

$$\sigma \cos(l - \lambda') - \sigma \sin(l - \lambda') = A,$$

und ausserdem hat man:

$$-d\lambda = \sin(l - \lambda')\, dm,$$
$$-d\mu = \cos(l - \lambda')\, dm,$$

also wegen $l = Bm$:

$$B\lambda = \cos(l - \lambda'), \quad B\mu = -\sin(l - \lambda').$$

Sonach sind die Gleichungen der Schraubenlinie auf einer Fläche, deren Charakteristik die gemeine Schraubenlinie ist, von der Form:

$$\sigma\mu + c\lambda = \frac{A}{B}, \quad \lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{B^2},$$

Vorhin war

$$\lambda^2 + \mu^2 = \cot \alpha^2, \text{ also } B = \operatorname{tg} \alpha.$$

Für den Kegel ist $ds = 0$. Die Gleichung 5) gibt dann:

$$-\frac{d^2\sigma}{dl} \sin(l - \lambda') = 2d\sigma \cos(l - \lambda'),$$

Google

woraus durch Integration folgt:

$$\sigma = C\cot(l-\lambda').$$

Für den Rotationskegel ist $l = m\,\mathrm{tg}\,\alpha$, also:

$\lambda\,\mathrm{tg}\,\alpha = \cos(l-\lambda'), \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha = -\sin(l-\lambda')$.

Es ergibt sich für denselben also:

$$\sigma\mu + C\lambda = 0.$$

4) Wir knüpfen hieran noch einige Entwickelungen, wozu die Theorie der allgemeinen Schraubenlinie dem Verfasser Anlass gegeben hat.

Es soll durch die Tangenten einer gegebenen Curve doppelter Krümmung eine zweite Curve so gelegt worden, dass jedes Element derselben mit der entsprechenden Tangente einen constanten Winkel macht. In diesem Falle nennen wir diese durchgelegte Curve Trajectorie der ersten und der durch sie bestimmten abwickelbaren Fläche, die erste Curve nennen wir Charakteristik der letzteren, und die abwickelbare Fläche charakteristische Fläche derselben.

In den Formeln 1) bis 5) ist Winkel ν constant, und daher:

$$\sin\vartheta\,d\lambda = d(m\sin\nu),\quad \cos\vartheta\,d\lambda = dl,$$
$$\vartheta - m\cos\nu = \mu + k.$$

Durch diese Gleichung wird das Krümmungsbild der Trajectorie bestimmt, es hängt also nur von dem der Charakteristik ab.

Wenn $l = x$, $m\sin\nu = y$, rechtwinklige Coordinaten vorstellen, so sind λ die Bogenlänge und $\mu + m\cos\nu$ der Tangentenwinkel derselben.

Noch gibt Gleichung 5):

$$-ds + \sin\nu\frac{d^2\sigma}{dl} = d\sigma\cos\nu$$

und durch Integration:

$$\sin\nu\frac{d\sigma}{dl} - \sigma\cos\nu = s + A.$$

Eine zweite Integration gibt dann:

$$\sigma = \frac{e^{l\cot\nu}}{\sin\nu}\int s\,e^{-l\cot\nu}\,dl + \frac{Be^{l\cot\nu}}{\sin\nu}.$$

Diese Gleichung bleibt, wie leicht zu erkennen, unverändert, wenn die Charakteristik eine ebene Curve ist. Also wenn die charakteristische Fläche in die Ebene abgewickelt wird, so behalten Charakteristik und Trajectorie diese ihre Beziehung zu einander bei.

Ist aber die Fläche ein Cylinder, so hat man aus 5a):

$$S + A = \sigma\sin\nu,$$

l ist constant,

$$\vartheta = \frac{\pi}{2},\quad \lambda = m\sin\nu + \alpha,$$
$$\mu = \beta - m\cos\nu,\quad \lambda = \mu\,\mathrm{tg}\,\nu + \gamma.$$

In diesem Falle ist die Trajectorie eine Schraubenlinie. Ist die charakteristische Fläche durch die Schraubenlinie bestimmt, oder ein Rotationskegel, so ist:

$$l = m\,\mathrm{tg}\,\alpha,\quad \mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{\sin\nu}{\mathrm{tg}\,\alpha},$$

also ϑ constant,

$$\lambda = \frac{m\sin\nu}{\sin\vartheta} + a,\ m = b - \frac{\mu}{\cos\nu},$$
$$\lambda = c\mu + d.$$

Die Trajectorie ist also wieder eine cylindrische Schraubenlinie. Ist die Charakteristik eine gemeine Schraubenlinie, so ist:

$$s = cl,\quad \sigma = \frac{Be^{l\cot\nu}}{\sin\nu} - Cl.$$

Dies ist (vergleiche den Artikel: Trajectorie) die Gleichung einer Kreistrajectorie, oder der Evolvente einer logarithmischen Spirale. Eine solche Curve entsteht also durch Abwickelung. Wir wollen noch den Cylinder bestimmen, auf dem die gefundene Curve eine Schraubenlinie bildet.

Wie leicht zu sehen, ist $l = \lambda\cos\vartheta$.

Sei m die Flächenkrümmung des gesuchten Cylinders, ν ein constanter Winkel, so ist nach Abschnitt 3.:

$$S = \sigma\sin\nu_1,\quad \lambda = m_1\sin\nu_1.$$

Diese Formeln in Verbindung mit

$$l = \lambda\cos\vartheta$$

geben zwischen S und m_1 eine ähnliche Gleichung wie die, welche zwischen σ und λ stattfand, also:

„Eine gemeine Schraubenlinie hat zur Trajectorie eine Schraubenlinie auf einem Cylinder, dessen Basis die Evolvente einer logarithmische Spirrale ist.

5) Setzen wir $\nu = \frac{\pi}{2}$, so verwandeln sich offenbar Charakteristik und Trajectorie in Evolute und Evolvente. Die charakteristische Fläche nennen wir dann Evolventenfläche. Die fünf Formeln haben nun die Gestalt:

$$\vartheta = \mu + K,\quad dm = \sin(\mu + K)\,d\lambda,$$
$$dl = \cos(\mu + K)\,d\lambda,\quad s = \frac{d\sigma}{dl}$$

oder: $\sigma = \int s\,dl + Al.$

Digitized by Google

Unter m und l können also wieder die rechtwinkligen Coordinaten einer ebenen Curve verstanden werden, deren Bogenlänge λ und deren Tangentenwinkel mit der Axe der x gleich $\mu + K$ ist. Ist die Evolventenfläche ein Cylinder, so ist l constant, also auch μ, die Evolventen sind ebene Curven. — Ist die Evolute eine cylindrische Schraube, so ist:

$$l = m \operatorname{tg} \alpha, \quad \mu = \alpha, \quad \lambda = \frac{l}{\sin \alpha},$$

also die Evolvente eine ebene Curve. Ist die Schraubenlinie eine gemeine, also $s = Bl$, so kommt:

$$\sigma = \tfrac{1}{2} B\lambda^2 \sin \alpha^2 + A\lambda \sin \alpha,$$

dies ist die Gleichung einer Kreisevolvente (vergl. den Artikel: Trajectorie).

Sei die Evolute eine Schraubenlinie auf einer Fläche, deren Charakteristik eine cylindrische Schraube ist, so ist:

$$l^2 + m^2 = \alpha^2;$$

es kommt also

$$\lambda = \alpha\mu.$$

Die Evolvente ist also eine cylindrische Schraube. Es fragt sich, auf welchem Cylinder sie liege.

Wir setzen:

$$S = \sigma \sin \nu_1, \quad \lambda = m_1 \sin \nu_1,$$

also:

$$l = \alpha \sin \frac{\lambda}{\alpha}$$

(vergl. Abschnitt 3), die beliebige Constante K ist hier gleich Null gesetzt. Diese Gleichungen in Verbindung mit

$$\sigma = \int s dl + Al$$

geben S als Functtion von m_1.

Diejenige Schraube, deren Charakteristik die gemeine Schraubenlinie war, hatte nach Abschnitt 3) die Gleichungen:

$$sm + \beta l = \gamma, \quad m = \sqrt{\alpha^2 - l^2};$$

also in diesem Falle ist:

$$\sigma = \gamma \arcsin \frac{l}{\alpha} - \beta \sqrt{\alpha^2 - l^2} + Al,$$

oder da $l = \alpha \sin \frac{\lambda}{\alpha}$ war:

$$\sigma = \gamma \frac{\lambda}{\alpha} - \beta \cos \frac{\lambda}{\alpha} + A\alpha \sin \frac{\lambda}{\alpha},$$

$$\frac{\lambda}{\sin \nu_1} = m_1,$$

also wenn man die Constanten ändert:

$$S = am_1 + b \cos (sm_1) + c \sin (sm_1).$$

Für den Rotationskegel, wird $a = 0$, also:

$$S = b \cos (sm_1) + c \sin (sm_1),$$

d. h. wenn man darauf achtet, dass diese Gleichung eine Epicycloide oder Hypocycloide vorstellt:

„Die Evolvente der kürzesten Linie auf einem Rotationskegel ist eine Schraubenlinie auf einem Cylinder mit epicycloidischer oder hypocycloidischer Basis."

6) Jede Evolvente hat unendlich viel Evoluten. Dies ist auch richtig in Bezug auf ebene Curven, wenn man diejenigen Evoluten berücksichtigt, welche ausserhalb der Ebene der Evolvente fallen. In jedem Falle bestimmen alle Evoluten eine Fläche. Legt man durch jeden Punkt der Evolvente eine Ebene senkrecht auf der Evolvente, so hüllen alle diese Ebenen die Evolutenfläche ein. Die Letztere ist also abwickelbar. Bestimmen wir ihre Charakteristik.

Sei L ihre Linienkrümmung, M ihre Flächenkrümmung, S der Bogen, λ, μ, σ sollen diese Grössen in Bezug auf die Evolvente sein, l, m, s in Bezug auf eine beliebige Evolute.

Die Krümmungsebene der Charakteristik der Evolutenfläche steht in jedem Punkte auf der Evolvente senkrecht, und umgekehrt. Es ist also:

$$L = \mu, \quad M = \lambda.$$

Der Winkel zwischen den Krümmungsebenen der Evolvente und Evolute sei gleich ϑ, es ist also:

$$\vartheta = K + \mu = K + L$$

und der Winkel zwischen der Tangente der Charakteristik der Evolutenfläche, welche Fläche auf der Krümmungsebene der Evolvente senkrecht steht, und dieser letztern Krümmungsebene wird sein gleich

$$\frac{\pi}{2} - K - L.$$

In der Krümmungsebene der Evolute aber liegt die Evolutentangente ac, (Fig. 376) die Evolvententangente ab, es ist

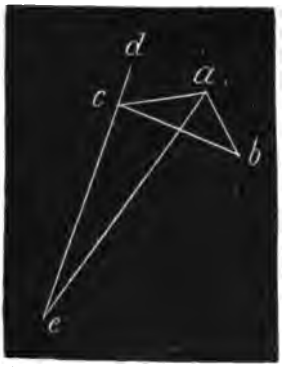
$$\text{Winkel } bac = R.$$

Sei ferner cd die Tangente an die Charakteristik der Evolutenfläche, so steht auch ce auf ab, ab auf Ebene acd senkrecht. Es ist also Winkel eca der Neigungswinkel zwischen ec und Ebene cab, ferner:

$$\text{Winkel } dca = \frac{\pi}{2} - K - \mu.$$

Digitized by Google

Fig. 376.



Die Formeln des vorigen Abschnittes geben dann:

$$dm = \sin(L+K)\,dM,$$
$$dl = \cos(L+K)\,dM.$$

Die Formel 5) aber gibt, wenn man darin S für s, s für σ, $\frac{\pi}{2} - K - L$ für ν, L für l schreibt:

$$-dS + d\left(\cos(K+L)\frac{ds}{dL}\right) = \sin(K+L)ds,$$

$$-dS + \cos(K+L)\frac{d^2s}{dL} = 2\,ds\sin(K+L).$$

Diese Gleichungen stimmen völlig mit denen einer Schraubenlinie überein, wenn man in diesen letztern Formeln statt:

$$l,\ m,\ \lambda',\ s,\ \sigma,\ \lambda,\ \mu$$

bezüglich schreibt:

$$\frac{\pi}{2} - L,\ M,\ K,\ S,\ -s,\ l,\ m.$$

$\frac{\pi}{2} - L$ und $-s$ entstehen aber durch eine Coordinatentransformation aus L und s, und da eine solche immer gestattet ist, so folgt:

„Alle Evoluten sind Schraubenlinien auf der Evolutenfläche."

Der Winkel K ändert sich von Evolute zu Evolute. Hat eine Evolute einen Punkt mit der Evolvente gemein, so gehen alle Evoluten durch denselben. Wird also die Evolutenfläche abgewickelt, so entspricht jede durch diesen Punkt gehende Grade einer Evolute.

Um die Integrationsconstanten zu bestimmen, nehmen wir an, dass l, m, s sich auf eine Schraubenlinie, l_1, m_1, s_1 auf eine andere beziehen, dass zu der ersteren Winkel K, zur zweiten K_1 gehöre, dann geben die Werthe von M und dm leicht die Beziehungen:

$$l = l_1\cos(K-K_1) - m_1\sin(K-K_1)$$
$$m = l_1\sin(K-K_1) + m_1\cos(K-K_1)$$

und wegen $d\sigma = sdl = s_1dl_1$ hat man:

$$s[\cos(K-K_1)dl_1 - \sin(K-K_1)dm] = s_1dl_1.$$

Ist die Evolutenfläche ein Cylinder, also $L = \mu = \text{const.}$, so ist die Evolvente eine ebene Curve. Für $L = -K$ wird m constant, d. h. es gibt immer eine ebene Evolute, wie dies an sich klar ist. Für diese ist $l = M$, d. h. sie ist die Basis des Cylinders.

Ist die Evolutenfläche ein Kegel, so ist:

$$dS = 0 \text{ also } \cos(K+L)\frac{d^2s}{dL} = 2\,ds\sin(K+L).$$

Im Falle des Rotationskegels erhält man natürlich als Evolvente wieder eine Schraubenlinie auf einem Cylinder mit epicycloidischer oder hypocycloidischer Basis.

7) Wenn man die Evolutenfläche in die Ebene wickelt, so beschreibt eine Tangente, die Charakteristik derselben eine „abwickelnde Fläche", auf der sich die Evoluten aller Schraubenlinien befinden. Die Coordinaten derselben sollen sein:

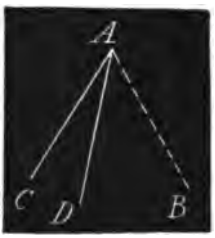
$$A,\ M,\ \Sigma,$$

es ergibt sich dann unmittelbar:

$$M = M + \frac{\pi}{2},$$

Seien AD, AB (Fig. 377) auf einander folgende Richtungen derjenigen Tangen-

Fig. 377.



ten an die Evolutencharakteristik, welche die abwickelnde Fläche beschreibt, AC diejenige Tangente um welche die augenblickliche Drehung stattfindet, so ist:

$$\text{Winkel } DAC = BAC = L,$$

der Ebenenwinkel $CA = M$, $BAD = dA$ und:

Digitized by Google

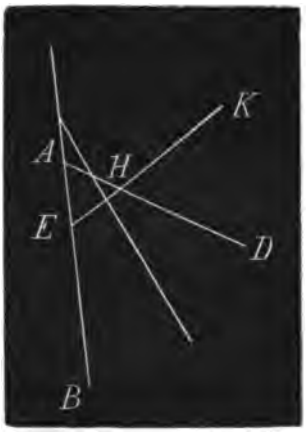
$$\cos dA = \cos L^2 + \sin L^2 \cos dM,$$

d. h.:

$$dA = \sin L dM,$$

Sei EC (Fig. 378) die folgende Tangente an die Evolutencharakteristik, so

Fig. 378.



ist: $AE = d\Sigma$. Sei noch $HA = R$, so ist: $HE = R + dR - dS$, W. $AHE = dL$,

$$\frac{d\Sigma}{dL} = \frac{R}{\sin L},$$

und

$$\frac{R}{\sin(L + dL)} = \frac{R + dR - dS}{\sin L},$$

woraus folgt:

$$-\sin L \frac{d^2\Sigma}{dL} + dS = 2\cos L d\Sigma.$$

Ist die Evolutenfläche ein Cylinder, und $AB = S'$ die abgewickelte Basis desselben, so ist:

$$DE = d\Sigma, \quad \sin\alpha d\Sigma = dS',$$

somit:

$$S' = \Sigma \sin\alpha,$$

wo α der Winkel der die Evolvente bildenden Linie mit der Seite des Cylinders, also beliebig ist. Sei noch AE parallel dieser Seite, so entsteht ein zweiter Cylinder senkrecht auf dem ersten. Sei Σ' der Bogen seiner Basis, so ist:

$$d\Sigma' = S' dM$$

für die Evolvente der Basis des ersten Cylinders. Da L für den Cylinder constant ist, kommt:

$$A = M \sin L.$$

Die abgewickelte Fläche hat zur Charakteristik eine cylindrische Schraube.

Für den Rotationscylinder ist:

$$S' = AM, \quad \Sigma' = BA.$$

Die abgewickelte Fläche hat zur Charakteristik eine gemeine Schraube.

Für $L = 0$ kommt ein Cylinder, dessen Basis eine Kreisevolvente ist.

Für den Kegel ist

$$dS = 0, \quad \Sigma = A\cot L.$$

A ist willkürlich. Für $A = 0$ hat man wieder einen Kegel. Für den Rotationskegel ist:

$$L = BM, \quad BA = -\cos(BM),$$

$$\Sigma = \frac{CA}{\sqrt{1 - B^2}}.$$

Für $C = 0$ ist dies ein Kegel, dessen Krümmungsbild eine der Cycloiden ist.

Schliesslich bemerken wir noch, dass, da die Schraubenlinie mit den Tangentialebenen der abwickelbaren Fläche in die Ebene gewickelt eine Grade gibt, und dies die Eigenschaft der kürzesten Linien auf beliebigen Flächen ist, die allgemeine Schraubenlinie auch definirt werden kann als „die kürzeste Linie auf einer abwickelbaren Fläche."

Schraubenrad (Maschinenlehre).

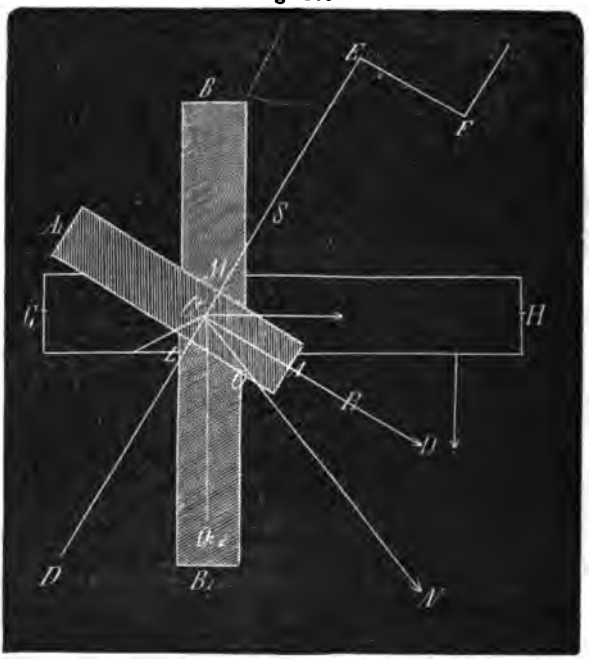
1) Allgemeines.

Schraubenrad wird ein Rad mit schiefen oder schraubenförmigen Zähnen genannt. Zwei in einander greifende Schraubenräder bilden ein Schraubenräderwerk.

Die Umdrehungsebenen der Räder können hierbei einen beliebigen Winkel bilden. Dieser Winkel ist P_1CQ_1 (Fig. 379), AA_1 und BB_1 sind die Räder, DE und GH ihre Axen. Werde nun AA_1 mittels der Kurbel EF mit Kraft P umgedreht, so greifen die Zähne LM des Rades AA_1 in die von BB_1 ein.

Möge die momentane Berührungsfläche LM zwischen den Zähnen die Winkel $CMA = \alpha$ und $CMB = \alpha_1$ mit den Umdrehungsebenen beider Räder machen, dann würde die Normale CN an LM mit diesen Umdrehungsebenen $R - \alpha$, $R - \alpha_1$ bilden; seien ferner $r = CA$, $r_1 = CB$ die Radien der Räder, der Kraftarm $EF = a$, und der, an dem die Last Q wirkt gleich b. Der Druck N zwischen den Zähnen gibt die Seitenkräfte P und S des Rades AA_1, und Q_1 und R des Rades BB_1. P_1 ist die Umdrehungskraft von AA_1, Q_1 die von BB_1, S und R sind parallel den Rad-

Fig. 379.



axen, vergrössern also nur die Zapfenreibung. Es ist nun:

$$P_1 = N \sin \alpha, \quad Q_1 = N \sin \alpha_1,$$

also:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1},$$

aber auch

$$\frac{P_1}{P} = \frac{a}{r}, \quad \frac{Q_1}{Q} = \frac{b}{r_1},$$

also:

$$\frac{P}{Q} = \frac{brP_1}{ar_1 Q_1} = \frac{br \sin \alpha}{ar_1 \sin \alpha_1}.$$

Wenn die Radebenen auf einander senkrecht stehen, so ist:

$$\alpha + \alpha_1 = R, \quad \frac{P}{Q} = \frac{rb}{r_1 a} \operatorname{tg} \alpha$$

ganz wie bei der Schraube ohne Ende, welche in der That als ein Schraubenräderwerk von der bezeichneten Eigenschaft zu betrachten ist.

Soll aber noch auf die Reibung Rücksicht genommen werden, und ist ϱ der Reibungswinkel, so kommt:

$$P_1 = N \sin (\alpha + \varrho), \quad Q_1 = N \sin (\alpha_1 - \varrho),$$

also:

$$\frac{P}{Q} = \frac{brP_1}{ar_1 Q_1} = \frac{br \sin (\alpha + \varrho)}{ar_1 \sin (\alpha_1 - \varrho)}.$$

Für $\alpha + \alpha_1 = R$ kommt wieder der Ausdruck für die Schraube ohne Ende, für $\alpha + \alpha_1 = 180$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{rb}{a_1 a},$$

offenbar hat man hier ein blosses Stirnrad mit Schraubenzähnen.

Bei den Schraubenrädern wirken die Räder nicht allein in der Axenrichtung, sondern auch seitlich auf die Lager. — Sind l, l_1 die Axenlängen, so sind die beiden einander entgegengesetzten Kräfte mit welcher die Welle DE durch Kraft S gegen das Lager gedrückt wird:

$$S_1 = S_2 = \frac{r}{l} S$$

und die, mit welcher Welle GH durch Kraft R an das Lager gedrückt wird:

$$R_1 = R_2 = \frac{r_1}{l_1} R.$$

Also dieser seitliche Druck ist desto grösser, je kleiner l, l_1, also je kürzer die Axen sind.

Während ein Zahn LM arbeitet, seien die Stücke, um welche die Räder fortrücken, bezüglich gleich LO und MO, c, c_1 die Umdrehungsgeschwindigkeiten, dann ist:

$$\frac{c}{c_1} = \frac{LO}{MO} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}.$$

Sind n, n_1 die Umdrehungszahlen in der Minute, $u = \frac{n}{n_1}$ das Umsetzungsverhältniss, so ist:

$$u = \frac{c_1 r}{c r_1} = \frac{r\sin\alpha}{r_1\sin\alpha_1}.$$

Ist u gegeben, so kann aus r, r_1, α der Werth von α_1 gefunden werden. Ist dann noch Q bekannt, so berechnet man P_1 und dann:

$$N = \frac{P_1}{\sin\alpha} = \frac{aP}{r\sin\alpha},$$

aus dem Normaldrucke N erhält man die nöthige Zahndicke (vgl. den Artikel: Rad):

$$b = 0{,}003\sqrt{n}$$

und die Theilungen des Triebrades und des Getriebes:

$$s = \frac{2{,}1\,b}{\sin\alpha}, \quad s_1 = \frac{2{,}1\,b}{\sin\alpha_1}.$$

Die Anzahlen der Zähne sind:

$$z = \frac{2\pi r}{s} = \frac{2\pi r\sin\alpha}{2{,}1\,b},$$

$$z_1 = \frac{2\pi r_1}{s} = \frac{2\pi r_1\sin\alpha_1}{2{,}1\,b},$$

also das Verhältniss der Zähnezahlen:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{r\sin\alpha}{r_1\sin\alpha_1} = u,$$

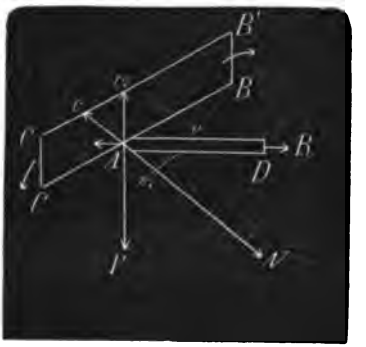
also das Verhältniss der Geschwindigkeiten:

$$\frac{w}{v} = \frac{P}{Q} = \frac{nb_1}{n_1 a_1} = \frac{1}{u}\,\frac{b_1}{a_1}.$$

2) Schraubenräder der Schiffe.

Schraubenräder, wie sie zum Treiben der Schiffe angewandt werden, sind Flügelräder, deren Flügel nach einer Schraubenfläche gekrümmt werden. Das Schraubenrad befindet sich unmittelbar vor dem Steuer, seine Welle in der Richtung der Längenaxe des Schiffes, und ist, wo sie in das Innere des Schiffes geht, durch eine Stopfbüchse geschlossen. Wird die Welle AD (Fig. 380) durch die Dampfmaschine in Bewegung gesetzt, so schlägt Flügel BC mit Geschwindigkeit c gegen das Wasser, welches durch seine Reaction einen Normaldruck N auf den Flügel ausübt. Dieser zerfällt in zwei Componente, die eine P wird senkrecht auf der Wellenaxe von der Umtriebskraft der Welle vernichtet, die andere R

Fig. 380.



parallel der Wellenaxe, wird aufs Schiff übertragen, und gibt demselben eine gewisse Geschwindigkeit. —

Die Leistung des Schraubenrades hängt von dem Steigewinkel $BAc = CAP = \alpha$ ab. Sei c die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit der Radaxe also auch des Schiffes, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Flügelfläche in normaler Richtung dreht:

$$c_1 = c\sin\alpha$$

und die Geschwindigkeit, mit welcher sie in dieser Richtung zurückgeht:

$$v_1 = v\cos\alpha.$$

Die Flügelfläche schlägt somit auf das Wasser mit einer Geschwindigkeit:

$$c_1 - v_1 = c\sin\alpha - v\cos\alpha.$$

Wird jetzt unter F_1 der Inhalt aller Flügelflächen, und unter γ die Dichtigkeit des Wassers verstanden, so ist:

$$N = 3\,\frac{(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2}{2g}\,F_1\gamma,$$

ganz wie beim Windrade (vergleiche den Artikel: Windrad). Man erhält dann für die Axenkraft:

$$R = N\cos\alpha$$

und für die Umdrehungskraft:

$$P = N\sin\alpha.$$

Die Arbeit aber ist:

$$L = Pc = \frac{3\,(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2}{2}\,c\sin\alpha F_1\gamma.$$

In der Praxis multiplicirt man noch die Ausdrücke R, P, L mit einem Reductionscoefficienten ζ_1, welcher durch die Erfahrung zu bestimmen ist. Setzt man dann die Axenkraft R gleich dem Widerstande W, so ist:

Digitized by Google

um Axe OA gedreht, so entsteht eine unendlich kleine Kugelzone, deren Höhe gleich

$$r\cos\vartheta - r\cos(\vartheta + d\vartheta) = r\sin\vartheta d\vartheta$$

und deren Flächeninhalt somit gleich

$$2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta$$

ist. Der entsprechende Theil der Kugelschale hat die Dicke dr und die Dichtigkeit δ, alle Punkte desselben sind gleich weit von A entfernt und üben also eine gleiche Anziehung aus. Ist k die Anziehung eines Punktes der Zone, so ist die nach OA gerichtete Componente gleich

$$k\cos MAO = k\frac{AO - OP}{AM} = k\frac{a - r\cos\vartheta}{\varrho} = k\frac{a^2 + \varrho^2 - r^2}{2a\varrho},$$

also die Gesammtanziehung aller Punkte der Zone auf A:

$$\frac{a^2 + \varrho^2 - r^2}{2a\varrho}\Sigma(k).$$

Wo für $\Sigma(k)$ die Summe aller Anziehungen k, also:

$$\frac{\varepsilon\mu\delta}{\varrho^2} 2\pi r^2 \sin\vartheta d\vartheta\, dr$$

zu setzen ist. Diese Gesammtanziehung W ist also:

$$W = \frac{\mu\delta\varepsilon\pi r^2 \sin\vartheta\,(a^2 + \varrho^2 - r^2)\, d\vartheta dr}{a\varrho^2}.$$

Aus der Gleichung:

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\vartheta$$

folgt noch:

$$\varrho d\varrho = ar\sin\vartheta d\vartheta,$$

also:

$$W = \frac{\mu\delta\varepsilon\pi r\,(a^2 + \varrho^2 - r^2)\, d\varrho\, dr}{a^2\varrho^2}.$$

Um die Gesammtanziehung der ganzen Schale zu finden ist nun die Summe oder das Integral aller Werthe W, welche den verschiedenen Werthen von ϱ entsprechen, zu bilden. Da die Grenzwerthe von ϱ für den Fall, dass A nicht innerhalb der Kugelschale liegt, $a - r$ und $a + r$ sind, so hat man für die Gesammtanziehung V:

$$V = \frac{\mu\delta\varepsilon\pi r dr}{a^2}\int_{a-r}^{a+r}\frac{a^2 + \varrho^2 - r^2}{\varrho^2}\, d\varrho,$$

d. h.:

$$V = \frac{\mu\delta\varepsilon\pi r dr}{a^2}(2r + a + r - a + r)$$

$$V = \frac{4\mu\delta\varepsilon\pi r^2 dr}{a^2} = \frac{m\varepsilon}{a^2},$$

wo m die Masse der Kugelschale ist.

Denselben Ausdruck würde man erhalten, wenn man sich die Masse der Kugelschale im Mittelpunkt vereinigt dächte. — Wie nun auch das Gesetz der Dichtigkeit mit dem Radius sich ändere, immer wird die Kugel in Schalen wie die obige getheilt werden können. Deren Anziehung auf den Punkt A, der nicht innerhalb der Kugel liegt, wird sich dann aus den den einzelnen Schalen entsprechenden Werthen von V zusammensetzen, d. h. gleich:

$$\frac{\mu\varepsilon m}{a^2} = \frac{\mu\varepsilon M}{a^2}$$

sein, wenn $M = \Sigma m$ die Masse der Kugel ist. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Nehmen wir aber an, dass der Punkt A innerhalb der Kugelschale liege. So ist um V zu bilden, dass Integral von W in den Grenzen $\varrho = r - a$ und $\varrho = r + a$ zu nehmen. Also es ergibt sich dann:

$$V = \frac{\mu\delta\varepsilon\pi r dr}{a^2}\int_{r-a}^{r+a}\frac{a^2 + \varrho^2 - r^2}{\varrho^2}\, d\varrho$$

$$= \frac{\mu\delta\varepsilon\pi r dr}{a^2}(2a - a + r - a - r) = 0.$$

Die ganze Schale übt also keine Anziehung aus. Legt man durch Punkt A eine Kugeloberfläche concentrisch der gegebenen, deren Radius also gleich a ist, so wird die ganze Schicht, welche über derselben liegt, also wo die Radien der begrenzenden Kugelflächen bezüglich a und r sind, überhaupt keine Wirkung ausüben, da sich diese Schicht in Schalen wie die obige theilen lässt. Dagegen wird die Vollkugel mit Radius a, für welche Punkt A kein innerer ist ganz nach dem eben gegeben Gesetze, also so wirken, als wenn die ganze Masse derselben in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. D. h.:

II. Ein Punkt, der sich im Innern der Erde befindet, wird, wenn man die letztere sich als eine aus concentrischen Schichten bestehende Kugel denkt, deren jede constante Dichtigkeit hat, nur von der der Erde concentrischen Kugel angezogen, deren Oberfläche durch den angezogenen Punkt geht.

Ist jetzt δ' die mittlere Dichtigkeit der ganzen Erde, δ'' die eines Theiles der Erde mit Radius a, der eine ihr

concentrische Kugel bildet, so sind die Anziehungen auf einen Punkt auf der Erdoberfläche, und auf einen Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte gleich a ist, bezüglich:

$$\frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \delta' \varepsilon}{r^2} = \frac{4}{3}\pi r \delta' \varepsilon, \text{ und } \frac{4}{3}\pi a \delta'' \varepsilon,$$

wo die Massen ε beider angezogenen Punkte gleich sind.

„Es verhalten sich also die bezüglichen Anziehungen wie $r\delta'$ zu $a\delta''$."

„Die Anziehungen, welche die Erde auf zwei in ihrem Innern befindliche Punkte ausübt, verhalten sich wie die Produkte ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte in die mittleren Dichtigkeiten der der Erde concentrischen Kugeln, welche durch diese Punkte gehen."

Wäre die Erde homogen, so wäre dies Verhältniss, das der Entfernung der Punkte vom Erdmittelpunkte allein.

Für äussere Punkte ist dagegen nach dem obigen dies Verhältniss der Anziehungen der Quadrate der Entfernungen vom Mittelpunkte.

In beiden Fällen aber ist, wenn der angezogene Punkt der Erdoberfläche sehr nahe ist, offenbar die Entfernung vom Mittelpunkt als constant zu setzen, da die Entfernung der Erdoberfläche vom Mittelpunkt eine grosse ist.

Die mittlere Dichtigkeit einer der Erde concentrischen Kugel, deren Oberfläche der Erdoberfläche sehr nahe kommt, ist offenbar gleich der Erdoberfläche, und somit ist es in beiden Fällen gerechtfertigt, wenn man die Schwere als constant betrachtet

Indess ist dies nur der Fall, wenn man die Erde als vollständige Kugel betrachtet. Setzen wir jetzt voraus, dass dieselbe ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit sehr kleiner Exentricität sei. Fügen wir jedoch die Annahme hinzu, dass dieses Ellipsoid in einander ähnliche Schalen von unendlich kleiner Dicke, deren jede constante Dichtigkeit haben soll, zerfalle. Nach der Theorie der Anziehung der Ellipsoide (vergl. den Artikel: Anziehung) zerfällt die Einwirkung einer solchen Schale auf einen äussern Punkt in die Componenten:

$$x = \frac{8\mu MS}{A^3}\,\frac{u^2 du}{1+\lambda^2 u^2}$$

$$y = \frac{8\mu M\eta}{A^3}\,\frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^2}$$

$$z = \frac{8\mu M\zeta}{A^3}\,\frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^2}$$

Hier ist A die Rotationsaxe des Erdellipsoids, ξ, η, ζ die Coordinaten des angezogenen Punktes, welche nach den Hauptaxen des Ellipsoids gerichtet sind, und zwar ξ nach der Rotationsaxe, M ist die Masse eines der Erde gleichen Ellipsoids, welches jedoch die Dichtigkeit δ derjenigen Schale hat, welche wir betrachten, es ist also:

$$M = \frac{4}{3}\pi\delta AB^2,$$

wenn B die andere Axe des Ellipsoids ist. Es ist ferner:

$$\lambda^2 = \frac{B^2 - A^2}{A^2} \text{ und } u = \frac{a}{a'},$$

wo a die Rotationsaxe der betrachteten Schale, a' die eines ihr confocalen Ellipsoids ist, welches durch den angezogenen Punkt geht. Sind b, b' dann die andern Axen dieser Schalen, so erhält man also:

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 \text{ und } \frac{a}{A} = \frac{b}{B}.$$

Legt man durch die Axe der z und den angezogenen Punkt P eine Ebene, deren Durchschnitt mit der Ebene yz, OQ sei, und setzen wir $PQ = \varrho$, Winkel $POQ = \varphi$, so ist φ die geographische Breite und wir haben, wenn $\sqrt{\eta^2 + \zeta^2} = k$ gesetzt wird:

$$\xi = \varrho \sin\varphi, \quad k = \varrho\cos\varphi;$$

ist noch $\sqrt{y^2 + z^2} = U$ die Resultante von Y und Z, so ergibt sich:

$$U = \frac{8M\mu\varrho\cos\varphi}{A^3}\,\frac{u^2 du}{(1+\lambda^2 u^2)^2}$$

$$X = \frac{8M\mu\varrho\sin\varphi}{A^3}\,\frac{u^2 du}{1+\lambda^2 u^2}.$$

Wegen der Gleichung der durch P gelegten Ellipse hat man:

$$\frac{\varrho^2\sin\varphi^2}{a'^2} + \frac{\varrho^2\cos\varphi^2}{b'^2} = 1,$$

oder, wie leicht zu sehen:

$$\frac{\varrho^2 u^2}{a^2}\left(\sin\varphi^2 + \frac{\cos\varphi^2}{1+u^2\lambda^2}\right) = 1,$$

also:

$$u^4\varrho^2\lambda^2\sin\varphi^2 + u^2(\varrho^2 - a^2\lambda^2) = a^2$$

$$u^2 = -\frac{\varrho^2 - a^2\lambda^2}{2\varrho^2\lambda^2\sin\varphi^2}\left(1 - \sqrt{\frac{1+4a^2\varrho^2\lambda^2\sin\varphi^2}{(\varrho^2 - a^2\lambda^2)^2}}\right).$$

Der Wurzelgrösse ist das negative Zeichen zu geben, damit u^2 positiv ist.

Digitized by Google

Da nun die Exentricität der Erde, und mithin auch λ sehr klein ist, vernachlässigen wir die höheren Potenzen von λ^2.

Es ergibt sich so:

$$\sqrt{1+\frac{4a^2\varrho^2\lambda^2\sin\varphi^2}{(\varrho^2-a^2\lambda^2)^2}}=1+\frac{2a^2}{\varrho^2}\lambda^2\sin\varphi^2+\frac{2a^4}{\varrho^4}\lambda^4\sin\varphi^2(1+\cos\varphi^2)$$

mithin:

$$u^2=\frac{a^2}{\varrho^2}+\frac{a^4}{\varrho^4}\lambda^2\cos\varphi^2$$

$$u=\frac{a}{\varrho}+\frac{a^2}{2\varrho^2}\lambda^2\cos\varphi^2$$

$$du=da\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{3}{2}\frac{a^2}{\varrho^3}\lambda^2\cos\varphi^2\right)$$

$$u^2du=\frac{a^2}{\varrho^3}da\left(1+\frac{5}{2}\frac{a^2}{\varrho^2}\lambda^2\cos\varphi^2\right)$$

$$\frac{1}{1+\lambda^2u^2}=1-\lambda^2u^2=1-\frac{\lambda^2a^2}{\varrho^2}$$

$$\frac{1}{(1+\lambda^2u^2)^2}=1-\frac{2\lambda^2a^2}{\varrho^2}.$$

Hieraus folgt dann:

$$U=\frac{3M\mu\cos\varphi}{A^3}\left(1-\frac{2\lambda^2a^2}{\varrho^2}+\frac{5}{2}\frac{a^2}{\varrho^2}\lambda^2\cos\varphi^2\right)\frac{a^2}{\varrho^2}da$$

$$X=\frac{3M\mu\sin\varphi}{A^3}\left(1-\frac{\lambda^2a^2}{\varrho^2}+\frac{5}{2}\frac{a^2}{\varrho^2}\lambda^2\cos\varphi^2\right)\frac{a^2}{\varrho^2}da.$$

Um die Gesammtanziehung aller concentrischen Schalen, aus dem das Ellipsoid besteht, zu bestimmen, setzen wir:

$$\int\delta a^2da=k,\quad\int\delta a^4da=k.$$

Wo sich die Integrale von $a=0$ bis $a=A$ erstrecken, und bezeichnen mit U', X' die Attractionscomponenten des ganzen Ellipsoids, parallel den Componenten U und X, dann ist:

$$U'=\frac{4\pi B^3}{A^3}\frac{\mu\cos\varphi}{\varrho^2}\left(k-\frac{2\lambda^2k}{\varrho^2}+\frac{5}{2}\lambda^2\cos\frac{\varphi^2k}{\varrho^2}\right)$$

$$X'=\frac{4\pi B^3}{A^3}\frac{\mu\sin\varphi}{\varrho^2}\left(k-\frac{\lambda^2k}{\varrho^2}+\frac{5}{2}\lambda^2\cos\frac{\varphi^2k}{\varrho^2}\right).$$

Sei $V'=\sqrt{U'^2+X'^2}$ die Gesammtanziehung, so ist:

$$V'^2=\frac{16\pi^2B^6\mu^2}{A^6\varrho^4}\left(k^2-\frac{2k\lambda^2k}{\varrho^2}+\frac{3k\lambda^2k}{\varrho^2}\cos\varphi^2\right),$$

also:

$$V'=\frac{4\pi B^3}{A^3}\frac{\mu k}{\varrho^2}\left(1+\frac{\lambda^2k}{\varrho^2k}+\frac{3}{2}\frac{\lambda^2k}{k\varrho^2}\cos\varphi^2\right).$$

Noch kann $\frac{B^3}{A^3}=1+\lambda^2$ gesetzt werden.

Diese Formel gibt die Attraktion der Erde auf irgend einen Punkt ausserhalb derselben, in welcher Entfernung er sich auch befinde. Was die Richtung derselben anbetrifft, so möge sie den Winkel ϑ mit dem Aequator machen, dann ist:

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{X'}{U'}=\frac{\operatorname{tg}\varphi\left(k-\frac{\lambda^2k}{\varrho^2}+\frac{5}{2}\lambda^2k\cos\frac{\varphi^2}{\varrho^2}\right)}{k-\frac{2\lambda^2k}{\varrho^2}+\frac{5}{2}\lambda^2k\cos\frac{\varphi^2}{\varrho^2}\right)},$$

oder wenn man die höhern Potenzen von λ^2 vernachlässigt:

Digitized by Google

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi \left(1 + \frac{\lambda^2 k}{k\varrho^2}\right),$$

also:

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{tg} \varphi + \frac{\lambda^2 k \operatorname{tg} \varphi}{k\varrho^2}\right),$$

oder:

$$\vartheta = \varphi + \frac{\lambda^2 k \sin \varphi \cos \varphi}{k\varrho^2}.$$

Besonders wichtig aber ist der Fall, wo sich der angezogene Punkt auf der Erdoberfläche selbst befindet. Da die Gesetze der Schwere sich auf diesen Fall beziehen. Es ist dann wegen der Gleichung des Ellipsoids:

$$\varrho^2 \left(\frac{\sin \varphi^2}{A^2} + \frac{\cos \varphi^2}{B^2}\right) = 1,$$

oder:

$$\frac{\varrho^2}{A^2} \left(\sin \varphi^2 + \frac{\cos \varphi^2}{1+\lambda^2}\right) = 1,$$

also:

$$\varrho^2 = \frac{A^2(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2 \sin \varphi^2} = A^2(1+\lambda^2 \cos \varphi^2),$$

wenn dieselbe Abkürzung gemacht wird wie oben.

Wird dieser Werth in die Ausdrücke für U', X', V' eingesetzt, so ist innerhalb der Klammern lediglich A^2 für ϱ^2 zu setzen. Dagegen tritt für den Faktor $\frac{1}{\varrho^2}$ ausserhalb der Klammer der Faktor ein: $\frac{1-\lambda^2 \cos \varphi^2}{A^2}$ und es ergibt sich:

$$U' = \frac{4\pi B^2 k}{A^4} \mu \cos \varphi \left(1 - \lambda^2 \cos \varphi^2 + \frac{5}{2} \frac{\lambda^2 \cos \varphi^2}{A^2} \frac{k}{k} - \frac{2\lambda^2 k}{A^2 k}\right)$$

$$X' = \frac{4\pi B^2 k}{A^4} \mu \sin \varphi \left(1 - \lambda^2 \cos \varphi^2 + \frac{5}{2} \frac{\lambda^2 \cos \varphi^2}{A^2} \frac{k}{k} - \frac{\lambda^2 k}{A^2 k}\right)$$

$$V' = \frac{4\pi B^2 \mu k}{A^4} \left(1 - \lambda^2 \cos \varphi^2 - \frac{\lambda^2 k}{A^2 k} + \frac{3}{2} \frac{\lambda^2 k}{A^2 k} \cos \varphi^2\right)$$

$$\vartheta = \varphi + \frac{\lambda^2 k \sin \varphi \cos \varphi}{k A^2}.$$

Was nun die Intensität der Schwere anbetrifft, so hat sie mithin jedenfalls die Form:

$$V' = g(1 - \varepsilon \cos \varphi^2).$$

g ist die Schwere an den Polen, da für diese die Breite $\varphi = 90'$, also $\varphi = 0$ ist und man hat den Satz:

„Die Abnahme der Schwere bei der Entfernung vom Pole ist dem Quadrate des Cosinus der Breite proportional. g und ε sind Constanten, welche durch Beobachtungen an zwei verschiedenen Orten bestimmt werden können."

Jedoch würden die Beobachtungen nicht direct den Werth ε geben. Da bis jetzt auf die Verminderung der Schwere vermöge der aus der Drehung der Erde entspringenden Centrifugalkraft nicht geachtet worden ist. Wir wollen auch diese in Rechnung ziehen. Man kann hierbei die Erde als Kugel betrachten. Ist r der Radius derselben, R der eines beliebigen Breitenkreises, also

$$R = r \cos \varphi,$$

so ist bekanntlich die Centrifugalkraft gleich $\frac{v^2}{R}$, wo v die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, also:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

und T die Dauer eines Tages in Secunden ist, man erhält also für die Centrifugalkraft den Ausdruck:

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 r \cos \varphi}{T^2}.$$

Dieselbe ist nach der Verlängerung des

Google

Halbmessers des Breitenkreises gerichtet, welcher mit dem durch den Ort gehenden Radius der Erde den Winkel φ macht. Zerlegt man also die Centrifugalkraft in zwei Componenten, die eine in der Verlängerung der Richtung des Erdradius, die andere senkrecht darauf, so ist die erste Componente gleich $\frac{4\pi^2 r \cos\varphi^2}{T^2}$, sie wirkt der Richtung der Schwere entgegen, ist also von V' abzuziehen, während die andere Componente den Punkt im Fallen im Sinne der Drehung der Erde aus der Vertikale entfernt, wie dies durch das bekannte von Newton vorgeschlagene Experiment bestätigt wird. Diese modificirte Grösse V' gibt dann die beobachtete örtliche Schwere:

$$G = g(1 - \varepsilon' \cos\varphi^2)$$

wo $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ gesetzt wurde, so dass sich die Form des Ausdruckes nicht ändert.

Das zweite Glied von ε' ist gegen das erste bedeutend überwiegend.

Die Constanten g und ε sind durch Erfahrung zu bestimmen.

Am Bequemsten geschieht dies durch Beobachtung der Länge eines mathematischen Secundenpendels an verschiedenen Orten. Diese Länge ist bekanntlich (vergleiche den Artikel: Pendel):

$$l = \frac{G}{\pi^2},$$

also:

$$g(1 - \varepsilon' \cos\varphi^2) = l\pi^2.$$

Nun findet z. B. Bessel:

für Königsberg $l = 440{,}8179$ Pariser Linien
für Berlin $l = 440{,}7889$ „

und man hat die Breiten beider Orten:

für Königsberg $\varphi = 54° 42' 50''$
für Berlin $\varphi_1 = 52° 30' 10''$

also entsprechend für beide Orte:

	Königsberg	Berlin
$\lg l$	2,6442592	2,6441815
$\lg \pi^2$	0,9942998	0,9942998
$\lg G$	3,6385590	3,6384813
G	4350,699	4349,920.

Es ist ferner:

$\lg\cos\varphi = 9{,}7616721 - 10$	$\lg\cos\varphi_1 = 9{,}7844197 - 10$
$\lg\cos\varphi^2 = 0{,}5233442 - 1$	$\lg\cos\varphi_1^2 = 0{,}5688394 - 1$
$\cos\varphi^2 = 0{,}3336908$	$\cos\varphi_1^2 = 0{,}3705487.$

Mat hat also:

$$g(1 - \varepsilon' \cdot 0{,}3336908) = 4350{,}699$$
$$g(1 - \varepsilon' \cdot 0{,}3705487) = 4349{,}920$$

also:

$$g\varepsilon' 0{,}0368529 = 0{,}779$$

d. h.

$$g\varepsilon' = 21{,}14$$

und

$$g = 4350{,}699 + 21{,}14 \cdot 0{,}3336908$$
$$= 4350{,}699 + 7{,}0208,$$

also:

$$g = 4357{,}720 \text{ Pariser Linien} = 30{,}26195 \text{ Pariser Fuss.}$$

Dies ist die Schwere in den Polen. Ausserdem hat man:

$$\varepsilon' = \frac{21{,}14}{4350{,}7} = 0{,}004859.$$

Also die Schwere an irgend einem Orte der Erde, dessen Breite φ ist, hat den Ausdruck:

$$G = g(1 - 0{,}004859 \cos\varphi^2),$$

Digitized by Google

oder fast genau:

$$G = g\left(1 - \frac{1}{200}\cos\varphi^2\right).$$

Bequemer zum Rechnen ist indess der Ausdruck:

$$G = g - g_e' \cos\varphi^2.$$

Setzen wir den Werth in denselben ein, so ist in Pariser Linien:

$$G = 4357{,}720 - 21{,}14\cos\varphi^2$$

und in Pariser Fussen:

$$G = 30{,}26195 - 0{,}1468\cos\varphi^2$$

sonach also ist im Aequator, wo $\cos\varphi = 1$ ist:

$$G = 30{,}1151 \text{ Pariser Fuss.}$$

Schwerebene } **(Statik u. Geometrie).**
Schwerlinie }

So wird oft jede durch den Schwerpunkt gelegte Ebene bezüglich grade Linie genannt.

Schwerpunkt (Statik).

1) Allgemeines.

Wenn auf ein System von Punkten, welche mit einander fest verbunden sind, mögen sie nun einen continuirlichen Körper bilden, oder nicht, die Schwere allein wirkt, so ist jeder Punkt von einer Kraft angegriffen, welche seiner Masse proportional ist. Alle diese Kräfte gehen durch den Mittelpunkt der Erde, oder wenn die Dimensionen des betrachteten Körpers gegen die der Erde nur klein sind, so sind sie unter einander parallel, sie werden sich also alle zu einer, den Seitenkräften parallelen Mittelkraft, welche ihrer Summe gleich ist, vereinen. Wenn man nun die Lage des betrachteten Systems ändert, so wird in Bezug auf dasselbe die Richtung der Schwere, welche im Raume unveränderlich ist, eine andere sein. Es lässt sich aber zeigen, dass die Mittelkraft immer durch einen bestimmten im Körper festen Punkt geht, und dieser wird Schwerpunkt des Systems genannt. Derselbe kann also folgendermaassen definirt werden.

„Wenn jeden Punkt eines festen Systems eine Kraft angreift, welche alle den Massen der Punkte proportional und untereinander parellel sind, so lassen sich diese Kräfte, zu einer einzigen vereinen, welche, wie auch die Richtung der Kräfte beschaffen sei, durch einen festen Punkt gehen, und dieser heisst Schwerpunkt."

Ist der Schwerpunkt gestützt, so wird also ein von der Schwere angegriffener Körper sich nicht bewegen.

Wir schreiten nun zum Beweise des angeführten Satzes und zugleich zu der Methode zur Berechnung des Schwerpunktes.

Seien m, m_1, m_2 ... die Massen verschiedener Punkte, von denen wir zunächst annehmen, dass sie ein festes System bilden,

$$M = m + m_1 + m_2 + \ldots = \Sigma m$$

die Masse des ganzen Systems. Werde jeder Punkt von einer Kraft Am, Am_1, Am_2 ..., angegriffen, welche mit den Axen Winkel machen, deren Cosinus gleich α, β, γ sind, so geben die sechs Gleichungen in der Statik fester Körper (vergleiche den Artikel: Statik), wenn B die Mittelkraft der Kräfte Am, Am_1, α_1, β_1, γ_1 ihre Winkel mit den Axen sind:

$$A\alpha\Sigma m = B\alpha_1, \quad A\beta\Sigma m = B\beta_1, \quad A\gamma\Sigma m = B\gamma_1,$$

woraus sogleich folgt:

$$A^2M^2 = B^2, \text{ also } B = AM, \text{ und } \alpha_1 = \alpha, \ \beta_1 = \beta, \ \gamma_1 = \gamma.$$

Man hat ferner die drei Momentengleichungen:

$$\Sigma m(\alpha y - \beta x) = M(\alpha\eta - \beta\xi) = \alpha\Sigma(my) - \beta\Sigma(mx)$$
$$\Sigma m(\beta z - \gamma y) = M(\beta\zeta - \gamma\eta) = \beta\Sigma(mz) - \gamma\Sigma(my)$$
$$\Sigma m(\gamma x - \alpha z) = M(\gamma\xi - \alpha\zeta) = \gamma\Sigma(mx) - \alpha\Sigma(mz),$$

wenn x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Systems, ξ, η, ζ die des Punktes sind, wo die Mittelkraft angreift. Diese Gleichungen aber lassen sich ganz unabhängig von den Ausdrücken α, β, γ erfüllen, wenn man setzt:

1) $$M\xi = \Sigma(mx), \quad M\eta = \Sigma(my), \quad M\zeta = \Sigma(mz);$$

ξ, η, ζ sind also die Coordinaten eines Punktes, welcher unabhängig von der Richtung der Seitenkräfte der Grösse von A als Angriffspunkt der Mittelkraft betrachtet werden kann, dieser Punkt ist also der Schwerpunkt.

Da die Gleichungen 1) denselben völlig bestimmen, das System möge fest oder nicht fest sein, so kann man, indem man diese Gleichungen als Definition

des Schwerpunktes annimmt, auch von dem Schwerpunkt eines nicht festen Systems reden, und diese Betrachtung ist die allgemeinste und fruchtbringendste.

Sei jetzt der Körper ein continuirlicher und df sein Raumelement, ϱ seine Dichtigkeit, die sich also von Punkt zu Punkt ändern kann, so ist:

$$2)\quad \xi\int\varrho df=\int\varrho x df,\quad \eta\int\varrho df=\int\varrho y df,\quad \zeta\int\varrho df=\int\varrho z df.$$

Ist der Körper homogen, also ϱ constant, so hat man:

$$3)\quad \xi f=\int x df,\quad \eta f=\int y df,\quad \zeta f=\int z df,$$

Ferner ist bekanntlich:

$$df=dx\,dy\,dz=r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\psi,$$

wo ϑ der Winkel des Radius vector r eines Punktes mit der Axe der z, ψ der Winkel der Projection desselben auf der Ebene xy mit der Axe der y ist.

Die Haupteigenschaft des Schwerpunkts eines beliebigen Systems ergibt sich aus folgenden Betrachtungen.

Wird jeder Punkt m des Systems von einer Kraft angegriffen, die sich nach den Axen in die Seitenkräfte mX, mY, mZ zerlegt, so gelten bekanntlich immer die drei dynamischen Gleichungen:

$$4)\quad \Sigma mX=\Sigma m\frac{d^2x}{df^2}=M\frac{d^2\xi}{df^2}$$

$$\Sigma mY=\Sigma m\frac{d^2y}{df^2}=M\frac{d^2\eta}{df^2}$$

$$\Sigma mZ=\Sigma m\frac{d^2z}{df^2}=M\frac{d^2\zeta}{df^2}$$

die hinter dem zweiten Gleicheitszeichen befindlichen Ausdrücke ergeben sich aus den vor demselben befindlichen, wenn man die Gleichungen 1) zweimal differenziirt. Diese drei Gleichungen 4) reichen nun hin, die Bewegung des Schwerpunkts völlig zu bestimmen, wenn die Kräfte X, Y, Z bekannt sind. Wäre nun (ξ, η, ζ) ein einzelner Punkt von der Masse M, den die Seitenkräfte A, B, C angreifen, so wäre bekanntlich:

$$A=M\frac{d^2\xi}{df^2},\quad B=M\frac{d^2\eta}{df^2},\quad C=M\frac{d^2\zeta}{df^2}.$$

Diese Gleichungen stimmen mit 4) überein, wenn man:

$$A=\Sigma mX,\quad B=\Sigma mY,\quad C=\Sigma mZ$$

setzt. D. h.:

Der Schwerpunkt jedes Systems bewegt sich so, als wenn die Masse des Systems, und alle Kräfte, welche dasselbe angreifen in ihm, als isolirten Punkt, vereint wären.

Die Bewegung des Schwerpunkts eines beliebigen Systems ist also verhältnissmässig sehr leicht zu bestimmen. Jedoch verdient es Beachtung, dass bei nicht festen Systemen der Schwerpunkt ein materieller Punkt ist, den durchaus nicht bei der Bewegung dieselbe Masse auszufüllen braucht.

Nehmen wir jetzt an, dass ein System ausser von Anfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Punkte nur noch von solchen Kräften angegriffen würde, welche zwischen den einzelnen Punkten desselben wirken, und allein von ihrer Entfernung von einander abhängen, ausserdem aber, wie alle Kräfte dem Produkte der auf einander einwirkenden Massen proportional sind. Wir haben es, wenn dies der Fall ist, mit einem freien System, d. h. mit einem solchen zu thun, welches keine Einwirkung von Aussen her erleidet. Sei r die Entfernung zweier Punkte m, m' von einander, so ist die Einwirkung von m' auf m gegeben durch den Ausdruck $mm'f(r)$, wo $f(r)$ eine Function von r allein ist. Dieselbe zerfällt nach den Axen in drei Componenten, von denen, die nach der Axe der x gerichtete ist

$$mm'f(r)\frac{x-x'}{r},$$

während die entsprechende Componente der Einwirkung von m auf m' ist:

$$mm'f(r)\frac{x'-x}{r},$$

so dass die Summe dieser beiden Componenten verschwindet. Da nun der Ausdruck ΣmX aus solchen Gliedern besteht, so ist $\Sigma mX=0$, und gleiches gilt von ΣmY und ΣmZ, also die Gleichungen 4) nehmen die Gestalt an:

$$\frac{d^2\xi}{df^2}=0,\quad \frac{d^2\eta}{df^2}=0,\quad \frac{d^2\zeta}{df^2}=0,$$

oder, wenn a, b, c Constanten sind:

$$\frac{d\xi}{df}=a,\quad \frac{d\eta}{df}=b,\quad \frac{d\zeta}{df}=c,$$

d. h. die Componenten oder die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit sind constant. Also:

Der Schwerpunkt eines freien Systems bewegt sich mit seiner Anfangsgeschwindigkeit in gradliniger und gleichmässiger Bewegung fort.

Als freies System ist z. B. das Sonnensystem zu betrachten, wenn man die Anziehung der Fixsterne entweder wegen ihrer grossen Entfernung ganz ausser Acht lässt, oder doch, wie es

Digitized by Google

in jedem Falle gestattet ist, wenigstens annimmt, dass deren Einwirkung auf alle Körper des Sonnensystems dieselbe ist, welche also, wenn man die relative Bewegung dieser Körper zu einander betrachtet, ausser Acht bleiben kann.

Nimmt man ferner an, dass der Schwerpunkt des Sonnensystems keine Anfangsgeschwindigkeit hat, d. h. dass entweder niemals Massen, die nicht dauernd dem Sonnensystem angehören auf dasselbe, oder doch nur so eingewirkt haben, dass sie allen Punkten des Systems eine gleiche Geschwindigkeit ertheilt haben, so ist zu setzen:

$$a = b = c = 0,$$

und dann ist der Schwerpunkt des Systems als fest zu betrachten.

Wir fügen noch zwei Sätze hinzu, die sich auf die Schwerpunkte fester Körper beziehen. Denken wir uns die Axen eines Systems durch den Schwerpunkt gelegt, und seien $\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ die Entfernungen der Punkte $m, m_1, m_2 \ldots$ von demselben, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ die Cosinus der Winkel, welche die Linien $\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ mit den Axen machen. Es ist dann:

$$x = \varrho\alpha, \quad y = \varrho\beta, \quad z = \varrho\gamma, \quad \xi = \eta = \zeta = 0.$$

Die Gleichungen 1) geben also:

$$\Sigma(m\varrho\alpha) = 0, \quad \Sigma(m\varrho\beta) = 0, \quad \Sigma(m\varrho\gamma) = 0.$$

Betrachtet man $m\varrho, m_1\varrho_1 \ldots$ als Kräfte, welche das System angreifen, so hat man den Satz:

„Ein festes System ist in Gleichgewicht, wenn jeder Punkt von einer nach dem Schwerpunkt gerichteten Kraft angegriffen wird, welche jede den Massen der Punkte und deren Entfernung proportional ist."

Dieser Satz bleibt offenbar noch richtig, wenn wir uns statt der Punkte feste Körper von den Massen $m, m_1 \ldots$ denken, und unter ϱ, ϱ_1 die Entfernungen der Schwerpunkte dieser Körper vom Schwerpunkte des ganzen Systems.

Wenn man noch die Quadrate der letzten Gleichung addirt, und unter $(\varrho\varrho')$ den Winkel zwischen $\varrho\varrho'$ versteht, wo also ist:

$$\cos(\varrho\varrho') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

so erhält man:

$$\Sigma m^2\varrho^2 + 2\Sigma mm'\varrho\varrho'\cos(\varrho\varrho') = 0,$$

oder, wenn r die Entfernung zweier Punkte m und m_1 oder der Schwerpunkte zweier Körper m und m_1 ist, so hat man:

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos(\varrho\varrho')$$

also:

$$\Sigma m^2\varrho^2 + \Sigma mm'(\varrho^2 + \varrho'^2 - r^2) = 0.$$

Da man nun hat:

$$m\varrho^2(m + m_1 + m_2 + \ldots) = M m\varrho^2,$$

so ist:

$$M\Sigma m\varrho^2 = \Sigma mm'r^2,$$

Sind alle Massen m unter einander gleich und n ihre Anzahl, so ist:

$$\Sigma r^2 = n\Sigma\varrho^2.$$

Sei jetzt R die Entfernung des beliebig zu nehmenden Anfangspunktes der Coordinaten vom Schwerpunkte, a, b, c die Cosinus ihrer Winkel mit den Axen, so geben die Gleichungen 1):

$$MRa = \Sigma m\varrho\alpha, \quad MRb = \Sigma m\varrho\beta,$$
$$MRc = \Sigma m\varrho\gamma,$$

also, wenn man die Quadrate dieser Gleichungen addirt:

$$m^2R^2 = \Sigma m'\varrho^2 + \Sigma mm'\varrho\varrho'\cos(\varrho\varrho'),$$

oder ganz wie eben gezeigt wurde:

$$M^2R^2 = M\Sigma m\varrho^2 - \Sigma mm'r^2,$$

hieraus folgt sogleich:

„Ist die Entfernung R des Schwerpunktes eines festen Systems von einem festen Punkte constant, und dieses System ändert in übrigens beliebiger Weise seine Lage, so ist die Summe der Produkte der Massen in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpunkte von diesem festen Punkte constant."

Denn da R und r constant sind, muss auch $\Sigma m\varrho^2$ constant bleiben.

Ist $R = 0$, so ist $\Sigma m\varrho^2$ ein Minimum. Also:

„Die Summe der Massen in die Quadrate der Entfernung ihres Schwerpunktes von einem gegebenen Punkte ist ein Minimum, wenn dieser Punkt der Schwerpunkt ist."

Wir knüpfen hieran noch das Guldinische Theorem, welches eine Beziehung des Inhaltes der Rotationsflächen und Rotationskörper zu den Schwerpunkten ihrer Erzeugungscurven und Erzeugungsebenen angibt.

Selbstverständlich kann man nämlich eben so gut von den Schwerpunkten von Linien und Flächen, als von denen von Körpern sprechen, da jedes System materieller Punkte einen Schwerpunkt hat.

Wenn, wie hier, nichts Anderes festgesetzt wird, wollen wir ferner immer annehmen, dass das betrachtete System homogen sei. Der Schwerpunkt ist dann völlig bestimmt, wenn man die geome-

trische Gestalt des betrachteten Systems kennt.

Sei ds das Element einer ebenen Curve, welche man sich um ihre Axe der x gedreht denkt, so wird der Inhalt der erzeugten Rotationsfläche sein

$$F = \alpha \int y\, ds,$$

wo α der bei der Drehung zurückgelegte Bogen ist.

Nun ist aber, wenn S die Länge der ganzen Curve, η die Ordinate ihres Schwerpunkts ist:

$$y ds = \eta S.$$

Es ist nämlich, wenn ϱ die Dichtigkeit ist:

$$y dm = y \varrho ds = \eta M = \eta \varrho s.$$

Ferner ist $\alpha \eta S$ der bei der Entstehung der Fläche vom Schwerpunkte der Erzeugungslinie beschriebene Kreis.

$$\eta V = \iint (y - y')\, dx\, dy = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [f(x)^2 - \eta(x)^2]\, dx,$$

also:

$$K = \alpha \eta V.$$

Es folgt hieraus:

I. Das Volum einer Umdrehungsfläche ist gleich dem Product der Länge der ebenen Erzeugungscurve in den Weg des Schwerpunktes derselben.

II. Der körperliche Inhalt eines Umdrehungskörpers ist gleich dem Flächeninhalt der Erzeugungsfläche multiplicirt mit dem Wege ihres Schwerpunktes.

In diesen beiden Regeln besteht der Guldinische Satz. Er führt die Flächeninhalte der Rotationsflächen und Körper auf die Schwerpunkte ihrer Entstehungsebenen und Linien zurück und umgekehrt.

Hieran ist noch ein Satz zu knüpfen, der sich auf den körperlichen Inhalt schief abgeschnittener Prismen oder Cylinder bezieht.

Sei P ein solcher Körper, A und B der Flächeninhalt der beiden Basen, so lässt sich P durch Ebenen, welche den Seiten parallel sind, in unendlich viel Prismen oder Cylinder theilen. Sei a die Grundfläche, h die Höhe eines solchen senkrecht auf Ebene A, so ist:

$$P = ah + a_1 h_1 + a_2 h_2 + \ldots = \Sigma(ah).$$

Offenbar ist nun, wenn b, b_1, b_2 ... die andern Grundflächen der unendlich kleinen Prismen sind:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \ldots = \frac{A}{B},$$

Seien jetzt ferner $y = f(x)$, $y_1 = \eta(x)$ die Gleichungen zweier ebenen Curven, welche um die gemeinschaftliche Axe der x gedreht werden. Das Stück der Ebene, welches zwischen ihnen und zwei den Abscissen x_0, x_1 entsprechenden Ordinaten liegt, wird dann einen Umdrehungskörper erzeugen, dessen körperlicher Inhalt ist:

$$K = \frac{\alpha}{2} \int_{x_0}^{x_1} [f(x)^2 - \eta(x)^2]\, dx.$$

Sei nun wieder η die Ordinate des Schwerpunktes desjenigen Ebenenstückes, welches den Umdrehungskörper erzeugt, so ist offenbar, wenn wir mit V den Flächeninhalt dieses Ebenenstücks bezeichnen:

$$dm = \varrho\, dx\, dy, \quad M = \varrho V,$$

also:

also:

$$P = \frac{A}{B} \Sigma(bh).$$

Wird die Ebene A als Ebene der yz betrachtet, so ist h die darauf senkrechte Ordinate x von b, also wenn H die entsprechende Höhe des Schwerpunkts von b ist, so hat man:

$$\Sigma(bh) = HB, \text{ also } P = AH.$$

D. h.

III. Der Inhalt eines schief abgeschnittenen Prismas oder Cylinders ist gleich dem Produkt der einen Grundfläche in den Abstand ihres Schwerpunktes von der andern Grundfläche.

2) Schwerpunktsbestimmungen.

Der Schwerpunkt eines Systems wird bestimmt durch drei Gleichungen von der Gestalt 1) des vorigen Abschnitts, also:

$$\Sigma hm = HM,$$

wo h die Abstände der einzelnen Punkte des Systems, H den seines Schwerpunkts von einer beliebigen Ebene anzeigt. Es ist nöthig, dass hierbei drei auf einander senkrechte Ebenen genommen werden, da ja jede Richtung h als zu einem andern Coordinatensystem gehörig gedacht werden kann.

Zerlegt man ferner das System in mehrere andere, deren Massen μ, μ_1, μ_2 ... sind, und wo die Abstände der

Schwerpunkte von der bezüglichen Ebene $k, k_1, k_2 \ldots$ sind, so ist auch offenbar:

$$\Sigma km = \Sigma k\mu = HM.$$

In den drei Gleichungen kann man also auch statt der Punkte Systeme von Punkten nehmen, wenn man x, y, z oder k auf ihre Schwerpunkte bezieht.

Ist das betrachtete System ein homogenes, so ist klar, dass jede Ebene oder Linie, um welche entweder das ganze System, oder je zwei Theile desselben symmetrisch gruppirt ist, den Schwerpunkt enthalten wird. Denn nimmt man die angreifenden Kräfte dieser Linie oder Ebene parallel, so werden sich die, welche je zwei gleich weit von derselben entfernte Punkte angreifen zu einer in der Ebene oder mit der Linie zusammenfallenden Mittelkraft vereinigen, dies also auch mit der Mittelkraft aller parallelen Kräfte stattfinden.

Ist das System um einen Punkt symmetrisch gruppirt, so ist dies der Schwerpunkt selbst.

Hieraus folgt sogleich:

„Die Schwerpunkte von ebenen Curven und Ebenenstücken liegen mit ihnen in einer Ebene."

Der Schwerpunkt einer Kreislinie oder Kreisfläche, und überhaupt aller Linien, Flächen oder Körper die einen Mittelpunkt haben, liegt in demselben.

Der Schwerpunkt eines Parallelogramms liegt in dem Schnittpunkt der Diagonalen,

Der eines Parallelepidons im Schnittpunkt der drei Diagonal-Ebenen.

Die allgemeine Formel zur Bestimmung homogener Curvenbogen ist:

$$\int k\,ds = SH,$$

wo k, H die Abstände von einer Ebene, ds das Linienelement, S die Länge der ganzen Curve ist. Bei ebenen Curven ist k der Abstand von einer in der Ebene befindlichen Graden.

Beispiele.

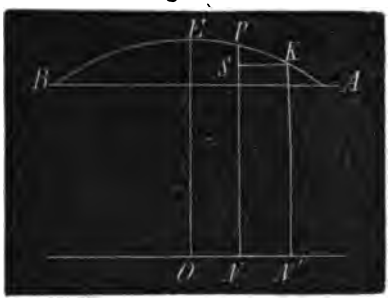
Der Schwerpunkt eines Kreisbogens sei zu finden.

Der durch seine Mitte gehende Halbmesser enthält denselben, da um ihn der Bogen symmetrisch liegt.

Die Entfernungen k beziehen wir auf den der Sehne des Bogens parallen Durchmesser.

Ist $PK = ds$ (Fig. 384) ein Element

Fig. 384.



des letzteren $PN = k$, $KN' = k'$, O der Mittelpunkt, r der Halbmesser, so ist offenbar:

$$\frac{PK}{NN'} = \frac{OP}{PN},$$

da die Dreiecke PKS und OPN ähnlich sind, also:

$$k\,ds = r \cdot NN_1,$$

also:

$$\Sigma k\,ds = AB \cdot r,$$

wo AB die zum Bogen gehörige Sehne ist, also:

$$SH = r \cdot AB; \quad \frac{H}{r} = \frac{AB}{S}$$

d. h.:

„Der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte verhält sich zum Halbmesser, wie die Sehne zum Bogen."

Für die Cycloide ist

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

wenn die Gleichung derselben auf ihren Scheitel bezogen ist, also:

$$ds = \frac{2a\,dy}{\sqrt{y}}, \quad S = e\sqrt{2ay},$$

wenn der Bogen im Scheitel anfängt. Es ist also, wenn man $k = y$, $H = y$ nimmt:

$$S\eta = \sqrt{2a}\int y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{2\sqrt{2a}}{3}y^{\frac{3}{2}},$$

und wenn man $k = x$, $H = \xi$ setzt:

$$S\xi = \sqrt{2a}\int \frac{x\,dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2a}\,x\sqrt{y} - \int y^{\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{2a}\left(x\sqrt{y} - \int dy\sqrt{2a-y}\right)$$

$$= 2\sqrt{2a}\left(x\sqrt{y} + \tfrac{2}{3}(2a-y)^{\frac{3}{2}}\right) + C;$$

Digitized by Google

für $y = 0$ ist $S\xi = 0$, also $C = -\frac{16a^2}{3}$, woraus dann folgt:

$$\eta = \frac{y}{3}, \quad \xi = x + \frac{2(2a-y)^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{y}} - \frac{8a^2}{3\sqrt{2ay}}.$$

Für die Parabel ist:

$$y^2 = 2px, \quad ydy = pdx$$

also:

$$S = \frac{1}{p}\int dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{1}{p}\left(y\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\lg\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}\right).$$

Fängt der Bogen am Scheitel an, also $S=0$, wenn $y=0$:

$$S\eta = \frac{1}{p}\int ydy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{1}{3p}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^2}{3}$$

$$S\xi = \frac{1}{p}\int xdy\sqrt{y^2+p^2} = \int x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{x+\frac{p}{2}} = \frac{\left(x+\frac{p}{4}\right)\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}}{2}$$

$$-\frac{p^2}{32}\lg\frac{4x+p+4\sqrt{x^2+\frac{px}{2}}}{p}.$$

Für homogene Ebenen ist:

$$dm = \varrho\, dx\, dy = \varrho\, r dr\, d\vartheta$$

$$M = \varrho\int y dx = \tfrac{1}{2}\varrho\int r^2 d\vartheta,$$

also:

$$\iint h\, dx\, dy = H\int y\, dx$$

$$\iint hr\, dr\, d\vartheta = \frac{H}{2}\int r^2\, d\vartheta.$$

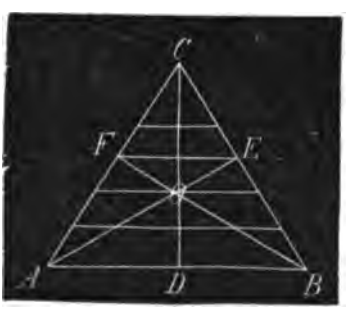
Ist $h = y$ und $h = x$, so kommt:

$$\eta\int y dx = \tfrac{1}{2}\int y^2 dx$$

$$\xi\int y dx = \int yx\, dx.$$

Für ein Dreieck berechnet sich der Schwerpunkt direct auf folgende Weise. Zieht man eine Schaar von Linien parallel der Grundlinie AB (Fig. 385), so wird die von C nach der Mitte von AB gezogene Grade alle diese Linien halbiren. Zwischen je zwei unendlich nahen dieser Parallelen liegt ein unendlich dünnes Ebenen-Stück, welches symmetrisch durch die Transversale CD getheilt wird, die Schwerpunkte aller dieser Theile des Dreiecks und folglich der des Dreiecks selbst befinden sich also in CD, und aus gleichem Grunde auch in den Transversalen BF und AE, welche die Mitten der Seiten mit den Gegenwinkeln verbinden. Der Schnittpunkt dieser Linie O ist also der Schwerpunkt. Es verhält sich nun bekanntlich:

Fig. 385.

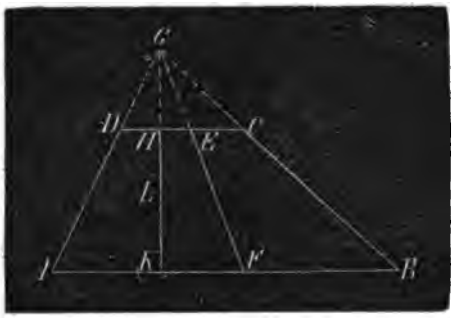


$$\frac{OD}{DC} = \frac{1}{3},$$

also:

„Der Schwerpunkt eines Dreiecks wird gefunden, wenn man von der Transversale CD, $OD = \frac{1}{3}CD$ abschneidet."

Fig. 386.



Die Bestimmung des Schwerpunktes eines Trapezes $ABDC$ (Fig. 386), kann leicht auf die vorige Aufgabe zurückgeführt werden. Die Verbindungslinie EF der Mitten der beiden parallelen Seiten enthält offenbar den Schwerpunkt, da durch Linien die parallel AB sind das Trapez in Theile getheilt wird, die symmetrisch um EF liegen. Verlängere man nun AC und BD bis zum Schnittpunkte G, so wird auch die Verlängerung von EF durch G gehen. Sei GHK senkrecht auf AB, $HL = \frac{KH}{2}$, und setzen wir: $AB = a$, $CD = b$, $GH = h$, $KH = k$. Seien ferner die Flächeninhalte der Dreiecke GCD und GAB bezüglich gleich F und f, nehmen wir die Abstände der Schwerpunkte der beiden Dreiecke von der durch L gezogenen AB parallelen Linie, so sind diese Abstände bezüglich gleich:

$$\frac{h-k}{3}+\frac{k}{2}=\frac{h}{3}+\frac{k}{6} \text{ und } \frac{h}{3}-\frac{k}{2}.$$

Sei l der Abstand des Schwerpunktes des Trapezes von derselben Linie, so ist also:

$$\tfrac{1}{3}(2h+k)f+l(F-f)=\tfrac{1}{3}(2h-3k)F;$$

ausserdem hat man:

$$h:k=a:a-b,\quad f:F=b^2:a^2,$$

also:

$$h=\frac{ka}{a-b}$$

und folglich:

$$b^2(3ka-kb)+6l(a^2-b^2)(a-b) = a^2(3kb-ka),$$

d. h.:

$$6l(a-b)(a^2-b^2)=-k(a-b)^3$$

oder:

$$l=-\frac{k}{6}\,\frac{a-b}{a+b},$$

also:

„Die Entfernung des Schwerpunkts des Trapezes von seiner Mittellinie verhält sich zur Differenz der parallelen Seiten, wie der sechste Theil der Höhe zur Summe derselben."

Der Schwerpunkt eines Kreissectors kann auf den eines Kreisbogens zurückgeführt werden. Durch Linien, welche vom Mittelpunkte ausgezogen werden, kann man den Sector in unendlich viel gleiche kleine Sectoren oder Dreiecke theilen, deren Schwerpunkte auf den bezüglichen Radien in der Entfernung $\frac{2}{3}r$ vom Mittelpunkte liegen, wo c der Radius des gegeben Kreises ist. Alle diese Schwerpunkte bilden also einen dem gegebenen concentrischen Bogen. In jedem Punkte desselben kann man sich die Masse des entsprechenden unendlich kleinen Dreiecks denken. Ist S der gegebene Bogen, A die zugehörige Sehne, so sind $\frac{2}{3}S$, $\frac{2}{3}A$ diese Ausdrücke für den Bogen, in welchem die Schwerpunkte liegen, und die zugehörige Sehne. Ist H der Abstand des gesuchten Schwerpunktes vom Mittelpunkte, so hat man also wie oben:

$$\frac{H}{\frac{2}{3}r}=\frac{\frac{2}{3}A}{\frac{2}{3}S},$$

oder:

$$\frac{H}{r}=\frac{2}{3}\frac{A}{S}.$$

„Dieser Abstand verhält sich zum Radius wie die doppelte Sehne zum dreifachen Bogen."

Für den Halbkreis ist:

$$H=\frac{4}{r}\,\frac{r^2}{S}=\frac{4r}{3\pi}.$$

Ein Ringstück zweier concentrischen Kreise mit Radien r und ϱ ist gegeben durch die Formel:

$$Hr^2=k(r^2-\varrho^2)+h\varrho^2,$$

Digitized by Google

wo H, h die Entfernungen der Schwerpunkte beider Kreise vom Mittelpunkte, k dieselbe Grösse in Bezug auf das Ringstück ist. Nun hat man, wenn A, S Sehne und Bogen des grössern, a, s die des kleineren Kreises sind:

$$\frac{A}{S}=\frac{a}{s},\quad H=\tfrac{2}{3}\frac{Ar}{S},\quad h=\tfrac{2}{3}\frac{A\varrho}{S},$$

also:

$$k(r^2-\varrho^2)=\tfrac{2}{3}\frac{A}{S}(r^3-\varrho^3)$$

$$k=\tfrac{2}{3}\frac{A}{S}\frac{r^2+r\varrho+\varrho^2}{r+\varrho}.$$

Auch der Schwerpunkt eines Kreissegmentes lässt sich durch diese Betrachtungen bestimmen.

Sei h die Höhe eines Dreiecks, welches das Segment zum Sector ergänzt und gelten die obigen Bezeichnungen im Uebrigen, so sind die Flächeninhalte von Sector, Dreieck und Segment beziehlich:

$$\frac{sS}{2},\quad \frac{kA}{2},\quad \frac{(rS-kA)}{2},$$

und die Abstände der Schwerpunkte vom Mittelpunkte:

$$\tfrac{2}{3}\frac{rA}{S},\quad \tfrac{2}{3}k,\quad l,$$

wo dieser Abstand l in Bezug auf das Segment gesucht ist. Also:

$$\tfrac{2}{3}r^3A-\tfrac{2}{3}k^3A=l(rS-kA)$$

$$l=\tfrac{2}{3}A\frac{r^3-k^3}{rS-kA}.$$

Offenbar aber ist:

$$r^3-k^3=\frac{A^3}{4},$$

also wenn

$$\sigma=\frac{rS-kA}{2}$$

der Flächeninhalt des Segments ist:

$$l=\frac{A^3}{12\sigma}.$$

Für die parabolische Fläche ist: $y^2=2px$.

$$\int y\,dx=\tfrac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}.$$

$$\int xy\,dx=\sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2\sqrt{2p}}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

$$\tfrac{1}{2}\int y^2\,dx=p\int x\,dx=\frac{px^2}{2},$$

woraus sich ergibt:

$$\xi=\tfrac{3}{5}x,\quad \eta=\tfrac{1}{2}y.$$

Für die Cycloide ist:

$$x=\sqrt{2ay-y^2}+a\arccos\frac{a-y}{a},\quad \frac{dx}{dy}=\sqrt{\frac{2a-y}{y}}.$$

$$F=\int x\,dy=\int dy\sqrt{2ay-y^2}=(y-a)\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arccos\frac{a-y}{a},$$

$$\int x\,dy\sqrt{2ay-y^2}=\int dy\,(2ay-y^2)+a\int\arccos\frac{a-y}{a}\,dy\sqrt{2ay-y^2}.$$

Das erste Integral ist gleich $ay^2-\frac{y^3}{3}$. Das zweite gibt, wenn man theilweise integrirt:

$$\arccos\frac{a-y}{a}\int dy\sqrt{2ay-y^2}-\int\frac{dy}{\sqrt{2ay-y^2}}\int dy\sqrt{2ay-y^2}$$

$$=\arccos\frac{a-y}{a}\left[\frac{(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arccos\frac{a-y}{a}\right]$$

$$-\int\left[\frac{(y-a)\,dy}{2}+\frac{a^2}{2}\arccos\frac{a-y}{a}\frac{dy}{\sqrt{2ay-y^2}}\right]$$

$$=\frac{(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2}\arccos\frac{a-y}{a}+\frac{a^2}{2}\left(\arccos\frac{a-y}{2}\right)^2$$

$$-\frac{y^2}{4}+\frac{ay}{2}+\frac{a^2}{4}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)^2+C=\frac{(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2}\arccos\frac{a-y}{a}$$

$$+\frac{a^2}{4}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)^2-\frac{y^2}{4}+\frac{ay}{2}+C.$$

Digitized by Google

(Es ist hier in den allgemeinen Formeln x und y vertauscht.) So erhält man:

$$F\xi = \frac{a^2 y}{2} + \frac{1}{2} a y^2 - \frac{y^3}{3} + \frac{a(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{2} \arccos\frac{a-y}{a} + \frac{a^2}{4}\left(\arccos\frac{a-y}{a}\right)^2.$$

Wenn man beim Scheitel beginnt, ist die Constante nämlich gleich Null.

$$F\eta = \frac{1}{2}\int y\,dy\sqrt{2ay-y^2} = -\frac{1}{3}(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{a(y-a)\sqrt{2ay-y^2}}{4} + \frac{a^2}{4}\arccos\frac{a-y}{a}.$$

Es sollen jetzt die Schwerpunkte einiger krummen Oberflächen bestimmt werden.

Wenn man einen beliebigen Cylindermantel hat, so zerfällt derselbe durch Ebenen parallel der Grundfläche in eine Schaar congruenter Flächen von unendlich kleiner Höhe. Der Schwerpunkt des Umfanges ist dann offenbar zugleich Schwerpunkt jeder dieser Fläche, und alle diese Schwerpunkte liegen in einer Graden, in deren Mitte der Schwerpunkt des ganzen Cylinders zu suchen ist. Also:

„Der Schwerpunkt des Cylinders liegt in der Mitte der Graden, welche die Schwerpunkte beider Grundflächen verbindet. Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt, so ist dies der Schwerpunkt derselben."

Der Mantel eines Rotationskegels wird durch die Seiten in unendlich kleine congruente Dreiecke getheilt, deren Schwerpunkte eine Entfernung vom Scheitel haben, die gleich $\frac{1}{3}$ der Seite ist. Der Schwerpunkt des Kegelmantels ist also der Mittelpunkt eines Kreises der parallel der Grundfläche um $\frac{1}{3}$ der Höhe vom Scheitelpunkt absteht, d. h.: „er liegt in der Höhe und sein Abstand vom Scheitelpunkt beträgt $\frac{1}{3}$ derselben."

Was den abgestumpften Kegel anbetrifft, so wird derselbe durch die Seiten in Trapeze getheilt. Ist daher h die Höhe, sind r und ϱ die Radien des Kegels, so ist $\frac{h}{6}\frac{r-\varrho}{r-\varrho}$ der Abstand des des Schwerpunktes des Kegelmantels von der Mitte der Höhe.

Die Kugelzone oder Kalotte kann in unendlich kleine Zonen von gleicher Höhe also auch von gleichen Flächeninhalt ($2\pi rh$) getheilt werden. „Somit liegt der Schwerpunkt der Zone oder Kalotte in der Mitte der Höhe."

Was die allgemeinen Formeln für die Schwerpunkte der Oberflächen anbetrifft, so hat man:

$$\int h\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy = H\int\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Ist die Fläche aber eine Rotationsfläche, so seien y, x die Coordinaten der Curve, aus welcher sie entstanden, und ds das Bogenelement.

Die Fläche zerfällt dann durch senkrecht auf die Axe der x gezogene Ebenen in abgestumpfte Kegel, von Flächeninhalt: $2\pi y\,ds$, während der Schwerpunkt aller in der Rotationsaxe liegt; die Entfernung ϱ des Schwerpunkts der Fläche ξ vom Anfangspunkt der Coordinaten ist gegeben durch die Gleichung:

$$\int xy\,ds = \xi\int y\,ds.$$

Sei z. B. ein Rotationsparaboloid gegeben, welches durch Drehung um die Axe der x entstanden ist, also:

$$y^2 = 2px, \quad ds = dy\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{p}$$

$$\int y\,ds = \frac{1}{3p}(y+p^2)^{\frac{3}{2}} + C,$$

$$\int xy\,ds = \frac{1}{2p^2}\int y^3\,dy\sqrt{y^2+p^2} = \frac{y^2}{6p^2}(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{15p^2}(y^2+p^2)^{\frac{5}{2}} + E.$$

Fängt man beim Scheitel an, so ist:

$$C = -\frac{p^2}{3}, \quad E = \frac{p^3}{15}.$$

Wenn eine Cycloide um die an den Scheitel gezogene Tangente rotirt, so erhält man:

Digitized by Google

$$\int y\,ds = \frac{2y\sqrt{2ay}}{3}, \quad \int xy\,ds = \sqrt{2a}\left(\tfrac{1}{3}xy^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3}\int y^{\frac{3}{2}}dx\right).$$

$$\int y^{\frac{1}{2}}dx = -\tfrac{1}{3}y\,(2a-y)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15}(2a-y)^{\frac{5}{2}} + C,$$

also:

$$\int xy\,ds = \tfrac{1}{3}xy\sqrt{2ay} + \tfrac{4}{15}\sqrt{2a}\,(3y+4a)\,(2a-y)^{\frac{3}{2}} + E.$$

Fängt man am Scheitel an, so ist:

$$E = -\frac{64a^3}{45}, \quad C = -\tfrac{4}{15}\sqrt{2a^5}.$$

Gehen wir jetzt zu Körpern über.

Wie bei der Oberfläche eines Cylinders oder Prismas, lässt sich zeigen, dass der Inhalt eines solchen seinen Schwerpunkt in der Mitte derjenigen Graden hat, welche die Schwerpunkte seiner Grundflächen verbindet.

Jede Pyramide und Kegel hat ihren Schwerpunkt in derjenigen Graden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet. Es folgt nämlich leicht, dass die Stücke, in welche die Pyramiden durch Ebenen parallel der Grundfläche getheilt werden, alle ihre Schwerpunkte in dieser Linie haben.

Bei der dreiseitigen Pyramide kann man von jeder der vier Spitzen aus eine solche Linie construiren und ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Schwerpunkt.

Sind (Fig. 387) NA und MD zwei solcher Linien, S ihr Durchschnitt, und

Fig. 387.

zieht man AE durch M, und DE durch N, so ist $EM = \frac{1}{3}EA$, $EN = \frac{1}{3}DD$, also MN parallel AD, und $MN = \frac{1}{3}AD$. Dreieck $MNS \sim DAS$, also $MS = \frac{1}{3}DS$, also $MS = \frac{1}{4}MD$.

„Die Entfernung des Schwerpunkts von der Spitze beträgt $\frac{1}{4}$ der Schwerlinie DM oder AN. Seine Entfernung von jeder Basis beträgt $\frac{1}{4}$ der Höhe."

Da nun alle Pyramiden oder Kegel sich durch Linien von der Spitze in dreiseitige Pyramiden (beim Kegel sind es unendlich viel) zerlegen lassen, „so ist bei allen die Entfernung des Schwerpunktes von der Grundfläche gleich $\frac{1}{4}$ der Höhe, während er in der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche liegt."

Was die abgestumpfte Pyramide oder den abgestumpften Kegel anbetrifft, so sei h die Höhe derselben, G, g die Grundflächen, k die Höhe der als vollständig gedachten Pyramide. Zunächst ist klar, dass der Schwerpunkt in der Linie liegt, welche die Schwerpunkte beider Grundflächen verbindet. Wir suchen den Abstand l desselben von der, den Grundflächen parallelen Ebene, welche durch die Mitte der Höhe geht, dann sind die entsprechenden Abstände der vollständigen und der Ergänzungspyramide bezüglich gleich:

$$\frac{k}{4} - \frac{h}{2}, \quad \frac{k-h}{4} + \frac{k}{2} = \frac{k+h}{4}.$$

Es ist aber:

$$\frac{k-h}{k} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}}, \text{ also } k = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}},$$

also die Entfernungen bezüglich gleich:

$$\frac{h}{4}\,\frac{2\sqrt{g}-\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}, \quad \frac{h}{4}\,\frac{2\sqrt{G}-\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}.$$

Die körperlichen Inhalte dieser Pyramiden aber sind:

$$\tfrac{1}{3}Gk, \quad \tfrac{1}{3}g(k-h),$$

also bezüglich gleich:

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{h\sqrt{G^3}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}, \quad \tfrac{1}{3}\,\frac{h\sqrt{g^3}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$

und der der abgestumpften Pyramide:

Digitized by Google

$$\frac{h}{3}\left(\frac{\sqrt{G^3}-\sqrt{g^3}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\right),$$

also:

$$2\sqrt{G^3}\,(2\sqrt{g}-\sqrt{G}) = h\sqrt{g^3}\,(2\sqrt{G}-\sqrt{g}) + 4l(\sqrt{G^3}-\sqrt{g^3})\,(\sqrt{G}-\sqrt{g}),$$

woraus sich ergibt:

$$l = -\frac{h}{4}\,\frac{G-g}{G+\sqrt{Gg}+g}.$$

Für den Kegel, dessen Grundflächen die Radien r und ϱ haben, ist also:

$$l = -\frac{h}{4}\,\frac{r^2-\varrho^2}{r^2+r\varrho+\varrho^2}.$$

Für den Obelisk, d. h. den von nicht ähnlichen parallelen Rechtecken und vier Trapezen begrenzten Körper, zeigt sich leicht, dass die Linie, welche die Mitte beider Rechtecke verbindet den Schwerpunkt enthält. Seien l, b die Seiten der einen, λ, β die der andern Basis, h die Höhe des Körpers. Dann zerfällt der Körper offenbar in ein Parallelepipedon mit Inhalt $\beta\lambda h$, wo der Abstand des Schwerpunkts von der Grundfläche $\frac{h}{2}$ ist, und ferner in zwei dreiseitige Prismen mit Inhalt:

$$(b-\beta)\frac{\lambda h}{2},\quad (l-\lambda)\frac{\beta h}{2},$$

wo der Abstand der Schwerpunkte gleich $\frac{h}{3}$ ist, endlich in eine Pyramide mit Inhalt:

$$(b-\beta)\,(l-\lambda)\,\frac{h}{3}\quad\text{und Schwerpunkts-Abstand}\quad\frac{h}{3}.$$

Für den Inhalt des Obelisken ergibt sich hieraus:

$$(2bl+2\beta\lambda+b\lambda+l\beta)\,\frac{h}{6};$$

ist k der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche, so kommt:

$$k = \frac{bl+3\beta\lambda+b\lambda+\beta l}{2bl+2\beta\lambda+b\lambda+\beta l}\,\frac{h}{2}$$

und für den Abstand $m = \frac{h}{2} - k$ von dem mittleren Querschnitte:

$$m = \frac{bl-\beta l}{3(b+\beta)(l+\lambda)+(b-\beta)(l-\lambda)}\,h.$$

Ein Kugelsector zerfällt in unendlich viele Pyramiden, deren Schwerpunkts-Entfernung vom Mittelpunkt $\frac{3}{4}$ des Radius ist.

Eine Kalotte mit $\frac{1}{3}r$, also auch mit der Höhe $\frac{1}{3}h$, wenn h die Kalottenhöhe des Sectors ist, enthält also alle Schwerpunkte und der Schwerpunkt dieser Kalotte ist der des Sectors. Derselbe liegt in der Mitte der Höhe der letzteren Kalotte, also die Entfernung vom Mittelpunkte ist $\frac{3}{4}r - \frac{1}{3}h$.

Für die Halbkugel ergibt sich somit $\frac{3}{8}r$.

Das Kugelsegment hat den körperlichen Inhalt: $\frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$, der des Sectors ist: $\frac{2}{3}\pi r^2 h$ und der des Ergänzungskegels: $\frac{1}{3}\pi h\,(r-h)\,(2r-h)$, also, wenn l die Entfernung des Schwerpunktes des Segments vom Mittelpunkte ist:

$$\tfrac{1}{2}r^2h(2r-h) = \tfrac{1}{2}h\,(2r-h)\,(r-h)^2 + \frac{l}{3}\,h^2(3r-h),$$

also:

$$l = \tfrac{1}{2}\,\frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

Die allgemeinen Formeln für die Schwerpunkte von Körpern sind in Abschnitt 1) bereits gegeben.

Für das Paraboloid seien:

$$y^2 = 2px, \quad z^2 = 2qx$$

die Gleichungen der beiden Hauptparabeln. Suchen wir das Segment, welches durch eine Ebene senkrecht auf der Hauptaxe abgeschnitten wird, so befindet sich in dieser Axe der Schwerpunkt, und man hat:

$$F = 2\pi\sqrt{pq}\int_0^x x\,dx = \pi\sqrt{pq}\,x^2,$$

$$F\xi = 2\pi\sqrt{pq}\int_0^x x^2\,dx = \frac{2\pi\sqrt{pq}}{3}x^3,$$

also:

$$\xi = \tfrac{2}{3}x.$$

Für das Ellipsoid ist:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$F = \frac{\pi bc}{a}\int(a^2 - x^2)\,dx,$$

$$F\xi = \frac{\pi bc}{a^2}\int(a^2 - x^2)\,x\,dx,$$

also:

$$\xi = \frac{\int(a^2 - x^2)\,x\,dx}{\int(a^2 - x^2)\,dx};$$

ξ ist also von b und c unabhängig. Fängt das Segment im Mittelpunkt an, so ist:

$$\xi = x\,\frac{6a^2 - 3x^2}{12a^2 - 4x^2},$$

und für $x = a$, $\xi = \frac{2}{3}a$.

Schwimmen (Hydrostatik).

1) Allgemeines.

Ein Körper schwimmt in einer Flüssigkeit, wenn er ganz oder zum Theil in dieselbe eintaucht ohne unterzusinken. Der Druck den die Flüssigkeit auf seine Oberfläche ausübt, muss also seiner Schwere das Gleichgewicht halten.

Um diesen Druck zu finden, gehen wir von folgenden bekannten Sätzen der Hydrostatik aus.

I. Eine Flüssigkeit in einem Gefässe, welche nur von der Schwere angegriffen wird, hat im Falle des Gleichgewichts eine horizontale Oberfläche.

II. Ist die Flüssigkeit heterogen, so wird sie im Falle des Gleichgewichts in gleichen horizontalen Schichten gleiche Dichtigkeit, also eine Dichtigkeit haben, die nur von der Höhe abhängt.

Wird nun ein Körper ganz oder zum Theil eingetaucht, so muss auf ihn derjenige Druck wirken, der auf die Flüssigkeit gewirkt hat, welche dieser Körper verdrängt, und da dieser dem Druckgewichte der verdrängten Flüssigkeit das Gleichgewicht hält, so ist er diesem gleich aber von unten nach oben gerichtet. Hieraus folgt, dass auf einen eingetauchten Körper zwei Kräfte wirken, sein Gewicht in seinem Schwerpunkte, und ein Druck gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, aber in der der Schwere entgegengesetzten Richtung und im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit.

Dies gibt den archimedischen Satz:

III. Ein eingetauchter Körper verliert soviel an Gewicht als die verdrängte Flüssigkeit beträgt.

Ist die Flüssigkeit heterogen, so ist der verdrängte Theil in irgend einer Höhe immer als von gleicher Dichtigkeit mit der umgebenden zu denken.

IV. Ein schwimmender Körper ist in Gleichgewicht, wenn er so tief eintaucht, dass die verdrängte Flüssigkeit seinem Gewicht gleich ist, und ihr Schwerpunkt mit dem des Körpers in einer vertikalen Linie liegt.

Denn nur unter dieser Bedingung heben sich beide Kräfte auf.

Hieraus lässt sich leicht die Schwimmtiefe des eingetauchten Körpers berechnen.

Sind G, γ bezüglich die specifischen Gewichte des eingetauchten Körpers und der Flüssigkeit, V das Volum des erstern, v das der verdrängten Flüssigkeit, so ist offenbar:

$$VG = v\gamma.$$

Beispiele.

Sei ein Prisma oder Cylinder gegeben, der mit der Grundfläche eingetaucht ist, F seine Grundfläche, h seine Höhe, η die Höhe bis zu welcher er eintaucht, so ist:

$$FhG = F\eta\gamma \text{ also } \eta = \frac{hG}{\gamma}.$$

Für eine mit der Spitze eingetauchte Pyramide ist, wenn noch φ der horizontale Schnitt ist, bis zu welchem sie eintaucht:

$$FhG = q\eta\gamma \text{ aber } \frac{F}{\varphi} = \frac{h^2}{\eta^2},$$

also:

$$h^3G = \eta^3\gamma \text{ und } \eta = h\sqrt[3]{\frac{G}{\gamma}}.$$

Digitized by Google

Sei die Pyramide mit der Basis eingetaucht, so ist das Volum des eingetauchten Stückes gleich:

$$\frac{hF}{3} - \frac{\eta\varphi}{3},$$

woraus sich ergibt:

$$hFG = hF\gamma - \eta\varphi\gamma$$

oder

$$hF(\gamma - G) = \eta\varphi\gamma,$$

oder wenn man wieder setzt:

$$\varphi = \frac{F\eta^2}{h^2},$$

$$h^3(\gamma - G) = \eta^3\gamma \text{ also } \eta = h\sqrt{\frac{\gamma - G}{\gamma}}.$$

Für die Kugel mit Radius r ist das Volum des verdrängten Flüssigkeits-Segmentes:

$$\frac{\pi\eta^3}{3}(3r - \eta),$$

also:

$$4r^3G = \eta^3\gamma(3r - \eta).$$

Dies ist eine cubische Gleichung zur Bestimmung von η.

Möge jetzt ein Rotationscylinder mit horizontaler Axe eingetaucht sein, so ist sein Inhalt gleich $\pi r^2 h$; sei ϱ die Tiefe der Eintauchung, α derjenige Bogen der Grundfläche in Graden, welcher sich unter Wasser befindet, so ist der eingetauchte Theil des Prismas gleich h, S, wenn S das eingetauchte Segment der Grundfläche ist. Aber:

$$S = \frac{\pi r^2\alpha}{360} - \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha,$$

also:

$$\pi r^2 hG = \left(\frac{\pi r^2\alpha}{360} - \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha\right)\gamma h.$$

oder:

$$\pi G = \gamma\left(\frac{\pi\alpha}{360} - \frac{\sin\alpha}{2}\right),$$

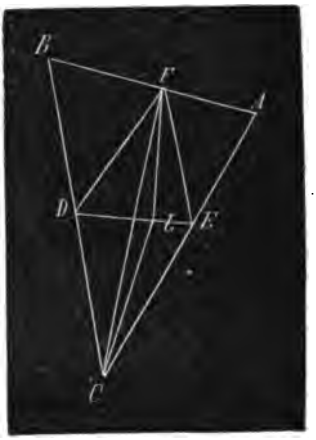
hat man aus dieser transcendenten Gleichung α berechnet, so erhält man:

$$\varrho = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Möge jetzt ein grades dreiseitiges Prisma mit horizontaler Kante eingetaucht werden. Es kann dasselbe mit einer oder zwei Kanten eintauchen In beiden Fällen ist die Höhe des Prisma gleichgültig. Betrachten wir zunächst den ersten Fall.

Sei ABC (Fig. 388) die Grundfläche, a, b, c die Seiten, C die eingetauchte Spitze,

Fig. 388.



DE der Durchschnitt des Spiegels der Flüssigkeit. Halbiren wir AB und DE bezüglich in F und J, und sei Winkel $ACF = \alpha$, $BCF = \beta$, es muss dann sein:

$$G \cdot ABC = \gamma \cdot DEC,$$

und überdies Linie FJ, welche parallel der Verbindungslinie der Schwerpunkte ist, auf DE senkrecht stehen; d. h. es soll $DF = FE$ sein. Wir setzen noch:

$$CD = x, \quad CE = y, \quad CF = f,$$

und erhalten:

$$G \cdot ab = \gamma \cdot xy$$

und

$$x^2 - 2xf\cos\alpha = y^2 - 2yf\cos\beta,$$

woraus sich durch Elimination eine Gleichung vierten Grades ergibt:

$$1)\ x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2rabfx\cos\beta - r^2a^2b^2 = 0,$$

wenn $\frac{G}{\gamma} = r$ ist.

Da das letzte Glied negativ ist, so hat diese Gleichung jedenfalls zwei reelle Wurzeln eine positive und negative, von denen nur die erstere in Betracht kommt. Die beiden andern Wurzeln sind gleichzeitig reell oder imaginär; ist ersteres der Fall, so haben sie, da das letzte Glied negativ ist gleiche Zeichen. Sie können aber nicht negativ sein, weil, wenn x_1, $-x_2$, $-x_3$, $-x_4$ die vier Wurzeln sind, sein müsste:

$$x_1 > x_2 + x_3 + x_4$$

wegen des negativen Coefficienten des zweiten, und

$$x_2x_3x_4 > x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4$$

wegen des positiven des dritten Gliedes, also:

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{2}{x_4}.$$

Multiplicirt man beide Ungleichheiten mit einander, so kommt:

$$1 > 8 + \frac{x_3 + x_4}{x_2} + \frac{x_2 + x_4}{x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_4},$$

was unmöglich ist. Es müssen also drei Wurzeln positiv sein, wenn alle reell sind. Das Prisma hat also höchstens drei Gleichgewichtslagen und diese treten ein, wenn alle Wurzeln reell, und die drei positiven so beschaffen sind, dass die x kleiner als a, die y kleiner als b werden.

Wird das Prisma nun mit zwei Spitzen eingetaucht, so ist $BDEA = r \cdot ABC$, also $CDE = (1-r)\,ABC$. Da sich übrigens der Schwerpunkt von $BDEA$ mit denen beider Dreiecke in einer Graden befindet, so bleibt die zweite Bedingung unverändert, und man erhält:

$$2)\quad x^4 - 2fx^3\cos\alpha + 2(1-r)\,abfx\cos\beta - (1-r^2)\,a^2b^2 = 0.$$

Für das Prisma mit gleichschenkliger Grundfläche ist

$$a = b,\ \beta = \alpha,\ \cos\alpha = \frac{f}{a},\ f^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}.$$

Also, wenn das Prisma mit einer Kante eintauchen soll:

$$xy = ra^2,\quad x^2 - y^2 - \frac{2f^2}{a}(x-y) = 0.$$

Es kommt $x = y = a\sqrt{r}$ als erste Auflösung. Lässt man den Factor $x-y$ weg, so bleiben noch die Gleichungen:

$$xy = ra^2,\quad x + y = \frac{2f^2}{a},$$

also:

$$3)\quad x^2 - \frac{2f^2}{a}x + ra^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat imaginäre Wurzeln, wenn $r > \frac{f^4}{a^4}$. Sie hat gleiche positive Wurzeln, wenn $r = \frac{f^4}{a^4}$, $x = \frac{f^2}{a}$ ist, woraus dann folgt:

$$x = y = a\sqrt{3}.$$

Sie hat ungleiche positive Wurzeln, wenn $r < \frac{f^4}{a^4}$ ist. Damit sich hieraus Gleichgewichtslagen ergeben, müssen die Wurzeln kleiner als a sein.

Werden aber zwei Kanten eingetaucht, so wird eine Auflösung:

$$x = y = a\sqrt{1-r}$$

und für die andern Auflösungen hat man:

$$4)\quad x^2 - \frac{4a^2 - c^2}{2a}x + (1-r)a^2 = 0.$$

Ist das Dreieck gleichseitig, also $c = a$, so wird je nachdem eine oder zwei Kanten eingetaucht sind:

$$x = y = a\sqrt{r} \text{ oder } x = y = a\sqrt{1-r}$$

und die Gleichungen für die andern Auflösungen sind bezüglich:

$$5)\quad x^2 - \frac{3a}{2}x + ra^2 = 0$$

$$6)\quad x^2 - \frac{3a}{2}x + (1-r)a^2 = 0.$$

Die erste hat zwei reelle Wurzeln, wenn $r < \frac{1}{16}$ und diese sind kleiner als a, wenn $r > \frac{1}{4}$ ist. Bei eingetauchter Spitze finden also drei Gleichgewichtslage statt, wenn r zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16}$ liegt.

Die Gleichung 6) hat reelle Wurzeln, wenn $r > \frac{7}{16}$ ist, dieselben sind kleiner als a, wenn $r < \frac{1}{4}$ ist. Also wenn zwei Spitzen eingetaucht sind, gibt es drei Gleichgewichtslagen, wenn r zwischen $\frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ und $\frac{1}{4}$ liegt.

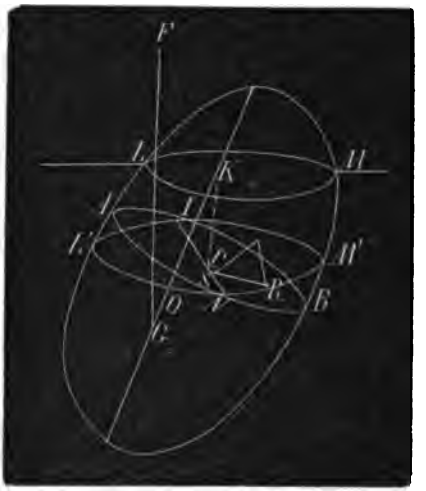
2) Stabiles und labiles Gleichgewicht der schwimmenden Körper.

Damit das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers stabil sei, muss der Druck der Flüssigkeit ihn dann seiner ursprünglichen Lage wieder zuführen, wenn kleine Verrückungen ihn aus derselben entfernen.

Denken wir uns die Flüssigkeit homogen, und den eingetauchten in Gleichgewicht befindlichen Körper aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, so dass er eine kleine Geschwindigkeit erhält. Im Falle nun, dass das Gleichgewicht labil ist, darf zu keiner Zeit die Entfernung aus der Gleichgewichtslage eine beträchtliche werden.

Sei LQM (Fig. 389) der Durchschnitt der Oberfläche des eingetauchten Körpers mit der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit, nach der Störung des Gleichgewichts, $ANBJ$ diejenige Linie, welche in der Gleichgewichtslage von der Flüssigkeitsoberfläche begrenzt wird, sei C der Schwerpunkt des Ebenenstücks $ANBJ$ und b sein Inhalt. Legen wir noch durch C eine horizontal Ebene $L'NM'J$ und bezeichnen den Schwerpunkt des ganzen Körpers mit G, den des Volum $V = ADB$, welches wir uns mit Flüssigkeit gefüllt denken, mit O, sei ferner ϑ der Winkel von GO und der Vertikalen. Offenbar

Fig. 389.



ist GO senkrecht auf $ANBJ$, da in der Gleichgewichtslage GO vertikal wird.

Sei noch die Länge $GO = a$, ζ die Entfernung des Punktes C von LQM, ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, M die Masse des eingetauchten Körpers. Endlich sei die Oberfläche der Flüssigkeit LQM Ebene der xy.

Auf den Körper wirkt dann die Schwere, und der Druck der Flüssigkeit beide nach der Axe der Z gerichtet, für alle Punkte sind also die Componenten X und Y der Null gleich.

Sei die Z-Axe im Sinne der Schwere gerichtet, so wirkt an allen Elementen des Körpers, die Kraft gdm und an jedem Elemente des eingetauchten Theils die Kraft $-g\varrho\,df$, wo df das Volumelement ist. — Sei Z die auf irgend einen Punkt wirkende Kraft so gibt der Satz der lebendigen Kräfte:

$$\Sigma v^2 dm = 2\,\Sigma dm \int Z dz + \text{const.}$$

Da die Geschwindigkeiten sehr klein, also die linke Seite unendlich klein von zweiter Ordnung ist, so dürfen rechts nur Glieder dritter Ordnung vernachlässigt werden.

Von dieser rechten Seite ist derjenige Theil, welcher von der Schwere des eingetauchten Körpers herrührt:

$$2\,\Sigma dm \int Z dz = 2g\Sigma dm \int dz = 2gM z_0,$$

wo z_0 die Ordinate des Schwerpunktes ist. — Der eingetauchte Theil zerfällt in das Volum zwischen LQM und $L'NM'$ und in das unterhalb $L'NM'$ befindliche. Für das letztere ist zu setzen:

$$ADB + JNBM' - JNAL'.$$

Der auf den Druck der Flüssigkeit bezügliche Theil der rechten Seite unserer Gleichung ist nun:

$$-2g\varrho\Sigma df \int dz = -2g\varrho\Sigma z df.$$

Da die Verrückungen sehr klein waren, so kann jeder der drei Ebenen-Schnitte des Körpers gleich b gesetzt werden, und das erste Volum zwischen LKM und $L'NM'$ können wir als cylindrisch annehmen, es ist dann für dasselbe:

$$\Sigma z df = b \int_0^\zeta z ds = \tfrac{1}{2} b\zeta^2.$$

Für das Volum $ADB = V$ erhält man als Ordinate des Schwerpunktes O:

$$z_0 - a\cos\vartheta,$$

also:

$$\Sigma z df = (z_0 - a\cos\vartheta)\,V$$
$$= Vz_0 - Va - Va\frac{\vartheta^2}{2},$$

wenn man die unendlich kleinen Grössen dritter Ordnung vernachlässigt. a ist positiv genommen, wenn O über G liegt.

Die Volumina von $JNBM'$ und $JNAL'$ zerlegen wir in prismatische Elemente mit vertikalen Kanten, die Ebene $ANBJ$ zur Basis haben. Sei $d\lambda$ ein Element von $ANBJ$, welches durch Punkt R geht, sei RT die Kantenlänge des zugehörigen Prisma, $RS = u$ senkrecht auf JN, zieht man dann ST, so ist offenbar Winkel

$RST = \vartheta$, also der Inhalt des Prisma gleich

$$RT \cos\vartheta d\lambda = u \sin\vartheta \cos\vartheta d\lambda,$$

oder mit Vernachlässigung der Grössen dritter Ordnung $\mu\vartheta d\lambda$. Um $\Sigma z df$ für dies Prisma zu erhalten, muss der Inhalt desselben mit dem der Mitte von RT entsprechenden Werthe von z, d. h. mit $\zeta + \frac{1}{2} u \sin\vartheta + \frac{1}{2} u\vartheta$ multiplicirt werden; wir erhalten also:

$$u\vartheta d\lambda (\zeta + \tfrac{1}{2} u\vartheta).$$

Für die Elemente von $JNAL'$ gilt Gleiches, nur ist die Ordinate des mittleren Elementes gleich $\zeta - \frac{1}{2} u\vartheta$, so dass man erhält, da dies entsprechende Integral abzuziehen ist:

$$- u\vartheta d\lambda (\zeta - \tfrac{1}{2} u\vartheta).$$

Es muss also der Ausdruck:

$$u\vartheta d\lambda (\zeta + \tfrac{1}{2} u\vartheta)$$

über die ganze Fläche $ANBJ$ integrirt, dabei aber u im Theile JNB als positiv, im Theile JNA als negativ betrachtet werden. Weil nun JN durch den Schwerpunkt von $ANBJ$ geht, ist $\int u d\lambda = 0$, und setzen wir:

$$\int u^2 d\lambda = bk^2,$$

so ist dieser Ausdruck offenbar das Trägheitsmoment der Fläche $ANBJ$ in Bezug auf JN, und der zugehörige Theil von

$$2\Sigma dm \int Z dz = - g\varrho bk^2 \vartheta^2.$$

Durch Zusammenfassung aller Theile kommt also:

$$\Sigma v^2 dm = - g\varrho b\zeta^2 - g\varrho (bk^2 + aV) \vartheta^2 + \text{const.}$$

Es ist nämlich $M = V\varrho$ (da das Gewicht der in der Gleichgewichtslage verdrängten Flüssigkeit dem des Körpers gleich ist) und der Ausdruck $2g\varrho Va$ wurde mit in die Constante aufgenommen.

Nehmen wir an, a sei positiv.

Da die Anfangswerthe $V\zeta\vartheta$ sehr klein sind, so ist auch die Constante sehr klein. Da die linke Seite positiv ist, so müssen die beiden ersten Glieder der rechten Seite also eine Summe geben, die kleiner als constant, also folglich auch klein ist, und somit werden ϑ und ζ stets sehr klein bleiben. D. h.:

Das Gleichgewicht ist stabil, wenn der Schwerpunkt des Körpers tiefer liegt als der der in der Gleichgewichtslage verdrängten Flüssigkeit.

Sei nun a negativ, so wird unsere Gleichung:

$$\Sigma v^2 dm = - g\varrho b\zeta^2 - g\varrho (bk^2 - aV) \vartheta^2 + \text{const.}$$

Wird nun der Coefficient von ϑ^2 positiv, so können ϑ und ζ sehr gross werden, obgleich constant nur klein ist. bk^2 hängt ab von der Richtung von JN. Dreht man nun JN um den Schwerpunkt C der Fläche $ANBJ$, so wird bk^2 irgend einen kleinsten Werth annehmen, und ist für diesen $bk^2 - aV$ positiv, also:

$$a < \frac{bk^2}{V},$$

so bleiben ϑ und ζ immer sehr klein. Also:

Auch dann noch kann das Gleichgewicht stabil sein, wenn der Schwerpunkt des Körpers höher als der der verdrängten Flüssigkeit liegt. Dieser Fall findet statt, wenn das Product aus der Entfernung beider Schwerpunkte in das eingetauchte Volum kleiner ist als das kleinste Trägheitsmoment, welches die Schnittfläche des Körpers mit der Wasseroberfläche in Bezug auf alle durch ihren Schwerpunkt gezogene Graden hat.

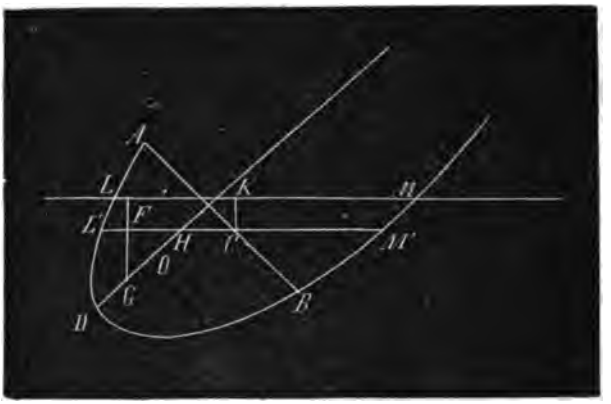
Diese Betrachtungen sind von Duhamel. Er ersetzt durch sie die älteren Theorien, welche auf die Bestimmung eines Punktes, des Metacentrums, hingerichtet sind, von dem die Stabilität bezüglich Labilität des Gleichgewichts abhängen sollte, je nachdem dieser Punkt oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes des eingetauchten Körpers lag. Das Falsche dieser Betrachtungen lag darin, dass bei der Bestimmung des Metacentrums ein Fehler gemacht wurde, übrigens aber sich ein solcher Punkt nicht von vorn herein angeben lässt.

Uebrigens ist auch gegen die Duhamel'schen Betrachtungen ein Einwand gemacht worden, dass nämlich nicht auf die Bewegung des Wassers, und den dadurch verminderten Druck desselben Rücksicht genommen sei.

3) Von den Schwingungen schwimmender Körper.

Wir nehmen an, dass der in eine homogene Flüssigkeit getauchte Körper sich symmetrisch gegen eine Vertikalebene verhalte. Er werde jetzt aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, jedoch so, dass die Ebene der Symmetrie dieselbe

Fig. 390.



bleibt, und sein Schwerpunkt die Vertikale, in der er sich im Anfange befindet, nicht verlässt. Die Lage des Körpers in jedem Augenblicke hängt dann nur von der seines Schwerpunktes, so wie von der Richtung derjenigen Graden ab, auf welcher sich der Schwerpunkt des Körpers und der der verdrängten Flüssigkeit in der Gleichgewichtslage befanden. — Bleiben die Beziehungen dieselben wie im vorigen Abschnitte und errichten wir in C (Fig. 390) eine senkrechte auf die vertikale Ebene der Symmetrie, so ist diese immer der Durchschnitt der Ebenen AB und $L'M'$. Damit das Gleichgewicht stabil sei, ist übrigens zu setzen: $ab < bk^2$. Bestimmen wir jetzt ϑ und ζ. Von ihnen hängt allein die Lage des Schwerpunktes ab, denn dieser bleibt immer in derselben Vertikalen, weil nur Vertikalkräfte den Körper angreifen, und der Schwerpunkt sich so bewegt, als wenn alle diese in ihm vereinigt wären. Sei nun wieder $FG = z_0$ die Ordinate des Schwerpunktes. $GH = l$ und $CH = p$, so ist offenbar:

$$z_0 = l\cos\vartheta - p\sin\vartheta + \zeta,$$

oder wenn die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung vernachlässigt werden:

$$z_0 = l + \zeta - p\vartheta.$$

Die erste Gleichung zwischen ϑ und ζ folgt aus der des Schwerpunktes G. Denselben greift an die Kraft MG und in entgegengesetzter Richtung das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

Die Volumina BCM' und ACL' aber können als gleich und das Stück $LMM'L'$ als cylindrisch betrachtet werden. Das letztere ist selbstverständlich, da dies unendlich klein ist. Das erstere ist klar, wenn man von den Körperräumen ABD und $L'M'D$ zwei unendlich flache Cylinder mit gemeinschaftlicher Basis absondert, deren nicht gemeinschaftliche Basis AB und $L'M'$ sind. Da sie denselben Schwerpunkt haben, so haben beide Cylinder gleichen Inhalt (vergleiche den Artikel: Schwerpunkt beim schiefabgeschnittenen Cylinder) und wenn man das gemeinschaftliche Stück absondert, so bleibt $BCM' = ACL'$. Es ist also:

$$LDM = V + b\zeta,$$

und das Gewicht desselben, wenn es mit Flüssigkeit gefüllt ist: $g\varrho(V + b\zeta)$ und $M = V\varrho$. Man hat also:

$$\frac{d^2z_0}{dt^2} = -\frac{gb\zeta}{V},$$

d. h.:

$$1) \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} - p\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{gb\zeta}{V} = 0.$$

Die Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt gibt die zweite Gleichung. Die Momente des Gewichtes des Körpers verschwinden hierbei, da der Schwerpunkt fest gedacht ist. Es kommt also nur die Momentensumme für den eingetauchten Theil des Körpers in Betracht. Die Momente sollen hier als positiv betrachtet werden, wenn sie den Winkel ϑ zu vermindern streben. Das Gesammtmoment der Kräfte in dem Stücke $LML'M'$ ist:

$$g\varrho b\zeta(l\sin\vartheta + p\cos\vartheta) = g\varrho bp\zeta,$$

wenn das unendlich Kleine vernachlässigt wird. Die Momente von ADB und $M'CB$ kommen hier hinzu, das von ACL' wird abgezogen, Das erstere Moment ist, da die Resultante in O angreift:

Digitized by Google

$$g\varrho V a \sin \vartheta = g\varrho V a \vartheta.$$

$M'CB$ wird wie im vorigen Abschnitte zerlegt, das Moment eines Elementarprisma wird:

$$g\varrho \vartheta u d\lambda (l \sin \vartheta + p \cos \vartheta + u \cos \vartheta)$$
$$= g\varrho u \vartheta (p + u) d\lambda.$$

Dieser Ausdruck ist über Fläche BC zu integriren.

Die Elemente von ACL' haben das Moment mit Rücksicht, dass es abzuziehen ist:

$$- g\varrho \vartheta u (p - u) d\lambda.$$

Es kann also:

$$g\varrho \vartheta u (p + u) d\lambda$$

über die Fläche b erstreckt werden, wenn u auf der rechten Seite des in C errichteten Lothes positiv, auf der andern negativ genommen wird. Das erste Glied wird dann Null, und man erhält:

$$g\varrho \vartheta \int u^2 d\lambda = g b \varrho \vartheta k^2.$$

Die Momentensumme ist also:

$$g\varrho b p \zeta + g\varrho (b k^2 + a V) \vartheta,$$

und diese ist gleich zu setzen mit

$$- M k^2 \frac{d^2 \vartheta}{dt^2},$$

wo Mk^2 das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug auf die in seinem Schwerpunkt auf der Ebene der Symmetrie senkrechte Linie bedeutet. Man hat also:

$$2) \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{gbp}{Vk^2} \zeta + \frac{g}{Vk^2} (bk^2 + aV) \vartheta = 0.$$

Nehmen wir zunächst an, dass der Körper auch symmetrisch sich zu der durch GO gelegten auf der ersten Symmetrieebene senkrechten Ebene verhalte, ein Fall der bei Seeschiffen eintritt. Dann ist $p = 0$, also:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{gb\zeta}{V} = 0,$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{Vk^2} (bk^2 + aV) \vartheta = 0.$$

Man erhält:

$$\zeta = \alpha \cos \left(t \sqrt{\frac{gb}{V}} + \alpha' \right),$$

$$\vartheta = \beta \cos \left(\frac{t}{k} \sqrt{\frac{g(bk^2 + aV)}{V}} \right).$$

α und β sind die kleinen Anfangswerthe von ζ und ϑ, also ζ und ϑ bleiben immer sehr klein. — Die Bewegung ist analog der Pendelbewegung.

Liegt G über Ox, so ist a negativ; es muss aber $aV < bk^2$ sein, damit diese Formeln überhaupt richtig bleibt.

Man kann aber auch aus den allgemeinen Gleichungen 1) und 2) $\frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$, bezüglich $\frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ eliminiren, und erhält:

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \alpha\zeta + p\beta\vartheta = 0, \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \delta\zeta + \beta\vartheta = 0,$$

wenn

$$\frac{bg(p^2 + k^2)}{Vk^2} = \alpha, \quad \frac{g(bk^2 + aV)}{Vk^2} = \beta,$$

$$\frac{gbp}{Vk^2} = \delta$$

gesetzt wird. Das zweite wird mit dem unbestimmten Factor λ multiplicirt und zur ersten addirt, dann gesetzt:

$$\zeta + \lambda\vartheta = x, \quad \frac{\beta(p + \lambda)}{\alpha + \lambda\delta} = \lambda,$$

also:

$$d\lambda^2 + (\alpha - \beta)\lambda - \beta p = 0$$

so kommt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (\alpha + \lambda\delta) x = 0,$$

also:

$$x = c \cot (\sqrt{\alpha + \lambda\delta}),$$

wenn die Anfangsgeschwindigkeiten Null sind. Seien λ_1, λ_2 die reellen Werthe von λ; sie sollen so beschaffen sein, dass $\alpha + \lambda\delta$ positiv ist, weil sonst x nicht sehr klein bleibt. Wir haben:

$$4) \quad \zeta + \lambda_1 \vartheta = c \cos (t \sqrt{\alpha + \lambda_1 \delta})$$
$$\zeta + \lambda_2 \vartheta = c^1 \cos (t \sqrt{\alpha + \lambda_2 \delta});$$

c und c_1 geben die Anfangswerthe von ζ und ϑ.

Wenn man von C aus zwei Längen λ_1, λ_2 auf AB abträgt, nach einer oder der andern Seite, je nach den Vorzeichen dieser Grössen, so erhält man zwei Punkte, deren Entfernungen von der Flüssigkeitsoberfläche $\zeta + \lambda_1\vartheta$, $\zeta + \lambda_2\vartheta$ sind und die vertikale Bewegung jedes dieser Punkte folgt also dem Gesetze der Pendelschwingungen.

Wenn G unter O liegt, hat die Gleichung:

$$d\lambda^2 + (\alpha - \beta)\lambda - \beta p = 0$$

zwei reelle Wurzeln mit ungleichen Zeichen, weil dann β positiv ist.

Was das Zeichen von

$$y = \alpha + \lambda\delta$$

anbetrifft, so hat man:

Digitized by Google

$$y^2 - (\alpha + \beta)\, y + \frac{\beta bg}{V} = 0,$$

also zwei positive Wurzeln.

Liegt G über O, und ist $aV < bk^2$, so ist β noch positiv, beide Werthe von λ sind noch reell und von ungleichen Zeichen, y positiv. Dies ist nicht der Fall, wenn $aV < bk^2$ wird.

Ist im Falle der Gleichung 3) der Anfangswerth von ζ, also $\alpha = 0$, so ist ζ immer gleich Null, also der Schwerpunkt fest, das eingetauchte Volum constant, es findet nur eine Drehung, um die durch den Schwerpunkt gehende Senkrechte auf die Symmetrieebene statt.

Sei z. B. der eingetauchte Körper ein homogenes Ellipsoid, A, B, C seine Halbaxen, r seine Dichtigkeit, sei ferner A die vertikale Halbaxe und $B > C$.

Damit Stabilität stattfinde muss

$$bk^2 > aV$$

sein, in Bezug auf eine Axe der Ellipse LM, für welche das Moment am kleinsten ist, und dies ist die grosse Axe der Ellipse, sie ist also B parallel. Sei x das eingetauchte Stück der Axe $2A$, so hat man:

$$\frac{4rA^2}{\varrho} = (3A - x)\, x^2,$$

denn das Volum der verdrängten Flüssigkeit ist:

$$\frac{\pi BC}{3A^2}(3A - x)\, x^2$$

das des Ellipsoids $\frac{4}{3}\pi ABC$.

Das Moment des eingetauchten Volums in Bezug auf die durch G gehende Horizontalebene ist:

$$aV = \frac{\pi BC}{4A^2}(2Ax - x^2)^2.$$

Die Halbaxen der Ellipse LM sind:

$$\alpha = \frac{B}{A}\sqrt{2Ax - x^2},$$

$$\beta = \frac{C}{A}\sqrt{2Ax - x^2}$$

und das gesuchte kleinste Trägheitsmoment dieser Ellipse:

$$\frac{\pi\alpha\beta^3}{4} = \frac{\pi BC^3}{4A^4}(2Ax - x^2)^2 = bk^2.$$

Dieser Ausdruck soll grösser sein als aV, d. h. $C > A$, also:

Stabilität findet statt, wenn die vertikale Axe des Ellipsoids die kleinste ist.

Möge jetzt die Ebene, in der sich A und C befinden, vertikal bleiben und im Uebrigen eine Verschiebung eintreten, so finden Oscillationen statt.

Die Gleichung

$$\frac{4rA^2}{\varrho} = (3A - x)\, x^2$$

hat nur eine positive Wurzel zwischen 0 und $2A$; ist diese bekannt, so kennt man a, b und bk^2.

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{3g\varrho\,(2Ax - x^2)}{4A^2 r}\,\zeta = 0$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{15g\varrho\,(C^2 - A^2)\,(2Ax - x^2)^2}{16\varrho A^3\,(C^2 + A^2)}\,\vartheta = 0,$$

für $\varrho = 2r$ wird $x = A$, und

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{3g}{2A}\,\zeta = 0,$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{15g\,(C^2 - A^2)}{8A\,(C^2 + A^2)}\,\vartheta = 0;$$

für $C = 3A$ haben die fortschreitende und die rotirende Bewegung gleiche Periode. Wollte man statt des hydrostatischen Druckes der Flüssigkeit auf den Körper aber den hydrodynamischen einführen, also auf die Bewegung der Flüssigkeit Rücksicht nehmen, so würde die Aufgabe eine ungleich complicirtere und keiner gleich einfachen Lösung fähig werden. Einen Versuch solcher Betrachtungen hat Klebsch gemacht.

Schwingungen (Dynamik).

Wenn irgend eine System von beliebigen Kräften angegriffen in stabilem Gleichgewicht sich befindet, so wird es wenn die Punkte sehr wenig aus dieser Gleichgewichtslage entfernt werden, auch nur solche Bewegungen machen können, dass die Aenderungen der Coordinaten sehr klein bleiben. Solche Bewegungen heissen Schwingungen. Bekanntlich sind die Schwingungen oder Wellenbewegungen der festen, flüssigen oder luftförmigen Körper in den verschiedenen Theilen der Physik von grosser Wichtigkeit, aber auch die Wellenbewegung des Aethers, welche den Lichterscheinungen zu Grunde liegen, erfordern gründliche und feine Untersuchungen. Es sollen hier zunächst einige allgemeine Sätze über Schwingungen gegeben werden.

Wir wollen die Coordinaten eines der materiellen Punkte, aus denen das System besteht, hier nicht mit x, y, z sondern mit x_1, x_2, x_3 bezeichnen, so dass x_4, x_5, x_6 die Coordinaten des folgenden, und wenn das System aus n Punkten besteht, $x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}$ die

Digitized by Google

des letzten sind. Der Zusammenhang des Systems wird ausgedrückt durch Gleichungen von der Gestalt:

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0 \ldots,$$

wo die L Functionen der Grössen x_1, $x_2 \ldots$, sind. Die Componenten der einen Punkt (x_s, x_{s+1}, x_{s+2}) angreifenden Kräfte mögen sein gleich X_s, X_{s+1}, X_{s+2}, diese Kräfte sind Functionen der Coordinaten jedes Punktes; die Kräfte, welche die Punkte aus der Gleichgewichtslage bringen, mögen die Componenten Y_s, Y_{s+1}, Y_{s+2} haben. Diese Grössen müssen also jedensfalls sehr klein sein. In der Gleichgewichtslage sei nun:

$$x_s = a_s,\ X_s = A_s$$

und zu irgend einer Zeit

$$x_s = a_s + \xi_s,$$

also:

$$X_s = A_s + \frac{\partial A_s}{\partial a_1}\xi_1 + \frac{\partial A_s}{\partial a_2}\xi_2 + \ldots = A_s + \Sigma_r \frac{\partial A_s}{\partial a_r}\xi_r,$$

da nämlich die Grössen ξ_r sehr klein sind, können die Glieder von höherer Dimension vernachlässigt werden. Die bekannten Bewegungsgleichungen von Lagrange haben nun die Form:

$$1)\qquad \frac{d^2 x_s}{dt^2} = X_s + Y_s + \Sigma_p \lambda_p \frac{\partial L_p}{\partial x_s},$$

für s sind alle Werthe von 1 bis $3n$ zu nehmen. Die unbekannten Grössen λ_p, welche gleich der Anzahl der Bedingungsgleichungen $L = 0$ sind, müssen aus diesen Gleichungen eliminirt werden. Nun ist aber, wenn man in einer der Gleichungen:

$$L_p = 0$$

für x_1, $x_2 \ldots$, bezüglich setzt $a_1 + \xi_1$, $a_2 + \xi_2 \ldots$

$$L_p(x_1, x_2, x_3 \ldots) = L_p(a_1, a_2, a_3 \ldots) + \frac{\partial L_p}{\partial a_1}\xi_1 + \frac{\partial L_p}{\partial a_2}\xi_2 + \ldots,$$

also da

$$L_p(x_1, x_2 \ldots) = L_p(a_1, a_2 \ldots) = 0$$

ist:

$$2)\qquad \Sigma_r \left\{ \frac{\partial L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_r}\xi_r \right\} = 0.$$

In den Ausdruck

$$\frac{\partial L_p}{\partial x_s} = \frac{\partial L_p}{\partial a_s}$$

kann ebenfalls $a_s + \xi_s$ für x_s gesetzt werden, man hat dann:

$$\frac{\partial L_p}{\partial x_s} = \frac{\partial L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_s} + \frac{\partial^2 L_p}{\partial a_s \partial a_1}\xi_1 + \frac{\partial^2 L_p}{\partial a_s \partial a_2}\xi_2$$

$$= \frac{\partial L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_s} + \Sigma_r \frac{\partial^2 L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_s \partial a_r}\xi_r.$$

Die Coefficienten λ_p bestehen aus einem Theile μ_p, der sich auf die Gleichgewichtslage bezieht, und aus einem Zuwachse ν_p, der von der Zeit abhängig ist.

Ferner ist $\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{d^2 \xi_s}{dt^2}$, und in der Gleichgewichtslage $\frac{d^2 \xi_s}{dt^2} = c$. Es folgt also für dieselbe aus den Gleichungen 1):

Digitized by Google

3) $$0 = A_s + \Sigma \mu_p \frac{\partial L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_s}$$

und mit Rücksicht auf diese Gleichung ganz allgemein:

$$\frac{d^2\xi_s}{dt^2} = Y_s + \sum_r \frac{\partial A_s}{\partial a_r}\xi_r + \sum_r \nu_p \frac{\partial L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_s} + \sum_p \sum_r (\mu_p + \nu_p) \frac{\partial^2 L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_s \partial a_r}\xi_r.$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass die im letzten Gliede mit ν_p multiplicirte Grösse gegen die im vorletzten Gliede damit multiplicirte verschwindend klein ist, und man also setzen kann:

4) $$\frac{d^2\xi_s}{dt^2} = Y_s + \sum_r \frac{\partial A_s}{\partial a_r}\xi_r + \sum_p \nu_p \frac{\partial L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_s} + \sum_p \sum_r \mu_p \frac{\partial^2 L_p(a_1, a_2 \ldots)}{\partial a_s \partial a_r}\xi_r.$$

Die Grössen μ_p lassen sich aus den Gleichungen 3) bestimmen, und zwar sind es nur Functionen von $a_1, a_2 \ldots$ also Constanten. Die Grössen ν_p sind an Anzahl gleich denen der Gleichungen $L = 0$. Eliminirt man sie aus den Gleichungen 4), so hören diese nicht auf, in Bezug auf die ξ linear zu sein. Statt der durch die Elimination ausfallenden Gleichungen 4) hat man ebenso viel Gleichungen 2) und ihre zweiten Differenzialgleichungen:

$$\sum_r \left\{ \frac{\partial L_p}{\partial a_r} \frac{d^2\xi_r}{dt^2} \right\} = 0.$$

Aus diesen in Verbindung mit den Gleichungen 4) kann man dann wieder alle Ausdrücke $\frac{d^2\xi_s}{dt^2}$ berechnen, und zwar nehmen dieselben die Form an:

5) $$\frac{d^2\xi_s}{dt^2} = U_s + A_{s,1}\xi_1 + A_{s,2}\xi_2 + \ldots$$

wo die Grössen U_s die Form haben:

$$U_s = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 + \ldots$$

also wie die Y sehr klein sind, die Coefficienten α sind Constanten in Bezug auf die Zeit. Die Gleichungen sind lineare.

Ein besonderer Fall ist es, wenn nur die Punkte, welche einander sehr nahe sind, eine Einwirkung auf einander ausüben, in diesem Falle werden die Differenzialquotienten der ξ in Bezug auf a, a_1, a_2 rechts vorkommen, und die Gleichungen also partielle sein.

Setzen wir zunächst

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = 0,$$

also auch $U_s = 0$, d. h. geben wir den materiellen Punkten nur eine Verrückung und Anfangsgeschwindigkeit.

Sind dann

$$\xi_s = \xi_s^{(1)}, \quad \xi_s = \xi_s^{(2)} \ldots$$

partikuläre Integrale, so ist bekanntlich

$$\xi_s = \xi_s^{(1)} + \xi_s^{(2)} + \ldots$$

das allgemeine Integral und auch die Summe der Anfangswerthe der partikulären Integrale wird offenbar dem Anfangswerthe des allgemeinen Integrals gleich sein.

Da aber die ξ die Projectionen der Verrückung sind, und die Addition der Projectionen verschiedener Kräfte auf eine Coordinatenaxe die entsprechende Componente der Mittelkraft gibt, und auch

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \frac{d\xi_s^{(1)}}{dt} + \frac{d\xi_s^{(2)}}{dt} + \ldots$$

ist, so hat man folgenden wichtigen Satz:

„Wenn die Verrückung, welche ein Anfangszustand erzeugt, aus mehreren andern Verrückungen resultirt, so erhält man die Wege und die Geschwindigkeit der einzelnen Atome zu jeder Zeit, wenn man die aus den entsprechenden Anfangszuständen resultirenden Wege und Geschwindigkeiten gleich wie Kräfte zusammensetzt."

Dieser Satz wird der von der Uebereinanderlagerung der kleinen Schwingungen genannt. Er lehrt, dass sich mehrere Schwingungen, die ein System angreifen, nicht stören, sondern dass die einzelnen gleichzeitig neben einander auf die einzelnen Massenpunkte wirken.

Seien jetzt die Grössen Y nicht gleich Null, aber, wie ja überhaupt die Kräfte in der Natur, mögen sie nur die Coordinaten, nicht die Zeit, entwickelt enthalten. Da übrigens U_s sehr klein ist, so kann man statt:

$$U_s(x_1, x_2 \ldots)$$

mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung:

$$U_s(a_1, a_2 \ldots)$$

schreiben, so dass auch die Grössen U Constanten sind.

Den Gleichungen 5) lässt sich dann dieselbe Form geben, als wenn $U_s = 0$ wäre. Denn setzen wir:

$$\xi_1 = \alpha_1 + \eta_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 + \eta_2,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ Constanten sind, und bestimmen dies durch die $3n$ Gleichungen:

6) $$U_s + A_{s,1}\alpha_1 + A_{s,2}\alpha_2 + \ldots = 0,$$

so ergibt sich:

7) $$\frac{d^2\eta_s}{dt^2} = A_{s,1}\eta_1 + A_{s,2}\eta_2 + \ldots$$

Für die η gilt derselbe Satz, wie für die ξ, dass nämlich:

$$\eta_s = \eta_s^{(1)} + \eta_s^{(2)} + \ldots$$

ist, wenn $\eta_s^{(1)}$, $\eta_s^{(2)}$ partielle Integrale vorstellen, und offenbar haben die η dieselben Werthe wie vorhin die ξ, wenn die Anfangszustände übereinstimmen. Nun wird durch Einführung der Kräfte Y_s offenbar die Gleichgewichtslage eine andere, als die, welche für $Y_s = 0$ stattfand, und für diese neue Gleichgewichtslage wird s durch die Gleichungen 6) bestimmt, wie der Vergleich derselben mit Gleichung 5) zeigt. Für die neue Gleichgewichtslage ist somit:

$$\xi_1 = \alpha_1, \ \xi_2 = \alpha_2 \ldots, \ \eta_1 = \eta_2 = \ldots = 0,$$

die Anfangswerthe von $\frac{d\eta_s}{dt}$ und $\frac{d\xi_s}{dt}$ sind ferner selbstverständlich gleich, und die Anfangswerthe von η_s denen von ξ_s vermindert um α_s, also:

Wird ein System aus seiner stabilen Gleichgewichtslage sehr wenig mit Einführung sehr kleiner Kräfte verrückt, so ist die Bewegung der Punkte in Bezug auf die neue Gleichgewichtslage gleich der Bewegung in Bezug auf die alte Gleichgewichtslage ohne Hinzutritt der neuen Kräfte, wenn man dem System einen Anfangszustand gibt, welcher in Bezug auf die alte Gleichgewichtslage sich so verhält wie der gegebene in Bezug auf die neue.

Man kann aber offenbar auch setzen:

$$\eta_s = \zeta_s + \vartheta_s,$$

wenn die Anfangswerthe von η_s und $\frac{d\eta_s}{dt}$ den wirklichen Anfangsverrückungen, wenn ferner der Anfangswerth von

$$\vartheta_s = -\alpha_s, \text{ und von } \frac{d\vartheta_s}{dt} = 0$$

genommen wird. Da $\eta_s = \xi_s - \alpha_s$ war. Nun ist $\alpha_s + \vartheta_s$ die Verrückung von der alten Gleichgewichtslage unter Einfluss der neuen Kräfte aber ohne Anfangsverrückung und Geschwindigkeit. η_s ist der Werth, der sich aus den Gleichungen 5) für ξ_s ergibt als die Entfernung von der alten Gleichgewichtslage, die aus dem wirklichen Anfangszustand mit Hinweglassung der neuen Kräfte sich ergibt, und da

$$\xi_s = \alpha_s + \eta_s$$

ist, so hat man nachfolgenden Satz:

Die Bewegung setzt sich aus zwei andern zusammen, deren eine aus den gegebenen Anfangszuständen ohne Einführung der neuen Kräfte, die andere aus diesen Kräften ohne Anfangsänderung der Lage und ohne Anfangsgeschwindigkeit sich ergibt.

Beide Bewegungen können in unendlich viel andre zerfallen, die man wie Kräfte zusammensetzt. Für die erstere ist dies oben bewiesen, für die letztere bemerke man, dass U_s in eine Anzahl Theile zerlegt werden kann, nimmt man davon die ersten, dann die zweiten Theile u. s. w., so geben, da die Gleichungen 6) linear sind, die Summen der sich so ergebenden partikularen Werthe der $\alpha \ldots$ die Gesammtwerthe dieser Grössen. Die so gefundenen Werthe von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ bilden dann die durch die neuen Kräfte bewirkten Gesammtverrückungen.

Digitized by Google

Es addiren sich somit (die von den Theilen der neuen Kräfte erzeugten Wirkungen.

Offenbar lassen sich für die Gleichungen 5) particuläre Integrale von der Form finden:

$$\xi_s = C_s \sin(rt + u)$$

wo C_s, r, a Constanten sind. Setzt man diese Werthe in 5) ein, so erhält man Gleichungen, die in Bezug auf die C_s linear sind, und dieselben bis auf eine C_i bestimmen. Die noch übrig bleibende Gleichung ist nach Elimination der C (vergleiche den Artikel: Zurückführung der Differensialgleichungen auf Quadraturen) in Bezug auf r^2 von der Ordnung k, welche die Anzahl der Gleichungen 5) vorstellt. Im vorliegenden Falle des stabilen Gleichgewichts müssen die Wurzeln dieser Gleichung alle positiv sein, weil sonst Exponentialgrössen vorkommen und die ξ_s nicht mehr sehr klein blieben. Die $3n$ positiven Werthe von r (die negativen geben nichts Neues) geben $3n$ Werthe für jedes ξ_s und die Summe derselben ist das vollständige Integral, welches also $6n$ willkürliche Constanten enthalten muss; in der That sind dies die Werthe von C_i und u, welche jedem der Systeme angehörten. Diese werden durch die Anfangszustände bestimmt. —

Jedem Gliede von ξ_s: $C_s \sin(rt+u)$ entspricht in Bezug auf $\xi_{s'}$: $C_{s'} \sin(rt+u)$.

Dies sind Ausdrücke analog den in der Theorie des Pendels vorkommenden, man kann daher nach Helmholz's Vorgange die Bewegungen, welche sie ergeben, als Pendelschwingungen bezeichnen. Sind ξ_s, ξ_{s+1}, ξ_{s+2} die Projectionen der Verrückungen eines Punktes, so ist:

$$\xi_s : \xi_{s+1} : \xi_{s+2} = C_s : C_{s+1} : C_{s+2}.$$

Dies zeigt, dass die Bewegung eine gradlinige ist.

Jede Bewegung besteht aus einer Anzahl von Pendelschwingungen, welche gleich der Anzahl der unabhängigen Coordinaten ist. Diese Pendelschwingungen haben für die einzelnen Punkte dieselbe Periode, und sind als gradlinig zu betrachten.

Es ist auch leicht zu sehen, dass wenn die r commensurabel sind, das System dieselben Zustände durchläuft.

Schwingungen elastischer Körper. (Dynamik.)

1) Entwicklung der Gleichungen der Elasticität.

Zwischen den Theilen eines Körpers wirken bekanntlich gewisse innere Kräfte, welche man Molekularkräfte nennt, und die der Art sind, dass sie nur in solchen Entfernungen eine Wirkung ausüben, welche eine sehr kleine Entfernung von einander haben. Diese Entfernung nennt man Molekularsphäre.

Ein Körper heisst nun elastisch, wenn ihn die Molekularkräfte in einem stabilen Gleichgewichtszustande erhalten, derart, dass eine Deformation der Theile die Molekularkräfte so ändert, dass die ersteren zu kleinen Schwingungen um ihre ursprüngliche Lage veranlasst werden, wenn nicht neue äussere Kräfte hinzutreten, welche ihn in der veränderten Lage in Gleichgewicht halten. Ein elastischer Körper ist also gegen die in ihm wirkenden inneren Kräfte stabil. Die Molekularkräfte oder vielmehr die Ab- und Zunahmen in denselben, welche durch die Deformation bewirkt werden, nennen wir elastische Kräfte. Die Art, wie dieselbe zu messen ist, wird später gezeigt werden. Auf directe Weise ist dies nämlich aus dem Grunde nicht möglich, weil wir über die Natur und die Gesetze der Molekularkräfte im Allgemeinen nur sehr wenig wissen, und daher in Bezug auf die Elasticität nur auf die Wirkungen derselben angewiesen sind. Denken wir uns einen beliebigen Punkt M des Körpers als Mittelpunkt einer Kugel, deren Radius r der der Molekularsphäre ist. Legen wir durch M eine Ebene E, welche die Kugel in zwei Theile A und B theilt. Von dieser Ebene betrachten wir ein Element dE, in welchen M liegt als Basis eines Cylinders, dessen Höhe gleich r ist, und der in A liegt, so werden alle Punkte, welche auf diesen Cylinder eine Einwirkung ausüben, und auf der Seite der Ebene E liegen, wo sich der erstere nicht befindet, in dem Theile B der Kugel enthalten sein. Die Einwirkungen setzten sich nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft HdE zusammen. Diese Grösse durch das Element dE dividirt, also H, bezeichnen wir als „Einheit der elastischen Kraft," welche im Punkt M auf die Ebene E wirkt. Die Einheit der elastischen Kraft ist also von der Lage der Ebene E abhängig.

Es handelt sich jetzt um die Aufstel-

Digitized by Google

lung der allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen der Elasticität. Wir denken uns den Körper in Parallelepipeda getheilt, von sehr kleinen Dimensionen, und deren Seiten den Coordinatenaxen parallel sind, und suchen die Bedingungen, unter welchen ein solches Parallelepipedon im Gleichgewichte ist. Die Punkte desselben werden angegriffen: 1) von gewissen äusseren Kräften, von denen wir annehmen können, dass sie für alle Punkte des Parallelepipedon, wegen seiner Kleinheit gleichmässig sind. (Sind also die Componenten der auf die Einheit ausgeübten äusseren Kräfte bezüglich X, Y, Z, so sind die Summen derselben, welche auf alle Punkte des Parallelepipedons wirken, wenn dx, dy, dz die Seiten desselben sind, ϱ die Dichtigkeit ist, bezüglich $\varrho X dx dy dz$, $\varrho Y dx dy dz$, $\varrho Z dx dy dz$); 2) von den Molekularkräften, welche zwischen je zwei Punkten des Parallelepipedons wirken, und von denen wir nur wissen, dass sie in der Richtung der Verbindungslinie je zweier Punkte wirken, und von der Entfernung derselben von einander allein abhängig sind; 3) von den Elasticitätskräften, die auf die Begrenzungsebene des Parallelepipedons wirken; auch von diesen ist anzunehmen, dass sie für alle Punkte derselben Grenzebene einander gleich sind. Die Einheiten dieser Elasticitätskräfte zerlegen wir wieder nach den Axen in je drei Componenten und seien dieselben bezüglich:

$$A,\ B,\ C,\quad A_1,\ B_1,\ C_1,\quad A_2,\ B_2,\ C_2$$

in Bezug auf die YZ, ZX, XY parallele Ebene, welche vom Anfangspunkt am weitesten entfernt ist; in der gegenüberliegenden Grenzebene werden dann auf die bezüglich nächsten Parallelepipeda Elasticitätskräfte wirken, deren Einheiten sind:

$$A-\frac{\partial A}{\partial x}dx,\quad B-\frac{\partial B}{\partial x}dx,\quad C-\frac{\partial C}{\partial x}dx,$$

$$A_1-\frac{\partial A_1}{\partial y}dy,\ B_1-\frac{\partial B_1}{\partial y}dy,\ C_1-\frac{\partial C_1}{\partial y}dy,$$

$$A_2-\frac{\partial A_2}{\partial z}dz,\ B_2-\frac{\partial B_2}{\partial z}ds,\ C_2-\frac{\partial C_2}{\partial z}dz,$$

und wegen der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung sind dieselben Elasticitätskräfte jedoch mit umgekehrten Vorzeichen nach den Punkten des betrachteten Parallelepipedons selbst gerichtet. Um die Summe dieser Kräfte, welche sich auf das Parallelepipedon selbst erstrecken, zu haben, sind diese Ausdrücke bezüglich mit $dy\,ds$, $dx\,dz$, $dx\,dy$, zu multipliciren und dann die nach einer Axe hingerichteten zu addiren. So erhält man die Componenten, die bezüglich nach der Axe der x, y, z gerichtet sind, gleich:

$$\frac{\partial A}{\partial x}dx\,dy\,dz,\ \frac{\partial A_1}{\partial y}dx\,dy\,dz,\ \frac{\partial A_2}{\partial z}dx\,dy\,dz,$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}dx\,dy\,dz,\ \frac{\partial B_1}{\partial y}dx\,dy\,dz,\ \frac{\partial B_2}{\partial z}dx\,dy\,dz,$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}dx\,dy\,dz,\ \frac{\partial C_1}{\partial y}dx\,dy\,dz,\ \frac{\partial C_2}{\partial z}dx\,dy\,dz.$$

Als Gleichgewichtsgleichungen sind nur solche zu gebrauchen, welche die innern Kräfte, die die Punkte des Parallelepipedons gegen einander ausüben, nicht enthalten. Solcher Gleichungen gibt es sechs, es sind die, welche zugleich für das Gleichgewicht fester Körper gelten, wenn man die eben bezeichneten innern Kräfte nicht berücksichtigt. Es ist dies ein wichtiges Prinzip, welches man gewöhnlich so ausdrückt.

„Ein in Gleichgewicht befindliches System bleibt in solchem, wenn man einen beliebigen Theil des Systems sich fest denkt."

Indess ist dies Prinzip nicht, wie gewöhnlich angenommen wird, selbstverständlich, sondern folgt erst daraus, dass bei Systemen von den angegebenen Eigenschaften, die drei Gleichungen von der Erhaltung des Schwerpunkts und die von der Erhaltung der Flächen stattfinden, aus welchen die innern Kräfte eliminirt sind, und welche im Uebrigen mit den für feste Körper bestehenden Gleichungen übereinstimmen. Wir glaubten diesen Gegenstand etwas genauer erörtern zu müssen, um eine Schwierigkeit zu vermeiden, die unsers Wissens sämmtliche Werke mechanischen Inhaltes überspringen.

Die drei Gleichungen der Erhaltung des Schwerpunktes sind nun in unserm Falle:

$$1)\quad \varrho X+\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A_1}{\partial y}+\frac{\partial A_2}{\partial z}=0,$$

$$\varrho Y+\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial B_2}{\partial z}=0,$$

$$\varrho Z+\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C_1}{\partial y}+\frac{\partial C_2}{\partial z}=0.$$

Bei diesen Gleichungen ist, wie ausdrücklich zu bemerken, auf die Natur der Elasticität gar nicht eingegangen; sie würden richtig sein, welcher Art diese Kräfte auch wären, vorausgesetzt,

dass sie ins Gebiet der Molekularkräfte fallen.

Die drei andern Gleichungen drücken aus, dass die Momente der einselnen Kräfte senkrecht auf den drei Axen der Null gleich sind.

Nehmen wir als Momentenaxe die der Axe der x gleich gerichtete Grade, welche durch den Mittelpunkt oder, was hier dasselbe ist, den Schwerpunkt des Parallelepipedons geht.

Denken wir dann das Parallelepipedon uns fest, so gehen die Resultanten der äusseren Kräfte alle durch diesen Schwerpunkt, fallen also aus der Momentensumme aus. Die Kräfte, die auf die Grenzflächen wirken, vereinigen sich in dem Mittelpunkte derselben, die Kräfte, die auf die auf X senkrechten beiden Grenzflächen wirken, gehen also durch die Axe und geben ebenfalls die Momente Null; von den übrigen sind:

$$A_1,\quad -A_1+\frac{\partial A_1}{\partial y}dy,$$

$$A_2,\quad -A_2+\frac{\partial A_2}{\partial z}dz$$

der Axe parallel,

$$B_1,\quad -B_1+\frac{\partial B_1}{\partial y}dy,$$

$$C_2,\quad -C_2+\frac{\partial C_2}{\partial z}dz,$$

gehen durch die Axe, also auch diese Kräfte haben die Momente Null. Es bleiben also nur noch übrig:

$$C_2,\quad -C,\quad +\frac{\partial C_1}{\partial y}dy,$$

$$B_2,\quad -B_2+\frac{\partial B_2}{\partial z}dz,$$

welche bezüglich die Entfernungen von der Axe haben:

$$\frac{dy}{2},\quad -\frac{dy}{2},\quad \frac{dz}{2},\quad -\frac{dz}{2};$$

mit Vernachlässigung des unendlich Kleinen zweiter Ordnung erhält man dann: wenn man auf den Sinn, in welchen die Kräfte eine Drehung um die Axe bewirken würden, Rücksicht nimmt, und die Krafteinheit mit $dx\,ds$ oder $dx\,dy$ multiplicirt, je nachdem die Ebenen, auf welche sie wirken, den Axen der x und y parallel sind:

$$2C_1\,dx\,dy\,ds - 2B_2\,dx\,dy\,dz = 0,$$

d h.:

$$2)\quad C_1 = B_2,\quad C = A_2,\quad B = A_1.$$

Die beiden letzten Gleichungen erhält man in derselben Weise wie die erste, wenn man die Momentenaxe bezüglich den Axen der y und z parallel nimmt.

Die Gleichungen 2) haben einen wesentlich andern Charakter als die Gleichungen 1). Bei ihnen ist nämlich auf die Eigenschaften der Elasticitätskräfte bereits eingegangen. Da nämlich aus diesen Gleichungen die äussern Kräfte ganz ausfallen, so sind es lediglich Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müssen, wenn anders die Elasticität in Verbindung mit äussern auf den Körper wirkenden Kräften unter Umständen im Stande ist, den deformirten Körper in Gleichgewicht zu halten. Dass der Elasticität diese Eigenschaft zukommt, ist als durch die Erfahrung bestätigt zu betrachten.

Die Gleichungen 1) und 2) geben nun:

$$3)\quad \varrho X+\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0,$$

$$\varrho Y+\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}=0,$$

$$\varrho Z+\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C_1}{\partial y}+\frac{\partial C_2}{\partial z}=0.$$

Wenn der Körper in Bewegung ist, so sind die äussern Kräfte X, Y, Z zu ersetzen durch die verlornen Kräfte:

$$X-\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y-\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z-\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Diese Gleichungen gelten für das Innere des Körpers, was aber die Oberfläche anbetrifft, so lässt sich nicht bei jeder Gestalt derselben der Körper in Parallelepipeda zerlegen. Wohl aber findet in jedem Falle auch an der Oberfläche eine Zerlegung in Tetraeder statt, wo drei Kanten bezüglich den Coordinatenaxen parallel genommen werden können. Es sind also die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung eines solchen noch aufzusuchen. In diesem Falle sind die der x Axe parallelen Componenten der Elasticitätskräfte, welche auf die drei den Coordinatenebenen parallelen Tetraederflächen wirken bezüglich:

$$-\frac{A\,dy\,dz}{2},\quad -\frac{A_1\,dx\,ds}{2},\quad -\frac{A_2\,dx\,dy}{2},$$

auf die vierte Fläche mögen Kräfte wirken, deren Einheit die Componenten hat, U, V, W; ist ν der Flächeninhalt dieser vierten Fläche, α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche ihre Normale mit den Axen macht, so ist:

$$\nu\alpha = \frac{dx\,dz}{2}, \quad \nu\beta = \frac{dx\,ds}{2}, \quad \nu\gamma = \frac{dx\,dy}{2}.$$

Es ist nun:

$$-U\nu + \frac{A\,dy\,ds}{2} + \frac{B\,dx\,dz}{2} + \frac{C\,dy\,ds}{2} + \varrho X\,dx\,dy\,ds = 0;$$

für X wäre im Falle der Bewegung

$$X - \frac{d^2x}{dt^2}$$

zu setzen. Dieser Ausdruck verschwindet aber, da er mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirt ist, gegen die unendlich Kleinen zweiter Ordnung, ν, $dy\,dz$ u. s. w., also mit Berücksichtigung der Werthe von $\frac{dy\,dz}{2}$ u. s. w., erhält man, wenn man auch die Gleichungen für die andern Componenten bildet:

$$4) \qquad \begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma &= U, \\ B\alpha + B_1\beta + C_1\gamma &= V \\ C\alpha + C_1\beta + C_2\gamma &= W. \end{aligned}$$

Es sind dies ebenfalls Gleichungen, welche die Elasticitätskräfte erfüllen müssen, vermöge ihrer Eigenschaft, in Verbindung mit äusseren Kräften den Körper in Gleichgewicht halten zu können.

Diese Gleichungen repräsentiren übrigens noch eine wichtige Eigenschaft der Elasticitätskräfte.

Mögen U_1, V_1, W_1 die Componenten der Elasticitätskraft sein, welche auf irgend eine Ebene wirkt, welche mit den Coordinatenebenen Winkel macht, deren Cosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sein sollen, dann ist:

$$\begin{aligned} A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 &= U_1 \\ B\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 &= V_1 \\ C\alpha_1 + C_1\beta_1 + C_2\gamma_1 &= W_1, \end{aligned}$$

wenn nämlich diese Ebene mit dem oben betrachteten Tetraeder durch denselben Punkt geht.

Multipliciren wir nun diese Gleichungen bezüglich mit α, β, γ und addiren, multpliciren dann ferner die Gleichungen 4) bezüglich mit α_1, β_1, γ_1 und addiren ebenfalls, so ergibt sich durch Vergleich beider Systeme:

$$U_1\alpha + V_1\beta + W_1\gamma = U\alpha_1 + V\beta_1 + W\gamma_1,$$

d. h.:

„Wenn man die Elasticitätskraft von E und E_1, welche in einem Punkte auf zwei durch derselben gehende Ebene wirken, jede nach der Normale der andern Ebene zerlegt, so sind die Resultate gleich.“

Die Gleichungen der Elasticität hängen nunmehr von den sechs Functionen A, B, B_1, C, C_1, C_2 ab. Um diese zu bestimmen, bedarf man neuer Eigenschaften der Elasticitätskräfte.

Sei r die Entfernung zweier materiellen Punkte von einander, tritt eine Deformation ein, so wird diese Entfernung $r + \varrho$ sein, und die Elasticitätswirkung, welche zwischen beiden Punkten stattfindet, irgend wie von ϱ abhängen, also die Form haben:

$$M = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho + a_3\varrho^2 + \ldots$$

Da aber, falls keine Deformation eintritt, $M = 0$ ist und wegen des kleinen Werthes von ϱ die höhern Potenzen vernachlässigt werden können, so ist zu setzen:

$$M = a\varrho = \varrho f(r),$$

da a auf irgend eine Weise von r abhängen wird. D. h. die Elasticitätswirkung zwischen zwei Punkten ist der Zunahme ihrer Entfernung proportional.

Seien nun vor der Deformation die Coordinaten eines Punktes x, y, z, nach derselben $x + u$, $y + v$, $z + w$, so ist wenn man die Zunahme für einen benachbarten Punkt mit dx, dy, dz, du, dv, dw bezeichnet:

$$(r + \varrho)^2 = (dx + dy)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2,$$

aber u, v, w sind verschwindend klein gegen x, y, z, also auch du, dr, dw, ϱ gegen dx, dy, dz, r; berücksichtigt man noch die Gleichung:

$$r^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

so kommt:

$$r\varrho = dx\,du + dy\,dv + dz\,dw,$$

oder:

$$\varrho = \frac{dx^2}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy^2}{r}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{dz^2}{r}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{dy\,dz}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{dz\,dx}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{dx\,dy}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Da die Deformationen nur gering sind, so sind auch $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \ldots$ nur sehr kleine Grössen.

Denkt man sich jetzt wieder ein Element einer Ebene und einen durch das Element gehenden auf der Ebene senkrechten Cylinder, so werden die Anziehungen, welche von der Molekularsphäre, um welche sich der Cylinder nicht be-

findet, auf diesen ausgeübt werden, alle die Form $\varrho f(r)$ haben, die entsprechenden Werthe von ϱ werden sich nur durch die verschiedenen Werthe von dx, dy, ds, r unterscheiden, die Elasticitätskraft, welche auf unsere Ebene in dem betrachteten Punkte wirkt, hat also die Form $\Sigma\varrho f(r)$, ihre Componenten werden daraus gefunden, indem man mit dem Cosinus der Winkel multiplicirt, welche diese Kraft mit den Axen macht; berücksicht man also den Werth von ϱ, so haben diese Componenten, d. h. die Ausdrücke: A, B, B_1, C, C_1, C_2 die gemeinschaftliche Form:

$$5)\quad H = M\frac{\partial u}{\partial x} + N\frac{\partial v}{\partial y} + P\frac{\partial w}{\partial z} + Q\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) + S\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Die Coefficienten $M, N\ldots$ sind natürlich für jede der sechs Componenten andere. Sie sind im Allgemeinen abhängig, von der Art wie die Moleküle gelagert sind. Nehmen wir an, dass diese Art der Lagerung in allen Punkten dieselbe ist, so sind diese Coefficienten constant, und diese Annahme ist hier zu machen

Die Gleichungen 3), 4) und 5) sind nun die allgemeinsten der Elasticität.

Wir nehmen jetzt an, die Elasticitätskraft des Körpers wäre constant für alle Richtungen, d. h. sie wirke gleichmässig für alle Ebenen, die durch einen Punkt gehen. Der Körper muss dann auch homogen sein. Diese Annahme ist natürlich nicht gestattet für Crystalle die dem regelmässigen Systeme nicht angehören.

Um die Gleichungen für den angegebenen Fall zu finden, gehen wir von einfachen Fällen aus, wie sie sich aus der Erfahrung ergeben.

Sei die Deformation bestimmt durch die Gleichungen:

$$u = 0,\quad v = 0,\quad w = gz,$$

wo g constant ist.

Durch Punkt M legen wir eine Ebene parallel der yz, und einen dünnen Cylinder senkrecht auf derselben. Ein Punkt N dieses Cylinders möge die Coordinaten x, y, z haben. Zu jedem Punkte N_1, der auf diesen Cylinder einwirkt, und die Coordinaten $x+h$, $y+k$, $z+l$ hat, gibt es nun einen andern N_2, dessen Coordinaten sind $x+h$, $y-k$, $z+l$, beide auf der Seite der Ebene, wo der Cylinder nicht liegt; nach der Deformation sind dann für die drei Punkte bezüglich:

$$w = gz,\quad w = g(z+l),\quad w = g(z-l).$$

Aber wenn man die Entfernungen der Punkte N, N_1 sowie N, N_2 mit r, ihre Zunahme nach der Deformation mit ϱ bezeichnet, so ist:

$$r^2 = h^2 + k^2 + l^2,\quad r\varrho = gl^2.$$

Die Elasticitätskraft $\varrho f(r)$ beider Punkte N_1 und N_2 auf N, also auf den ganzen Cylinder ist dieselbe.

Die Winkel, welche die Richtungen r mit den Axen machen, haben die Cosinus $\frac{h}{r}\pm\frac{k}{r}\pm\frac{l}{r}$, es werden also die y und z parallelen Componenten sich heben, d. h. B und C der Null gleich sein, oder die auf einer yz parallelen Ebene wirkenden Elasticitätskraft steht auf dieser Ebene senkrecht.

Nehmen wir jetzt einen zweiten Fall.

Die Erfahrung zeigt, dass die Deformation bestimmt sein kann durch die Gleichungen:

$$u = -\omega yz,\quad v = \omega xz,\quad w = 0,$$

wo ω constant ist.

Wir betrachten jetzt einen Punkt M in der Ebene der xz und legen durch denselben eine zweite Ebene parallel der der yz. Senkrecht auf einem Element derselben, welches durch Punkt M geht, werde ein Cylinder gedacht, dessen Axe also der x parallel ist. Ein beliebiger Punkt N dieses Cylinders habe die Coordinaten x, o, z. Seien x', y', z' die Coordinaten eines Punktes auf der andern Seite der Ebene, so werden vier Punkte auf dieser Seite der Ebene symmetrisch um die Axe der x liegen, so dass man hat, wenn diese vier Punkte mit N_1, N_2, N_3, N_4 bezeichnet werden:

	x'	y'	z'	$x'-x_1$	$y'-y$	$z'-z$
N_1	$x+h_1$	k_1	$z+l$	h	k	l
N_2	$x+h_1$	$-k_1$	$z+l$	h	$-k$	l
N_3	$x+h_1$	k_1	$z+l$	h	k	$-l$
N_4	$x+h_1$	$-k_1$	$z+l$	h	$-k$	$-l$

Digitized by Google

Seien ferner u', v', w' die Aenderungen der Coordinaten dieser vier Punkte nach der Deformation, u, v, w die des Punktes N, es ist dann $w' = w = 0$ und auch $y = 0$. Ist ferner wieder r die Entfernung eines der vier Punkte von N, ϱ der Zuwachs derselben nach der Deformirung, so ist:

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$$
$$r\varrho = (x'-x)(u'-u) + (y'-y)(v'-v).$$

Es wird also r für alle vier Punkte gleich sein, nämlich:

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2},$$

ferner ist:

	$u'-u_1$	$v'-v_1$	$r\varrho$
N_1	$-\omega k(z+l)$	$\omega l(x+h)+\omega hz$	ωklx
N_2	$\omega k(z+l)$	$\omega l(x+h)+\omega hz$	$-\omega klx$
N_3	$\omega k(z-l)$	$-\omega l(x+h)+\omega hz$	$-\omega klx$
N_4	$-\omega k(z-l)$	$-\omega l(x+h)+\omega hz$	$+\omega klx$

Die Werthe von ϱ sind also alle vier bis aufs Zeichen gleich, und stimmen auch die Zeichen bei N_1 und N_4 sowie bei N_2 und N_3 überein. Die Elasticitätskraft, welche auf Punkt N ausgeübt wird, ist $\varrho f(r)$, also für alle Punkte bis aufs Zeichen übereinstimmend. Ihre Richtung ist die von NN_1, NN_2, NN_3, NN_4, die Cosinus dieser Richtungen mit den Axen sind bezüglich

$$\frac{x'-x}{r},\quad \frac{y'-y}{r},\quad \frac{z'-z}{r}.$$

Der erste dieses Ausdrucks ist für alle vier Punkte gleich, also die entsprechenden Componenten der Elasticitätskraft, sind bei N_1 und N_4 dieselben, bei N_2 und N_3 die entgegengesetzten. Die zweiten Cosinus haben bezüglich für N_1, N_3 und N_2, N_4 negatives Zeichen, also die Componenten sind bei N_1, N_3 positiv, bei N_2 und N_4 negativ, die dritten Cosinus endlich haben für N_1, N_2 positives, für N_3, N_4 negatives Zeichen, so dass die Componente für N_1 und N_3 positiv für N_2 und N_4 negativ werden. Das Resultat ist also, da der Körper homogen ist, also die symmetrisch liegenden Punkte in gleicher Weise mit Masse angefüllt sind: dass die Componenten der Elasticitätskräfte auf Punkt N und also auf den ganzen Cylinder wegfallen, für eine Ebene, die yz parallel ist, und in einem Punkte von $y = 0$ ist. In diesem Falle ist also $A = B = C = 0$.

Legen wir jetzt durch Punkt M einen unendlich dünnen Cylinder parallel der Axe der z, so hat ein beliebiger Punkt N desselben die Coordinaten x, y, z, betrachten wir nur die Einwirkung von N_1 und N_2, so ist die Elasticität $\varrho f(r)$ für beide wieder gleich aber entgegengesetzt, nämlich bezüglich gleich $\pm\omega klx$, der Cosinus des Winkels von r mit der Axe der z gleich $\frac{1}{r}$, also derselbe. Die z parallelen Componenten heben sich also, d. h. es ist $C_2 = 0$.

Kehren wir jetzt zu der allgemeinen Form der Grössen A, B, C, B_1, C_1, C_2 zurück, welche in Gleichung 5) alle bis auf die Coefficienten gegeben waren. Betrachten wir zuerst die Componente A der elastischen Kraft, welche der Axe der x gleichgerichtet und auf einer der yz parallelen Ebene wirkt, so werden in dem Ausdrucke von A, v und w sich wegen der Homogenität des Körpers ganz gleichmässig verhalten, es werden also $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ gleiche Coefficienten haben, eben so $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ und $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$.

Aehnliche Beziehungen finden für die Ausdrücke B_1, C_2 statt, und zwar sind in dem ersten Ausdrucke z. B. die Coefficienten von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ gleich. Andrerseits aber ist, da man die Axen vertauschen kann, ohne dass die Beziehungen sich ändern, die Coefficienten von $\frac{\partial u}{\partial x}$ in A, von $\frac{\partial v}{\partial y}$ in B_1 und $\frac{\partial w}{\partial y}$ in C_2 gleich, und ähnliche Beziehungen ergeben sich für die andern Coefficienten. Was die Ausdrücke B, C, C_1 anbetrifft, so ist z. B. C gleichzeitig Componente zweier elastischen Kräfte, die bezüglich auf den xz und xy parallelen Ebenen ausgeübt werden, es werden also v und w sich hier gleich verhalten. Auf diese Weise erhält man

für die Coefficienten nur noch acht Werthe, wie sie hier in eine Tafel geordnet sind:

	M_i	N_i	P_i	Q_i	R_i	S_i
A	α	β	β	γ	ε	ε
B_1	β	α	β	ε	γ	ε
C_2	β	β	α	ε	ε	γ
B	b	b	a	e	e	c
C	b	a	b	e	c	e
C_1	a	b	b	c	e	e

Ist aber die Deformation, die in unserm ersten Beispiele angegebene, so ist $B = C = 0$, und da man in diesem Falle hat $\frac{\partial w}{\partial z} = g$, und alle übrigen Differenzialquotienten der Null gleich sind, so wird:

$$B = ag, \quad C = bg, \text{ also ist } a = b = 0.$$

Gehorcht ferner die Deformation dem im zweiten Beispiele gegebenen Gesetze, so ist, wenn man $y = 0$ setzt:

$$A = B = C = C_2 = 0.$$

Andrerseits aber:

$$A = \gamma\omega x, \quad B = C = e\omega x, \quad C_2 = \varepsilon\omega x,$$

also:

$$\gamma = e = \varepsilon = 0.$$

Es verschwinden also von den acht Coefficienten fünf, und setzt man:

$$\beta = \lambda, \quad \alpha = \lambda + 2\mu,$$

so kommt:

$$A = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad B_1 = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$C_2 = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \quad B = c\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$C = c\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad C_1 = c\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

wo gesetzt wurde:

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Der Grösse ϑ kommt übrigens eine mechanische Bedeutung zu.

Seien M und M' zwei Punkte, die eine Wirkung auf einander ausüben, so ist $\frac{\varrho}{r}$ das Verhältniss der Entfernungszunahme zur ursprünglichen Entfernung, oder die lineare Ausdehnung des Körpers in Punkt M; ist $r = MM'$ parallel der Axe der x, so wird

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

die Grösse der Linie dx wird also durch die Ausdehnung:

$$Ax\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ebenso gehen die Linien dy und dz bezüglich in

$$dy\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad dz\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

über, so dass aus dem Element:

$$\omega = dx\,dy\,dz$$

wird:

$$\omega\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

und indem man die Produkte je zweier (sehr kleinen) linearen Ausdehnungen vernachlässigt:

$$\omega\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Es ist also:

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

die cubische Ausdehnung des Körpers.

Die Werthe von A, B, C ... mögen, wenn man die Coordinatenaxe verändert, also für x, y, z, x', y', z' schreibt, übergehen in A', B', C' ..., so dass dieser Ausdruck die elastische Kraft, senkrecht auf der einen Axe der x' vorstellt. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ bezüglich die Cosinus der Winkel, welche die neuen Axen mit den alten machen, so geben die Gleichungen 4):

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \alpha A' + \alpha' B' + \alpha'' C'$$

$$\alpha' A + \beta' B + \gamma' C = \beta A' + \beta' B' + \beta'' C'$$

$$\alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C = \gamma A' + \gamma' B' + \gamma'' C'$$

$$\alpha B + \beta B_1 + \gamma C_1 = \alpha B' + \alpha' B'_1 + \gamma' C'_1$$

. . .

Aus diesen Gleichungen, es sind deren 9), ergibt sich leicht z. B.:

$$A^1 = \alpha^2 A + \beta^2 B_1 + \gamma^2 C_2 + 2\alpha\beta\gamma C_1 + 2\alpha\gamma C + 2\alpha\beta B;$$

ferner hat man, wie leicht zu sehen:

Digitized by Google

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \beta\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \alpha\gamma\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \alpha\beta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Aehnliche Gleichungen ergeben sich für die übrigen Differenzialquotienten. Nun ist wegen der constanten Elasticität:

$$A' = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial u'}{\partial x'};$$

ϑ bleibt unverändert, dies ist leicht aus den Formeln zu folgern, aber auch aus der Bedeutung von ϑ ergibt es sich sogleich. Führt man aber den Werth von A' ein, wie er oben gefunden wurde, und setzt für A, B_1 ... die Werthe, so ist:

$$A' = \lambda\vartheta + 2\mu\left(\alpha^2\frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma^2\frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2e\left[\beta\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \alpha\gamma\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \alpha\beta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right].$$

Es muss aber, wenn man diesen Ausdruck mit dem vorletzten vergleicht, und auf den Werth von $\frac{\partial u'}{\partial x'}$ Rücksicht nimmt:

$$e = \mu$$

sein, so dass man schliesslich hat:

6)
$$A = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad B_1 = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$C_2 = \lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \quad C_1 = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$
$$C = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad B = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen 3) geben dann die partiellen Differenzialgleichungen:

7)
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial} + \mu\Delta^2 u + \varrho X = \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \mu\Delta^2 v + \varrho Y = \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \mu\Delta^2 w + \varrho Z = \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

wo statt der äusseren Kräfte die verlorenen Kräfte gesetzt sind. Im Falle des Gleichgewichts sind die Ausdrücke rechts der Null gleich. Das Symbol Δ^2 ist definirt durch die Gleichung:

$$\Delta^2 s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}.$$

Die Gleichungen 7) nehmen auch die Form an:

7a)
$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \varrho X = \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \varrho Y = \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] + \varrho Z = \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Wenn die äusseren Kräfte X, Y, Z von Punkten ausgehen, die nach dem Newton'schen Gesetze anziehend wirken, also, wo die Anziehung umgekehrt dem Quadrate der Entfernung proportional ist, gibt es bekanntlich eine Function F, welche die Gleichung verificirt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

Digitized by Google

und wo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z$$

ist, so dass man hat:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

wenn man unter Voraussetzung dieser Beziehung die Gleichungen 7) in Bezug auf x, y, z differenziirt und addirt, so erhält man:

$$8) \qquad (\lambda + 2\mu)\, \Delta^2 \vartheta = \varrho \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}.$$

Herrscht Gleichgewicht, so ist

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = 0,$$

also auch:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \Delta^2 \vartheta = 0.$$

Wir sind bei der Entwickelung der Gleichungen 6) Lamé gefolgt. Seine Methode macht die sonst gebräuchliche directe Betrachtung der Molekularkräfte und die Integration über eine halbe Molekularsphäre unnöthig, setzt dagegen mancherlei Erfahrungs-Resultate voraus.

Eine Integration, wie die im andern Falle anzuwendende stützt sich entweder auf die Annahme einer Continuität der Materie, oder einer so gedrängten Anordung der Atome, dass diese für die Rechnung als continuirlich gelten können. In wiefern diese Annahme gestattet ist, soll in dem Artikel: Statik erörtert werden, hier wollen wir noch von derselben ausgehend die Gleichungen 6) ableiten. —

Man denke sich durch Punkt M eine Ebene gelegt, die der xy Ebene parallel ist, und von derselben ein kleines Rechteck mit Seiten, welche den Axen x und y parallel sind, abgeschnitten. Jeder Punkt dieses Rechtecks (x, y, z), so wie alle entsprechenden (x, x, z, α), wo α kleiner als der Halbmesser der Molekularsphäre ist, werden aus den über dem Rechteck befindlichen Punkten Einwirkungen erleiden, welche zusammen die auf unsere Ebene wirkende Elasticitätskraft geben und die auf die Einheit reducirt die Componente C, C_1, C_2 hat.

Nimmt man also den Punkt, auf welchen die Einwirkung erfolgt, als Mittelpunkt einer Kugel an, deren Halbmesser P der der Molecularsphäre ist, da werden die auf unserer Ebene liegenden Punkte von den darüber liegenden eine Einwirkung von der ganzen Halbkugel aus, die darunter in Tiefe α befindlichen aber nur von derjenigen Kalotte, welche die Entfernung α vom Mittelpunkt hat, erleiden. Uebrigens üben die dem betreffenden Punkte sehr nahen Punkte nur eine sehr geringe Wirkung aus (vgl. den Artikel: Statik), weil sonst die Gesammteinwirkung im Allgemeinen unbestimmt würde, und wir können für die Elasticität sogar annehmen, dass diese Einwirkung nur von den Punkten einer sehr dünnen Kugelschale mit den bezüglichen Radien P, P_0 erfolgt, wo also ϱ_0 nur sehr wenig sich von ϱ unterscheidet. Ist nun x', y', z' irgend ein Punkt der angezogenen Schicht, x, y, z der anziehenden:

$$x' - x = \xi, \quad y' - y = \eta, \quad z' - z = \zeta, \quad \zeta^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \nu^2,$$

so ist ganz wie oben:

$$\varrho = \frac{\xi^2}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta^2}{r}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta^2}{r}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\eta\zeta}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\zeta\xi}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\xi\eta}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Bei constanter Elasticität ist jedem der Punkte gleiche Dichtigkeit s zu geben, ist also $f(r)$ die Intensität der Anziehung, so ist um die Componenten der Anziehung auf den Punkt x, y, z zu bilden, dieser Ausdruck bezüglich mit

$$f(r)\frac{\xi}{r}, \quad f(r)\frac{\eta}{r}, \quad f(r)\frac{\zeta}{r}$$

zu multipliciren, und die Integration über den wirksamen Theil der Halbkugel zu erstrecken. Zu dem Ende sei ϑ der Winkel von r mit dem Lothe auf Ebene xy, φ der der Projection von r auf diese Ebene mit der Axe der x, so sind die Integrale bezüglich in den Grenzen P und P_0 für r, 0 und 2π für φ, 0 und π für ϑ zu nehmen, wo bei der Ordinate $z + \alpha$ der betrachtete Punkt r durch die Gleichung $\alpha = r\cos\vartheta$ bestimmt ist. Da das Element der Halbkugel nun ist:

Digitized by Google

$$r^2 \sin\vartheta d\vartheta\, d\varphi\, dr,$$

und man hat:

$$\xi = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \eta = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \zeta = r\cos\vartheta$$

so ist die Componente C der Einwirkung auf einen Punkt parallel der Axe der x:

$$C = \int_{\varrho_0}^{\varrho} sf(r)\,dr\left(k\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y} + l\frac{\partial w}{\partial z} + m\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + n\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + p\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right).$$

Die Einwirkungen C_1, C_2 parallel den andern Axen sind durch ähnliche Gleichungen gegeben, wo wir die Constante k, l . . . durch Indices unterscheiden. Dann ergibt sich:

$$k = \int \sin\vartheta^4 \cos\varphi^2\, d\varphi\, d\vartheta, \qquad k = \int \sin\vartheta^4 \cos\varphi^2\, d\varphi\, d\vartheta,$$

$$l = \int \cos\vartheta^2 \sin\vartheta^2 \cos\varphi d\varphi\, d\vartheta, \quad m = \int \sin\vartheta^3 \cos\vartheta \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$n = \int \sin\vartheta^3 \cos\vartheta \cos\varphi^2\, d\varphi\, d\vartheta, \quad p = \int \sin\vartheta^4 \sin\varphi \cos\varphi^2\, d\varphi\, d\vartheta.$$

Die Summenzeichen stellen Doppel-Integrale in den angegebenen Grenzen vor. Es ist ferner:

$$k_1 = p, \quad k_1 = \int \sin\vartheta^4 \sin\varphi^2\, d\varphi\, d\vartheta,$$

$$l_1 = \int \sin\vartheta^2 \cos\vartheta^2 \sin\varphi d\varphi\, d\vartheta, \quad m_1 = \int \sin\vartheta^3 \cos\vartheta \sin\varphi^2\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$n_1 = m, \quad p_1 = k$$

$$k_2 = n, \quad k_2 = m_1, \quad l_2 = \int \sin\vartheta \cos\vartheta^2\, d\varphi\, d\vartheta, \quad m_2 = l_1, \quad n_2 = l, \quad p_2 = m.$$

Durch Integration folgt dann:

$$o = k = k = l = m = p = k_1 = k_1 = l_1 = n_1 = p_1 = m_2 = n_2 = p_2$$

$$k_2 = n = k_2 = m_1 = \frac{\pi \sin\tau^4}{4}$$

$$l_2 = \frac{\pi}{2}(1 - \cos\tau^4).$$

Um nun die Componenten der Elasticitätskraft zu haben, ist dieser Ausdruck mit den Dimensionen des betrachteten Rechtecks zu multipliciren, ausserdem noch ζ in den Grenzen 0 und ϱ zu integriren, oder, was dasselbe ist, nach τ in den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, nach dem zuvor mit: $d\alpha = d(P\cos\tau)$ multiplicirt ist. So erhält man:

$$k_2 = -\frac{\pi}{4} P \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos\tau^2 + \cos\tau^4)\, d\cos\tau = \frac{2\pi}{15} P$$

$$l_2 = -\frac{\pi}{2} P \int (1 - \cos\tau^4)\, d\cos\tau = \tfrac{1}{3}\pi P.$$

Es ist also $l_2 = 3k_2$. Mit Berücksichtigung dieser Relation ergeben sich für C, C_1, C_2 die Werthe, die in 6) gefunden wurden, jedoch mit der Beschränkung, dass $\mu = \lambda$ ist. In der That nimmt Poisson diese Relation an, die Erfahrung soll sie jedoch nicht bestätigen. Die Ausdrücke A, B, B_1 ergeben sich wegen der constanten Elasticität in ganz ähnlicher Art und sind dann in 6) gleich. Wertheim bestimmt durch Experimente $\mu = \frac{\lambda}{2}$. Indess ist auch diese Relation nicht, sicher und wahrscheinlich findet überhaupt kein für alle Stoffe gleiches Verhältniss zwischen diesen Constanten statt.

Digitized by Google

In vielen Fällen ist es wünschenswerth, die Gleichungen der Elasticität zu ermitteln, wenn die Elasticitätskräfte nicht auf gradlinige Coordinaten sondern auf drei Systeme gegen einander orthogonaler Curven bezogen sind. Seien l, m, n je einer dieser Curven, und versteht man unter ∂l, $\partial_1 m$, $\partial_2 n$ ihre Elemente, also wenn p, q, r drei Variablen sind, und die Veränderung von p ein Fortschreiten auf einer Linie l, von q ein solches auf m, von r ein solches auf n bedingt, so ist:

$$\partial l = \frac{\partial l}{\partial p} dp, \quad \partial_1 m = \frac{\partial m}{\partial q} dq, \quad \partial_2 n = \frac{\partial n}{\partial r} dr$$

Bezeichnen wir mit $\partial\varrho$, $\partial_1\varrho$, $\partial_2\varrho$ das partielle Differenzial der willkürlichen Grösse ϱ bezüglich nach p, q, r, sind ferner u, v, w die Verschiebungen nach Richtung l, m, n und

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial_1 v}{\partial_1 m} + \frac{\partial_2 w}{\partial_2 n},$$

A, B, C die Elasticitätskräfte auf drei Ebenen bezogen, die bezüglich auf ∂l, $\partial_1 m$, $\partial_2 n$ senkrecht stehen. Man erhält dann wie in 6):

6a)
$$A = \lambda\vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial l}, \quad B_1 = \lambda\vartheta + 2\mu \frac{\partial_1 v}{\partial_1 m},$$
$$C_2 = \lambda\vartheta + 2\mu \frac{\partial_2 w}{\partial_2 n}, \quad C_1 = \mu\left(\frac{\partial_2 v}{\partial_2 n} + \frac{\partial_1 w}{\partial_1 m}\right),$$
$$C = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial l} + \frac{\partial_2 u}{\partial_2 n}\right), \quad B = \mu\left(\frac{\partial_1 \mu}{\partial_1 m} + \frac{\partial v}{\partial l}\right).$$

Was die Gleichungen 7) anbetrifft, so ergeben sich hier nicht vollständig denselben analoge. Sind ∂l, $\partial_1 m$, $\partial_1 n$, die betreffenden Linienelemente für irgend einen Punkt, ∂l^0, $\partial_1 m^0$, $\partial_2 n^0$ dieselben für einen Punkt, der aus dem ersten erhalten wird, wenn man auf Linie l um ein Element fortschreitet, und bezüglich:

$$\partial l', \quad \partial_1 m', \quad \partial_2 n', \quad \partial l'', \quad \partial_1 m'', \quad \partial_2 n'',$$

wenn man auf m und n fortschreitet. Untersucht man den einen von sechs dergleichen Elementen gebildeten Hexaeder, so sind die gegenüberliegenden Kanten desselben nicht völlig parallel, und z. B. $\partial l''$ nicht auf ∂m senkrecht, sondern um ein unendlich kleines von 90° abweichend. Seien nun $[l, m^{(p)}]$, $[m, n^{(p)}]$ u. s. w. die Componenten der Winkel zwischen ∂l und $\partial_1 m^{(p)}$, $\partial_1 m^{(p)}$ und $\partial_1 n^{(p)}$ u. s. w., so erhält man, wenn man für alle sechs Seitenflächen die den Axen parallelen Kräfte bildet:

7a)
$$\varrho\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - X\right)\partial l\partial_1 m\partial_2 n = \partial(A\partial_1 m\partial_2 n) + \partial_1(B\partial l\partial_2 n) + \partial_2(C\partial l\partial_1 m)$$
$$+ B\partial_1 m\partial_2 n(l, m^0) + C\partial_1 m\partial_2 n(l, n^0) + B_1\partial l\partial_2 n(l, m') + C_1\partial l\partial_2 n(l, n')$$
$$+ C_1\partial l\partial_1 m(l, m'') + C_2\partial l\partial_1 m(l, n''),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - Y\right)\partial l\partial_1 m\partial_2 n = \partial(B\partial_1 m\partial_2 n) + \partial_1(B_1\partial l\partial_2 n) + \partial_2(C_1\partial l\partial_1 m)$$
$$+ A\partial_1 m\partial_2 n(m, l^0) + C\partial_1 m\partial_2 n(m, n^0) + B\partial_1 l\partial_2 n(m, l')$$
$$+ C_1\partial l\partial_2 n(m, n') + C\partial l\partial_1 m(m, l'') + C_2\partial l\partial_1 m(m, n''),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - Z\right)\partial l\partial_1 m\partial_2 n = \partial(C\partial_1 m\partial_2 n) + \partial_1(C_1\partial l\partial_2 n) + \partial_2(C_2\partial l\partial_1 m)$$
$$+ A\partial_1 m\partial_2 n(n, l^0) + B\partial_1 m\partial_2 n(n, m^0) + B\partial l\partial_2 n(n, l')$$
$$+ B_1\partial l\partial_2 n(n, m') + C\partial l\partial_1 m(n, l'') + C_1\partial l\partial_1 m(n, m''),$$

wo die Zeichen ∂ in Differenziale nach p, q, r umzuwandeln sind, ebenso wie die Symbole $[l, m^{(p)}]$ . . .

Möge jetzt ein elastischer Körper zwei sehr geringe Dimensionen haben. Ein solcher heisst elastischer Faden. Die Bedingung für sein Vorhandensein ist, dass er in Gleichgewicht sein kann, ohne dass auf einer der Längenrichtung parallelen Ebene eine elastische Kraft wirkt. Im Uebrigen kann der Faden eine

beliebige Curve bilden, deren Länge bis zu irgend einem Punkte wir mit l bezeichnen. In jedem auf l senkrechten Querschnitt sind wegen der geringen Dimensionen die Elasticitätskräfte constant.

In 6a) ist nun, wegen der zuerst angeführten Bedingung:

$$9) \qquad B = B_1 = C_1 = C = C_2 = 0,$$

also die Elasticitätskraft die auf den Querschnitt ω wirkt, $A\omega$ parallel mit ∂l, wofür wir hier auch dl schreiben können, wenn l als unabhängig veränderlich genommen wird.

Seien X, Y, Z die verlorenen Kräfte in irgend einem Punkte zerlegt nach den Axen, so ist, da A nach den Axen sich zerlegt in:

$$A\frac{dx}{dl}, \quad A\frac{dy}{dl}, \quad A\frac{dz}{dl},$$

$$10) \qquad \frac{d\left(A\omega\frac{dx}{dl}\right)}{dl} + \varrho X\omega = 0, \quad \frac{d\left(A\omega\frac{dy}{dl}\right)}{dl} + \varrho Y\omega = 0, \quad \frac{d\left(A\omega\frac{dz}{dl}\right)}{dl} + \varrho Z\omega = 0;$$

multiplicirt man noch bezüglich mit:

$$\frac{dx}{dl}, \quad \frac{dy}{dl}, \quad \frac{dz}{dl}$$

und addirt, so kommt:

$$11) \qquad d(A\omega) + \varrho\omega\,(X dx + Y dy + Z dz) = 0$$

A ist leicht zu bestimmen. Die Gleichungen 9) und 6a) geben:

$$\frac{\partial_1 v}{\partial_1 m} = \frac{\partial_2 w}{\partial_2 n}, \quad 0 = \lambda\left(\frac{du}{dl} + \frac{2\partial_1 v}{\partial_1 m}\right) + \frac{2\mu\partial_1 v}{\partial_1 m}$$

also:

$$\frac{\partial_1 v}{\partial_1 m} = \frac{\partial_2 w}{\partial_2 n} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\frac{du}{dl},$$

und:

$$12) \qquad A = \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda+\mu}\frac{du}{dl}.$$

Bezeichnen wir noch jetzt mit ϑ die Expansion des Fadens, so ist:

$$\vartheta = \frac{du}{dl}, \text{ also } \varepsilon A = \vartheta,$$

und

$$13) \qquad \varepsilon = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}.$$

Dieser Ausdruck ε wird Elasticitätscoefficient genannt.

Eine Expansion des Fadens ϑ ist mit einer Abnahme der Querdimensionen verbunden, welcher gegeben ist durch die Gleichung:

$$\vartheta = \frac{\partial_1 v}{\partial_1 m} = -\frac{\lambda\vartheta}{2(\lambda+\mu)}.$$

Nach Poisson ist $\lambda = \mu$, nach Wertheim $\lambda = 2\mu$ zu setzen; man hat also bezüglich bei diesen Annahmen:

$$\varepsilon = \frac{2}{5\lambda}, \quad \vartheta = -\frac{\vartheta}{4},$$

oder:

$$\varepsilon = \frac{8}{4\lambda}, \quad \vartheta = -\frac{\vartheta}{4}.$$

Ueber die elastischen Stäbe und Platten vgl. den Artikel: Elasticität.

Das Problem der elastischen Seite besteht in folgendem:

Ein homogener Faden, mit constantem Querschnitt ω ist in der Axe der x ausgespannt, und wird durch ein Gewicht P belastet, welches seine Länge L um das Stück α verlängert. Der Faden wird ferner durch eine geringe Erschütterung aus seiner anfänglichen graden Richtung gebracht, so jedoch, dass sein Endpunkt fest bleibe. Es ist dann die Coordinate eines Punktes M im Anfang der Bewegung x, y, z und zu einer beliebigen Zeit $x+u = x+u_0+U$, v, w, wo u_0 die vom Gewichte P bewirkte Ausdehnung, also nur von x abhängig ist, während U, v, w Functionen von x und von der Zeit t sind. Es ist dann:

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon A,$$

Digitized by Google

Offenbar aber ist $u_0 = \frac{\alpha x}{l}$, also:

$$\varepsilon A = \frac{\alpha}{l} + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Da v und w sehr klein sind, so kann man setzen:

$$dx = ds \text{ und } \frac{dx}{ds} = 1;$$

ferner kann man $\frac{\partial U}{\partial x}$ gegen $\frac{\alpha}{l}$ vernachlässigen, wenn das Gewicht P hinreichend gross ist, also setzen:

$$A = \frac{\alpha}{\varepsilon l} = \frac{P}{\omega},$$

auch kann man das Gewicht der Saite selbst gegen P vernachlässigen.

Die Gleichungen 13) werden nun, wenn man $-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, um die Schwingungen zu ermitteln, an die Stelle von X, Y, Z setzt:

14)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{gP}{\alpha p} l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{gP}{p} l \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{gP}{p} l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

wenn man p als das Gewicht der Saite annimmt, wo dann $p = g\varrho\omega l$ wird. Ist nur eine Dimension sehr klein, so hat man eine elastische Platte.

Denken wir uns aus einem elastischen Körper den Theil zwischen zwei einander sehr nahen Oberflächen herausgenommen. Die Dicke wird also überall sehr gering sein. Noch setzen wir voraus, dass jede der Axe der z parallele Linie die beiden Oberflächen in sehr nahen Punkten treffe. Sei $z = f(x, y)$ die Gleichung einer inmitten der beiden Grenzflächen liegenden Oberfläche, M ein Punkt an derselben, setzen wir ferner $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, und sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welchen die Normale mit den Axen macht, so ist bekanntlich:

$$\alpha = \frac{-p}{k}, \quad \beta = \frac{-q}{k}, \quad \gamma = \frac{1}{k},$$
$$k = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Man kann annehmen, dass diese Normale auch beide Grenzflächen normal schneidet. Die Linie s liegt dann in der Normale, und auf derselben haben die Elasticitätskräfte gleichen Werth. Auf den beiden Grenzflächen selbst sollen sie der Null gleich sein. Dies ist offenbar die Bedingung dafür, dass eine elastische Fläche überhaupt möglich sei, und die Gleichungen 4) geben also:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \quad B\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0,$$
$$C\alpha + C_1\beta + C_2\gamma = 0.$$

Also mit Hülfe der vorletzten Gleichungen:

15) $C = pA + qB$, $C_1 = pB + qB_1$

$$C_2 = pC + qC_1 = p^2A + 2pqB + q^2B_1.$$

Durch Elimination von p und q erhält man hieraus:

$$AB_1C_2 + 2BCC_1 = AC_1^2 + B_1C^2 + C_2B^2.$$

Betrachten wir jetzt das unendlich kleine Parallelepipedon, dessen Grundflächen dx, dy zur Projection haben, und dessen Seiten die Grösse $\frac{c}{\gamma} = hs$ haben, das also durch zwei der Ebene xz, und zwei der Ebene yz parallele Ebenen ausgeschnitten wird, so sind die beiden Grundflächen von keiner elastischen Kraft angegriffen. Die vier Seitenflächen haben bezüglich die Inhalte: $\varepsilon h dy$ und $\varepsilon h dx$, während der körperliche Inhalt des Prisma gleich $\varepsilon h\, dx\, dy$ ist.

Suchen wir die der Axe der x parallelen Kräfte.

Die beiden auf der Axe der x senkrechten Seitenflächen werden angegriffen, bezüglich von den Kräften:

$$-\varepsilon hA dy \text{ und } \varepsilon h dy \left(B + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right),$$

die auf der Axe der y senkrechten dagegen von:

$$-\varepsilon hB dx \text{ und } \varepsilon h dx \left(A + \frac{\partial B}{\partial y} dy\right),$$

auf das ganze Parallelepipedon wirkt ferner die äussere Kraft $\varrho\varepsilon h X dx\, dy$. So erhält man, wenn man auch die den Axen y und z parallelen Kräfte bildet, für den Fall des Gleichgewichts:

16)
$$\frac{\partial(\varepsilon hA)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hB)}{\partial y} + \varrho\varepsilon hX = 0,$$
$$\frac{\partial(\varepsilon hB)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hB_1)}{\partial y} + \varrho\varepsilon hY = 0,$$
$$\frac{\partial(\varepsilon hC)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hC_1)}{\partial y} + \varrho\varepsilon hZ = 0.$$

Wenn man die Werthe von C und C_1, welche in 15) gefunden wurden, in die letzte Gleichung einsetzt, so nimmt dieselbe die Gestalt an:

17) $$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+B_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\varrho(Z-pX-qY)=0.$$

Die Gleichungen 15) und 16) mit Hülfe von $z=f(x,y)$ geben A, B, C, B_1, C_1, C_2 als Functionen von x und y. Nach deren Bestimmung lösen die Gleichungen 6) das Problem.

Der einfachste Fall ist der einer ebenen Platte, welcher hier noch auszuführen ist.

In diesem Falle nimmt die Gleichung 17) die Gestalt an:

$$Z=pX+qY,$$

und dies lehrt, dass die äusseren Kräfte, welche die Platte angreifen, der letztern parallel sein müssen.

Nimmt man die Ebene der Platte selbst als Ebene der xy, und denkt s constant, so ist:

$$z=0,\quad p=0,\quad q=0,\quad h=1;$$

die Gleichungen 15) und 17) geben:

$$C=C_1=C_2=0,\quad Z=0,$$

die beiden ersten Gleichungen 16) geben, wenn man $X=Y=0$ setzt, also keine äusseren Kräfte wirken lässt:

18) $$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}=0.$$

Wendet man nun die Gleichungen 6) an, so gibt die Gleichung $C_2=0$ zunächst $\frac{\partial w}{\partial z}$ als Function von $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, und wenn man dies in die Werthe von A, B, B_1 substituirt, kommt:

$$A=\frac{2\mu\left(2(\lambda+\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\lambda+2\mu}$$

$$B_1=\frac{2\mu\left(2(\lambda+\mu)\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\lambda+2\mu}$$

$$B=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Diese Werthe geben statt der Gleichungen 7):

18a) $$4(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(3\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$4(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(3\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0.$$

Es sind aber noch die Gleichgewichtsbedingungen für den Umfang zu ermitteln. Wir denken uns die Platte an den Seiten von einer auf der Ebene xy senkrechten Cylinderfläche begrenzt. In einem Punkt M' dieser Cylinderfläche in der Mitte zwischen beiden Grenzebenen möge die Normale an den Cylinder mit der Axe der x den Winkel φ machen, so ist wenn X, Y, 0 die Kräfte sind, welche am Umfange wirken:

$$A\cos\varphi+B\sin\varphi=X,$$
$$B\cos\varphi+B_1\sin\varphi=Y.$$

X und Y sind die Componenten der auf die Cylinderfläche ausgeübten Kraft F. Möge diese constant und senkrecht auf den Cylinder sein, so ist:

$$X=F\cos\varphi,\quad Y=F\sin\varphi,$$

also:

19) $$(A-F)\cos\varphi+B\sin\varphi=0,$$
$$B\cos\varphi+(B_1-F)\sin\varphi=0.$$

Setzt man für die ganze Platte:

$$B=0,\quad A=B_1=F,$$

so sind sowohl die Gleichungen 18) als 19) erfüllt, die erstere weil F constant ist, die letztere unabhängig von φ, also so, dass die Spannung der Platte nach allen Richtungen dieselbe ist. Man kann sie also mit einem Cylinder von beliebigem Durchschnitt begrenzen, ohne dass das Gleichgewicht aufgehoben wird, wenn nur senkrecht auf die Cylinderfläche und in allen Punkten derselben eine constante Kraft von der Intensität F wirkt. Setzt man die Werthe $B=0$, $A=B_1=F$ in die oben gefundenen von A, B_1 und B ein, so kommt:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a,$$
$$\frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)2\mu}\cdot F=a;$$

durch Integration erhält man hieraus:

$$u=ax-by,\quad v=ay+bx,$$

wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten fest denkt, b ist eine willkürliche Constante. Die mit b multiplicirten Ausdrücke aber geben lediglich eine rotirende Deformirung um die Axe der z, aus der keine elastische Kraft entspringt; man kann also $b=0$ setzen, so dass man hat:

$$u=ax,\quad v=ay,\quad a=\frac{1}{2\mu}\,\frac{\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}F.$$

Diese Gleichungen geben also die Deformation in einer ebenen Platte, die in

Digitized by Google

allen Punkten des Umfanges derselben Spannung unterliegt. $a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ist die lineare Ausdehnung, sie ist dieselbe in allen Punkten und Richtungen der Platte und proportional der Spannung F.

Um jetzt die Bewegungsgleichungen aufzustellen, nimmt man an, die Platte sei von keiner äusseren Kraft angegriffen, liege horizontal, an ihrem Umfange wirke eine Spannung normal auf den Begrenzungscylinder von constanter Intensität F. Es tritt nun eine kleine derartige Erschütterung ein, dass jeder Punkt sich hebt oder senkt, also Vibrationen auf der Vertikale macht.

Im Anfange sind die Coordinaten eines Punktes M:

$$x,\ y,\ 0,$$

zu irgend einer Zeit t dagegen:

$$x + u,\quad y + v,\quad w,$$

wo $u = ax$, $v = ay$ von t unabhängig sind. Die elastischen Kräfte, welche aus der Erschütterung entstehen, also durch die Differenzialquotienten von w sich ausdrücken, sind sehr klein gegen diejenigen, welche von der Spannung F herrühren. Man kann also setzen:

$$A = B_1 = F;$$

und wegen der Werthe von u und v hat man $B = 0$.

Setzt man diese Werthe in Gleichung 17) ein, wo $p = q = 0$ zu setzen ist, und für z zu nehmen ist $-\frac{d^2w}{dt^2}$, so kommt:

$$19)\qquad \frac{d^2w}{dt^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

wo $c^2 = \frac{F}{\varrho}$ ist.

2) Einige Eigenschaften elastischer Körper.

A) Vom Elasticitätsellipsoid.

Wir legen durch den Punkt M eines beliebigen elastischen Körpers, (derselbe braucht weder fest noch von constanter Elasticität zu sein) drei rechtwinkliche Axen. x, y, z, seien die Coordinaten des Endpunkts einer durch u gehenden Graden, deren Grösse und Lage die elastische Kraft auf ein ebenes durch M gehendes Element angibt, das mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus α, β, γ sind.

Die Formeln φ des vorigen Abschnittes geben also:

$$1)\qquad \begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma &= x_1,\\ B\alpha + B_1\beta + C_1\gamma &= y_1,\\ C\alpha + C_1\beta + C_2\gamma &= z_1. \end{aligned}$$

Seien jetzt x', y', z' die Coordinaten desselben Punktes, bezogen auf drei schiefwinklige Axen, parallel mit den Elasticitätskräften, welche auf drei Ebene-Elemente ausgeübt werden, die durch M gehen und auf den Axen x, y, z bezüglich senkrecht stehen; seien F_1, F_2, F_3 diese Kräfte, so ist offenbar:

$$\begin{aligned} \frac{A}{F}x' + \frac{B}{F_2}y' + \frac{C}{F_3}z' &= x_1\\ \frac{B}{F}x' + \frac{B_1}{F_2}y' + \frac{C_1}{F_3}z' &= y_1\\ \frac{C}{F}x' + \frac{C_1}{F_2}y' + \frac{C_2}{F_3}z' &= z_1 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den vorigen geben:

$$\alpha = \frac{x'}{F_1},\quad \beta = \frac{y'}{F_2},\quad \gamma = \frac{z'}{F_3},$$

und somit hat man:

$$\left(\frac{x'}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{y'}{F_2}\right)^2 + \left(\frac{z'}{F_3}\right)^2 = 0$$

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoids. Also:

„Die Endpunkte der Linien, welche der Länge und Richtung nach die auf einen Punkt M wirkenden elastischen Kräfte darstellen, bilden ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt M ist. Diejenigen drei Elasticitätskräfte, welche auf einander senkrechte Ebenen angreifen, sind dann conjugirte Halbmesser desselben."

Da das Ellipsoid drei auf einander senkrechte Axen hat, so muss es drei auf einander senkrechte Ebenen für jeden Punkt M geben, wo die Elasticitätskräfte auf den Ebenen senkrecht stehen, also $B = C = C_1 = 0$ ist. Die entsprechenden Elasticitätskräfte werden Hauptelasticitätskräfte genannt, und die Aufgabe, dieselben zu finden, ist mit der bekannten geometrischen, die Hauptaxen eines Ellipsoids zu finden, identisch.

Seien α, β, γ die Winkel, welche eine Hauptelasticitätskraft a mit den Axen macht, so ist in den Gleichungen 4) des vorigen Abschnittes zu setzen:

$$U = a\alpha,\quad V = a\beta,\quad W = a\gamma,$$

also:

$$\begin{aligned} \alpha(A - a) + \beta B + \gamma C &= 0,\\ \alpha B + \beta(B_1 - a) + \gamma C_1 &= 0,\\ \alpha C + \beta C_1 + \gamma(C_2 - a) &= 0. \end{aligned}$$

Google

Diese Gleichungen in Verbindung mit $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, reichen hin, um a, α, β, γ zu bestimmen. Man erhält, wenn man die Winkel eliminirt:

$$2)\quad (A-a)(B_1-a)(C_1-a)+2BCC_1 - (A-a)C_1^2-(B_1-a)C_2^2 - (C_2-a)B^2=0,$$

welche cubische Gleichung die drei Hauptelasticitätskräfte bestimmt.

Ist dies für einen Punkt M geschehen, und sind a, b, c die Wurzeln der Gleichung 2), so kann man diese Hauptaxen als Coordinatenaxen betrachten; es ist dann die Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$A=a$, $B_1=b$, $C_2=c$, $B=C=C_1=0$.

Die Gleichungen 1) werden:

$$\alpha=\frac{x_1}{a},\quad \beta=\frac{y_1}{b},\quad \gamma=\frac{z_1}{c}.$$

Irgend ein durch M gehendes Element, auf welches die einem Halbmesser r entsprechende Elasticitätskraft wirkt, dessen Endpunkt die Coordinaten x_1, y_1, z_1 hat, wird also durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{x_1x}{a}+\frac{y_1y}{b}+\frac{z_1z}{c}=0.$$

Diese Gleichung stellt eine Ebene vor, welche parallel ist einer Tangentialebene an der durch die folgende Gleichung gegebene Fläche:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=\pm K^2$$

und zwar wird diese Tangentialebene in dem Punkte sie berühren, in welchem der betrachtete Halbmesser r die Fläche schneidet. Diese Fläche ist ein Ellipsoid, wenn die drei Hauptelasticitätskräfte dasselbe Zeichen haben, dann sind alle Elasticitätskräfte nach derselben Seite hingerichtet, als die Hauptkräfte, (gleichzeitig ziehend oder drückend). Haben die Hauptkräfte ungleiche Zeichen, so ist die Fläche aus einem einschaligen und einem zweischaligen Hyperboloide zusammengesetzt, die beide denselben Asymptotenkegel habe, dieser trennt die ziehenden (positiven) Elasticitätsrichtungen von den drückenden (negativen). An dem Kegel selbst sind die Elasticitäten tangential an den entsprechenden Ebenen, also gleitend, derselbe wird daher Gleitungskegel genannt.

B) Ueber den Elasticitätscoefficienten.

Wenn ein Körper auf seiner ganzen Oberfläche einem constanten Drucke $-P$ unterliegt, so wird er sich zusammenziehen, ohne seine Gestalt zu verändern, man hat also in diesem Falle:

$$u=ax,\quad v=ay,\quad w=az,$$

wo a eine Constante ist. Die Gleichungen 6) des ersten Abschnittes geben:

$$B=B_1=C_1=0,$$
$$A=B_1=C_2=(3\lambda+2\mu)a$$

und diese Componente ist also gleich dem äusseren Drucke $-P$, also:

$$a=\frac{-P}{3\lambda+2\mu}.$$

a ist hier offenbar die lineare Zusammenziehung; die cubische ist:

$$\vartheta=3a=-\frac{3P}{3\lambda+2\mu}$$

und

$$A=\frac{3}{3\lambda+2\mu}$$

die cubische Zusammenziehung unter dem Einflusse eines Druckes, der der Einheit gleich ist.

Sei jetzt der Körper ein Prisma, dessen Kanten parallel der Axe der z sind. Auf beide Grundflächen werde eine Zugkraft F ausgeübt, so wird sich der Körper parallel der Kante erweitern, so dass die Punkte, die sich in den Grundflächen parallelen Ebenen befinden, auch in solchen verbleibe, man hat also:

$$u=-ax,\quad v=-ay,\quad w=-cz.$$

Die Gleichungen 6) geben nun:

$$A=B_1=(c-2a)\lambda-2a\mu,$$
$$C_2=(c-2a)\lambda+2c\mu,$$

auf den Seitenflächen ist.

$$A=B_1=0 \text{ und } C_2=F,$$

also findet dies auch allgemein statt, d. h.:

$$\varepsilon=\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda+2\mu}F,\quad a=\tfrac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu}\frac{F}{3\lambda+2\mu},$$
$$v=c-2a=\frac{F}{3\lambda+2\mu}$$

ε ist die Verlängerung der Längeneinheit des Prisma. Ist der Druck $F=1$, so ist:

$$\varepsilon=\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda+2\mu}.$$

Digitized by Google

Diese Verlängerungen A und ε gibt die Erfahrung und durch die Werthe dieser Grössen sind λ und μ bestimmt.

Poisson setzt aus theoretischen Gründen $\lambda = \mu$. Es würde dann sich ergeben:

$$A = \frac{3}{5\mu}, \quad \varepsilon = \tfrac{1}{4}A,$$

jedoch bestätigt dies die Erfahrung nicht.

Werthheim setzt $\lambda = 2\mu$, in diesem Falle kommt:

$$A = \varepsilon = \frac{3}{8\mu}.$$

Diese Relation ist jedoch noch ungewiss.

Der Ausdruck ε wird Elasticitätscoefficient genannt.

C) Ueber die Arbeit der Elasticität.

Ein Körper, der wenigstens in drei Punkten befestigt ist, soll einem Drucke oder einer Zugkraft unterzogen werden, es lässt sich dann zeigen, dass die doppelte Arbeit vom Anfangspunkt dieser Einwirkung, bis dass die Deformation ihr Ende erreicht hat, gleich ist dem Producte der Druck- oder Zugkraft in die Projection der Verschiebung des Angriffspunktes auf dieselbe.

Denn sei z. B. der Körper ein elastischer Faden von Länge l und Querschnitt σ, der zu irgend einer Zeit die Spannung f und die Verlängerung α erleidet; hat ε dann die obige Bedeutung, so ist offenbar:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\varepsilon f}{\sigma} \text{ oder } f = \frac{\sigma}{\varepsilon l}\alpha,$$

also:

$$\int_0^a f d\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{\sigma a^2}{\varepsilon l} = \tfrac{1}{2}aF,$$

wo F die schliessliche Spannung, a die schliessliche Verlängerung ist. Da der Ausdruck links nun die Arbeit vorstellt, so ist unser Satz erwiesen.

Dieser Arbeit giebt nun Clapeyron einen zweiten Ausdruck, welcher einen wichtigen, den Clapeyron'schen Satz, liefert.

Sind X, Y, Z der Null gleich, so hat man:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B_1}{\partial y} + \frac{\partial C_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{\partial C_2}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichungen multipliciren wir bezüglich mit u, v, w und alle drei mit dx, dy, dz addiren sie, und integriren über den ganzen Körper. Betrachten wir z. B. das dreifache Integral:

$$\int \frac{\partial A}{\partial x} u\,dx\,dy\,dz,$$

so nimmt dasselbe durch theilweises Integriren den Werth an:

$$\int Au\,dx\,dz - \int A\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

wovon sich das erstere über die Oberfläche, das letztere über den körperlichen Raum erstreckt. Sind nun ω ein Element der Oberfläche, α, β, γ die Cosinus der Winkel der Normale desselben mit den Axen, so ist:

$$dy\,dz = a\omega.$$

Behandelt man die andern Integrale unserer Summe ebenso, so ergibt sich ein Aggregat von Integralen, die sich über die Oberfläche und eins von solchen, die sich über den Körper erstrecken. Das erstere ist:

$$\int (Au\,dy\,dz + Bu\,dx\,dz + Cu\,dx\,dy) + \int (Bv\,dy\,dz + B_1 v\,dx\,dz + C_1 v\,dx\,dy$$
$$+ \int (Cw\,dy\,dz + C_1 w\,dx\,dz + C_2 w\,dx\,dy) = \Sigma u\omega(A\alpha + B\beta + C\gamma)$$
$$+ \Sigma v\omega(B\alpha + B_1\beta + C_1\gamma) + \Sigma w\omega(C\alpha + C_1\beta + C_2\gamma),$$

wofür sich mit Hülfe der Gleichungen 4) des vorigen Abschnittes ergibt:

$$\Sigma\omega(Uu + Vv + Ww).$$

Die Summen Σ erstrecken sich über die ganze Oberfläche. Es ist somit:

$$1)\quad \Sigma\omega(Uu + Vv + Ww) = \int dx\,dy\,dz \left[A\frac{\partial u}{\partial x} + B_1\frac{\partial v}{\partial y} + C_2\frac{\partial w}{\partial z} + C_1\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. + B_1\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right.$$

Ist der Körper homogen und von constanter Elasticität, so sind den Ausdrücken A, B . . . die im Abschnitte 1) gefundenen Werthe zu geben. Diese geben:

Digitized by Google

$$\vartheta = \frac{A+B_1+C_2}{3\lambda+2\mu},\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A-\lambda\vartheta}{2\mu},\quad \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{B_1-\lambda\vartheta}{2\mu},\quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{C_2-\lambda\vartheta}{2\mu},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{C_1}{\mu},\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{B_1}{\mu},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{B}{\mu}.$$

Substituiren wir dies in die Gleichnng 1), so wird der Ausdruck unter dem Integralzeichen:

$$\frac{A^2+B_1^2+C_2^2}{2\mu}-\frac{\lambda}{2\mu}\frac{(A+B_1+C_2)^2}{3\lambda+2\mu}+\frac{B_1^2+C_1^2+C_2^2}{\mu},$$

oder wenn man setzt:

$$A+B_1+C_2 = F,\quad AB_1+B_1C_2+C_2A-B_1^2-C_1^2-C_2^2 = G,$$

und wie oben:

$$\varepsilon = \frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda+2\mu},$$

so kommt:

2) $$\Sigma\omega\,(Uu+Vv+Ww) = \int\left(\varepsilon F^2-\frac{G}{\mu}\right)dx\,dy\,ds.$$

Diese Formel enthält den Clapeyron'schen Satz.

Statt A, B, C kann man die Hauptelasticitäten a, b, c einführen. Existirt nur eine solche, wirkt also nur eine Zugkraft nach irgend einer Richtung, so ist

$$b = c = G = 0,$$

also die Grösse unter den Integralzeichen wird $\varepsilon a^2 k$, wenn k das Element, und der ganze Ausdruck $\varepsilon a^2 K$, wenn K das Gesammtvolum ist. Wird ferner auf den Körper ein constanter Druck $-P$ ausgeübt. so sind die die drei Hauptelasticitäten alle gleich $-P$, es ist also die Arbeit der Elasticität oder die Grösse rechts in 2):

$$\tfrac{1}{2}\left(3\varepsilon-\frac{1}{\mu}\right)KP^2,$$

oder wenn man für ε seinen Werth setzt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{3}{3\lambda+2\mu}KP^2.$$

3) Schwingungen einer elastischen Saite.

Die Theorie der Schwingungen elastischer Körper ist durch die Integration der in Abschnitt 1) enthaltenen Gleichungen gegeben. Der einfachste Fall ist der der elastischen Seite.

Setzen wir

$$a = l\sqrt{\frac{gP}{\alpha p}},\quad b = l\sqrt{\frac{gP}{\beta p}},$$

so sind die entsprechenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Es können offenbar diese Gleichungen unabhängig von einander und in derselben Weise aufgelöst werden.

Der Auflösungsmethoden gibt es zwei; die eine rührt von D'Alembert her, ist das erste Beispiel einer vollständigen Auflösung einer partiellen Differensialgleichung mit Grensbedingungen, die andere von La Grange geschieht vermittelst der Trigonometrischen und Fourrierschen Reihen, und ist namentlich wichtig wegen der ungemeinen Erweiterung, die dieser Methode später gegeben ist.

Integriren wir die Gleichungen.

Im Anfange der Bewegung finde eine Erschütterung parallel der Axe der z statt; es ist also $U = 0$, $v = 0$, und es bleibt nur die Gleichung:

1) $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Digitized by Google

Es erfolgen dann lediglich transversale Schwingungen; für $t = 0$ sei:

$$w = \varphi(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \varphi_1(x).$$

Diese Functionen φ und φ_1 sind willkürlich gegeben; so lange x zwischen Null und l liegt (wo l die Länge der Saite ist), werden beide Null für $x = 0$ und $x = l$.

Die Gleichung 1) hat nun offenbar ein Integral von der Form:

2) $$w = f(x + bl) + F(x - bl),$$

wo f und F willkürliche Functionen sind. Es müssen jetzt f und F bestimmt werden. Setzt man $f = 0$, so kommt:

$$\varphi(x) = f(x) + F(x),$$
$$\varphi'_1(x) = bf'(x) - bF'(x),$$

wo f', F' die Differenzialquotienten von f und F anzeigen. Es sei noch:

$$\psi(x) = \frac{1}{b}\int \varphi_1(x)\,dx,$$

dann ist:

$$\psi(x) = f(x) - F(x),$$

wenn man die willkürliche Constante angemessen bestimmt, also:

3) $$f(x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\psi(x),$$
$$F(x) = \tfrac{1}{2}\varphi(x) - \tfrac{1}{2}\psi(x).$$

Für $t = x = 0$ muss sein:

$$w = f(0) + F(0) = 0.$$

Dies ist der Fall, wenn man

$$f(0) = F(0) = 0,$$

also auch $\psi(0) = 0$ setzt, und somit kann das Integral für $\psi(x)$ in den Grenzen Null und x genommen werden.

Die Functionen f und F sind jetzt in den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ bekannt, da φ und ψ nur in diesen Grenzen gegeben sind, die Gleichung 2) aber erfordert, dass f für alle positiven Werthe von x, F für alle Werthe von $x = l$ bis $x = -\infty$ sich vorstellen lassen. Da immer für $x = 0$ und $x = l$ auch $w = 0$ ist, da die Saite in den Endpunkten befestigt ist, so gibt Gleichung 2):

4) $$F(-u) = -f(u),$$

wo $bf = u$, $x = 0$ gesetzt wurde, u ist hier positiv sonst beliebig. Ferner:

$$f(l + u) + F(l - u) = 0;$$

setzt man in diese Gleichung $l + u$ für u, zieht sie von der vorletzten ab, so kommt:

5) $$f(2l + u) = f(u).$$

Diese Gleichung gibt alle Werthe von f, die hier in Betracht kommen, wenn man dieselben von 0 bis $2l$ hat; die Gleichung 4) dagegen alle Werthe von $F(-u)$, wenn man die von $f(u)$ hat. Es ist also auch f in den Grenzen l und $2l$ zu bestimmen. Setzen wir in die vorletzte Gleichung noch $l - u$ für u, so kommt:

6) $$f(2l - u) = -F(u).$$

Setzt man u kleiner als l, so gibt diese Gleichung die Werthe von f für $x = l$ bis $x = 2l$, so dass unsere Anfgabe vollständig gelöst ist. Nämlich: Die Gleichungen 3) bestimmen f und F für $x = 0$ bis $x = l$, die Gleichung 6) gibt dann f für $x = l$ bis $x = 2l$, da wenn man

$$0 < u < l$$

nimmt, $2l - u$ alle Werthe von l bis $2l$ annimmt, F aber bekannt ist; Gleichung 5) gibt dann f für beliebige positive x_1 und Gleichung 4) F für $x = 0$ bis $x = -\infty$, so dass alle Werthe, welche von f und F in Betracht kommen, sich ableiten lassen.

Wir unterlassen, hieraus die Schwingungsgesetze herzuleiten, da sie aus der jetzt zu gebenden La Grange'schen Auflösung sich vollständiger ergeben.

Offenbar wird Gleichung 1) erfüllt, wenn man setzt:

7) $$w = A_s \sin s\pi \frac{x}{l} \cos s\pi \frac{bt}{l},$$

wie sich leicht verificiren lässt, s soll eine beliebige ganze Zahl sein und da die Gleichung linear ist, kann man also setzen:

$$w = \Sigma A_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos \frac{s\pi bt}{l}.$$

Die einzelnen Glieder dieser Summe verificiren hier zugleich die Grenzbedingung $w = 0$ für $x = 0$ und $x = l$, ausserdem ist $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ für $t = 0$. Diese Auflösung entspricht also dem Falle, wo der Saite eine Erschütterung gegeben, und dieselbe dann ohne Anfangsgeschwindigkeit sich selbst überlassen ist; soll dies nicht der Fall sein, so setzt man statt dem obigen Werthe von w:

8) $$w = \Sigma\left(A_s \sin \frac{s\pi x}{l} \cos \frac{s\pi bt}{l} + B_s \sin \frac{s\pi x}{l} \sin \frac{s\pi bt}{l}\right),$$

welcher Ausdruck im Uebrigen dieselben Eigenschaften als der erste hat.

Digitized by Google

Für $t = 0$ soll sein:

$$w = \varphi(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \varphi_1(x)$$

man hat also:

$$\varphi(x) = \Sigma A_s \sin \frac{s\pi x}{l}.$$

$$\varphi_1(x) = \Sigma \frac{s\pi b}{l} B_s \sin \frac{s\pi x}{l}.$$

Die Theorie der Fourrier'schen Reihen (vergleiche den Artikel: Quantitäten (imaginäre)) lehrt nun, dass man hat:

$$A_s = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\lambda) \sin \frac{s\pi\lambda}{l} d\lambda$$

$$B_s = \frac{2}{s\pi b} \int_0^l \varphi_1(\lambda) \sin \frac{s\pi\lambda}{l} d\lambda,$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst ist. Ist die Anfangsgeschwindigkeit Null, so ist $B_s = 0$. Um die grosse Wichtigkeit grade dieser Form der Auflösung einzusehen, muss mit einigen Worten auf die Principien der Akustik eingegangen werden. Die hier hergehörigen physikalischen und physiologischen Thatsachen lassen sich kurz in folgender Weise wiedergeben:

1) Töne werden durch Schwingungen elastischer Körper verursacht, welche sich der Luft und vermittelst derselben dem Ohre mittheilen, von woraus sie auf den Gehörnerven wirken.

2) Mit hoher Wahrscheinlichkeit ist anzunehmen, dass die directe Einwirkung auf den Gehörnerv durch einen eigenen Apparat, den Cortischen erfolgt. Dieser besteht aus einer Reihe Fasern oder Fäden, welche durch die Einwirkung der schwingenden Körper in Mitschwingung gerathen. Schwingungen verschiedener Cortischen Fäden, (so ist analog den andern Empfindungserscheinungen anzunehmen) geben verschiedene Töne.

3) Um das Gesetz einzusehen, nach welchen die Cortischen Fäden schwingen, bemerken wir zunächst, dass die Dauer der Schwingungen, welche irgend ein Körper erleiden kann, von seiner ganzen Beschaffenheit abhängt. Bei der elastischen Saite z. B. wird ein beliebiges Glied des Ausdruckes für w unverändert sein, wenn man f um ein Vielfaches von $\frac{2l}{sb}$ wachsen lässt; es ist also $T = \frac{2l}{sb}$ die Dauer einer entsprechenden Schwingung, wo s eine ganze Zahl ist, und nur solche Schwingungen kann die Saite machen. Wenn nun der elastische Körper sich in einem Medium befindet, das gewisse Schwingungen erleidet, so werden nur solche sich den erstern mittheilen können, welche die seiner Beschaffenheit entsprechende Dauer haben.

4) Der Ausdruck $A \sin at + B \cos at$, wo t die Zeit ist, der also die Form der einzelnen Glieder von w hat, ist derselbe, welcher die Schwingungen eines Pendels von kleinem Ausschlage angibt. Schwingungen, die durch dies Gesetz bestimmt werden, nennen wir mit Helmholz pendelartige Schwingungen.

5) Es gibt elastische Körper, welche entweder nur eine gewisse pendelartige Schwingung zu machen im Stande sind oder die nur unter ungewöhnlichen Umständen merkbare Schwingungen von anderer Beschaffenheit machen. Es ist, anzunehmen, dass die Cortischen Fäden diese Eigenschaft haben, und dass jedem dieser Fäden eine eigene Schwingungsdauer zukommt.

6) Aus den Gesetzen 3) und 5) folgt dann, dass jedes Glied des Ausdruckes 7) oder 8) einen eigenen Ton gibt, dass jeder Ton durch eine und nur durch eine pendelartige Schwingung hervorgebracht wird.

Es ist also, um auf die Saite zurückzukommen, dieselbe im Stande unendlich viel Töne zu geben, deren Schwingungsdauer bezüglich sind:

$$\frac{2l}{b}, \frac{2l}{2b}, \frac{2l}{3b} \cdots,$$

Fügen wir hinzu, dass je kleiner die Schwingungsdauer, desto höher der Ton ist, so sehen wir, dass die Höhe des Tones sich nach der Länge der Saite richtet, dass die Schwingungszeit derselben proportionel ist, und dass die Höhe der einzelnen Töne derselben Saite gegeben wird durch die Schwingungszeiten von den Verhältnissen:

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4} \cdots$$

Die Coefficienten A_s und B_s geben die Grösse der mittleren Verschiebung, ihnen entspricht die Intensität der Töne. Die einzelnen Töne können also je nach der Art des Anschlages die allerverschiedenste Intensität haben.

Irgend ein Glied von w wird für die Punkte gleich Null, wo $x = \frac{nl}{s}$ und n eine ganze Zahl ist.

Die dem Tone entsprechende Bewegung der Saite ist also der Art, dass in den Entfernungen $\frac{l}{s}$ sich Punkte befin-

Digitized by Google

den, die immer in Ruhe bleiben, dieselben heissen Schwingungsknoten. Nur der tiefste Ton (Grundton) für den $s=1$ ist, hat dergleichen Schwingungsknoten nicht. Die Entfernung zweier Schwingungsknoten eines beliebigen Tones ist, vielleicht zu sehen, gleich der Länge $\frac{l}{s}$ einer Saite, welche den entsprechenden Ton als Grundton hat. Die Erfahrung hat diese Sätze völlig bestätigt. Noch bemerken wir, da gegeben war:

$$b = l\sqrt{\frac{gP}{lp}},$$

oder da das Gewicht der Saite $p = g\varrho\omega l$ war,

$$b = \sqrt{\frac{P}{\varrho\omega}},$$

dass das Quadrat der Schwingungsdauer dem spannenden Gewicht direct und der Dichtigkeit und dem Querschnitte der Saite umgekehrt proportional ist.

Was die Longitudinal-Schwingungen anbetrifft, so sind die Gesetze derselben ganz wie die obigen zu bestimmen, da nur b mit a vertauscht werden muss. Es war aber:

$$a = l\sqrt{\frac{gP}{ap}} = \sqrt{\frac{Pl}{\varrho - \omega a}}.$$

Die Schwingungszeiten verschiedener Saiten verhalten sich also hier direct, wie die Wurzeln der Saitenlängen.

Das Verhältniss der Schwingungszeiten für die Grundtöne der transversalen und longitudinalen Schwingungen derselben Saite ist:

$$\frac{1}{b} : \frac{1}{a} = 1 : \sqrt{\frac{a}{l}}.$$

4) Schwingungen elastischer Platten.

Es handelt sich jetzt um die Integration der Gleichung:

$$1) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Was die Grenzbedingungen anbetrifft, so ist: $w = 0$ auf der ganzen Begrenzung.

Wir nehmen an, dass diese ein Rechteck sei, und eine Ecke desselben Anfangspunkt der Coordinaten l und l' die Länge der Seiten, welche bezüglich den Axen x und y entsprechen, dann ist:

$$2) \qquad w = 0 \text{ für } x = 0,\ x = l \text{ und für } y = 0,\ y = l';$$

ferner soll sein:

$$3) \qquad w = f(x, y),\ \frac{\partial w}{\partial t} = F(x, y) \text{ für } t = 0$$

da der Anfangszustand beliebig ist.

Die Bedingungen 1) und 2) werden erfüllt durch den Ausdruck:

$$4) \qquad w = \Sigma\Sigma\,(H\cos\gamma t + K\sin\gamma t)\sin s\frac{\pi x}{l}\sin n\frac{\pi y}{l'},$$

wo die Summe sich über alle ganzen Werthe von n und s erstreckt, und γ die Gleichung erfüllt:

$$5) \qquad \gamma = c\pi\sqrt{\frac{s^2}{l^2} + \frac{n^2}{l'^2}};$$

um die Bedingungen 3) zu erfüllen, muss man haben:

$$\Sigma\Sigma H\sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{l'} = f(x, y)$$

$$\Sigma\Sigma\gamma K\sin\frac{s\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{l'} = F(x, y)$$

und die Theorie der Fourrier'schen Reihen gibt:

$$6) \qquad H = \frac{4}{ll'}\int_0^l\int_0^{l'} f(\lambda, \mu)\sin\frac{s\pi\lambda}{l}\sin\frac{n\pi\mu}{l'}\,d\lambda\,d\mu$$

$$K = \frac{4}{ll'\gamma}\int_0^l\int_0^{l'} F(\lambda, \mu)\sin\frac{s\pi\lambda}{l}\sin\frac{n\pi\mu}{l'}\,d\lambda\,d\mu.$$

Die Form der Reihe 4) zeigt, dass der Töne, welche von den Schwingungen der Platte erzeugt werden können, unendlich viel sind. Jedoch steht die Schwin-

gungsdauer derselben im Allgemeinen wegen der Gleichung 5) in keinem rationalen Verhältniss.

Sei jetzt S die Schwingungsdauer eines Tones, so ist die Höhe k desselben S umgekehrt proportional, man kann also $k = \frac{1}{S}$ setzen, und es ist:

$$S = \frac{2\pi}{\gamma}, \quad k = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{s^2}{l^2} + \frac{n^2}{l'^2}};$$

sind l^2 und l'^2 incommensurabel, so hat man eine unendliche Anzahl von Tonreihen.

Der Grundton einer jeden ist irgend ein Werth von k für den s und n relative Primzahlen sind, und jedes gleiche Vielfache von s und n z. B. das α fache gibt einen Werth

$$k' = \alpha k,$$

also die Höhenverhältnisse einer solchen Reihe sind ganz wie bei der schwingenden Saite beschaffen.

Das Knotensystem, d. h. die Punkte, wo $w = 0$ ist, entspricht den Werthen:

$$x = \frac{al}{s}, \quad y = \frac{l'l'}{n},$$

setzt sich also aus $s-1$ der Axe der x parallelen, und aus $n-1$ der Axe der y parallelen Graden zusammen. Ganz anders stellt es sich jedoch, wenn l^2 und l'^2 rational sind.

Setzen wir daher zunächst $l = l'$, d. h. betrachten wir eine quadratische Platte. In diesem Falle hat man:

$$w = \Sigma\Sigma H \sin\frac{s\pi x}{l} \sin\frac{n\pi y}{l} \cos\gamma t,$$

wenn wir von der Anfangsgeschwindigkeit absehen, eine Vereinfachung, welche die hier zu gebenden Schlüsse wesentlich nicht beschränkt, und es ist:

$$\gamma = \frac{c\pi}{l}\sqrt{m}, \quad k = \frac{c}{2l}\sqrt{m}, \quad m = n^2 + s^2,$$

der tiefste Ton entspricht den Werthen:

$$n = s = 1, \quad m = 2. \quad k = \frac{c}{2l}\sqrt{2}.$$

Jeder nicht durch ein Quadrat theilbare Werth von m gibt einen Werth von k, der dem Grundton einer harmonischen Reihe entspricht. Wir nennen diesen Werth von m dann das Argument der Reihe:

$$k = \frac{kc}{2l}\sqrt{m}.$$

wo k eine ganze Zahl ist. Ein einfaches, doppeltes u. s. w. Argument m soll ein solches heissen, wo m nur auf eine, zwei u. s. w. Arten in eine Summe von zwei Quadraten zerlegt werden kann. Alle Werthe, die zu einer Reihe gehören, sind gegeben durch die Auflösungen der unbestimmten Gleichung:

$$s^2 + n^2 = mk^2.$$

Setzt man $m = 1$, so erhält man:

$$s^2 + n^2 = k^2.$$

Eine Gleichung, deren Auflösungen bekanntlich durch die Formeln gegeben sind:

$$s = p^2 - q^2, \quad n = 2pq, \quad k = p^2 + q^2.$$

Indessen ist diese Reihe unvollständig, und sogar kann ihr Grundton, wo $k = 1$ ist, nicht vorkommen. Es hat also diese Reihe eine Basis, die keinem wirklichen Tone entspricht. Die Glieder derselben sind gegeben durch die Werthe:

$$s = 3, \quad n = 4, \quad s = 6, \quad n = 8, \quad s = 5, \quad n = 12 \ldots$$

Suchen wir jetzt die Anzahl der Glieder von w, welche denselben Ton geben.

Dem Werthe von $m = 2$ entspricht nur ein Glied, da hier $n = s = 1$ ist, jedem andern einfachen Argument m, aber zwei Glieder, dann ist $m = \alpha^2 + \beta^2$; so kann man $n = \alpha$, $s = \beta$ und $n = \beta$, $s = \alpha$ setzen; doppelten Argumenten entsprechen vier Glieder u. s. w.

Jedem Tone $k = \frac{kc}{2l}\sqrt{m}$ entsprechen soviel Glieder, als die Gleichung:

$$s^2 + n^2 = mk^2$$

für gegebenes k Auflösungen hat. Ist k nicht in zwei Quadrate zerlegbar, so ist diese Anzahl der Glieder gleich der für die Basis.

Sei jetzt $k = a^2 + b^2$, und zunächst $m = 2$, so hat man zwei Lösungen, die den Werthen von n und s:

$$a^2 - b^2 \mp 2ab$$

entsprechen, und eine wo $n = s = k$ ist.

Sei ferner

$$k = a^2 + b^2 \text{ und } m = \alpha^2 + \beta^2$$

ein einfaches Argument, so kann man setzen für s, n die absoluten Werthe von:

$$s = \alpha(a^2 - b^2) \mp 2\beta ab,$$
$$n = 2\alpha ab \pm \beta(a^2 - b^2).$$

Bei s und n sind hier gleichzeitig die unteren und das obere Zeichen zu nehmen.

Da man s und n vertauschen kann, so gibt dies vier Glieder, ausserdem sind noch zwei vorhanden, welche den Werthen $s = \alpha k$, $n = \beta k$ entsprechen. Es

kann aber sein, dass diese schon die obige Formel enthält, so dass man vier oder sechs Auflösungen hat. Z. B. für $m=5$, $k=5$ hat man:

$$s=10,\quad n=5,\quad s=11,\quad n=2,$$

also vier Auflösungen, für $m=5$, $k=13$,

$$s=26,\quad n=13,\quad s=29,\quad n=2,$$
$$s=22,\quad n=19,$$

also deren sechs.

Ist $m=\alpha^2+\beta^2=\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2$ ein doppeltes Argument, so kann man für s und n die obigen Werthe und auch die, wo $\alpha\beta$ mit $\alpha'\beta'$ vertauscht sind, nehmen, also wegen der obigen Bemerkung, dass auch αk und βk, $\alpha' k$ und $\beta' k$ Auflösungen sind, hat man deren acht oder zwölf. Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf beliebig vielfache Argumente ausdehnen.

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Knotenlinien.

Für $s=1$, $n=1$, folgt nur $x=l$, $y=l$, also die Seiten des Quadrats.

Für $s=2$, $n=2$ (ein Ton dem offenbar die Octave des vorigen Grundtons entspricht), hat man für die Knotenlinien

$$x=\tfrac{1}{2},\quad y=\tfrac{1}{2},$$

also zwei Grade, die durch den Mittelpunkt des Quadrats gehen.

Sei $s=2$, $n=1$, also $m=5$.

Der entsprechende Ton hat zwei Glieder, setzt man $t=0$, so erhält man:

$$a\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}+b\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{2\pi y}{l}=\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\left(a\cos\frac{\pi x}{l}+b\cos\frac{\pi y}{l}\right)=0,$$

für die Knotenlinien. Ausser den Seiten erhält man noch als Knotenlinie, die durch die Gleichung:

$$a\cos\frac{\pi x}{l}+b\cos\frac{\pi y}{l}=0$$

gegebene Linie. a und b hängen vom Anfangszustande ab, für $b=0$ ergibt sich $x=\frac{l}{2}$, also eine Grade, für $a=0$, $y=\frac{l}{2}$. Für $b=-a$ hat man $y=x$, also die eine Diagonale, für $b=a$, $y+x=1$ also die andere.

Dagegen entspricht jedem andern Werthe von $\frac{b}{a}$ eine Curve, die durch den Mittelpunkt geht, wo sie einen Inflexionspunkt hat.

Für $s=3$, $n=3$, (die Duodecime des tiefsten Tones) findet nur ein Glied statt. Man hat als Knotenlinien sechs Grade, welche das Quadrat in neun kleinere theilen. Für $s=3$, $n=1$ ergibt sich:

$$a\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}+b\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{3\pi y}{l}=0,$$

oder:

$$\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}\left[a\left(4\cos\frac{\pi x^2}{l}-1\right)+b\left(4\cos\frac{\pi y^2}{l}-1\right)\right]=0.$$

Der letzte Factor gibt für $b=0$ wieder sechs Grade, die das Quadrat in neun andre theilen, für $b=0$ zwei den y parallele Linien; für $b=-a$ beide Diagonalen. Für $b=a$ wird:

$$2\cos\frac{\pi x^2}{l}+2\cos\frac{\pi y^2}{l}=\pm 1.$$

Diese Gleichung stellt eine geschlossene Curve vor, welche jede Diagonale in zwei Punkten schneidet, sie bietet das Bild eines Kreises, der in der Nähe der Diagonalen etwas abgeplattet ist.

Für $s=3$, $n=2$ hat man:

$$a\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\frac{2\pi y}{l}+b\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{3\pi y}{l}=0.$$

oder:

$$\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}=0$$

und:

$$a\cos\frac{\pi y}{l}\left(4\cos\frac{\pi x^2}{l}-1\right)+b\cos\frac{\pi x}{l}\left(4\cos\frac{\pi y^2}{l}-1\right)=0.$$

Google

Für $b = 0$ hat man drei Linien den x und zwei den y parallel, für $a = 0$ ähnliches, wenn man x und y vertauscht, für $a = b$ die eine Diagonale, und die Curve, deren Gleichung ist

$$4 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} = 1,$$

eine Figur, die einer gleichseitigen Hyperbel nahe kommt, deren Asymptoten den Seiten parallel sind. Für $b = a$ ergibt sich dieselbe Figur in anderer Lage, die man findet, wenn man die Diagonalen vertauscht. Man übersieht die Schwierigkeiten, welchen die Ausdehnung dieser Betrachtung auf alle Knotenlinien unterliegen würde.

Die Platte sei jetzt wieder ein Rechteck, dessen Seiten jedoch commensurabel sind.

Sei $l = eL$, $l' = cL$, wo e und c ganze Zahlen sind, dann hat man:

$$k = \frac{c}{2L} \sqrt{\left(\frac{s}{e}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2}.$$

Setzt man $s = ep$, $n = cq$, so wird:

$$k = \frac{c}{2L} \sqrt{p^2 + q^2}.$$

und jeder der entsprechenden Töne gehört also auch einer quadratischen Platte an, deren Seite L ist. Also alle Töne, welche entstehen, wenn die Platte in ce quadratische gleiche Theile zerlegt werde, sind auf derselben gleichzeitig möglich, die Knotenlinien und Anzahl der Glieder entsprechen dem Zusammenwirken derselben. Jedoch finden noch andere Töne und Knotenlinien auf der Platte statt.

Um ein Beispiel einer nicht rechteckigen Platte zu geben, möge dieselbe ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Es ist hier ein eigenes Coordinatensystem, welches von Lamé herrührt, einzuführen.

Sei O der Mittelpunkt, (der Radius des dem Dreieck eingeschriebenen Kreises), man lege durch einen beliebigen inneren Punkt drei Linien parallel den Seiten, und fälle von O drei Lothe auf dieselben, deren Länge p, p_1, p_2 sein solle. Diese Lothe, welche positiv in der Richtung nach den Seiten hin gedacht worden, sind die Coordinaten, die hier anzuwenden sind. Bekanntlich hat man immer

$$p + p_1 + p_2 = 0$$

und die Seiten des Dreiecks sind:

$$p = l, \quad p_1 = l, \quad p_2 = l.$$

Es muss also v verschwinden für jeden dieser Werthe.

Was den Anfangszustand anbetrifft, so sehen wir von der Anfangsgeschwindigkeit ab, und nehmen denselben symmetrisch in Bezug zur Axe p.

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn man setzt:

$$v = \Sigma\Sigma H v \cos \gamma t,$$

wo:

$$\begin{aligned} v = \sin \frac{2\pi}{ql}(\lambda p + \mu p_1 + \nu p_2 + 3\lambda l) + \sin \frac{2\pi}{ql}(\mu p + \nu p_1 + \lambda p_2 + 3\mu\lambda) \\ + \sin \frac{2\pi}{ql}(\nu p + \lambda p_1 + \mu p_2 + 3\nu l) + \sin \frac{2\pi}{ql}(\nu p + \mu p_1 + \lambda p_2 + 3\nu l) \\ + \sin \frac{2\pi}{ql}(\mu p + \lambda p_1 + \nu p_2 + 3\mu l) + \sin \frac{2\pi}{ql}(\lambda p + \nu p_1 + \mu p_2 + 3\lambda l), \end{aligned}$$

wo λ, μ, ν ganze positive oder negative Zahlen, und:

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

sind. Für γ hat man die Gleichung:

$$\gamma^2 = c^2 \left(\frac{2\pi}{ql}\right)^2 [(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)] = \frac{4}{27} \frac{\pi^2 c^2}{l^2} (\mu^2 + \mu\nu + \nu^2),$$

v kann als eine Function von x und y betrachtet werden, da p, p_1 und p_2 von der Form $ax + by$ sind; es ist dann zu sehen, dass v die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} v = 0$$

verificirt, wenn man auf die Coefficienten a und b Rücksicht nimmt. Hieraus folgt dann folglich, dass die partielle Differenzialgleichung der Platte durch den Ausdruck v erfüllt wird. Auch verschwindet v für $p = l$, $p_1 = l$, $p_2 = l$.

Um H zu bestimmen, sind gewisse Betrachtungen nöthig, welche den oben angewandten analog sind.

Was die Höhe des Tones h anbetrifft, so hat man für s irgend ein Glied:

$$h = \frac{c}{3l}\sqrt{\frac{\mu^2+\mu\nu+\nu^2}{3}} = \frac{2c}{3a}\sqrt{\mu^2+\mu\nu+\nu^2},$$

wo a die Seite des Dreiecks ist.

Die Töne der Platte ergeben sich aus der Betrachtung der quadratischen Form $\mu^2+\mu\nu+\nu^2$ ähnlich wie oben.

5) Ueber die Wellenbewegung innerhalb der elastischen Medien.

Wenn in einem elastischen Medium, welches wir uns nach allen Richtungen unendlich denken in einem kleinen Gebiet, welches man Erschütterungscentrum nennt, eine Deformation stattfindet, so werden elastische Kräfte erregt, welche die Deformation weiter verbreiten. Ist das Medium homogen und von constanter Elasticität, so verbreitet sich die Erschütterung nach allen Richtungen hin mit gleicher Geschwindigkeit. Also betrachtet man das Erschütterungscentrum als Mittelpunkt irgend einer Kugel, so werden auf der ganzen Oberfläche derselben immer dieselben Deformationen eintreten.

Sind die betrachteten Punkte weit vom Mittelpunkt entfernt, so kann man die einzelnen Kugelscheiben durch parallele Ebenen ersetzen.

Die sich ausbreitende Erschütterung nennt man bekanntlich Welle, und wir haben es also hier mit kugelförmigen und mit ebenen Wellen zu thun.

Sprechen wir jetzt allein von den letzteren.

α, β, γ sind die Cosinus der Winkel, welche die Normale der ebenen Welle mit den Axen macht, P der Abstand einer Welle von der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden,

$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

ist dann die Gleichung derselben. Ist dann v die Geschwindigkeit der Erschütterungsverbreitung, so ist:

$$T = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}$$

die Zeit, in welcher dieselbe zur betrachteten Welle gelangt. Nimmt man an, dass im Erschütterungscentrum C unaufhörlich isochrone Schwingungen entstehen, so breiten auch diese sich aus, so dass also isochrone Schwingungen im ganzen Medium stattfinden, nur dass diese in jedem Punkte M sich nach Maassgabe seiner Entfernung von C verspäten, und zwar um die Zeit T.

Ist also die Deformation des Anfangspunktes gegeben durch die Gleichung:

$$U_0 = c_0 \cos 2\pi \frac{t}{\tau},$$

wo τ die Schwingungsdauer ist, so wird die Deformation von M gegeben sein durch die folgende:

$$U = c \cos 2\pi \frac{t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}}{\tau}.$$

Ist das Erschütterungscentrum gegen P gemessen sehr entfernt von O und M, so kann man $c_0 = c$ setzen, da beide von P abhängen, und die Deformationen können als gradlinig und parallel betrachtet werden.

Sind a, b, c die Cosinus der Winkel dieser Deformation mit den Axen, so sind die Projectionen von U bezüglich gleich:

$$u = aU, \quad v = bU, \quad w = cU,$$

und diese Werthe müssen die partiellen Differenzialgleichungen [Abschnitt 1) 7)], welche wir für die Schwingungen fanden, verificiren. Es muss also, da wir von äusseren Kräften absehen, sein:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \Delta^2 u = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \Delta^2 v = \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \mu \Delta^2 w = \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Setzen wir:

$$q = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

$$\sigma = c \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{mx+ny+pz}{v\tau}\right),$$

so erhält man wegen der Werthe von u, v, w:

$$\vartheta = \frac{2\pi}{V\tau} q\sigma, \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{4\pi^2}{V^2\tau^2}\alpha q U,$$

$$\Delta^2 u = -\frac{4\pi^2}{V^2\tau^2} aU, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} aU,$$

also wenn man in die erste der partiellen Differenzialgleichungen substituirt, und gleiche Ausdrücke für die beiden andern bildet, ergeben sich die Relationen:

1) $$(\lambda+\mu)\alpha q + (\mu - \varrho V^2)\, a = 0,$$
$$(\lambda+\mu)\beta q + (\mu - \varrho V^2)\, b = 0,$$
$$(\lambda+\mu)\gamma q + (\mu - \varrho V^2)\, c = 0.$$

Diese Gleichungen bezüglich mit α, β, γ multiplicirt und addirt geben:

Digitized by Google

2) $(\lambda+2\mu-\varrho V^2)\,q=0.$

Diese Gleichung kann erfüllt werden, wenn man setzt:

$$\lambda+2\mu-\varrho V^2=0,$$

also:

$$V=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}},\quad \mu-\varrho V^2=\lambda+\mu.$$

In diesem Falle werden die Gleichungen 1):

$$\alpha q=a,\quad \beta q=b,\quad \gamma q=c,\quad q^2=1.$$

Nun ist q der Cosinus des Winkels, welchen die Vibrationsgeschwindigkeit und die Verbreitungsgeschwindigkeit mit einander machen, in diesem Falle findet die Schwingung also in der Normale der Wellen statt mit der Geschwindigkeit

$$\Omega=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}.$$

Die Gleichung 2) wird aber auch erfüllt, wenn man $p=0$ setzt, dann ist $\vartheta=0$, d. h. die Dichtigkeit wird nicht geändert. Die Schwingung findet in der Wellenebene statt, und zwar mit der Geschwindigkeit:

$$\omega=\sqrt{\frac{u}{\varrho}},$$

(wie sich aus den Gleichungen 1) ergibt). Jede Wellenbewegung setzt sich also aus zwei andern parallel der Wellenebene und senkrecht auf ihr zusammen, die Geschwindigkeiten beider Ω und ω sind ungleich, die letztere ist die kleinere. Das Verhältniss der Geschwindigkeiten $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}}$ ist nach der Poisson'schen Hypothese, wo $\lambda=\mu$, gleich $\sqrt{3}$, nach der Werthheimschen, wo $\lambda=2\mu$, gleich $\sqrt{2}$. Wahrscheinlich ist keins von beiden das richtige.

Führt man die Geschwindigkeiten ω und Ω ein, so nehmen die Gleichungen 7a) des Abschnittes 1) die Gestalt an:

3)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Omega^2\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\omega^2\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\Omega^2\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\omega^2\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\Omega^2\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\omega^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right].$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Integrale sich aus Gliedern zusammensetzen, deren Periodicität zum Theil von ω, zum Theil von Ω abhängt. Nur die letzteren Glieder bewirken, wie wir eben gesehen haben, Verdichtung oder Verdünnung des Mediums, sie geben die Longitudinalschwingungen, d. h. solche, die auf der Schwingungsrichtung senkrecht stehen, die anderen geben die Transversalverschwingungen, d. h. solche in Richtung der Wellenebene.

Betrachtet man nur die Longitudinalschwingungen, so ist das mit ω^2 multiplicirte Glied gleich Null zu setzen. Man hat also:

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

und die Bewegungsgleichungen sind:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Omega^2\frac{\partial\vartheta}{\partial x},\qquad \frac{d^2 v}{d t^2}=\Omega^2\frac{\partial\vartheta}{\partial y},\qquad \frac{d^2 w}{d t^2}=\Omega^2\frac{\partial\vartheta}{\partial z}.$$

Differenziiren wir die zweite Gleichung nach z, die letzte nach y und subtrahiren, so kommt, wenn wir die vorletzten Gleichungen berücksichtigen und cyklisch fortschreiten:

$$\frac{\partial^2\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\frac{\partial\psi}{\partial z}}{\partial t^2}=0.$$

Da aber ψ eine periodische Function sein soll, ist $\psi=0$, also:

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z},\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

d. h.

Digitized by Google

4) $$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z}$$

und somit auch

$$\vartheta = \Delta^2 F.$$

F ist hier eine periodische Function, welche die Gleichung verificirt:

5) $$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Omega^2 \Delta^2 F,$$

welche zur Bestimmung der Bewegung ausreicht.

Betrachten wir aber die Transversal-Schwingungen allein, so ist zu setzen:

$$\vartheta = 0.$$

Man hat dann, wie sich aus den allgemeinen Gleichungen leicht ergibt, wenn ξ, η, ζ neue periodische Functionen sind:

6) $$u = \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \varrho}{\partial x} - \Delta^2 \xi, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varrho}{\partial y} - \Delta^2 \eta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varrho}{\partial z} - \Delta^2 \zeta,$$

$$\varrho = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

und die Gleichungen 3) geben dann leicht:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta^2 \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta^2 \eta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta^2 \zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

wo φ eine neue Function ist.

Führt man jetzt die Werthe von u, v und w ein, so kommt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta^2 u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta^2 v, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta^2 w,$$

was auch φ sei. Es kann also φ ganz unterdrückt werden, und ξ, η, ζ sind Functionen, welche die Gleichung:

7) $$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta^2 F$$

verificiren.

Was die Bildung des Tones anbetrifft, so sieht man aus dem Vorigen, dass es zweierlei Töne gibt, die den Longitudinal- und Transversalschwingungen entsprechen, und die sich beide mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen.

Beide können abgesondert untersucht werden, und geben die entsprechenden Gleichungen 5) und 7) die nöthige Theorie.

Da wegen der linearen Beschaffenheit der Gleichungen 3) die allgemeinen Integrale u, v, w Glieder enthalten, welche die beiden Zuständen entsprechenden Glieder zusammensetzen, so gibt die Coexistenz beider Systeme den ganzen Schwingungszustand. Selbstverständlich muss aber den Grenzbedingungen genügt werden. Die allgemeinen Werthe sind wegen 4) und 6) dann offenbar:

$$u = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

Ausserdem ist $\vartheta = \Delta^2 F$ die Verdichtigung. Aber diese Werthe von u, v, w sind noch nicht die allgemeinen Integrale, welche selbst nicht periodisch zu sein brauchen. Indessen kommen diese bei akustischen Erscheinungen nicht in Betracht. Es ist nämlich als Erfahrungssatz zu betrachten, dass die letzteren nur den sich über den tönen den Körper ausbreitenden Wellenbewegungen ihr Entstehen verdanken.

Digitized by Google

6) Gleichgewicht und Bewegung eines elastischen Parallelepipedons.

Wenn die äusseren Kräfte umgekehrt dem Quadrat der Entfernung wirken, so gibt es eine Function F, welche den Bedingungen genügt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varrho X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \varrho Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \varrho Z$$

ist. Die Gleichgewichtsgleichungen ergeben sich dann aus Abschnitt 1) Formel 7):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \varepsilon \Delta^2 u + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \varepsilon \Delta^2 v + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \varepsilon \Delta^2 w + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

wo

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad f = \frac{\varrho}{\lambda + \mu} F$$

ist. Diese drei Gleichungen lassen sich durch eine einzige ausdrücken. Bildet man nämlich den Ausdruck:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

von der ganzen linken Seite jeder der Gleichungen und berücksichtigt, dass $\Delta^2 \vartheta = 0$ ist, (es ergab sich dies in Abschnitt 1), wenn man die Gleichungen 7a) bezüglich nach x, y, z differenziirt und addirt) so erhält man:

$$\Delta^2 \Delta^2 u = \Delta^2 \Delta^2 v = \Delta^2 \Delta^2 w = 0.$$

Die Ausdrücke u, v, w verificiren also alle drei die Gleichung:

1) $$\Delta^2 \Delta^2 \varphi = 0.$$

Im Falle der Bewegung

2) $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = k^2 \Delta^2 \psi,$$

wo $k = \omega$ oder Ω zu setzen ist. Um diese Gleichung zu integriren mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen schlägt man folgendes Verfahren ein.

Es sei:

$$E_{(\varphi)} = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \qquad G_{(\varphi)} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}.$$

Seien m, n, l, p, q, r beliebige Constanten, und setzen wir:

$$\begin{aligned} S &= \sin mx, & C &= \cos mx, \\ S_1 &= \sin ny, & C_1 &= \cos ny, \\ S_2 &= \sin lz, & C_2 &= \cos lz, \\ E(p, x) &= E, & G(p, x) &= G, \\ E(q, y) &= E_1, & G(q, y) &= G_1, \\ E(r, z) &= E_2, & G(r, z) &= G_2. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $S_{(a)}$, $E_{(a)}$, $G_{(a)}$ . . . sollen bedeuten, dass man in den betreffenden Ausdrücken die Variable x durch a ersetzt. Noch sei:

$$H = \frac{aE_{(a)}E - xG_{(a)}G}{G_{(a)}}, \qquad K = \frac{xG_{(a)}E - aE_{(a)}G}{G_{(a)}}.$$

Wird in diesen Ausdrücken x mit y oder z vertauscht, so setzen wir bezüglich: H_1, K_1, H_2, K_2 an die Stelle von H, K; offenbar ist:

$$K_{(a)} = K_{1(b)} = K_{2(c)} = 0$$

und

$$E^2_{(\varphi)} - G^2_{(\varphi)} = 1,$$

also auch:

$$H_{(a)} = \frac{a}{G_{(a)}}, \qquad H_{1(b)} = \frac{b}{G_{1(b)}}, \qquad H_{2(c)} = \frac{c}{G_{2(c)}}.$$

Digitized by Google

Es ist leicht ersichtlich, dass die Gleichung 2) erfüllt wird durch die Glieder von der Form:

$$(AC+BS)\,(A_1C_1+B_1S_1)\,(A_2C_2+B_2S_2)\,(L\cos\gamma t+L_1\sin\gamma t),$$

wo A, B, A_1, B_1, A_2, B_2, L, L_1 zu bestimmende Coefficienten, und

$$\gamma = k\sqrt{m^2+n^2+l^2}$$

ist. Dagegen wird die Gleichung $\Delta^2 F = 0$ verificirt durch Glieder von der Form:

$$(AE+BG)\,(A_1C_1+B_1S_1)\,(A_2C_2+A_2S_2)$$

oder:

$$(AC+BS)\,(A_1E_1+B_1G_1)\,(A_2C_2+B_2S_2)$$

oder:

$$(AC+BS)\,(A_1C_1+B_1S_1)\,(A_2E_2+B_2G_2).$$

Soll aber wie hier die Gleichung 2) integrirt werden, so kann man zu dem Exponentialfactor (welcher E und G enthält) noch zuzählen bezüglich:

$$A'H+B'K,\quad A'_1H_1+B'_1K_1,\quad A''_2H_2+B''_2K_2$$

unter der Voraussetzung, dass man hat:

$$p^2=n^2+l^2,\quad q^2=l^2+m^2,\quad r^2=m^2+n^2.$$

Mit Hülfe der eben gegebenen Gleichung lässt sich dies leicht verificiren.

Betrachten wir jetzt ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen sechs Seitenflächen von gegebenen Kräften angegriffen sind, welche auf den entsprechenden Seitenflächen senkrecht stehen. Wir nehmen ferner an, dass diese Kräfte grade Functionen der Variablen sind, also für positive und negative Werthe derselben gleich bleiben. Der Anfangspunkt der Coordinaten sei der Mittelpunkt des Parallelepipedons, $2a$, $2b$, $2c$ die Länge der Seiten.

Dann hat man zu integriren die Gleichungen:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\varepsilon\Delta^2 u=0,\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\varepsilon\Delta^2 v=0,\quad \frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\varepsilon\Delta^2 w=0,$$

da f verschwindet. In den Werthen:

$$A=\lambda\vartheta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad B_1=\lambda\vartheta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\quad C_2=\lambda\vartheta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$C_1=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad C=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\quad B=\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\Big)$$

ist der Grenzbedingungen wegen zu setzen:

$$\begin{aligned} A&=\varphi_1 & B=C&=0 \text{ für } x=\pm a\\ B_1&=\varphi_2 & B=C_1&=0 \text{ für } y=\pm b\\ C_2&=\varphi_3 & C=C_1&=0 \text{ für } z=\pm c. \end{aligned}$$

Mit Hülfe der diesen Abschnitt einleitenden Betrachtungen gelangt Lamé zu den leicht zu verificirenden Integralen:

$$3)\quad u=f_0x+\Sigma\Sigma pf\left(\frac{1+\varepsilon}{p}G-K\right)C_1C_2+\Sigma\Sigma ng\left(\frac{\varepsilon}{q}E_1-H_1\right)C_2S + \Sigma\Sigma mh\left(\frac{\varepsilon}{r}E_2-H_2\right)SC_1,$$

$$v=g_0y+\Sigma\Sigma nf\left(\frac{\varepsilon}{p}E-H\right)S_1C_2+\Sigma\Sigma qg\left(\frac{1+\varepsilon}{q}G_1-K_1\right)C_2C + \Sigma\Sigma nh\left(\frac{\varepsilon}{r}E_2-H_2\right)CS_1$$

$$w=h_0z+\Sigma\Sigma lf\left(\frac{\varepsilon}{p}E-H\right)C_1S_2+\Sigma\Sigma lg\left(\frac{\varepsilon}{q}E_1-H_1\right)S_2C + \Sigma\Sigma rh\left(\frac{1+\varepsilon}{r}G_2-K_2\right)CC_1.$$

Digitized by Google

Jeder dieser Ausdrücke verificirt die Gleichgewichtsgleichungen und lässt die den Grenzflächen parallelen Componenten auf denselben verschwinden, wenn man setzt:

$$m = \frac{s\pi}{a}, \quad n = \frac{s_1\pi}{b}, \quad l = \frac{s_2\pi}{c}.$$

und die Doppelsummen auf alle ganzen positiven und negativen Werthe bezüglich von $s_1 s_2$, $s_2 s_1$, $s s_1$ erstreckt, so dass die ersten, zweiten und dritten Doppelsummen, die in den Werthen von u, v, w vorkommen, bezüglich der ersten, zweiten und dritten Combination entsprechen. Die ersten Glieder $f_0 x$, $g_0 y$, $h_0 z$, sind die der Doppelsumme, für die beide s der Null gleich werden, es setzen sich also diese Glieder aus je drei den drei Summen entsprechenden zusammen. — Es sind nun die Coefficienten so zu bestimmen, dass den Grenzbedingungen:

$$A = \varphi_1 \text{ für } x = \pm a,$$
$$B_1 = \varphi_2 \text{ für } y = \pm b.$$
$$C_2 = \varphi_3 \text{ für } z = \pm c$$

genügt wird. Indess ist dies Problem noch nicht gelöst. Namentlich bemerken wir, dass die in dem Artikel: Quadraturen (Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungenen auf —) in Abschnitt 22) gegebene Methode hier nicht ausreicht.

Ist aber das Gesetz der Verdichtung und Verdünnung im Innern gegeben, so lässt sich das Problem lösen.

Sei nämlich $\vartheta = \varphi$ eine in Bezug auf x, y, z grade Function, welche das Gesetz der Verdichtung ausdrückt, so muss $\Delta^2 \varphi = 0$ sein.

Aus den Werthen von u, v, w folgt nun leicht:

$$\vartheta = \varphi = C_0 + 2\varepsilon\Sigma\Sigma pf E C_1 C_2 + 2\varepsilon\Sigma\Sigma qg E_1 C_2 C + 2\varepsilon\Sigma\Sigma rh E_2 C C_1,$$
$$C_0 = f_0 + g_0 + h_0.$$

Wenn man bezüglich $x = a$, $y = b$, $z = c$ setzt, kommt dann:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_a = 2\varepsilon\Sigma\Sigma p^2 f G_{(a)} C_1 C_2$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_b = 2\varepsilon\Sigma\Sigma q^2 g G_{1(b)} C_2 C$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_c = 2\varepsilon\Sigma\Sigma r^2 h G_{2(c)} C C_1.$$

Bei diesen Gleichungen reicht nun die Methode, welche oben erwähnt worden ist, zur Bestimmung der Coefficienten aus und zwar ergibt:

$$f = \frac{P}{2\varepsilon p^2 G_{(a)}}, \quad g = \frac{Q}{2\varepsilon q^2 G_{1(b)}}, \quad h = \frac{R}{2\varepsilon r^2 G_{1(c)}},$$

wo zu setzen ist:

$$P = \frac{1}{4bc} \int_{-b}^{b} \int_{-c}^{c} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_a C_{1(\beta)} C_{2(\gamma)} \, d\beta \, d\gamma$$

$$Q = \frac{1}{4ca} \int_{-c}^{c} \int_{-a}^{a} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_b C_{2(\gamma)} C_{(\alpha)} \, d\gamma \, d\alpha$$

$$R = \frac{1}{4ab} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right)_c C_{(\alpha)} C_{2(\beta)} \, d\alpha \, d\beta$$

und wegen $\vartheta = \varphi$ erhält man:

$$C_0 = \frac{1}{8abc} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \int_{-c}^{c} q \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Indess bleibt noch übrig, die Convergenz der Doppelsumme zu prüfen, eine Aufgabe, welche auch in andern Fällen, die zu ähnlichen Resultaten führen, noch ihre Auflösung erwartet.

Digitized by Google

Was das directe Problem anbetrifft, so gelingt die Bestimmung der Coefficienten von 3) nur in dem Falle, wo φ_1, φ_2, φ_3 Constanten sind. Dann ist $f = g = h = 0$, und es bleibt nur:

$$u = f_0 x, \qquad v = g_0 y, \qquad w = h_0 z,$$
$$C_1 = B_1 = B = 0, \qquad \vartheta = f_0 + g_0 + h_0 + c_0$$
$$\lambda c_0 + 2\mu f_0 = \varphi_1, \qquad \lambda c_0 + 2\mu g_0 = \varphi_2, \qquad \lambda c_0 + 2\mu h_0 = \varphi_3,$$

also:

$$c_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}{3\lambda + 2\mu}, \qquad f_0 = \frac{\varphi_1 - \lambda c_0}{2\mu}$$
$$g_0 = \frac{\varphi_2 - \lambda c_0}{2\mu}, \qquad h_0 = \frac{\varphi_3 - \lambda c_0}{2\mu}.$$

Allen inneren Punkten entspricht dann dasselbe Elasticitätsellipsoid und gleiche Hauptelasticitäten.

Von den Schwierigkeiten, welche das Gleichgewicht eines elastischen Parallelepipedons darbietet, ist die Theorie der Schwingungszustände frei, mit welcher wir uns jetzt zu beschäftigen haben.

Wir denken uns den Anfangspunkt der Coordinaten in einer Ecke des Parallelepipedons, die Axen wieder den Seiten parallel, die wir gleich a, b, c setzen. Es sind dann die Gleichungen der Seitenflächen bezüglich:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Die Gleichungen 3) des vorigen Abschnittes sind zu integriren. Wir wollen zunächst annehmen, dass v und w auf dem ganzen Körper verschwinden, dann hat man:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \quad (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad (\Omega^2 - \omega^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.$$

Es ist also $\frac{\partial u}{\partial x}$ von y und z unabhängig, d. h.:

$$u = U + U_0,$$

wo U eine Function von x und t, U_0 eine solche von t, y und z ist. Die erste unserer Gleichungen zerfällt dann in zwei andere:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} = \omega^2 \left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}\right).$$

Die erstere gibt die longitudinalen, die letztere die transversalen Schwingungen.

Beschäftigen wir uns zunächst mit den longitudinalen Schwingungen.

Um sie zu erreichen müssen Anfangsbewegungen parallel der Längenrichtung erregt werden, also $B = C = C_1 = 0$ sein. Ist der Körper an den Enden frei und in der Mitte fest, so hat man ein particuläres Integral von der Gestalt:

$$U = \cos(2s+1)\frac{\pi x}{a} \cos(2s+1)\frac{\pi \Omega t}{a},$$

wo s eine beliebige ganze Zahl ist; in der That ist dieser Ausdruck der Null gleich für $x = \frac{a}{2}$, und verificirt die Differenzialgleichung, auch ist

$$B = C = C_1 = 0.$$

Die Ausdrücke A, B_1, C_2 enthalten:

$$\sin(2s+1)\frac{\pi x}{a}$$

als Factor, sie verschwinden also für $x = 0$ und $x = a$ hier, d. h. an den zwei Seitenwänden, welche die Längenrichtung begrenzen, sind die elastischen Kräfte gleich Null, und der Werth von U zeigt, dass hier die Schwingungsamplitüde ein Maximum ist.

Die Höhe des Tones h ist dem umgekehrten Werthe der Periode gleich, also:

$$h = (2s+1)\frac{\Omega}{2a}.$$

Die Anzahl der Knoten ist $2s+1$. Das Verhältniss der verschiedenen Töne,

welche die Saite überhaupt geben kann, ist $1:3:5\ldots$

Sind dagegen beide Enden der Saite befestigt, so ist zu setzen:

$$U = \sin\frac{s\pi x}{a}\cos s\pi\frac{\Omega t}{a}$$

wie sich leicht verificiren lässt; auch hier ist überall: $C_1 = C = B = 0$,

$$A = \frac{c\pi}{a}\cos\frac{c\pi x}{a}\cos\frac{c\pi\Omega t}{a};$$

für $x = c$ und $x = a$ hat diese Grösse ein Maximum der Intensität, sie misst den Druck auf die Befestigungsvorrichtung:

$$h = \frac{s\Omega}{2a}.$$

Es sind also $s-1$ Knoten, und die Töne verhalten sich wie $1:2:3\ldots$

Was jetzt die transversalen Schwingungen anbetrifft, so ist für dieselbe:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} = \omega^2\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}\right).$$

Diese Gleichung ist mit der für die elastische Platte identisch.

Somit führt die Aufgabe auch zu denselben Resultaten, wenn man annimmt, dass die seitliche Begrenzung des Körpers fest ist. Nehmen wir aber an, dass die Flächen $x = 0$ und $x = a$ frei sind, so ist eine solche Bewegung unmöglich, denn da $v = w = 0$ ist, so ist in diesen Flächen die Componente der elastischen Kraft bezüglich gleich:

$$0,\ \mu\frac{\partial U_0}{\partial y},\quad \mu\frac{\partial U_0}{\partial z},$$

also diese elastische Kraft ist in diesen Flächen denselben parallel, was unmöglich ist, wenn eine Schwingung senkrecht auf denselben, wie hier, erfolgen soll. Es ist also:

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0,$$

was auch y und z seien. Dann wäre aber auch $U_0 = 0$ und es fände keine Bewegung statt. Man muss also in diesem Falle von der Bedingung, dass $v = w = 0$ sind, absehen.

Nehmen wir an, nur v verschwände, so ist:

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

da die Schwingung transversal ist, also keine Verdichtung stattfindet (Abschnitt 5).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \omega^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right].$$

Sei α eine neue Function, so gibt die erste Gleichung:

$$u = -\frac{\partial\alpha}{\partial z},\quad w = \frac{\partial\alpha}{\partial x},\quad v = 0$$

und die beiden andern nehmen die Gestalt an:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = \omega^2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right).$$

Auf den Grenzflächen, welche wir uns frei denken, soll die elastische Kraft senkrecht sein, d. h.:

$$C_1 = \mu\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$C = \mu\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right) = 0,$$

$$B = -\mu\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Also der partiellen Differenzialgleichung wird genügt, wenn α die Gleichungen erfüllt:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} = 2\omega^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}.$$

Die particulären Integrale haben hier die Form:

$$\alpha = s\cos mx\cos mz\cos(mt\omega\sqrt{2}),$$

$$u = ms\cos mx\sin ms\cos(mt\omega\sqrt{2}),$$

$$w = -ms\sin mx\cos mz\cos(mt\omega\sqrt{2}).$$

Sind zwei parallele Grenzflächen so eingeengt, dass daselbst keine Verschiebung in der Axe der z möglich ist, so muss $w = 0$ sein, also $m = \frac{s\pi}{a}$ wo s eine ganze Zahl ist. Dann ist:

$$h = \frac{s\omega}{a\sqrt{2}}$$

die Anzahl der Knoten $s-1$, die Folge der Töne $1, 2, 3\ldots$

Die hier durch die Werthe von u und w gegebenen Schwingungen haben die Eigenschaft, dass überall die Hauptelasticitäten den Seiten des Prisma parallel sind, auch folgt daraus leicht, dass die Schwingungen dieselben sind, als wenn man das Prisma in der Mitte durchschnitte, diese Mitte befestigte, und das andere Ende frei liesse, unter der Bedingung, dass man der Zahl s nur

Digitized by Google

ungrade Werthe gibt, welche für $x = a$, $u = 0$ geben. Die Töne sind also dann die den Zahlen 1, 3, 5 ... aus der obigen Reihe entsprechenden.

Sei jetzt in den allgemeinen Werthen von u und w $s = 1$, so hat man:

$$u = \frac{\pi s}{a} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi z}{a},$$

$$w = -\frac{\pi s}{a} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi z}{a}.$$

Denkt man sich das Prisma in der Mitte eingespannt, an beiden Seiten frei, so kommt:

$$u = ms \sin mx \sin mz \cos(mt\omega\sqrt{2}),$$

$$w = ms \cos mx \cos mz \cos(mt\omega\sqrt{2}),$$

$$m = (2s+1)\frac{\pi}{a};$$

für $s = 1$ erhält man hieraus die sogenannten drehenden Schwingungen, welche eine einzige Knotenlinie parallel der Länge des Körpers haben.

Es kommt bei gewissen Körpern vor, z. B. bei Glasplatten, dass wenn man sie in der Mitte reizt, so dass longitudinale Schwingungen entstehen, gleichzeitig Transversalschwingungen von gleicher Schwingungsdauer erzeugt werden, in diesem Falle müssen die entsprechenden Werthe von u gleiche Periode haben, d. h. es muss sein:

$$m = (2s+1)\frac{\pi}{a}\frac{\Omega}{\omega\sqrt{2}}.$$

Was jetzt die allgemeine Aufgabe anbetrifft, wo u, v, w alle drei nicht verschwinden, so führen wir wieder die oben angewandten Bezeichnungen ein. Dann kann man für diejenigen Schwingungen, deren Periode von Ω herrührt, ganz allgemein setzen:

$$H = -CC_1C_2T = -U,$$

wo

$$T = \cos\gamma t, \quad \gamma = \Omega\sqrt{m^2+n^2+l^2} = n\Omega\sqrt{\frac{s^2}{a^2}+\frac{s_1^2}{b^2}+\frac{s_2^2}{c^2}} = k\Omega,$$

also:

$$u = mSC_1C_2T, \quad v = nCS_1C_2T, \quad w = lCC_1S_2T, \quad \vartheta = k^2U.$$

$$A = (\lambda k^2 + 2\mu m^2)\,U, \qquad \frac{C_1}{2\mu} = -nlCS_1S_2T$$

$$B_1 = (\lambda k^2 + 2\mu n^2)\,U, \qquad \frac{C}{2\mu} = -mlSC_1S_2T$$

$$C_2 = (\lambda k^2 + 2\mu l^2)\,U, \qquad \frac{B}{2\mu} = -mnSS_1C_2T$$

Noch war

$$S_{(a)} = S_{1(b)} = S_{2(c)} = 0$$

gezeigt. Es sind nunmehr die den Seitenflächen parallelen Componenten auf denselben der Null gleich, wie dies bei den Schwingungen überhaupt anzunehmen. Ferner sind die Schwingungen auf der Oberfläche auf den Seitenflächen parallel, da für $x = \pm a$, $u = 0$, für $y = \pm b$, $v = 0$, für $z = +c$, $w = 0$ sein muss. Endlich ist die Ausdehnung ϑ derart, dass das Volum des ganzen Prisma unverändert bleibt. Es ist nämlich:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} U\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Was die Höhe des Tones anbetrifft, so ist:

$$h = \frac{\Omega}{2}\sqrt{\frac{s^2}{a^2}+\frac{s_1^2}{b^2}+\frac{s_2^2}{c^2}}.$$

Man sieht, dass es unendlich viel Reihen von Tönen gibt; der tiefste davon ist:

$$h = \frac{\Omega}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}.$$

Dieser wird unendlich gross, wenn die Seiten des Prisma unendlich klein werden.

Was die von w abhängigen Schwingungen anbetrifft, so ist:

Digitized by Google

$$\xi = pCS_1S_2T_1, \qquad \eta = qSC_1S_2T_1, \qquad \zeta = rSS_1C_2T_1$$

$$T_1 = \cos\gamma_1 t, \qquad \gamma_1 = \omega\sqrt{m^2+n^2+l^2} = \pi\omega\sqrt{\frac{s^2}{a^2}+\frac{s_1^2}{b^2}+\frac{s_2^2}{c^2}}$$

$$u = PSC_1C_2T_1, \qquad v = QCS_1C_2T_1, \qquad w = RCC_1S_2T_1$$

$$\vartheta = 0, \qquad P = lq - wr, \qquad Q = mr - lp, \qquad R = np - mq.$$

$$\frac{A}{2\mu} = mPCC_1C_2T_1, \qquad \frac{C_1}{\mu} = -(lQ+nR)\,CS_1S_2T_1$$

$$\frac{B_1}{2\mu} = nQCC_1C_2T_1, \qquad \frac{B_1}{\mu} = -(mR+lP)\,SC_1S_2T_1$$

$$\frac{C_2}{2\mu} = lRCC_1C_2L_1, \qquad \frac{B}{\mu} = -(nP+mQ)\,SS_1C_2T_1.$$

Man gelangt zu denselben Schlüssen wie im vorigen Fall, nur dass die Ausdehnung überall verschwindet.

Dieser Artikel ist im wesentlichen ein Auszug aus Lamé's: *Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.*

Daselbst sind noch behandelt: Die Schwingungen und Gleichgewichtszustände des Cylinders, der Kugel und der Kugelschale.

Ein neueres Werk über Elasticität ist das von Klebsch: „Theorie der Elasticität". Untersuchungen über elastische Linien und Flächen enthält Poissons Mechanik.

Noch erwähnen wir zweier Abhandlungen von Lorenz in Crelles Journal, Band 58. und 59.

Schwingungen der Luft.

1) Gleichungen der Bewegung.

Die kleinen Bewegungen der luftförmigen Körper geben so wie die der festen Körper zu der Entstehung von Tönen Veranlassung; und im Uebrigen dient die Luft zur Fortpflanzung der Schallwellen. Um die Gleichungen dieser Bewegung zu finden, ist von den allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen auszugehen.

Sind X, Y, Z die auf einen Punkt der Flüssigkeit wirkenden Kräfte, ϱ seine Dichtigkeit, p der Druck, so gibt das Prinzip der gleichmässigen Fortpflanzung des Druckes nach allen Richtungen die Gleichung:

A)
$$\varrho(X-U) = \frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\varrho(Y-V) = \frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\varrho(Z-W) = \frac{\partial p}{\partial z},$$

wo U, V, W die Zunahmen der Geschwindigkeiten des betreffenden Punktes sind. Diese Grössen und die Geschwindigkeiten selbst, die wir mit u, v, w bezeichnen, sind Functionen der Zeit und der Anfangscoordinaten, sie können aber auch, wie hier geschehen soll, als Functionen der Zeit und der augenblicklichen Coordinaten x, y, z des betreffenden Elements betrachtet werden, wo indess x, y, z selbst wieder Functionen der Zeit sind, da sich der Ort des Elementes mit der Zeit ändert. Es ist also:

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt},$$

$$U = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für V und W.

Von den Grössen X, Y, Z wollen wir, wie dies ja immer geschehen kann, wenn von festen Centren ausgehend, Anziehungen und Abstossungen auf den Körper wirken, annehmen, dass sie die partiellen Differenzialquotienten einer Function F bezüglich nach x, y, z seien, welche die Zeit selbst nicht enthält; gleichzeitig soll angenommen werden, dass auch u, v, w die Differenzialquotienten einer Function φ nach x, y, z seien, welche jedoch auch die Zeit t enthalten muss. Die Bedingungen unter welchen die letztere Annahme statt hat, werden sogleich gegeben werden. Dann ist:

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$U = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial x},$$

eben so erhält man:

Digitized by Google

$$V = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial t} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial z},$$

wo

$$M = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2$$

zu setzen ist.

Setzt man diese Werthe in die Bewegungsgleichungen A), multiplicirt dieselben bezüglich mit dx, dy, ds und addirt sie, so kommt:

$$1) \qquad dF - d\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right) - \tfrac{1}{2}dM - \frac{dp}{\varrho}.$$

Die Grösse φ bezeichnet Helmholz als Geschwindigkeitspotenzial.

Die Umstände, unter welchen ein Geschwindigkeitspotenzial vorhanden ist, lassen sich leicht übersehen.

Finde ein solches zu irgend einer Zeit t statt, so nehmen im nächsten Zeittheilchen $x + \varepsilon$ die Grössen u, v, w die Gestalt an:

$$u' = u + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}, \quad v' = v + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$w' = w + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Da nun zur Zeit t die Gleichung 1) gelten muss, und man ausserdem hat:

$$d\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial v}{\partial t}dy + \frac{\partial w}{\partial t}dz,$$

so ist:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial v}{\partial t}dy + \frac{\partial w}{\partial t}dz\right) = -\frac{dp}{\varrho} - \tfrac{1}{2}dM + dF.$$

Es ist also die Grösse links ein vollständiges Differenzial einer Function von x, y, z, wenn wie die bei den luftförmigen ebenso wie bei den unzusammendrückbaren Flüsigkeiten der Fall ist, ϱ eine Function von p ist. Da nun auch zu der betrachteten Zeit

$$udx + vdy + wdz$$

ein vollständiges Differenzial war, so ist dies auch mit

$$u'dx + v'dy + w'dz$$

der Fall, also es gibt auch im nächsten Momente ein Geschwindigkeitspotenzial, und aus eben dem Grunde für den folgenden und allgemein für jede Zeit. Dies ist ein wichtiger Satz, von dem Lagrange der Urheber ist. Er lautet:

„Sind zu irgend einer Zeit, also etwa im Anfange der Bewegung die Geschwindigkeiten u, v, w die Differenzialquotienten einer Function q nach x, y, z, so sind sie dies zu jeder Zeit."

Dies findet z. B. statt, wenn im Anfange die Geschwindigkeit Null, also $u = v = w = 0$ ist.

Die Gleichung 1) ist aber nicht zur Bestimmung der Bewegung flüssiger Körper ausreichend.

Um eine zweite Gleichung zu haben, betrachten wir die Dichtigkeitsänderung in einem elementaren Parallelepipedon, dessen Seiten bezüglich gleich dx, dy, ds sind.

In einem Zeittheile dt werden die einzelnen Massenelemente sich parallel der Axe der x um die Grösse udt heben, und somit durch die untere Grundfläche $dy\,dz$, $\varrho u dt\, dy\, ds$ solcher Elemente in das Parallelepipedon eintreten und eine Vermehrung der darin enthaltenen Masse von dieser Grösse erfolgen, dagegen treten durch die obere Grundfläche $dy\,dz$:

$$\varrho u dt\, dy\, ds + \frac{\partial \varrho u}{\partial x}dx\, dt\, dy\, dz$$

Theilchen aus dem Parallelepipedon heraus, es resultirt also die Vermehrung

$$-\frac{\partial \varrho u}{\partial x}dt\, dx\, dy\, ds.$$

Die entsprechenden Grössen für die anderen Grenzflächen ergeben sich ebenso:

$$-\frac{\partial \varrho v}{\partial y}dt\, dx\, dy\, ds,$$

$$-\frac{\partial \varrho w}{\partial z}dt\, dx\, dy\, ds.$$

Dividirt man alle drei durch $dx\,dy\,dz$, so ist die Summe die Verdichtung des Parallelepipedons in der Zeit dt, und diese Grösse ergibt sich direct gleich: $\frac{\partial \varrho}{\partial t}dt$, so dass man hat:

$$2) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z} = 0.$$

Es bleibt noch übrig, die Beziehung zwischen ϱ und p zu finden.

Wir haben es hier mit einem luftförmigen Körper zu thun. Das Mariotte'sche Gesetz würde geben $p = k\varrho$, wenn bei der Verdichtung keine Wärmeänderung entstände. Diese aber ist hier in Betracht zu ziehen.

Sei zunächst das Gas im Gleichgewicht und von constanter Temperatur ϑ, ϱ_0 seine constante Dichtigkeit, p_0 seine elastische Kraft, so ist, wenn man die Dichtigkeit des Quecksilbers als Einheit

nimmt, h die Höhe des Quecksilbers, g die Beschleunigung der Schwere ist,

$$p_0 = gh.$$

Während der Bewegung sei nun γ die Verdichtung des Gases, also:

$$\varrho = \varrho_0 (1+\gamma)$$

und wenn die Temperatur τ constant bliebe:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho}{\varrho_0} = 1+\gamma \text{ also } p = gh(1+\gamma).$$

Durch die Verdichtung erfolgt aber eine Wärmezunahme ϑ, die man proportional der Verdichtung γ annehmen kann, es ist also

$$\vartheta = A\gamma.$$

Um die Grösse A zu ermitteln, sei α der Ausdehnungscoefficient, c die specifische Wärme des Gases bei constantem Druck, c_1 die bei constantem Volum. Es ergibt sich dann, (vergleiche den Artikel: Wärmelehre):

$$\alpha\vartheta = \gamma\left(\frac{c}{c_1} - 1\right).$$

Nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze aber ist:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{D(1+\gamma)\,[1+\alpha(\tau+\vartheta)]}{D(1+\alpha\tau)},$$

oder, wenn man die höheren Potenzen von α vernachlässigt:

$$p = gh(1+\gamma+\alpha\vartheta) = gh\left(1+\gamma\frac{c}{c_1}\right),$$

woraus dann folgt:

$$\frac{dp}{\varrho} = \frac{ghc}{Dc_1}\frac{d\gamma}{1+\gamma}.$$

Setzt man dies in die Gleichung 1) und integrirt, so kommt:

$$\frac{ghc}{Dc_1}\lg(1+\gamma) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \tfrac{1}{2}M,$$

wenn die äusseren Kräfte x, y, z gleich Null sind.

Sind die Geschwindigkeiten wie hier sehr klein, so kann man die Quadrate von $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ und somit M vernachlässigen und $\gamma = \lg(1+\gamma)$ setzen:

$$\frac{ghc}{Dc_1}\gamma = -\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

oder wenn $\frac{ghc}{Dc_1} = a^2$ gesetzt wird:

$$3) \qquad \gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Die Gleichung 2) aber wird, wenn man $\varrho = \varrho_0(1+\gamma)$ setzt:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[(1+\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1+\gamma)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] = 0,$$

oder wenn man für γ einsetzt, und wie oben $M = 0$ nimmt:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

Dies ist die Gleichung für die kleinen Bewegungen luftförmiger Körper; man kann sie auch, wenn man wie im vorigen Artikel die Bezeichnung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta^2$$

einführt:

$$4) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta^2\varphi.$$

Die Gleichung ist dieselbe, wie die in Abschnitt 5) des vorigen Artikels gefundene Formel 5), welche die Verbreitung der longitudinalen Schwingungen in einem festen Mittel von constanter Elasticität gab; es ist dann für Ω, a, für φ, F zu setzen. F war die Function, deren Differenzialquotienten nach x, y, z die Verschiebungen irgend eines Elementes waren, und diese sind also für die Geschwindigkeiten u, v, w zu substituiren.

2) Schwingungen der Luft in einer cylindrischen Röhre.

In einer engen cylindrischen Röhre kann angenommen werden, dass sich die Elemente nur parallel der Cylinder-Axe verschieben, die wir als Axe der x annehmen, indem die Elemente, welche der Cylinderoberfläche angehören, auf derselben zu bleiben genöthigt sind. Es wird dann die Grösse φ von y und z unabhängig, und man hat:

$$1) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},$$

wo

$$\gamma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

ist. Es ist dies dieselbe Gleichung, welche in Abschnitt 1) die Bewegungen einer elastischen Saite gab; es könnte somit auf die dort gegebenen Resultate verwiesen werden. Indess ist bei gasförmigen Körpern eine grössere Auswahl in den Anfangs- und Grenzbedingungen

möglich, weshalb es angemessen scheint, die Aufgabe hier selbstständig noch einmal zu behandeln.

Wir werden also die Grenzbedingungen hier auf verschiedene Weise bestimmen.

A) Die Röhre sei nach beiden Richtungen unendlich. Es ist dann nur noch nöthig die Anfangszustände zu bestimmen. Sei

$$2)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \psi(x),\quad \gamma = \chi(x) \text{ für } t = 0.$$

Es sind also ψ und χ die anfängliche Geschwindigkeit und Verdichtung.

Das allgemeine Integral der Gleichung 1) ist:

$$\varphi = F(x+at) + f(x-at)$$

und man hat also für $t = 0$:

$$F'(x) + f'(x) = \psi(x)$$
$$F'(x) - f'(x) = -a\chi(x),$$

woraus sich ergibt:

$$a)\quad F'(x) = \frac{\varphi(x) - a\chi(x)}{2},$$

$$f'(x) = \frac{\varphi(x) + a\chi(x)}{2}.$$

f' und F' sind also völlig bekannte Functionen, und man hat:

$$b)\quad u = f'(x-at) + F'(x+at)$$
$$a\gamma = f'(x-at) - F'(x+at).$$

Möge sich jetzt die anfängliche Erschütterung nicht über die ganze Röhre, sondern nur über eine Strecke von $x = 0$ bis $x = l$ erstrecken, so ist:

$\psi(x) = \chi(x) = 0$ für $x < 0$ und $x > l$.

Sei zunächst $x > l$, so ist auch $x + at > l$ und wegen der Werthe von $F'(x)$ und $f'(x)$, $F'(x+at) = 0$; es ist also allgemein:

$$u = f'(x+at),\quad a\gamma = f'(x-at),$$

also:

$$u = a\gamma.$$

Diese Ausdrücke verschwinden nur dann nicht, wenn:

$$0 < x - at < l$$

ist, d. h. wenn t zwischen $\frac{x-l}{a}$ und $\frac{x}{a}$ liegt. In diesem Zeitraume allein ist also das in Rede stehende Element in Bewegung. Dieselbe dauert eine Zeit $\frac{1}{a}$ hindurch und pflanzt sich der Richtung der Röhrenaxe nach mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{l}{t} = a$ fort. Man hat es mit anderen Worten mit einer longitudinalen Welle zu thun, und l ist die Wellenlänge.

Sei jetzt $x < 0$, so ist:

$$f'(x-at) = 0,$$

also:

$$u = F'(x+at),\quad a\gamma = -F'(x+at)$$
$$u = -a\gamma.$$

Es muss aber, wenn dieser Ausdruck nicht der Null gleich sein soll, sein:

$$0 < x + at < l,$$

d. h. t liegt zwischen $-\frac{x}{a}$ und $\frac{l-x}{a}$. Die Resultate sind wie oben, nur schreitet die Welle in Richtung der negativen x fort.

Sei endlich $0 > x > l$; es werden dann beide Glieder von u und γ nicht Null, so lange $x - at < l$ und $x + at > l$ ist. Findet nur eine dieser ungleichen Zeiten statt, so wird der entsprechende Theil von u und γ verschwinden. Man sieht also, dass beide Wellen, die mit negativer und die mit positiver Geschwindigkeit diesen Theil der Röhre durchlaufen. Auch sieht man sehr leicht, dass eine der beiden Wellen überhaupt nicht zur Entstehung komme, wenn die Bedingung:

$$\psi(x) \mp a\chi(x) = 0$$

zwischen den Functionen ψ und χ für jeden Werth von x zwischen 0 und l stattfindet.

B) Die Röhre gehe nach einer Seite hin ins Unendliche und sei nach der andern durch eine feste Ebene geschlossen.

Die feste Ebene möge den Abscissenwerth $x = 0$ haben. Zu den Bedingungen des vorigen Falles kommt noch die, dass die Elemente, welche diese feste Ebene berühren die Geschwindigkeit Null haben. Es ist also:

$$3)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \text{ für } x = 0,$$

während die Gleichungen 1) und 2) richtig bleiben. Die Functionen $\psi(x)$ und $\chi(x)$ sind jetzt nur für positive x gegeben.

Das allgemeine Integral:

$$\varphi = F(x+at) + f(x-at)$$

gibt nun wegen Gleichung 3):

$$F'(at) + f'(-at) = 0,$$

für jeden Werth von t, somit also:

$$F'(s) + f'(-s) = 0.$$

Während die Gleichungen a) nur die Werthe von $F'(x)$ und $f'(x)$ für posi-

tives x geben, gilt diese Gleichung hier für negatives x; offenbar hat man nämlich:

c) $$F'(-x) = -f'(x),$$
$$f'(-x) = -F'(x).$$

Wollte man die Werthe von u und γ ermitteln, welche vermöge dieser Formeln in den Punkten in der nach der andern Seite der festen Wand verlängert gedachten Röhre sich ergeben, so würde mittels der Formel c) folgen, dass zwei Schnitte, welche gleich weit von der Wand entfernt sind, gleiche Verdichtungen und gleiche aber entgegengesetzte Geschwindigkeiten zu jeder Zeit haben. Nimmt man dies an, so kann man sich die Röhre nach beiden Seiten unendlich denken.

Erstreckt sich also die anfängliche Erschütterung nur auf einen Theil der Röhre zwischen den Abscissen a und $a+l$, so wird man eine gleiche aber entgegengesetzte Erschütterung zwischen den Abscissen $-a$ und $-a-l$ sich zu denken haben, von jedem dieser Räume gehen, wie oben gezeigt zwei Wellen mit den Geschwindigkeiten $+l$ und $-l$ aus und aus diesen vier Wellen setzt sich die Bewegung in der Röhre zusammen.

C) Die Röhre gehe nach einer Seite hin ins Unendliche, nach der andern ende sie, sei aber offen.

Da am offenen Ende die in der Röhre befindliche Luft mit der äusseren in Berührung steht, so wird daselbst jede erfolgende Verdichtung sich wieder ausgleichen. Statt der Gleichung 3) hat man also die folgende:

4) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ für } x = 0.$$

Die Grössen ψ und χ sind wieder für negatives x willkürlich.

Der allgemeine Werth von φ gibt aber wegen Gleichung 4) jetzt:

$$F'(at) = f'(-at),$$

d) also: $$F'(-x) = f'(x),$$
$$f'(-x) = F'(x),$$

wodurch die Functionen auch für negatives x bestimmt sind, also u und γ immer bekannt ist.

Aus dem Vergleiche mit dem Falle A) folgt hieraus, dass man sich die Röhre nach beiden Seiten unendlich denken kann, wenn man den Anfangszustand so bestimmt, dass in den beiden Punkten vom Anfangspunkte sich die Luft gleich weit entfernt, mit derselben Geschwindigkeit bewegt, aber so, dass einer Verdichtung γ in dem einen Punkte, eine gleiche Verdünnung $-\gamma$ im andern entspricht. Es setzt sich dann die Bewegung wieder aus vier Wellen zusammen, von denen je zwei im Anfangspunkte sich immer derart ausgleichen, dass die Verdichtung Null ist

D) Die Röhre sei nach beiden Richtungen begrenzt und geschlossen.

Die Grenzbedingungen sind in diesem Falle, wenn l die Länge der Röhre ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \psi(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -a^2 \chi(x) \text{ für } t = 0.$$

Die Aufgabe lässt sich leicht auf die in Abschnitt 3) des vorigen Artikels zurückführen.

Man hat, wie leicht zu sehen, die Gleichungen:

$$F'(x) + f'(-x) = 0,$$
$$F'(l+x) + f'(l-x) = 0$$

für beliebiges x,

$$F'(x) + f'(x) = \psi(x),$$
$$-F'(x) + f'(x) = a\chi(x),$$

so lange x zwischen Null und l liegt. Es folgt leicht, dass F' und f' die Periode $2l$ haben; u und γ, die sich durch die Gleichungen:

$$u = F'(x+at) + f'(x-at)$$
$$a\gamma = -F'(x+at) + f'(x-at)$$

ergeben, haben die Periode $\frac{2l}{a}$. Wendet man die Fourrier'schen Reihen an, so ist:

$$u = \frac{2}{l} \Sigma \sin \frac{n\pi x}{l} \left(a \sin \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \cos \frac{n\pi \alpha}{l} \, d\alpha + \cos \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \sin \frac{n\pi \alpha}{l} \, d\alpha \right)$$

$$\gamma = \frac{2}{l} \Sigma \cos \frac{n\pi x}{l} \left(\cos \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \cos \frac{n\pi \alpha}{l} \, d\alpha \right.$$
$$\left. - \frac{1}{a} \sin \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \sin \frac{n\pi \alpha}{l} \, d\alpha \right).$$

Digitized by Google

Die Periode $\frac{2l}{a}$ ist doppelt so gross, als die Schwingungsdauer einer Luftwelle von der Länge l der Röhre, und da sich die Schwingungsdauer wie die Wellenlänge verhält, so macht die Luft in der Röhre Schwingungen, die an Dauer der einer Welle von der doppelten Röhrenlänge entsprechen. — Bemerkt man, dass jedes Glied der Fourrier'schen Reihe eine pendelartige Schwingung und somit einen Ton gibt, so sieht man, dass ausser dem Grundton, dessen Schwingungsdauer $2l$ ist, noch die Töne zur Entstehung kommen können, deren Schwingungsdauer, bezüglich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... des Grundtons ist (Octave, Duodecime, zweite Octave u. s. w.), ganz wie im vorigen Abschnitte.

E) Die Röhre sei nach beiden Seiten begrenzt, aber offen.

Es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Es kommt für jedes x:

$$F'(x) = f'(-x), \quad F'(l+x) = f'(l-x);$$

aus der letzten Gleichung folgt, wenn man $x + l$ für x setzt:

$$F'(2l+x) = f'(-x) = F'(x).$$

Es haben also wieder u und γ die Periode $\frac{2l}{a}$ und sind völlig bekannt.

Bei der Anwendung der Fourrier'schen Reihen folgt leicht:

$$u = \frac{2}{l} \Sigma \cos \frac{n\pi x}{l} \left(-a \sin \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l} d\alpha + \cos \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{l} d\alpha \right)$$

$$\gamma = \frac{2}{l} \Sigma \sin \frac{n\pi x}{l} \left(\cos \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l} d\alpha + \frac{1}{a} \sin \frac{an\pi t}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{n\pi\alpha}{l} d\alpha \right).$$

Die Schlüsse sind dieselben wie im vorigen Falle.

F) Die Röhre sei nach einer Seite geschlossen, nach der andern offen.

Man hat dann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ für } x = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ für } x = l,$$

also:

$$F'(x) + f'(-x) = 0,$$
$$F'(l+x) = f'(l-x).$$

Wird in der letzten Gleichung $x + l$ für x gesetzt, so kommt:

$$F'(2l+x) = f'(-x) = -F'(x)$$

und hieraus:

$$F'(4l+x) = F'(x).$$

Die Periode ist also in diesem Falle $4l$ für u und $\frac{4l}{a}$ für γ, also die, welche einer Welle von der vierfachen Länge der Röhre entspricht.

Führt man Fourrier'sche Reihen ein, so ist zunächst zu setzen:

$$\varphi = \Sigma \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left(A \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + B \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right).$$

Diese Gleichung genügt allen Bedingungen mit Ausnahme des Anfangszustandes. Damit diese Bedingungen auch erfüllt seien, ist zu setzen:

$$\Sigma B \cos (2n+1) \frac{\pi x}{2l} = \psi(x)$$

$$\Sigma A \sin (2n+1) \frac{\pi x}{2l} = -a\chi(x).$$

Diese Reihen unterscheiden sich von den Fourrier'schen scheinbar dadurch, dass nur die ungraden Vielfachen des Arguments $\frac{\pi x}{2l}$ vorkommen.

Digitized by Google

Sollen die Coefficienten B und A bestimmt werden durch die gewöhnliche Methode, so muss also für jedes grade n $B_n = A_n = 0$ sein.

Setzen wir allgemein:

$$\Sigma C_s \cos \frac{s\pi x}{2l} = \psi(x),$$

so kommt:

$$C_s = \Sigma \int_0^{2l} \psi(\alpha) \cos \frac{s\pi\alpha}{2l} d\alpha.$$

Es lässt sich nun aus den obigen Beziehungen leicht zeigen, dass die Function $\psi(x)$ die Gleichung erfüllt

$$\psi(2l - x) = -\psi(x),$$

und in diesem Falle ist:

$$C_{2s} = 0, \quad C_{2s+1} = \frac{2}{l} \int_0^a \psi(\alpha) \cos \frac{(2s+1)\pi\alpha}{2l} d\alpha,$$

und aus diesem Grunde kann man setzen:

$$B = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l} d\alpha,$$

und auf ähnliche Weise:

$$A = -\frac{2a}{l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l} d\alpha,$$

wenn man wie hier hat:

$$\chi(2l - x) = \chi(x).$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$u = \frac{2}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left(-a \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{(2n+1)}{2l} \pi\alpha \, d\alpha \right.$$
$$\left. + \cos (2n+1) \frac{\pi at}{2l} \int_0^l \psi(\alpha) \cos \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l} d\alpha \right)$$

$$\gamma = \frac{2}{l} \Sigma \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left(\cos (2n+1) \frac{\pi at}{2l} \int_0^l \chi(\alpha) \sin \frac{(2n+1)}{2l} \pi\alpha \, d\alpha \right.$$
$$\left. + \frac{1}{a} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \int_0^l \psi(\alpha) \cos (2n+1) \frac{\pi\alpha}{2l} d\alpha \right).$$

Die Glieder haben bezüglich die Perioden

$$\frac{4l}{a}, \quad \frac{4l}{3a}, \quad \frac{4l}{5a} \ldots$$

Es können also ausser dem einer Welle von der vierfachen Röhrenlänge entsprechenden Grundton, noch die von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, . . . der entsprechenden Schwingungsdauer (Duodecime, grosse Terz der zweiten Octave u. s. w.) zur Entstehung kommen.

3) Schwingungen der Luft im unendlichen Raume.

Setzen wir den Raum als nach allen Richtungen unbegrenzt voraus, so lässt sich leicht ein Integral der allgemeinen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \varphi$$

bilden, welches den Anfangsbedingungen:

$$\varphi = f(x, y, z). \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(x, y, z) \text{ für } x = 0$$

genügt. Man erhält nämlich:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi F(u, v, w) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi f(u, v, w),$$

Digitized by Google

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$u = x + at\cos\vartheta, \quad v = y + at\sin\vartheta\cos\psi, \quad w = z + at\sin\vartheta\sin\psi.$$

Dies von Poisson herrührende Resultat ist abgeleitet in Abschnitt 20 des Artikels: Quadraturen — Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungen auf —). Statt dessen kann man auch schreiben:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int td\omega F(x+a\alpha t,\ y+a\beta t,\ z+a\gamma t) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int td\omega f(x+a\alpha t,\ y+a\beta t,\ z+a\gamma t,$$

wo $d\omega$ das Element einer mit Radius t vom Anfangspunkte aus beschriebenen Kugelfläche, α, β, λ die Cosinus der Winkel sind, welche der durch dies Element gehende Kugelradius mit den Axen macht.

Ist der Raum begrenzt, so wird ganz wie bei den festen elastischen Körpern, die Aufgabe weit schwieriger, indem von der Begrenzung aus die Wellenbewegungen reflectirt werden, und dadurch sehr verwickelte Erscheinungen entstehen können. — Nehmen wir jetzt an, dass die Anfangserschütterung nur in einem nach allen Richtungen unendlich kleinen Theile des Raumes stattfinde, dann ist überall ausserhalb dieses Theiles

$$f(x,y,z) = F(x,y,z) = 0.$$

Wir nehmen an, der Anfangspunkt der Coordinaten befände sich in dem anfänglich erschütterten Raume, so wird, damit eine Erschütterung zur Zeit t erfolge, sein müssen:

$$x = -at\alpha, \quad y = -at\beta, \quad z = -at\gamma$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2t^2,$$

also die Erschütterung findet zur Zeit t auf der Oberfläche einer Kugel statt, deren Radius at ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Erschütterung ist also gleich a, ganz wie in einer Röhre, und sie verbreitet sich nach allen Richtungen gleichmässig.

Die Gleichungen für die Schwingungen luftförmiger Körper sind in neuerer Zeit Gegenstand tief eingehender Untersuchungen gewesen. Namentlich muss erwähnt werden die schöne Arbeit von Riemann, worin er statt von den hier entwickelten abgekürzten Gleichungen, von den allgemeinen Hydrodynamischen, Abschnitt 1) (1 und 2) ausgeht. Helmholz hat die Theorie der Schwingungen der Luft in einer offenen Röhre unter der Voraussetzung behandelt, dass nicht, wie hier angenommen, am offenen Ende keine Verdichtung eintrete. Diese Bedingung findet sich in der Natur nämlich nur annäherungsweise erfüllt, da allerdings, wenn die Luft in der Röhre in Ruhe wäre, eine solche Ausgleichung erfolgen müsste bei schnellen, namentlich schwingenden Bewegungen dieselbe aber nicht vollständig eintreten kann, da sich der Zustand der Luft am offenen Ende fortwährend ändert.

Schwingungen des Aethers.

Da das Licht sein Entstehen den Schwingungen eines elastischen Mediums, des Aethers verdankt, so muss es möglich sein, aus den Grundgleichungen der Elasticität die Gesetze der Bewegung des Lichtes herzuleiten. Fresnel hat es zuerst unternommen, aus bekannten elementaren Eigenschaften des Lichtes die Gleichungen für die Bewegung des Aethers abzuleiten. Aus diesen hat er dann die Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in ein- und zweiaxigen Mitteln, die Gleichung der Wellenfläche u. s. w. abgeleitet. Indess gelang es nicht, auch aus diesen Gleichungen die Gesetze der Farbenzerstreuung zu ermitteln. Der Grund ist der, dass die Gleichungen der Elasticität unter der nur annäherungsweise richtigen Voraussetzung gebildet worden sind, dass gewisse Coefficienten constant sind (vergleiche den Artikel: Schwingungen elastischer Körper). Erst Cauchy, der diese Voraussetzung aufgab, fand auf diesem Wege die Gesetze der Farbenzerstreuung (*théorie de la dispersion de lumière*). Da die allgemeineren Cauchy'schen Gleichungen auch die übrigen von Fresnel gefundenen Resultate geben, so werden wir an einer anderen Stelle, in dem Artikel: „Licht" diesen Gegenstand behandeln.

Eine sehr elegante Entwickelung zur Herleitung der Gesetze des Lichtes, so weit sie Fresnel gefunden, gibt auch Lamé.

Da seine Gleichungen öfter gebraucht werden, so wollen wir sie hier entwickeln.

Der Umstand, dass zwei auf einander senkrecht polarisirte Lichtstrahlen nicht zu Interferenzerscheinungen führen, kann nur erklärt werden, wenn man annimmt, dass die Schwingungen des Aethers,

Digitized by Google

welche Lichterscheinungen geben, transversal sind, also die Dichtigkeit des Aethers nicht ändern.

Der Umstand ferner, dass ein zusammengedrückter Körper, z. B. Glas, doppelte Brechung des Lichtes erkennen lässt, zeigt, dass diese Erscheinung der ungleichen Elasticität in den verschiedenen Richtungen ihr Entstehen verdankt. Es kann also im Allgemeinen keine constante Elasticität des Aethers vorausgesetzt werden.

Die allgemeinen Gleichungen der Elasticität waren (vergl. den Artikel: Schwingungen elastischer Körper, Abschnitt 1)), wenn man von den äusseren Kräften absieht:

$$1)\qquad \frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial C_1}{\partial z}=\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C_1}{\partial y}+\frac{\partial C_2}{\partial z}=\varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Und die Spannungen A, B, B_1 ... hatten die gemeinschaftliche Form:

$$2)\quad H=M\frac{\partial u}{\partial x}+N\frac{\partial v}{\partial y}+P\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$+Q\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+R\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$+S\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Wie auch das Licht sich verbreite, so lässt es sich auf ebene Wellen zurückführen, aus denselben Gründen, welche im Artikel: Swingungen elastischer Körper, Abschnitt 5), angegeben sind. Diese Bewegungen werden also, wie alle periodischen Functionen durch trigonometrische Reihen ausgedrückt, von denen wir nur ein Glied betrachten, da die Coexistenz aller Glieder die zusammengesetzte Bewegung gibt. Wir setzen also ähnlich wie am angeführten Orte:

$$u=\xi G,\quad v=\eta G,\quad w=\zeta G,$$
$$G=\omega\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{q}{l}\right),$$
$$q=mx+ny+pz,\quad m\xi+n\eta+p\zeta=0,$$
$$\vartheta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Die letzte Gleichung, drückt aus, dass die Schwingungen transversal sind.

ω ist die Schwingungsamplitude, τ die Schwigungsdauer, l die Wellenlänge (d. h. die Entfernung zweier nächsten Punkte, welche gleiche Schwingungsphase haben). Es ist also $\frac{l}{\tau}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, q das Loth vom Anfangspunkt auf irgend eine ebene Welle, m, n, p die Cosinus seiner Winkel, mit den Axen, ζ, η, ξ diejenigen Winkel, welche die Schwingungsrichtung mit den Axen macht. Da die Schwingungen transversal sind, findet die vorletzte Gleichung statt

Der Ausdruck H, welcher die Spannungen gibt, nimmt mit Hülfe dieser Gleichungen die Gestalt an:

$$H=\frac{2\pi}{l}\nu\sigma,$$

wo zu setzen ist:

$$\sigma=\omega\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{q}{l}\right),$$
$$\nu=(mM+nS+pR)\xi+(mS+nN+pQ)\eta$$
$$+(mR+nQ+pP)\zeta.$$

Setzen wir die den Ausdrücken A, B_1, C_2, B, C, C_1 entsprechenden Werthe von ν bezüglich gleich a, b_1, c_2, b, c, c_1, so kommt wegen der Gleichungen 1), welche von diesen Werthen verificirt werden müssen:

$$ma+nb+pc=\frac{\varrho l^2}{\tau^2}\xi,$$
$$mb+nb_1+pc_1=\frac{\varrho l^2}{\tau^2}\eta,$$
$$mc+nc_1+pc_2=\frac{\varrho l^2}{\tau^2}\zeta.$$

Diese Gleichungen werden mit m, n, p bezüglich multiplicirt und addirt; man erhält:

$$e\xi+f\eta+g\zeta=0,$$

wo e, β, γ von ξ, η, ζ unabhängige Grössen sind. Ausserdem ist:

$$m\xi+n\eta+p\zeta=0.$$

Sind die beiden letzten Gleichungen nicht identisch, so ist offenbar nur eine einzige Schwingungsrichtung möglich.

Dies ist in der That bei gewissen Turmalinarten der Fall. Von diesem Falle abgesehen, muss man also setzen:

$$\frac{e}{m}=\frac{f}{n}=\frac{g}{p}=h.$$

Die direct zu berechnenden Werthe von e, f, g sind rationale Grössen dritter Ordnung in m, n, p.

Digitized by Google

Es ist also:

$$k = \frac{e}{m} = \sqrt{e^2 + f^2 + g^2}$$

rational und eine ganze Function, also von zweiter Ordnung. Setzt man:

$$k = m^2\alpha + n^2\beta + p^2\gamma + \ldots npq + pm\varepsilon + mn\varphi,$$

wo α, β . . . φ Constante sind, setzt diese Ausdrücke in a, b, b_1 . . . ein, so erhält man Relationen zwischen den Spannkräften A, B . . . und von den 36 Coefficienten bleiben nur 12 unbestimmt. Fügt man die Gleichung $\vartheta = 0$ hinzu, so bleiben deren nur noch 6, und zwar erhält man:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

wo gesetzt worden ist:

$$U = e\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + f\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + g\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$V = f\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + f_1\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + g_1\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$W = g\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + g_1\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + g_2\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Führt man ein anderes Axensystem ein, so kommt man zu Gleichungen von derselben Form. Und da sich die neuen Coefficienten aus den alten durch Transformation der Coordinaten ergeben, so erhält man Relationen zwischen den Coefficienten, die zu folgenden Gleichungen führen:

$$f = g = g_1 = 0, \qquad e = \varrho a^2, \qquad f_1 = \varrho b^2, \qquad g_2 = \varrho c^2.$$

Diese Gleichungen erhält man am leichtesten, wenn man von dem Satze ausgeht, dass es immer ein System von Axen gibt, wo die Componenten B, C und C_1 verschwinden. Schliesslich kommt man so zu den Gleichungen:

3)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - b^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

wo a, b, c die Constanten sind.

Dies also sind die Gleichungen der Bewegung des Aethers in einem doppelt brechenden Mittel.

Ist $a = b = 0$, so hat man die Gleichungen der transversalen Schwingungen in einem homogenen Mittel, die somit auch die optischen Gleichungen für ein einfach brechendes Mittel sind.

Schwingungsdauer.

Die Zeit, in welcher ein schwingender Punkt in seinen anfänglichen Zustand zurückkehrt.

Schwingungsebene.

Diejenige Ebene in welcher ein Pendel schwingt.

Schwingungsweite.

Die grösste Entfernung, welche ein Punkt während einer Schwingung zurücklegt.

Schwingungspunkt,

siehe den Artikel: Rotation.

Schwungkraft (Centrifugalkraft, Dynamik).

Ein Punkt, von dem wir zunächst annehmen wollen, dass keine continuirlichen Kräfte, sondern nur eine Anfangsgeschwindigkeit auf ihn wirken, sei durch irgend eine Ursache genöthigt, auf einer gegebenen festen Linie oder Fläche zu bleiben. In irgend einem Zeittheile dt wird er dann ein Element ds der Linie oder Fläche zurücklegen, und folglich die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ haben.

Im nächsten Zeittheilchen würde ein gleicher Raum ds in derselben Richtung zurückgelegt werden, wenn nicht in der Normale der Fläche oder Linie eine Spannung einträte. Es ist also die Geschwindigkeit v in zwei Componenten

Digitized by Google

zu zerlegen, deren eine dem nächsten Elemente ds', die andere der Normale parallel ist. Diese Normale ist völlig bestimmt, wenn man es mit einer Fläche zu thun hat. Hat man eine Linie, so muss dieselbe mit beiden Elementen ds und ds' in einer Ebene, welche bekanntlich Krümmungsebene heisst, liegen, und die entsprechende Normale ist also die Hauptnormale.

Ist nun dl der Winkel zwischen beiden Elementen, zerfällt also die Geschwindigkeit v in die beiden Seitenkräfte $v\cos dl$ und $v\sin dl$, oder da dl verschwindend klein ist, in v in der Tangentialrichtung und vdl in der Normalrichtung: diese letztere Seitenkraft heisst: Centrifugalkraft. Sie wird durch den Gegendruck der Fläche oder Linie, die man auch Centripetalkraft nennt, aufgehoben, und wird erst dann zur Wirkung kommen, wenn dieser Gegendruck kleiner als die Grösse vdl ist. Die wirkliche Bewegung mit Geschwindigkeit v ist tangential an die Linie oder Fläche. Bei der letzteren ist die Richtung derselben ebenfalls völlig bestimmt, denn sie liegt mit der Normale und dem Elemente ds in einer Ebene. Diese Ebene ist die Krümmungsebene. Bekanntlich hat die kürzeste Linie auf einer Fläche die Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte die Normale an die Fläche sich in ihrer Krümmungsebene befindet, und hieraus folgt der Satz:

„Wenn ein Punkt von keinen continuirlichen Kräfte angegriffen sich auf einer Fläche bewegt, so wird er auf derselben sich in einer kürzesten (geodätischen) Linie bewegen".

Bekanntlich ist dieser Satz ein besonderer Fall des Satzes von den kleinsten Actionen. — Würde der Punkt noch von constanten Kräften angegriffen, so kommen bei diesen Betrachtungen noch diese hinzu, wodurch die Bewegung modificirt wird; jedenfalls aber kann man auch hier von Centrifugalkräften sprechen, wenn man von den continuirlichen Kräften absieht, oder diese besonders betrachtet. — Ist r der Krümmungsradius des Elementes, d. h. denkt man sich durch die drei Endpunkte der Elemente ds und ds' einen Kreis mit Radius r gelegt, so ist offenbar $ds = rdl$. Also, wenn wir die Centrifugalkraft mit C bezeichnen:

$$C = vdl = \frac{vds}{r} = \frac{v^2dt}{r}.$$

Die Centrifugalkraft ist also unendlich klein gegen die Geschwindigkeit, und von derselben Ordnung, wie die continuirlichen Kräfte, z. B. die Schwere gdt. Sieht man also wie dort von dem Factor dt ab, so kann man schreiben:

$$C = \frac{v^2}{r}.$$

Am einfachsten ist der Fall, wenn sich der Punkt in einem Kreise bewegt; man hat dann, wenn ϑ die Winkelgeschwindigkeit ist:

$$v = r\vartheta, \text{ also } C = r\vartheta^2.$$

Ist die Winkelgesshwindigkeit constant, und T die Zeit, in welcher der ganze Kreis zurückgelegt wird, so ergibt sich:

$$\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{1}{T}, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{T},$$

also:

$$C = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Dieselbe Grösse muss also auch der Widerstand der Fläche oder Linie oder die Centrifugalkraft haben, wenn der Punkt daselbst verbleiben soll.

Bei der Rotation der Erde um ihre Axe hat ein Punkt auf der Oberfläche in der Breite α die Entfernung

$$r = \varrho\cos\alpha$$

von der Erdaxe, er beschreibt also einen Kreis mit diesem Radius. Die Zeit, in welcher derselbe zurückgelegt wird, beträgt 24 Stunden oder $24 \cdot 60 \cdot 60$ Secunden; es ist also die Centrifugalkraft:

$$C = \frac{4\pi^2\varrho\cos\alpha}{24^2 60^2 60^2}.$$

Befindet sich der Punkt nicht auf der Oberfläche der Erde, so ist für ϱ die Entfernung vom Mittelpunkt derselben zu nehmen. Findet aber das erstere statt, so ist ϱ in Meilen gleich $\frac{5400}{2\pi}$, also: in Fussen gleich $\frac{5400 \cdot 24000}{2\pi}$ und somit:

$$C = \frac{5\pi\cos\alpha}{144};$$

auf dem Aequator ist diese Grösse $\frac{5\pi}{144}$ oder ungefähr gleich $0',11 = 1'',3$.

Befinde sich der Punkt in der Entfernung R vom Mittelpunkte der Erde, und sei ϱ der Erdradius, so wird der Punkt durch die Schwere allein gehindert, sich von der Erde zu entfernen. Die Intensität der Schwere in dieser Entfernung ist gleich $\frac{g\varrho^2}{R^2}$.

Digitized by Google

Sucht man also die Entfernung, bis zu welcher die Centripetalkraft grösser als die Centrifugalkraft ist, also z. B. die Luftatome noch mit der um die Erdaxe rotiren, mit andern Worten das Maximum der Höhe der Atmosphäre, so ist die Schwere zunächst in die Componente $\frac{g\varrho^2}{R^2}\cos\alpha$ und $\frac{g\varrho^2}{R^2}\sin\alpha$ nach der Richtung des Radius des betreffenden Rotationskreises und senkrecht darauf zu zerlegen. Nur die erstere Componente kommt hier in Betracht, und man hat:

$$C = \frac{4\pi^2 R\cos\alpha}{24^2\,60^2\,60^2} = \frac{g\varrho^2}{R^2}\cos\alpha,$$

also:

$$R = \sqrt[3]{\frac{24^2\,60^2\,60^2\,g\varrho^2}{4\pi^2}},$$

oder wenn wir $g = 31{,}26$ Fuss annehmen, $R = 136000000$ Fuss gleich 5667 Meilen gleich 6,6 Erdradien.

Wenn ein fester Körper sich um eine feste Axe bewegt, so ist jeder Punkt gezwungen, einen Kreis, welcher auf derselben senkrecht ist, zurückzulegen. Die für alle Punkte des Körpers sich ergebenden Centrifugalkräfte setzen sich dann in eine Kraft und ein Paar zusammen, welche durch den Gegendruck der Axe vernichtet werden. Sei diese Axe zugleich Axe der z, und wie oben ϑ die Winkelgeschwindigkeit, so wirkt auf jeden Punkt von Masse m das aus seiner Centrifugalkraft sich ergebende Moment $mr\vartheta^2$, wo r die senkrechte Entfernung des Punktes von der Axe ist, in Richtung dieser Entfernung; sie zerfällt nach den Axen der x und y in die Componenten $mx\vartheta^2$, $my\vartheta^2$. Denken wir uns die Mittelkraft U durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehend, und mache diesen mit der Axe der x den Winkel φ, so ist:

$$U\cos\varphi = \vartheta^2\Sigma mx = M\xi\vartheta^2$$
$$U\sin\varphi = \vartheta^2\Sigma my = M\eta\vartheta^2,$$

wo ξ, η die Coordinaten des Schwerpunktes, M die Masse des ganzen Körpers sind. Es ist nun:

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}\varphi,$$

d. h. die Mittelkraft ist parallel der vom Schwerpunkte auf der Rotationsaxe gezogenen Senkrechten, und die Grösse derselben ist dieselbe als die derjenigen Centrifugalkraft, welche, falls der Schwerpunkt, in welchem die ganze Masse des Körpers vereint wäre, um die Axe rotirte, resultiren würde. Was das mittlere Paar anbetrifft, so sei dasselbe gleich V.

Eine Componente von V, deren Axe der der z parallel ist, findet offenbar nicht statt, da deren Grösse

$$\vartheta^2\Sigma(mxy) - \vartheta^2\Sigma(mxy) = 0$$

ist. Sei also λ der Winkel der Axe der x, so ist:

$$V\cos\lambda = \vartheta^2\Sigma myz$$
$$V\sin\lambda = -\vartheta^2\Sigma mxz.$$

Dieses Paar verschwindet also, wenn

$$\Sigma myz = \Sigma mxz = 0,$$

d. h. wenn die Axe eine Hauptaxe ist (vergl. den Artikel: Rotation).

Ist also keine feste Axe in dem Körper vorhanden, sondern nur ein fester Punkt, den wir als Anfangspunkt der Coordinaten nehmen, und es erfolgt im Anfange der Bewegung eine Drehung um eine Hauptaxe, die durch diesen Punkt geht, und es treten keine continuirlichen Kräfte hinzu, so wie nur ein Druck auf den festen Punkt erfolgen, mithin die Drehung immer um dieselbe Hauptaxe stattfinden.

Ist der Schwerpunkt Anfangspunkt der Coordinaten, so ist:

$$\xi = \eta = 0, \text{ also } U = 0.$$

In diesem Falle also findet gar kein Druck statt, und der Anfangspunkt braucht selbst nicht fest zu sein. D. h.:

„Wenn ein von keinen continuirlichen Kräften angegriffener ganz freier Körper sich im Anfange der Bewegung um eine zum Schwerpunkt gehörige Hauptaxe dreht, so wird er diese Bewegung ungestört fortsetzen, so lange keine neuen Kräfte hinzutreten.

Schwungkugelregulator, siehe Centrifugalpendel.

Schwungrad (Maschinenlehre).

Der Zweck der Schwungräder ist der, eine ungleichmässige Bewegung in eine möglichst gleichmässige zu verwandeln. Bei allen Maschinen gibt es nämlich eine Geschwindigkeit, bei welcher sie am Vortheilhaftesten wirken, und an diese sich möglichst zu nähern, ist ein wesentliches Erforderniss. Das Hauptmittel hierzu ist die Vermehrung der Massen, namentlich der rotirenden.

Wie nämlich auch die Bewegung beschaffen sei, so wird das Prinzip der lebendigen Kräfte

$$\tfrac{1}{2}\Sigma M(v^2 - v_0^2) = A$$

Google

statthaben, wo v die Geschwindigkeit zu irgend einer Zeit, v_0 die im Anfange der Bewegung, M die Masse eines Punktes ist, und A die zu irgend einer Zeit geleistete Arbeit.

Denkt man sich nun mit der Maschine eine rotirende Masse verbunden, so kommt zum ersten Gliede der Ausdruck hinzu $\frac{1}{2}\mu(\vartheta^2 - \vartheta_0^2)$, wo μ das Trägheitsmoment, ϑ die Winkelgeschwindigkeit, ϑ_0 deren Anfangswerth in Bezug auf die rotirende Masse ist. Es ist also:

$$\vartheta^2 + \frac{1}{\mu}\Sigma M v^2 = \vartheta_0^2 + \frac{1}{\mu}\Sigma M v_0^2 + \frac{2A}{\mu},$$

und es lässt sich μ immer so gross nehmen, dass $\frac{2A}{\mu}$ eine zu vernachlässigende Grösse ist. In diesem Falle ist:

$$\vartheta^2 + \frac{1}{\mu}\Sigma M v^2 = \vartheta_0^2 + \frac{1}{\mu}\Sigma M v_0^2$$

zu setzen, also die Geschwindigkeiten werden sich so viel als möglich ausgleichen. Uebrigens ist es klar, dass in dem Ausdrucke:

$$\mu = \Sigma m r^2,$$

wo m die Masse eines Punktes, r seine Entfernung von der Rotationsaxe ist, diejenigen Glieder am meisten einwirken, wo r am grössten ist. Man muss also dem rotirenden Körper womöglich die Form eines Rades geben, dessen ganze Masse sich fast an der Peripherie befindet.

Schwungräder werden gewöhnlich aus Gusseisen gemacht, kleinere giesst man aus einem Stücke, grössere in zwei bis sechs Stücken.

Ist das Schwungrad plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen ausgesetzt, so macht man dasselbe aus Holz, um das Abbrechen der Arme zu vermeiden, oder wendet eine Frictionskuppelung an.

Bei einer solchen ist auf jeder der zu kuppelnden Wellen eine Scheibe aufgesetzt, von denen die eine die andere mittels eines Kranzes umfasst, der gegen einen der Letzteren aufgelegten Holzkranz durch Schraubenbolzen scharf angezogen wird. Beim gewöhnlichen Gange der Maschine ist dann die Reibung ausreichend um die Bewegung einer Scheibe der andern mitzutheilen; tritt aber eine plötzliche Vergrösserung der Last ein, so reicht diese nicht aus, es dreht sich die eine Scheibe nur noch kurze Zeit in der anderen, bis die Maschine in Ruhe kommt.

Die Festigkeitsverhältnisse bedingen ein gewisses Maximum der Rotationsgeschwindigkeit des Schwungrades.

Sei M die Masse der Längeneinheit des Schwungrads an der Peripherie, r der Radius, v die Geschwindigkeit desselben, so ist:

$$C = \frac{Mv^2}{r}$$

das Moment der Centrifugalkraft, oder wenn γ die Dichtigkeit, s der Querschnitt, g die Beschleunigung der Schwere ist, wenn man wie bei technischen Betrachtungen gewöhnlich die Masseneinheit gleich $\frac{1}{g}$ der Gewichtseinheit nimmt:

$$M = \frac{Fr\gamma}{g}, \quad C = \frac{sv^2\gamma}{g}.$$

Ist K der Modul der absoluten Festigkeit, so kann also C höchstens gleich sK sein, und man hat als Maximum der Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{gK}{\gamma}},$$

ein Ausdruck, der von den Raddimensionen unabhängig ist.

Für Gusseisen ist mit sechsfacher Sicherheit: $K = 432000$ und das Gewicht eines Kubikfusses gleich 475,2 Pfund, so dass man hat:

$$v = 12\sqrt{\frac{31{,}25 \cdot 3000}{478{,}2}} = 168'.$$

Dieser Ausdruck gilt, wenn das Schwungrad in einem Stücke gegossen ist. Im andern Falle kann ein Zerreissen der Verbindungsstücke eintreten.

Sei s_1 der Querschnitt, K_1 der Festigkeitsmodul eines solchen, so ist also auch zu nehmen:

$$s_1 K_1 = \frac{sv^2\gamma}{g},$$

d. h.:

$$s_1 = \frac{v^2\gamma}{gK_1}s.$$

Damit s_1 nicht zu gross wird, nimmt man Schmiedeeisen zu den Verbindungsstücken und dann ist:

$$K_1 = 10000 \text{ Pfund}, \quad s_1 = 0{,}0001056\, sv^2.$$

Nimmt man $v = 100$ als grösste Geschwindigkeit, so ist:

$$s_1 = 0{,}1056\, s.$$

Den Verbindungsstücken ist also ein Querschnitt von $\frac{1}{10}$ desjenigen des Ringes zu geben.

Wir setzen jetzt voraus, dass keine

Digitized by Google

Stösse, also plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorgehen.

Es sei dann M die rotirende Masse, die wir uns, wie dies ja immer geschehen kann, auf einen Punkt reducirt denken, dessen Geschwindigkeit zwischen dem Minimum v_1 und dem Maximum v_2 schwankt, ausserdem möge die Maschine noch aus einer Masse M_1 bestehen, die hin und her schwingt. Wir denken uns dieselbe ebenfalls auf einen Punkt reducirt, der zwischen den Geschwindigkeiten $k_1 v_1$ und $k_2 v_2$ schwankt.

Es wird dann von der Zeit, wo die Maschine vom langsamsten bis zum schnellsten Gange übergeht, von den trägen Massen eine gewisse Arbeit A verrichtet, welche gleich der ist, welche beim Uebergange von dem schnellsten zum langsamsten Gang geleistet wird, und das Prinzip der lebendigen Kräfte gibt also:

$$M(v_2^2 - v_1^2) + M \cdot (k_2^2 v_2^2 - k_1^2 v_1^2) = 2A.$$

Führen wir aber die mittlere Geschwindigkeit $c = \frac{v_1 + v_2}{2}$ ein, und setzen:

$$v_2 - v_1 = \delta c,$$

so ist:

$$M\delta c^2 + \frac{M_1 c^2}{\gamma}[k_2^2(2+\delta)^2 - k_1^2(2-\delta)^2] = 2A.$$

δ ist der Ungleichförmigkeitsgrad, und ist dieser gegeben, so erhält man:

$$M = \frac{A}{\delta c^2} - \frac{M_1}{\gamma\delta}(k_2^2(2+\delta)^2 - k_2^2(2-\delta)^2],$$

oder wenn man δ^2 vernachlässigt, da δ jedenfalls klein ist:

$$M = \frac{A}{\delta c^2} - \frac{M_1}{2}\left(k_2^2 + k_1^2 + \frac{k_2^2 - k_1^2}{\delta}\right).$$

Ist M_1 gegen M sehr klein, so kann man auch setzen:

$$M = \frac{A}{\delta c^2}.$$

Die Grösse A wird gewöhnlich durch die Leistung der ganzen Maschine ausgedrückt; ist L dieselbe für die Secunde und geschehen in der Minute n Umdrehungen, so ist die bei jeder Umdrehung geleistete Arbeit gleich $\frac{60L}{n}$, und man setzt daher:

$$A = \mu\frac{60L}{n},$$

wo in jedem Falle μ zu bestimmen ist.

Mögen jetzt aber, wie z. B. bei Walz- und Hammerwerken auch plötzliche Geschwindigkeitsänderungen eintreten.

Wir denken uns sämmtliche Kräfte und Massen wieder auf einen Punkt reducirt. Hier besteht aber jede Bewegungsperiode aus drei Theilen. Die Last Q wird stossweise ergriffen, und geht plötzlich von der grössten Geschwindigkeit v_2 in eine kleinere v über, die sich nach der Theorie des Stosses ergibt:

$$v = \frac{Mv_2}{M + M_1},$$

wo M die rotirende Masse, M_1 die in Bewegung zu setzende ist.

In dem folgenden Theile der Bewegung wird Arbeit verrichtet und die Maschine geht allmälig zur kleinsten Geschwindigkeit v_1 über. Der letzte Theil der Bewegung ist der, wo die Maschine nicht arbeitet, und zur grössten Geschwindigkeit v_2 übergeht.

Im ersten Theil der Periode ist der zurückgelegte Weg sehr klein, im zweiten werde der Weg s von Kraft und Last, im letzten endlich von der Kraft allein der Weg s_1 zurückgelegt. Sei P die Umdrehungskraft, so ist also:

$$P_s - Q_s = \tfrac{1}{2}(M + M_1)(v^2 - v_1^2),$$

$$P_{s_1} = \tfrac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2)$$

oder wenn wir die mittlere Geschwindigkeit $\frac{v_1 + v_2}{2} = c$ und $v_2 - v_1 = \delta c$ einführen:

$$P_{s_1} = \delta M c^2, \quad M = \frac{Ps_1}{\delta c^2}.$$

Diese Formel gibt, ganz wie oben, die rotirende Masse, wenn der Ungleichförmigkeitsgrad δ gegeben ist. Setzen wir:

$$\mu = \frac{s_1}{s + s_1},$$

so ist auch:

Digitized by Google

$$M = \frac{\mu P(s+s_1)}{\delta c^2} = \frac{60\mu}{\delta}\,\frac{L}{nc^2},$$

wo n die Anzahl der Drehungen in der Minute,

$$L = \frac{n}{60} P(s+s_1)$$

die Leistung der Maschine in der Secunde ist.

Mit Berücksichtigung des Stosses und des Theiles der Arbeit $P(s+s_1)$, welcher zur Ueberwindung der Last verwendet wird, hat man:

$$P(s+s_1) = Qs + \tfrac{1}{2} M_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{MM_1}{M+M_1}(v_1 - v)^2,$$

also:

$$L = L_1 + \frac{n}{60}\left[\tfrac{1}{2} M_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{MM_1}{M+M_1}(v_2 - v)^2\right],$$

wo $L_1 = \frac{n}{60} Qs$ die Arbeit der Last in der Secunde ist. Nun war:

$$v = \frac{Mv_2}{M+M_1}, \quad v_2 = \left(1+\frac{\delta}{2}\right)c, \quad v_1 = \left(1-\frac{\delta}{2}\right)$$

also:

$$L = L_1 + \frac{n}{60}\,\frac{c^2}{2}\left[\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2 M_1 + \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2 \frac{MM_1^2}{(M+M_1)^2}\right]$$

und:

$$M = \frac{60\mu}{\delta}\,\frac{L_1}{nc^2} + \frac{\mu}{2\delta}\left[\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^2 M_1 + \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2 \frac{MM_1^2}{(M+M_1)^2}\right],$$

oder da δ gegen 1 sehr klein ist:

$$M = \frac{60\mu}{\delta}\,\frac{L_1}{nc^2} + \frac{\mu}{2\delta}\left(M_1 + \frac{MM_1^2}{(M+M_1)^2}\right).$$

Nimmt man statt der Massen MM_1 die Gewichte $G = gM$, $G_1 = gM_1$, und nimmt L_1 in Pferdekräften, so kommt:

$$G = 956250\,\frac{\mu L_1}{\delta nc^2} + \frac{\mu}{2\delta}\left(G_1 + \frac{GG_1^2}{(G+G_1)^2}\right).$$

In der Regel kann G und M auf der rechten Seite vernachlässigt werden, wenn M gross ist, also:

$$M = \frac{60\mu}{\delta}\,\frac{L_1}{nc^2} + \frac{\mu}{2\delta} M_1,$$

$$G = \frac{956250\,\mu L_1}{\delta nc^2} + \frac{\mu}{2\delta} G_1.$$

Es bleibt noch übrig, die auf einem Punkt reducirte Masse des Schwungrades auszudrücken. Sei T das Trägheitsmoment desselben, so lässt sich dies aus dem des Kranzes und der Arme ausdrücken. Ist a das Gewicht der Arme, b das des Kranzes, r_2, r_1 der äussere und innere Halbmesser des letzten, so kann man den Querschnitt desselben als ein Rechteck und die Arme als unendlich dünne Prismen sich denken, und dann ist:

$$T = \tfrac{1}{2}\varrho(r_1^4 + r_2^4) + \tfrac{1}{3} a r_1^2,$$

oder wenn man den mittleren Halbmesser $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ einführt, und $b = r_2 - r_1$ setzt:

$$T = \varrho\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right) + \tfrac{1}{3} a\left(r - \frac{b}{2}\right)^2,$$

oder wenn man b vernachlässigt:

$$T = (\varrho + \tfrac{1}{3} a) r^2.$$

Digitized by Google

Also wenn man die Masse des Schwungrades auf dem mittleren Radhalbmesser reducirt:

$$M = \frac{\varrho + \frac{1}{2}a}{g}, \quad G = \varrho + \frac{1}{2}a.$$

Ist nun M bestimmt, so muss diese Masse auf Ring und Arme vertheilt werden.

Sei s der Querschnitt des Ringes, $s_1 = \nu s$ der der Arme, p die Anzahl derselben, γ die Dichtigkeit des ganzen Rades, so ist:

$$\varrho = 2\pi r s \gamma, \qquad a = p s_1 r \gamma = \nu p r \gamma$$

$$G = 2\pi s r \gamma + \tfrac{1}{2} p s_1 r \gamma = \left(2\pi + \frac{1}{2}\nu p\right) s r \gamma,$$

und es ist also der Querschnitt des Ringes:

$$s = \frac{G}{(2\pi + \frac{1}{2}\nu p) r \gamma} = \frac{0{,}04823}{1 + 0{,}053\,\nu p}\,\frac{G}{\nu} \text{ in Quadratfussen,}$$

$$= 0{,}04823\,(1 - 0{,}053\,\nu p)\,\frac{G}{r} \text{ in Quadratzollen,}$$

wo ν aber in Fussen gegeben ist. — Es ist $p = 4$ bis 8, $\nu = \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$, und die Breite des Rades ein- bis zweimal gleich der Dicke.

Die Radarme sind während des Umschwunges ebenfalls einer veränderlichen Spannung ausgesetzt, die sie bald nach der einen, bald nach der andern Richtung hin zu bringen strebt, und ist ihnen daher eine angemessene Stärke zu geben.

Sei r wieder der mittlere Halbmesser, M die auf einem Punkte reducirte Masse, P die Kraft, mit welcher der Radarm gebrochen wird, dann ist P gleich der Arbeit dividirt durch den Weg, d. h.:

$$P = \frac{\frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2)}{ar} = \frac{\vartheta M c^2}{ar},$$

wo a der Rotationswinkel (in Bogentheilen) ist, welcher zurückgelegt wird, während die Geschwindigkeit von v_1 zu v_2 übergeht.

Sei p die Anzahl der Radarme, h die Dicke, $b = mh$ die Breite derselben, erstere in tangentialer, letztere in axialer Richtung genommen, so ist:

$$P = \frac{p b h^2}{r}\,\frac{K}{6} = \frac{m p h^3}{r}\,\frac{K}{6},$$

also:

$$h = \sqrt[3]{\frac{6\,\vartheta M c^2}{a m p K}}.$$

Auch dem Wellenhals ist eine gewisse Stärke d zu geben, damit nicht abgedreht wird. Sei das Moment zum Abdrehen:

$$Ps = d^3 K_1,$$

so kommt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{\vartheta M c^2}{a K_1}},$$

auch kann man setzen:

$$\vartheta M c^2 = \frac{60\,\mu L}{n},$$

wo L die Leistung der Maschine, n die Anzahl der Umdrehungen in der Minute ist. Man hat nun:

$$\frac{h}{d} = \sqrt{\frac{6K_1}{mpK}}.$$

Man nimmt gewöhnlich:

$$\frac{K}{6} = 1700, \quad K_1 = 1575,$$

also:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[m]{mp} \text{ (sehr nahe).}$$

Für runde Wellen, welche die Leistungen L unmittelbar übertragen, setzt man:

$$d = \sqrt[3]{\frac{Pr}{K_1}} = \sqrt[3]{\frac{30L}{\pi n K_1}}.$$

Für Wasser- und andere Räder ist:

$$d = 6{,}12\sqrt[3]{\frac{L}{n}} \text{ Zoll,}$$

wenn L in Pferdekräften gegeben ist, und aus Vergleich beider Formeln folgt:

$$\sqrt[3]{\frac{60}{K_1}} = 11{,}29,$$

also:

$$d = 11{,}29\sqrt[3]{\frac{\mu L}{an}} \text{ in Zollen,}$$

h und $b = mh$ sind nun leicht zu finden.

Digitized by Google

Schwungschaufel (Maschinenlehre), s. Wasserschaufel.

Scrupel (Messkunde).

Eine Unterabtheilung des Apothekergewichts. In Preussen ist ein Scrupel gleich $\frac{1}{72}$ Loth (alten Systems).

Secante (Geometrie).

Eine Linie, welche einen Kreis oder eine andere Curve zweimal schneidet.

Secante (Trigonometrie).

Wenn man den gegebenen Winkel α als Centriwinkel eines Kreises dessen Radius die Einheit ist, betrachtet, so wird Secante diejenige Strecke des einen Schenkels genannt, welche bis zu der durch den andern Schenkel an den Kreis gezogenen Tangente geht. Die Bezeichnung für die Secante des Winkels α ist $\sec \alpha$, und sie ist gegeben durch die Gleichung:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Sector (Geometrie).

Beim Kreise derjenige Theil, welcher von zwei Radien und einem Bogen begrenzt wird. Die Formel für den Kreissector ist:

$$\text{sect} = \frac{rb}{2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{180} = \frac{r^2 A}{2},$$

wo r der Radius, b der Bogen, α der zugehörige Centriwinkel in Graden, A derselbe in Theilen des Radius ist.

Der Begriff des Sector kann auch ausgedehnt werden, auf alle Curven, die einen Mittelpunkt haben, also z. B. die Ellipsen und Hyperbeln.

Bei der Kugel ist Sector das Kugelstück, welches von einer Rotationskegelfläche, deren Spitze der Mittelpunkt ist, und einer Kugelcalotte begrenzt ist.

Die Formel für den Kugelsector ist:

$$\text{sect} = \frac{2\pi}{3} r^2 h.$$

wo r der Radius, h die Höhe der Kalotte ist.

Secunde (Messkunst).

Eigentlich bei jeder Massbestimmung zweite Theilung des Hauptmaasses.

Die erste wird mit *minutum primum* (Minute), die zweite mit *minutum secundum* (Secunde) bezeichnet. Gewöhnlich aber werden die Ausdrücke Minute und Secunde auf das 60 theilige Maass bezogen, und dieses findet seine hauptsächliche Anwendung beim Bogenmaass: 1 Grad gleich 60 Minuten gleich 60·60 Secunden:

$$1^\circ = 60' = 3600'',$$

und beim Zeitmaass: 1 Stunde gleich 60 Minuten gleich 60·60 Secunden:

$$1^h = 60' = 3600''.$$

Secundenpendel (Mechanik).

Ein solches Pendel, bei welchem die Schwingungsdauer eine Secunde beträgt. Für Berlin ist die Länge des einfachen (mathematischen) Secundenpendels nach Bessel:

440,739 Pariser Linien,

für Königsberg:

440,8179 Pariser Linien.

Segel (Nautik und Dynamik).

Biegsame (gewöhnlich aus Leinewand gefertigte) Flächen, welche an die Schiffsmasten gespannt und nach verschiedenen Richtungen gewendet werden, damit unter bestimmter Richtung der auf sie wehende Wind, vermöge der ihm ertheilten Brechung und Zurückwerfung das Schiff nach einer verlangten Richtung bewege. Auf Eisenbahnen bedient man sich zuweilen auch zur Fortbewegung kleiner Wagen der Segel, auch kommen dieselbe bei holländischen Windmühlen in Anwendung, wo man die Windfelder der Ruthen mit ihnen bekleidet.

Nimmt man an, dass ein Segel rechtwinklig, und dass zwei gegenüberliegende Seiten desselben fest, und auf der Richtung des Windes senkrecht seien, legt man dann Ebenen senkrecht auf die festen Seiten durch das Segel, so schneiden diese Curven aus, welche sich gegen die Begrenzung und die wirkenden Kräfte ganz gleichmässig verhalten, und somit congruent sein müssen. Auf jede dieser Curven wirkt in ihrer Ebene und in jedem Punkte gleich gerichtet mit constanter Macht der Wind; die Verhältnisse sind also dieselben, als wenn die Schwere auf die Curve wirkte, und wird also im Falle des Gleichgewichts eine Kettenlinie entstehen. Alle diese congruenten Kettenlinien aber liegen auf einer Cylinderfläche, deren Seite senkrecht auf die erstere ist, und diese Cylinderfläche ist mithin die Segelfläche.

Segment (Geometrie).

Beim Kreise das von Sehne und Bogen abgeschnittene Stück. Die Formel für das Kreissegment ist:

$$\text{segm} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{90} - \sin\alpha\right),$$

wo α der Centriwinkel (in Graden), r der Radius des Kreises ist.

Bei der Kugel, das von einer Kalotte und einer Ebene begrenzte Stück. Die Formel ist:

$$\text{segm} = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h),$$

wo h die Höhe der Kalotte, r der Radius der Kugel ist. Zuweilen wird der Theil eines Kreises zwischen zwei parallelen Sehnen, oder einer Kugel zwischen zwei parallelen Ebenen auch als Segment bezeichnet. Auch nennt man Segment einer Linie die Strecke derselben, welche von zwei andern Linien abgeschnitten wird.

Segnersches Wasserrad (Hydraulik), siehe Wasserrad.

Sehaxe (Optik).

Die grade Linie, welche durch irgend einen Punkt, nach dem man sieht, und durch den Mittelpunkt der Pupille geht.

Sehne (Geometrie).

Die Grade, welche die Endpunkte des Bogens eines Kreises oder einer andern Curve verbindet. Für Kreissehnen gilt die Formel:

$$s = 2r\sin\frac{\alpha}{2},$$

wo s die Sehne, α der zugehörige Centriwinkel, r der Radius des Kreises ist.

Seiger (Geometrie und Markscheidekunst).

Gleichbedeutend mit Loth. Daher Seigerebene gleich senkrechte Ebene, Seigergang u. s. w.

Seigerpunkt wird der vertikale Punkt des Endpunktes einer flachen Linie genannt.

Seigerriss, gleichbedeutend mit Profil.

Seigerteufe, die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks, oft gleichbedeutend mit Sinus.

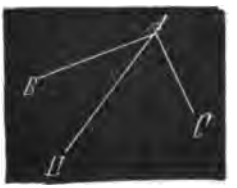
Seil (Statik und Mechanik).

Biegsamer cylindrischer aus Hanf gedrehter Körper, welcher namentlich zur Versetzung der Kräfte von einem Punkte zum andern dient. Dies geschieht, indem man ihn über Flächen besonders über Räder oder Rollen spannt.

Ist ein Seil über irgend eine continuirliche gekrümmte oder scharfkantige feste Fläche gespannt, und durch eine Kraft an einem Ende tangential gespannt, so wird diese Spannung nach dem andern Ende ebenfalls in tangentialer Richtung an die Fläche übertragen, und zwar ungeschwächt, wenn man von Reibung und Steifigkeit des Seiles (vergl. die entsprechenden Artikel), absieht.

In irgend einem Punkte des Seiles wirken nämlich die von den beiden nächsten Punkten ausgehenden Spannungen, $-T$ und U, in entgegengesetzter Richtung und tangential ausserdem der Gegendruck Q. Sei die Fläche nicht continuirlich gekrümmt, sondern ihr Durchschnitt eine gebrochene Linie BAC (Fig. 391). Sei Winkel $BAC = \alpha$. Die

Fig. 391.



Richtung des Gegendruckes A wird dann nach statistischen Gesetzen den Winkel α halbiren.

Die Spannung T, welche nach AB gerichtet ist, macht mit AD den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, mit der Verlängerung von AC den Winkel $2\,\text{R} - \alpha$. Zerlegt man also alle Kräfte nach AC und AD, so erhält man in ersterer Richtung, falls Gleichgewicht stattfindet:

$$U - T = 0, \quad \frac{T\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = Q.$$

Die letzte Formel gibt den Druck; die erste zeigt, dass $U = T$ ist, dass sich also die Spannung von Punkt zu Punkt in gleicher Grösse, jedoch mit veränderter Richtung fortsetzt. Es wird diese also von einem Endpunkte der Fläche nach dem andern übertragen, Findet continuirliche Krümmung statt, so braucht man sich nur den Winkel ABC unendlich wenig verschieden von 2 Rechten zu denken. Dann ist AD die Richtung der Normale, AB und BC bestimmen die Krümmungsebenen.

Da nun das Gleichgewicht erfordert, dass diese drei Linien in einer Ebene liegen, so wird in jedem Punkte der Curve, welche das Seil bildet die Krümmungsebene die Normale der festen Fläche

enthalten, und dies ist bekanntlich die Bedingung dafür, dass diese Curve eine kürzeste Linie sei. Also:

„Ein über eine feste Fläche gespanntes Seil, welches nur in den Endpunkten gespannt ist, bildet, wenn man Reibung und Steifigkeit nicht berücksichtigt, im Falle des Gleichgewichts eine kürzeste Linie auf der Fläche."

Seilbahn (Mechanik).

Eine Eisenbahn, welche über eine schiefe Ebene führt. Die Wagen werden durch ein Seil gezogen, welches sich über eine Trommel wickelt. Dieses Aufwickeln wird durch eine stehende Dampfmaschine bewirkt.

Seilcurve (Statik).

Die Curve, welche ein biegsamer Faden, der von beliebigen Kräften angegriffen ist, in der Gleichgewichtslage macht.

Nehmen wir an, in irgend einem Punkte M wirkt eine auf die Längeneinheit reducirte Kraft, deren Componente nach den drei Axen durch X, Y, Z bezüglich bezeichnet werden, so wird ein Element des Fadens ds angegriffen von den Kräften Xds, Yds, Zds, ferner von der Spannung $-T$ in der Richtung des Elementes und von der Spannung $T+dT$ in der Richtung des nächsten Elementes. Da das Element ds Winkel mit den Axen macht, deren Cosinus bezüglich $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sind, so sind die Componenten dieser beiden Spannungen z. B. nach der Axe der x:

$$-T\frac{dx}{ds}, \quad T\frac{dx}{ds}+d\left(T\frac{dx}{ds}\right).$$

Setzt man also die Summe der nach jeder der drei Axen gerichteten Kräfte einzeln gleich Null, so erhält man die Gleichgewichtsgleichungen:

$$1) \quad Xds+d\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

$$Yds+d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=0,$$

$$Zds+d\left(T\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Wenn man aber alle Kräfte nach der tangentialen und normalen Richtung zerlegt, so erhält man als Componenten in ersterer Richtung:

$$X\frac{dx}{ds}ds, \quad Y\frac{dy}{ds}ds, \quad Z\frac{dz}{ds}ds, \quad dT,$$

also:

$$2) \quad dT+Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Diese Gleichung ist selbstverständlich eine Folge der Obigen.

Gibt es eine Function φ, von welcher X, Y, Z, die bezüglich nach x, y, z genommene Differensialquotienten sind, so hat man:

$$dT+d\varphi=0.$$

$$3) \quad T-T_0=\varphi(x,y,z)-\varphi(x_0,y_0,z_0),$$

wo x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Anfangspunktes, T_0 die Spannung in demselben ist.

Kettenlinie heisst diejenige Seilcurve, welche ein biegsamer Körper bildet, der ausser den Spannungen im Anfangs- und Endpunkte nur von seiner Schwere angegriffen wird.

Seien A und B die Endpunkte, lege man durch dieselbe eine Vertikalebene, sei die der Schwere entgegengesetzte Richtung die Axe der y und die Axe der x in der Vertikalebene, in der Richtung von A nach B, dann ist:

$$X=Z=0, \quad Y=-\varepsilon,$$

wo ε das Gewicht der Längeneinheit des Fadens ist.

Die erste und dritte Gleichung 1) geben nun:

$$4) \quad T\frac{dx}{ds}=c, \quad T\frac{dz}{ds}=c_1,$$

$$cdz=c_1x, \quad cz=c_1x+c_2,$$

aber da in den Punkten A und B $z=0$ ist, so ist $c_1=c_2=0$:

$$z=0,$$

also die Kettenlinie liegt ganz in der durch A und B gelegten Vertikalebene.

Das erste Integral 4) zeigt, dass die horizontale Spannungscomponente constant ist.

Die Gleichung 2) gibt:

$$T-T_0-\varepsilon y=0,$$

wenn Punkt A zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen, also daselbst

$$x=y=0$$

gesetzt wird. Diese Gleichung in Verbindung mit der ersten Gleichung 4) gibt:

$$\frac{cdy}{\sqrt{(T_0+\varepsilon y)^2-c^2}}=dx$$

$$\frac{\varepsilon x}{c}=\lg\left(\frac{T_0+\varepsilon y}{c}+\frac{1}{c}\sqrt{(T_0+\varepsilon y)^2-c^2}\right)+\gamma,$$

oder:

Digitized by Google

$$\frac{\varepsilon x}{c} = -\lg\left(\frac{T_0 + \varepsilon y}{c} - \frac{1}{c}\sqrt{(T_0 + \varepsilon y)^2 - c^2}\right) + g,$$

wo g eine neue Constante ist.

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{T_0 + \varepsilon y}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{(T_0 + \varepsilon y)^2 - c^2} = e^{\frac{\varepsilon}{c}(x-g)}$$

$$\frac{T_0 + \varepsilon y}{c} - \frac{1}{c}\sqrt{(T_0 + \varepsilon y)^2 - c^2} = e^{-\frac{\varepsilon}{c}(x-g)}$$

$$\frac{2(T_0 + \varepsilon y)}{c} = e^{\frac{\varepsilon}{c}(x-g)} + e^{-\frac{\varepsilon}{c}(x-g)}.$$

Seien a und b die Coordinatenwerthe des Endpunktes B, so ist:

5) $$\frac{2\varepsilon(y-b)}{c} = e^{\frac{\varepsilon}{c}(x-g)} + e^{-\frac{\varepsilon}{c}(x-g)} - e^{\frac{\varepsilon}{c}(a-g)} - e^{-\frac{\varepsilon}{c}(a-g)}$$

und wenn man $x = y = 0$ setzt:

5a) $$b = \frac{c}{2\varepsilon}\left(-e^{\frac{\varepsilon}{c}g} - e^{-\frac{\varepsilon}{c}g} + e^{\frac{\varepsilon}{c}(a-g)} + e^{-\frac{\varepsilon}{c}(a-g)}\right).$$

Noch gibt die zweite Gleichung 1):

$$\iota s = T\frac{dy}{dx} + c'$$

und mittels der ersten Gleichung 4) erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon}{c}s + \frac{c'}{c},$$

aber wegen 5) ist:

6) $$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left[e^{\frac{\varepsilon}{c}(x-g)} - e^{-\frac{\varepsilon}{c}(x-g)}\right]$$

7) $$s = \frac{c}{2\varepsilon}\left[e^{\frac{\varepsilon}{c}(x-g)} - e^{-\frac{\varepsilon}{c}(x-g)}\right] - \frac{c'}{\varepsilon}.$$

Ist S die Länge des ganzen Fadens, so hat man:

$$S = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon}{c}(a-g)} - e^{-\frac{\varepsilon}{c}(a-g)}\right) - \frac{c'}{\varepsilon}.$$

Ausserdem aber, da für $x = 0$ auch $s = 0$, ist:

$$2c' = c\left(e^{-\frac{\varepsilon}{c}g} - e^{\frac{\varepsilon}{c}g}\right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

7a) $$S = \frac{c}{2\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon}{c}(a-g)} - e^{-\frac{\varepsilon}{c}(a-g)} + e^{\frac{\varepsilon g}{c}} - e^{-\frac{\varepsilon g}{c}}\right).$$

Die Gleichung 5) bestimmt die Kettenlinie. Um die darin vorkommenden Constanten c, g zu bestimmen, hat man die Gleichung 5a) und 7a). Addirt man dieselben, so kommt:

Digitized by Google

$$S+b=\frac{c}{\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon}{c}(a-g)}-e^{-\frac{\varepsilon g}{c}}\right)$$

$$S-b=\frac{c}{\varepsilon}\left(-e^{-\frac{\varepsilon}{c}(a-g)}+e^{\frac{\varepsilon g}{c}}\right)$$

und durch Multiplication:

$$S^2-b^2=\frac{c^2}{\varepsilon^2}\left(+e^{\frac{\varepsilon a}{c}}+e^{-\frac{\varepsilon a}{c}}-2\right),$$

d. h.:

$$8)\qquad \sqrt{S^2-b^2}=\frac{c}{\varepsilon}\left(e^{\frac{\varepsilon a}{2c}}-e^{-\frac{\varepsilon a}{2c}}\right);$$

aus dieser transcendenten Gleichung ist c zu berechnen. Eine der Gleichungen für $S+b$ oder $S-b$ gibt dann y. Dividirt man die eine dieser Gleichungen durch die andere, so kommt:

$$\frac{S+b}{S-b}=e^{-\frac{2\varepsilon g}{c}+\frac{\varepsilon a}{c}},$$

also:

$$9)\qquad \frac{2\varepsilon g}{c}=\frac{\varepsilon a}{c}-\lg\frac{S+b}{S-b}.$$

Die Aufgabe ist verschiedener Abänderungen fähig, wenn man die Endpunkte nicht fest nimmt, sondern andern Bedingungen unterwirft. Indess ändern dieselben offenbar nur die Constanten, und nicht die Form der Gleichung der Kettenlinie.

Nimmt man den tiefsten Punkt der Kettenlinie zum Anfangspunkt der Coordinaten, so wird die Gleichung etwas einfacher. Es ist um diesen Punkt zu bestimmen, $\frac{dy}{dx}=0$ zu setzen, und Gleichung 6) gibt dann:

$$x=g.$$

Seien ξ, η die neuen Coordinaten, also:

$$\xi=x-g,\qquad \eta=y-y_0,$$

wo y_0 die zu $x=g$ gehörige Ordinate ist, so gibt für diesen Werth Gleichung 5):

$$\frac{2\varepsilon(y_0-b)}{c}=2-e^{\frac{\varepsilon}{c}(a-g)}-e^{-\frac{\varepsilon}{c}(a-g)},$$

also wenn man diese Gleichung von 5) abzieht:

$$10)\qquad \frac{2\varepsilon\eta}{c}=e^{\frac{\varepsilon\xi}{c}}+e^{-\frac{\varepsilon\xi}{c}}-e^{\frac{\varepsilon}{c}(a-g)}-e^{-\frac{\varepsilon}{c}(a-g)};$$

für $x=g$ gibt Gleichung 7) noch die entsprechende Bogenlänge:

$$s_0=\frac{c-c'}{\varepsilon}=\frac{c}{2\varepsilon}\left(2+e^{\frac{\varepsilon g}{c}}-e^{-\frac{\varepsilon g}{c}}\right).$$

Also, wenn $\sigma=s-s_0$ der vom tiefsten Punkte an gezählte Bogen ist:

$$11)\qquad \frac{2\varepsilon\sigma}{c}=e^{\varepsilon\xi}-e^{-\varepsilon\xi}-2.$$

Die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varepsilon}{c}s+\frac{c'}{c},\quad \text{oder}\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\varepsilon\sigma}{c},$$

Digitized by Google

gibt noch eine wichtige Eigenschaft der Kettenlinie. Es ist nämlich:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} l,$$

wenn l der Winkel ist, den die Tangente der Curve mit der Axe der x macht, und es findet also zwischen Bogenlänge und Tangentenwinkel die Beziehung statt:

12) $$\sigma = \frac{c}{\varepsilon} \operatorname{tg} l.$$

Verstehen wir unter s_1 die Bogenlänge der Evolute der Kettenlinie, so ist die Bezeichnung für letztere bekanntlich:

$$s_1 = \frac{d\sigma}{dl} \text{ d. h. } s_1 = \frac{c}{\varepsilon \cos l^2}.$$

Will man die Gleichung derselben u und v in rechtwinkligen Coordinaten haben, so ist zu setzen:

$$v = \int \cos l ds_1, \qquad u = \int \sin l ds_1,$$

also:

$$v = \frac{2c}{\varepsilon} \int \frac{\sin l dl}{\cos l^2}, \qquad u = \frac{2c}{\varepsilon} \int \frac{\sin l^2 dl}{\cos l^2}$$

$$v = \frac{2c}{\varepsilon \cos l}, \qquad u = \frac{c}{\varepsilon} \left(\frac{\sin l}{\cos l^2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1 - \sin l}{\cos l} \right);$$

aus diesen Ausdrücken lässt sich leicht l eliminiren.

Ist r der Krümmungsradius der Kettenlinie, so hat man:

$$d\sigma = r dl, \text{ also: } \frac{c}{\varepsilon} = r \cos l^2, \quad r = \frac{c}{\varepsilon \cos l^2}.$$

Der Krümmungsradius ist also umgekehrt proportionnl dem Quadrate des Cosinus des Tangentenwinkels.

Die Kettenlinie löst auch eine wichtige Aufgabe der Variationsrechnung.

Suchen wir nämlich diejenige unter allen Curven von gleicher Länge, welche den tiefsten Schwerpunkt hat. Sind ξ, η die Coordinaten des Schwerpunktes, x, y die laufenden Coordinaten, so ist:

$$S\eta = \int y ds.$$

Es muss also:

$$\int y ds = \int y \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ein Minimum sein, unter der Bedingung, dass $S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$ constant bleibt. Nach den Regeln der Variationsrechnung ist für diesen Fall:

$$\delta \int (y + \lambda) \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0,$$

wo λ eine Constante ist. Man erhält:

$$d \int (y + \lambda) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int \left[ds - d\left((y + \lambda) \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y,$$

und es ist also zu setzen:

$$ds = d\left((y + \lambda) \frac{dy}{ds} \right),$$

also:

$$s = (y + \lambda) \frac{dy}{ds} + \mu,$$

wo μ eine neue Constante ist, und neue Integration gibt:

$$(s - \mu)^2 = (y + \lambda)^2 + \nu^2$$

$$y = \sqrt{(s - \mu)^2 - \nu^2} - \lambda.$$

Digitized by Google

Setzt man für y seinen Werth:

$$y = \int \sin l ds$$

und differenzirt, so ergibt sich:

$$\sin l = \frac{d}{ds}\sqrt{(s-\mu)^2 - \nu^2} = \frac{s-\mu}{\sqrt{(s-\mu)^2 - \nu^2}},$$

woraus sich leicht ergibt:

$$\nu \operatorname{tg} l = s - \mu,$$

Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung 12) überein, wenn man angemessen die Constanten bestimmt, und es hat also diese Curve die aufgeführte Eigenschaft.

Suchen wir jetzt diejenige Seilcurve, welche entsteht, wenn das Seil von einer seiner horizontalen Projection proportionalen Last angegriffen wird. Dieser Fall tritt bei den sogenannten Ketten- oder Hängebrücken ein, wo die Last in der horizontalen Brücke allein besteht, wenn man das Gewicht der Kette vernachlässigt.

Nimmt man die X, Y eben wieder in der durch die Endpunkte der Kette gehenden senkrechten Ebene, und behält die Bezeichnungen der vorigen Aufgabe bei, so zeigt sich wie dort, dass

$$X = Z = 0,$$

also die Curve eben ist. Wir haben aber jetzt:

$$Yds = -\varepsilon dx.$$

Die Gleichungen 1) geben nun:

$$T\frac{dx}{ds} = c, \quad T\frac{dy}{ds} = \varepsilon x + c_1,$$

$$C\frac{dy}{dx} = \varepsilon x + c_1,$$

und durch Integration:

$$cy = \frac{\varepsilon}{2}x^2 + c_1 x + c_2.$$

Die Curve ist somit eine Parabel.

Die Constanten werden bestimmt, wenn man die bekannten Werthe der Coordinaten der beiden Endpunkte einsetzt, und die Länge des Seils als bekannt annimmt.

Seilmaschinen (Statik).

Eine Maschine, an welcher die Uebertragung der Bewegung mittels der Seile stattfindet. Solche Maschinen sind Göpel, Radwelle, Flaschenzüge u. s. w.

Seilpolygon (Statik).

Ein solches wird von einem Seile gebildet, das nicht continuirlich, sondern nur an einzelnen Punkten von Kräften angegriffen wird.

Wirke in Punkt A_1 des Seiles eine Kraft P_1, welche diejenigen Winkel deren Cosinus α_1, β_1, γ_1 sind, mit den Axen macht. Wir nehmen an, dass A_1 ein ganz bestimmter Punkt des Seiles ist, was z. B. der Fall ist, wenn daselbst mit Hülfe eines Knotens ein Gewicht angebracht ist. In den Punkten A_0 und A_2 des Seiles zu beiden Seiten von A_1 mögen auch Kräfte wirken. Es wird dann in A_1 von A_0 aus eine Spannung $-t$, und in A_0 von A_1 aus die entgegengesetzte $+t_0$, stattfinden, und zwar in der Richtung der Linie A_0A_1, eben so wirkt in A_1 von A_2 aus Spannung t_1 und von A_1 aus in A_2 Spannung $-t_1$. Seien jetzt die Cosinus der Winkel, welche A_0A_1 mit den Axen macht a_0, b_0, c_0, die von denen, welche A_1A_2 macht, a_1, b_1, c_1, so hat man im Falle des Gleichgewichts für Punkt A_1 die Gleichungen:

$$P_1\alpha_1 - t_0 a_0 + t_1 a_1 = 0$$
$$P_1\beta_1 - t_0 b_0 + t_1 b_1 = 0$$
$$P_1\gamma_1 - t_0 c_0 + t_1 c_1 = 0$$

Sind nun n solcher Knoten

$$A_0, A_1 \ldots A_{n-1}$$

vorhanden, und wirkt in jedem derselben z. B. in A_s eine Kraft P_s unter den Winkeln, deren Cosinus a_s, b_s, c_s sind, mit den Axen, ist t_s ferner die von A_{s+1} ausgehende Spannung in A_s und macht Linie A_sA_{s+1} Winkel mit den Axen, deren Cosinus sind a_s, b_s, c_s, so hat man für jeden Punkt drei Gleichungen:

1) $$P_s a_s - t_{s-1} a_{s-1} + t_s a_s = 0$$
$$P_s \beta_s - t_{s-1} b_{s-1} + t_s b_s = 0$$
$$P_s \gamma_s - t_{s-1} c_{s-1} + t_s c_s = 0.$$

Dies sind im Ganzen drei n Gleichungen.

Für die beiden äussersten Punkte A_0 und A_{n-1} sind besondere Annahmen

nöthig. Seien dieselben z. B. fest, so sind die Coordinaten dieser Punkte völlig bestimmt. Es fallen dann die sechs Gleichungen für A_0 und A_{n-1} weg, so dass das System 1) aus drei $n-6$ Gleichungen besteht. — Zu diesen Gleichungen kommen die $n-1$ bekannten:

$$2) \qquad a_s^2+b_s^2+c_s^2=1.$$

Sei ferner k die Länge der Graden A_0, A_{n-1}, und mache sie, Winkel mit den Axen, deren Cosinus λ, μ, ν sind, so hat man, da

$$A_0, A_1, A_2 \ldots A_{n-1}, A_0$$

ein geschlossenes Vieleck ist, wenn man noch mit l_s die Länge einer der Graden A_s, A_{s+1} bezeichnet:

$$3) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-2} l_s a_s = k\lambda,$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-2} l_s b_s = k\mu,$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-2} l_s c_s = k\nu.$$

Die Anzahl der Gleichungen 1, 2, 3 ist offenbar:

$$3n-6+n-1+3=4n-4$$

und aus diesen sind die Unbekannten:

$$a_0, a_1 \ldots a_{n-2}, \quad b_0, b_1 \ldots b_{n-2},$$

$$c_0, c_1 \ldots c_{n-2}, \quad t_0, t_1 \ldots t_{n-2},$$

offenbar ebenfalls $4n-4$, zu bestimmen.

Sind die beiden Endpunkte ganz frei, so fallen die Gleichungen 3) weg. Die Anzahl der Gleichungen 1) ist aber $3n$, in den ersten drei kommt dann eine Spannung t_{-1} und in den letztern drei eine Spannung t_{n-1} vor, die beide gleich Null zu setzen sind, da keine entsprechenden Punkte vorhanden sind, von welchen dieselben ausgehen. Die Anzahl der Gleichungen 1) und 2) ist dann $4n-1$, welche zur Bestimmung der $4n-4$ Unbekannten dienen, und ausserdem noch drei Bedingungen geben, welche die an den Endpunkten angebrachten Kräfte erfüllen müssen. Diese Bedingungen erhält man, wenn man in der ersten Gleichung 1) für s bezüglich $0, 1 \ldots n-1$ setzt, und alle diese Gleichungen addirt, ebenso aber mit der zweiten und dritten Gleichung 1) verfährt. Nämlich:

$$4) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1} P_s a_s = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} P_s \beta_s = 0,$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} P_s \gamma_s = 0$$

sind offenbar die Bedingungsgleichungen dafür, dass alle Kräfte P in ihrer Richtung an irgend einem Punkte angebracht, sich in Gleichgewicht halten.

Bildet das Seil ein geschlossenes Polygon, so fällt Punkt A_0 mit A_{n-1} zusammen. Die Spannungen t_{n-1} und t_{-1} kommen dann wirklich vor. Die letzten drei Gleichungen 1) werden aber mit den ersten drei identisch, so dass dies System nur aus $3n-3$ Gleichungen besteht. Die Gleichungen 3) werden:

$$\Sigma l_s a_s = \Sigma l_s b_s = \Sigma l_s c_s = 0;$$

man hat also mit den Gleichungen 2), deren Anzahl jetzt n ist, im Ganzen $4n-4$, welche zur Bestimmung der Grössen

$$t_{-1}, t_0 \ldots t_{n-1}, \quad a_{-1}, a_0 \ldots a_{n-1},$$

$$b_{-1}, b_0 \ldots b_{n-1}, \quad c_{-1}, c_0 \ldots c_{n-1}$$

ausreichen.

Es können aber auch die Kräfte verschiebbar angebracht sein, wie dies z. B. bei Gewichten der Fall ist, welche nicht an Knoten sondern auf Ringen befestigt sind. Möge dies an den auf einander folgenden r Punkten:

$$A_{q+1}, A_{q+2} \ldots A_{q+r}$$

stattfinden.

Nach statistischen Gesetzen muss in diesem Falle die Richtung der Kraft P_k den Winkel der Linien A_{k-1}, A_k und A_k, A_{k+1} halbiren, und da P_k die Diagonale des Parallelogramms ist, welches die nach diesen Linien gerichteten Spannungen A_{k-1} und A_k machen, so müssen dieselben gleich sein. Man hat also in diesem Falle:

$$t_q = t_{q+1} = t_{q+2} = t_{q+r}.$$

Dagegen sind in den Gleichungen 3) die Grössen $l_q, l_{q+1}, l_{q+2} \ldots l_{q+r}$ un-

Digitized by Google

bekannt, und nur durch die Gleichung:

$$l_q + l_{q+1} + \ldots + l_{q+r} = L,$$

wo L die bekannte Länge des Seiles von A_q bis A_{q+r+1} ist, verbunden.

Sind die wirkenden Kräfte Gewichte, also in der Richtung der Schwere, die wir als Axe der z nehmen, so ist:

$$\alpha = \beta = 0, \quad \gamma = 1,$$

und die Gleichungen 1) haben die Gestalt:

5) $t_{s-1} a_{s-1} = t_s a_s$, $t_{s-1} b_{s-1} = t_s b_s$

$P_s + t_{s-1}$, $c_{s-1} + t_s c_s = 0$.

Aus den beiden ersten ergibt sich:

$$\frac{a_s}{a_{s-1}} = \frac{b_s}{b_{s-1}},$$

also:

$$a_1 = \mu_1 a_0,$$
$$b_1 = \mu_1 b_0,$$
$$a_2 = \mu_2 a_0 \ldots a_{k-1} = \mu_{k-1} a_0,$$
$$b_2 = \mu_2 b_0 \ldots b_{k-1} = \mu_{k-1} b_0.$$

Die beiden ersten Gleichungen 3) werden also:

$$k\lambda = a_0 (1 + \Sigma\mu_s), \quad k\mu = b_0 (1 + \Sigma\mu_s).$$

Nimmt man noch an, dass die Ebene YZ mit der durch A_0 und A_{n-1} gelegten Vertikalebene zusammenfällt, so ist $\lambda = 0$, also auch $a_0 = 0$, und somit:

$$a_1 = a_2 \ldots a_{n-1} = 0.$$

Das Seilpolygon liegt ganz in der Ebene YZ. Ist ϑ_s der Winkel der Seite A_s, A_{s+1} mit der Richtung der Schwere, so ist:

$$c_s \cos \vartheta_s, \qquad b_s = \sin \vartheta_s,$$

also:

$$t_s = \frac{t_0 \sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_s}$$

und die dritte Gleichung 5) wird:

$$P_s = t_0 \sin \vartheta_0 (\cot \vartheta_{s-1} - \cot \vartheta_s),$$

oder:

$$P_s = t_0 \frac{\sin \vartheta_0 \sin (\vartheta_s - \vartheta_{s-1})}{\sin \vartheta_{s-1} \sin \vartheta_s},$$

Setzt man $s = 1$, so kommt:

$$P_1 = \frac{t_0 \sin \vartheta_0 \sin (\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_0}$$

und wenn man die vorhergehende Gleichung durch diese dividirt:

$$\frac{P_s}{P_1} = \frac{\sin (\vartheta_s - \vartheta_{s-1})}{\sin (\vartheta_1 - \vartheta_0)} \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_0}{\sin \vartheta_s \sin \vartheta_{s-1}},$$

und die Gleichungen 3) geben, wenn ϱ der Winkel ist, welchen die Linie $A_0 A_s$ mit den Axen macht:

$$k \sin \varrho = \Sigma l_s \sin \vartheta_s,$$

$$k \cos \varrho = \Sigma l_s \cos \vartheta_s.$$

Sind nur vier Punkte gegeben, wovon also der erste und letzte fest sind, so hat man:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\sin (\vartheta_2 - \vartheta_1) \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_0}{\sin (\vartheta_1 - \vartheta_0) \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1}$$
$$= \frac{\sin \vartheta_0 \sin (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin \vartheta_2 \sin (\vartheta_1 - \vartheta_0)},$$

welche Gleichung zu verbinden ist mit:

$$l_0 \sin \vartheta_0 + l_1 \sin \vartheta_1 + l_2 \sin \vartheta_2 = k \sin \varrho$$
$$l_0 \cos \vartheta_0 + l_1 \cos \vartheta_1 + l_2 \cos \vartheta_2 = k \cos \varrho.$$

Sind nur drei Punkte gegeben, so reichen die Gleichungen:

$$l_0 \sin \vartheta_0 + l_1 \sin \vartheta_1 = k \sin \varrho$$
$$l_0 \cos \vartheta_0 + l_1 \cos \vartheta_1 = k \cos \varrho$$

zur Bestimmung der Winkel aus.

Seilreibung, siehe Reibung.

Seite (Geometrie).

Die Strecke der Begrenzung eines Polygons, welche zwischen zwei nächsten Ecken liegt.

Seitenkraft (Componente, Statik).

Jede von den zwei, bezüglich drei Kräften, worin sich eine gegebene nach dem Parallelogramm oder Parallelepipedon der Kräfte zerlegen lässt.

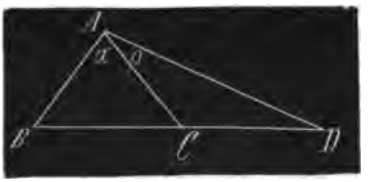
Seitwärtseinschneiden (Geodäsie).

Das Verfahren, welches man anwendet, um die Entfernung eines zugänglichen Punktes A von zwei andern B und C zu finden, die nicht zugänglich, deren Entfernung aber bekannt, und in deren verlängerte Richtung man gelangen kann.

Da man nach Punkt D in der Verlängerung von BC (Fig. 392) gelangen kann, so kann man Winkel $BDA = \delta$ und von A aus Winkel $BAC = \alpha$, Winkel $CAD = \beta$ messen. Ferner ist $BC = a$

Digitized by Google

Fig. 392.



bekannt. Gesucht sind $AB=x$, $AC=y$. Es ist Winkel $ABC = 2R - \alpha - \beta - \delta$, Winkel $ACB = \beta + \delta$, also in Dreieck ABC:

$$x = \frac{e \sin(\beta + \delta)}{\sin \alpha},$$

$$y = \frac{e \sin(\alpha + \beta + \delta)}{\sin \alpha}.$$

Semiparabola (Geometrie).

So wird zuweilen die Curve genannt, deren Gleichung ist:

$$y^m = ax^{m-1}.$$

Sexagesimalrechnung (Arithmetik).

Die Rechnung mit sechzigtheiligen Brüchen. Sie ist namentlich dann anzuwenden, wenn es sich um Masse handelt, welche wie Zeit- und Winkelgrössen in Minuten und Secunden getheilt werden. Man hat für diese Rechnung besondere Multiplicationstafeln angefertigt, so wie eigene (die sogenannten logistischen) Logarithmentafeln.

Sextant (Messkunst).

Ein Winkelmessinstrument, welches 60 Grad umfasst (vergl. den Artikel: Spiegelsextant).

Sicherheitsventil (Maschinenlehre), siehe Dampfmaschine und Wasserdampf.

Sieden — Siedepunkt (Wärmelehre), siehe Wärme und Thermometer.

Siderischer Monat (Chronologie und Astronomie).

Die Zeit in welcher der Mond seine Bahn am Himmel durchläuft, also zu demselben Fixsterne zurückkehrt, zum Unterschiede von dem sinodischen Monate, der von einem Neumonde bis zum andern dauert. Der siderische Monat ist der kürzere, da sich die Sonne in dem Sinne wie der Mond vorwärts bewegt.

Der siderische Monat hat:

27 T. 7 h 43′ 11″,5

der sinodische Monat

29 T. 12 h 44′ 2″,9.

Siderischer Tag (Sterntag, Chronologie und Astronomie).

Die Zeit, in welcher die Erde eine vollständige Drehung um ihre Axe macht, d. h. in Bezug zum Sternenhimmel dieselbe Stellung hat.

Der Sonnentag steht dem siderischen gegenüber, er gibt die Zeit von einer Mitternacht zur andern, oder von einem Mittag zum andern an, wo also die Erde in Bezug zur Sonne in dieselbe Lage kommt. Da die Erde sich in derselben Richtung um die Sonne bewegt, in welcher sie sich um ihre Axe dreht, so muss der siderische Tag der kürzere sein, und da nach Verlauf eines Jahres die Erde in ihre alte Stellung zur Sonne tritt, so hat ein Jahr genau einen Sternentag mehr als es Sonnentage hat.

Siderisches Jahr (Chronologie und Astronomie).

Die Zeit, in welcher die Erde in dasselbe Himmelszeichen wieder eintritt. Zum Unterschiede vom tropischen Jahre, welches von einem Durchgang durch den aufsteigenden Knoten bis zum andern geht. Wegen des Vorrückens der Knoten (Präcision), unterscheidet sich das siderische Jahr vom tropischen, das erstere hat 365,25673 mittlere Sonnentage, das letztere deren 365,2422008. Während das siderische Jahr constant ist, findet dies nicht ganz vollständig beim tropischen statt.

Simpsonsche Regel (Analysis und Geometrie).

Eine gewisse Art der mechanischen Quadratur. — Ist $ANQPB$ (Fig. 393) ein zu bestimmender Flächeninhalt. Setzen wir $AB = y_0$, $NQ = y_2$, und ziehen durch den Halbirungspunkt M von AN eine dritte Ordinate $PM = y_1$. Sei ferner $AN = x$. Der betrachtete Flächeninhalt zerfällt in den gradlinig begrenzten

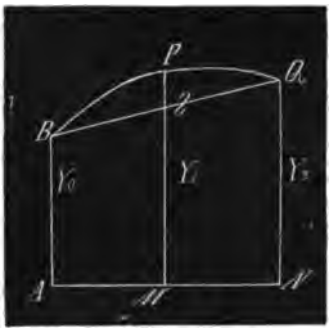
$$BQNA = (y_0 + y_2)\frac{x}{2}$$

und das Segment $BPQS$. Nehmen wir an die Curve BPQ wäre ein Parabelstück so ist bekanntlich:

$$BPQS = \frac{1}{3}\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)x,$$

Digitized by Google

Fig. 393.



also der ganze Flächeninhalt näherungsweise:

$$F = (y_0 + 4y_1 + y_2)\frac{x}{6}.$$

Es ist offenbar ein Näherungsausdruck für $\int y dx$, wenn y_0, y_1, y_2 der Anfangs-, mittlere und Endwerth für y sind, und man kann diesen Ausdruck auch für cubische Messungen anwenden, z. B. wenn y_0, y_1, y_2 Querschnitte, x die Höhe vorstellen.

Von einem allgemeineren Standpunkte haben wir diese Formeln in dem Artikel: Quadraturen abgeleitet (Abschnitt: mechanische Quadratur).

Hat man statt drei Ordinaten deren $n+1$:

$$y_0, y_1, y_2 \cdots y_n,$$

so ist offenbar, indem man das Verfahren wiederholt:

$$F = \frac{2x}{6n}(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_3 + 4y_3 + y_4 + y_4 + \cdots),$$

woraus sich ergibt:

$$F = \int y dx = \frac{x}{3n}[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})],$$

wo die Anzahl der Ordinaten ungrade sein muss.

Die erste einfache Formel kommt auch in der Stereometrie vor, wo sie zuweilen genau richtig ist.

Versteht man unter y_0. y_1, y_2 Querschnitte, unter x die Höhe, so hat man den im Artikel: Raumlehre (Abschnitt 15, VI) enthaltenen Satz, der für alle von zwei parallelen Ebenen und graden Linien begrenzten Körper gilt. — Jedoch gilt dieser Satz auch für gewisse von zwei parallelen Grundflächen im übrigen von krummen Linen begrenzte Körper.

Legt man nämlich irgend einen den Grundflächen parallelen Querschnitt durch den Körper, dessen Inhalt gleich u, z die Entfernung von einer Grundfläche, findet dann zwischen u und z die Bezeichnung statt:

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$

dann ist offenbar, wenn h die Entfernung der Grundflächen von einander, J der körperliche Inhalt des betrachteten Körpers ist:

$$J = \int_0^h (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3)\, dz = a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2} + a_2 \frac{h^3}{3} + a_3 \frac{h^4}{4}.$$

Seien jetzt g und G die Inhalte der beiden Grundflächen, γ der des in der Mitte zwischen beiden liegenden Querschnittes, so ist da g, γ, G bezüglich den Werthen 0, $\frac{h}{2}$ und h von z entsprechen:

$$g = a_0,$$

$$\gamma = a_0 + a_1 \frac{h}{2} + \frac{a_2}{4} h^2 + \frac{a_3}{8} h^3,$$

$$G = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$J = \frac{h}{6}(g + 4\gamma + G).$$

Digitized by Google

Die obige Bedingung für α ist erfüllt bei Kugeln, Ellipsoiden, überhaupt Flächen zweiter Ordnung, und ist hier sogar $a_s = 0$. Dieser Satz findet sich in vielen Elementar-Lehrbüchern und wird hier die obige Integration durch die bekannten Summirungen ersetzt.

Sinus (Trigonometrie).

Die Länge des von dem einen Schenkel eines Winkels α, den man gleich der Einheit nimmt, auf den andern gefällten Lothes. Das Zeichen des Sinus ist $\sin \alpha$ (vergleiche den Artikel: Trigonometrie). Was den Namen Sinus anbetrifft, so weiss man dessen Ursprung nicht sicher.

Godin nimmt an, dass er aus der Abkürzung s. ins. für *semissis inscriptarum* (Hälfte der Sehne) entstanden sei.

Nach Andern soll das arabische Wort Ischaib für Sehne den Buseneinschnitt eines Hemdes bezeichnen, und dies mit sinus wieder gegeben sein.

Sinuscide (Geometrie).

So wird ab und zu die Curve genannt, deren Gleichung $y = \sin x$ ist.

Sinus versus, Quersinus (Trigonometrie).

Dieser jetzt selten gebrauchte Ausdruck ist bestimmt durch die Formel:

$$\sin \text{vers}\, \alpha = 1 - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha^2}{2}.$$

Situationskalkul (calculus situs).

Wird mit Leibnitz die rein algebraische Auffassung der räumlichen Grössen genannt. Die verschiedene Lage der Linien z. B. wird durch Anwendung verschiedener Vorzeichen symbolisirt. In wiefern auch die Richtungsunterschiede, also die Winkel, welche verschiedene Linien mit einer gegebenen machen, etwa durch Einführung des Imaginären nach Gauss's Theorie mit Nutzen für die Geometrie algebraisch aufgefasst werden können, bleibt noch immer fraglich.

Ein Buch unter dem Titel: „Situationskalkul" hat Scheffler diesem Gegenstande gewidmet. Viel wichtiger erscheint auf dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft die umgekehrte Aufgabe der Versinnlichung der Begriffe des Calculs durch geometrische Anschauung, wie also z. B. das Gaussische Imaginäre, und diejenigen Betrachtungen, welche Riemann als *calculus situs* bezeichnet hat.

Skiagraphien, siehe Schattenzeichnung.

Societätsrechnung (praktische Arithmetik), siehe Gesellschaftsrechnung.

Sohle (Markscheidekunst).

Die horizontale Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, wird auch zuweilen für cosinus gebraucht.

Solstitien, Sonnenwenden (Astronomie).

Die Punkte der scheinbaren Sonnenbahn, worin sie am weitesten vom Aequator entfernt ist. Es gibt deren zwei. Die zwei Parallelkreise, in welchen sie liegen, werden als Wendekreise bezeichnet. Diese Punkte sind: 1) das Sommersolstitium — ihm entspricht der Wendekreis des Krebses, für die nördliche Erdhälfte der längste Tag und der Sommeranfang; 2) das Wintersolstitium, dem der Wendekreis des Steinbocks, der kürzeste Tag und Winteranfang der nördlichen Erdhälfte entsprechen.

Sommer (mathematische Geographie).

Im astronomischen Sinne die Zeit vom längsten Tage bis zum Herbstäquinoctium.

Sonnencyclus (Chronologie).

Eine Periode von 28 Jahren, nach deren Verlauf die entsprechenden Tage des Jahres wieder auf dieselben Wochentage fallen, wie im Anfange. Da nämlich ein Gemeinjahr 365 Tage hat, so wird, wenn der erste Januar eines solchen z. B. ein Montag ist, der des nächsten ein Dienstag sein u. s. w., beim Schaltjahre aber tritt ein Vorrücken um 2 Tage ein, also in je vier Jahren ein Vorrücken um 5, und in je 28 eines um 35 Tage, womit der alte Wochentag des ersten Januars wieder eintritt. Obgleich im Gregorianischen Kalender, wo in drei auf einander folgenden Jahrhunderten ein Schalttag ausfällt, dies nur im Laufe des Jahrhunderts richtig ist, so nimmt man auch hier einen Sonnencyclus von 28 Jahren an. Uebrigens beginnt man diesen Cyklus 9 Jahre vor Christus.

Um also die Stelle des Sonnencyclus zu finden, in der ein gegebenes Jahr liegt, muss man zu der Jahreszahl 9 addiren, und durch 28 dividiren, der Rest ist der Sonnencyclus, bleibt kein Rest, so ist derselbe 28. Z. B.:

$$1864 + 9 = 1873, \quad \frac{1873}{28} = 66\frac{25}{28}.$$

Es ist also der Sonnencyclus des Jahres 1864 gleich 25.

Digitized by Google

Sonnenfinsterniss (Astronomie).

Das Verdecken eines Theiles der Sonne oder der ganzen durch den Mond. Eine solche kann nur zur Zeit des Neumondes eintreten, und müssen dann Erde, Sonne und Mond in einer graden Linie, der Mond aber wie immer in der Neumondszeit zwischen Erde und Sonne liegen. — Wird die Sonne ganz verdeckt, so ist die Finsterniss total. Bei einer solchen ist es also nöthig, dass der (einigermaassen veränderliche) scheinbare Halbmesser des Mondes grösser als der der Sonne wird. Jedoch ist eine solche nie für die ganze Erde total, weil die Gesichtslinien der einzelnen Orte der Erde nicht dieselben sind.

Andere Sonnenfinsternisse heissen partial, dieselben können auch ringförmig sein; dies geschieht, wenn der nicht verdeckte Theil der Sonne einen Ring bildet, central ist eine solche für diejenigen Gegenden, wo die Mittelpunkte von Sonne und Mond in eine Linie mit der Erde fallen.

Was die Brechung der Sonnenfinsternisse anbetrifft, so vergleiche den Artikel: Astronomie.

Sonnen- und Planetenrad (Maschinenlehre).

Ein Räderwerk, welches aus zwei Zahnrädern *AB* und *DE* (Fig. 394) besteht. Das äussere wird durch einen Arm *CD* mit dem innern verbunden, und dieser Arm wird durch eine Stange *FD* umgedreht, welche mit *DE* fest verbunden ist.

FD hängt entweder an einen Krummzapfen *MF*, dessen Welle *M* mit der Wellenaxe *O* parallel läuft, derart, dass *MF* = *OD* ist, oder sie ist an das Ende eines Balanciers geschlossen, mit welchem sie sich auf und ab bewegt.

Im ersten Falle bleibt *FE* sich selbst stets parallel und indem einerseits das Rad *DE* auf der Peripherie von *AO* andrerseits um seine Axe *D* läuft, hat seine Peripherie die wahre Umfangsgeschwindigkeit Null. Im zweiten Falle tritt fast dasselbe ein, wenn die Stange sehr lang ist.

Sei der Halbmesser von $CA = r$, seine Umfangsgeschwindigkeit gleich v, der Halbmesser von *DE* gleich ϱ, seine Umfangsgeschwindigkeit φ, die Winkelgeschwindigkeit des Armes *CD* gleich ω, so ist:

$$v = \varphi + r\omega.$$

Fig. 394.

Seien nun u, u_1, u_2 die bezüglich $v\varphi$ und $r\omega$ entsprechenden Umdrehungszahlen, so ist:

$$ur = u_1\varrho + u_2 r.$$

Die absolute Umdrehung des Getriebes ist:

$$u_1 - u_2 = \frac{r}{\varrho}(u - u_2) - u_2 = \frac{r}{\varrho}u - \frac{r+\varrho}{\varrho}u_2,$$

welche gleich Null zu setzen ist, also

$$\frac{u}{u_2} = 1 + \frac{\varrho}{r}.$$

Durch Auswahl der Radhalbmesser kann also diesen Verhältnissen $\frac{u}{u_2}$ eine beliebige Grösse gegeben und so der Welle *M* eine Schnelligkeit der Umdrehung gegeben werden, welche zu der von *C* in einem beliebigen Verhältnisse steht; *M* läuft z. B. halb so schnell wie *C*, wenn $r = \varrho$ ist.

Sonnentag (Chronologie) (vgl. siderischer Tag).

Da die Sonnentage im Laufe des Jahres nicht gleich lang sind, so unterscheidet man den wahren Sonnentag vom mittleren; der mittlere ist derjenige, welcher ent-

Digitized by Google

steht, wenn man das Sonnenjahr in grade so viel gleiche Tage theilt, als es ungleiche hat. Was hier von Sonnentagen gesagt wird, gilt natürlich von der Zeit im Allgemeinen. Die Beziehung der mittleren zur wahren Sonnenzeit gibt die Zeitgleichung (vergl. diesen Artikel). Wahren Sonnentagen würde dann die scheinbare Bewegung der Sonne entsprechen, wenn dieselbe sich gleichmässig und im Aequator statt ungleichmässig und in der Ekliptik, wie dies wirklich geschieht, bewegte.

Sonnenuhr (Chronologie und Gnomonik).

Ein Apparat, welcher durch die Bewegung des Schattens eines Zeigers die wahre Sonnenzeit, d. h. die Stundenwinkel der Sonne angibt.

Der Zeiger muss stets der Weltaxe oder Erdaxe parallel sein. Die Ebene, auf der der Schatten verzeichnet wird (Uhrebene), kann beliebig geneigt sein.

Um das erstere zu erreichen, kann man zunächst einen Vertikalstift im Mittelpunkte einer Anzahl auf horizontaler Ebenen gezeichneter, concentrischer Kreise aufstellen. Da in gleichen Zeitunterschieden vor und nach Mittag die Schattenlängen eines solchen gleich sind, so braucht man nur diejenigen Punkte zu merken, wo die Endpunkte des Schattens denselben Kreis treffen, und den eingeschlossenen Bogen zu halbiren. Der durch den Halbirungspunkt gehende Radius ist dann die Mittagslinie. Da die Weltaxe in der durch die Mittagslinie gehenden Vertikalebene liegt und für jeden Ort einen bekannten Winkel (geographische Breite) mit der Mittagslinie macht, so ist die Lage der Weltaxe zu bestimmen.

Sei dies geschehen, und der Zeiger parallel mit derselben auf der Uhrebene aufgestellt. Sei EAB (Fig. 395) dieselbe, HMR die Meridianebene, $ETHRB$ der Horizont. Wir denken uns durch den Fusspunkt T des Zeigers eine Kugel gelegt, welche diese drei Ebenen also in grössten Kreisen schneiden. Der Durchschnitt TM der Uhrebene mit dem Meridian heisst Meridianlinie; wenn der Schatten des Zeigers durch sie geht, ist wahre Mittagszeit. Ueber dem Durchschnitte ETB von Uhrebene und Horizont wird in ersterer ein Loth TA in der Uhrebene errichtet; dies nennen wir Basis der Uhr. Der Winkel ATM zwischen Basis und Meridianlinie sei gleich a. Sei ferner TZ die Zenithrichtung, so ist das sphärische Dreieck ZAM offenbar bei A rechtwinklig, und Winkel $AZM = R - \delta$, wenn wir mit $\delta = ETH$ die Declination der Uhrebene oder den Winkel, den der Durchschnitt der Uhrebene und der des Meridians mit dem Horizonte machen, bezeichnen.

Sei $\Delta = ZA$ die Neigung der Uhr gegen die Zenithrichtung, so sind δ und Δ bekannt, und man hat:

$$\operatorname{tg} a = \sin \Delta \cot \delta.$$

Sei ferner $ZM = b$, $AMZ = c$, so ist noch:

$$\cot b = \cot \Delta \sin \delta, \quad \cos c = \cos \Delta \cos \delta.$$

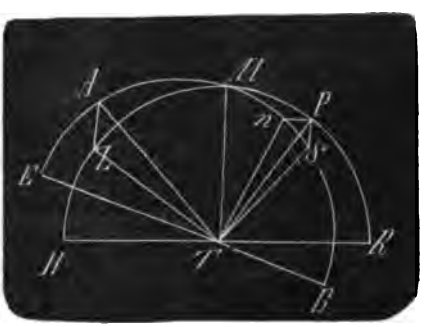
Sei ferner P der Pol, und Ebene PTS senkrecht auf der Uhrebene, so nennt man TS die Substylarlinie. Sei der Winkel derselben mit der Meridianlinie MTS gleich f, und die Neigung PTS der Weltaxe gegen die Uhrebene gleich g, so ist im rechtwinkligen Dreieck MPS, $PM = R - b - \varphi$, wenn unter φ die geographische Breite verstanden wird.

Noch setzen wir Winkel $MPS = h$, dann ist:

$$\operatorname{tg} f = \cot(\varphi + b) \cos c,$$

$$\sin g = \cos(\varphi + b) \sin c,$$

Fig. 395.



Digitized by Google

$$\operatorname{tg} h = \frac{\cot c}{\sin(\varphi + b)}.$$

Da die Lage von TM bekannt ist, so kennt man wegen des Werthes von f auch die von TS.

Der Zeiger fällt in TP. Sei ω der Winkel der Schattenlinie und Meridianlinie, PTn ein beliebiger Stundenkreis, $MPn = s$ ist der Stundenwinkel und $MTn = \omega$. In Dreieck MnP ist also

$$PM = 90 - \varphi - b, \qquad PMn = c,$$

also:

$$\cot\omega = \frac{\cot s \sin c + \cos c \sin(\varphi + b)}{\cos(\varphi + b)}.$$

Wenn man Winkel $STn = \omega'$ setzt:

$$\operatorname{tg}\omega' = \sin g \operatorname{tg}(h - s),$$

für 1^h, 2^h, 3^h ist zu setzen:

$$s = 15°, 30°, 45° \ldots$$

Ist die Uhrebene vertikal so hat man:

$$A = a = b = 0$$

$$\operatorname{tg} f = \cos\delta \cot\varphi, \quad \sin g = \cos\varphi \sin\delta,$$

$$\cot\omega = \frac{\cot s \sin\delta}{\cos\varphi} + \cos\delta \operatorname{tg}\varphi.$$

Die Basis fällt in die Meridianlinie, durch Winkel φ ist die Substylarlinie gegeben, durch g die Weltaxe, durch ω der Schatten.

Mittagsuhren sind solche, wo die Uhrebene auf Horizont und Meridian senkrecht steht; für solche hat man:

$$A = 0, \quad \delta = \mathrm{R}, \quad a = b = f = 0,$$

$$c = \mathrm{R}, \quad g = \mathrm{R} - \varphi.$$

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} s \cos\varphi.$$

Basis, Mittagslinie und Substylarlinie fallen hier zusammen.

Ist die Uhrebene horizontal, so ist:

$$A = b = c = \mathrm{R}, \quad g = \varphi, \quad \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg} s \sin\varphi.$$

Aequinoctialuhren sind solche, wo die Uhrebene dem Aequator parallel ist. Ihre Neigung gegen den Horizont ist $90 - \varphi$. Man hat

$$A = b = -\varphi, \quad c = \mathrm{R}, \quad \omega = s.$$

Hier rückt also der Schatten für gleiche Stundenwinkel gleich weit vor.

Wir geben hier noch die Winkel, welche die Schattenlinie mit der Mittagslinie der Horizontaluhr für Berlin, d. h. unter der Breite

$$\varphi = 52° 30' 16''$$

macht.

Vormittag	ω	Nachmittag
11^h	$12° 0'$	1^h
10^h	$22° 12'$	2^h
9^h	$35° 16'$	3^h
8^h	$50° 46'$	4^h
7^h	$69° 15'$	5^h
6^h	$90° 0'$	6^h
5^h	$110° 45'$	7^h
4^h	$129° 14'$	8^h
3^h	$144° 44'$	9^h.

Es gibt auch Sonnenuhren mit vertikalem Zeiger. Derselbe ist jedoch für die verschiedenen Jahrestage in einer vorgeschriebenen Weise zu verschieben.

Sonntagsbuchstabe (Chronologie).

Bezeichnet man den ersten Januar eines Jahres mit A, den zweiten mit B u. s. w., den siebenten mit G den achten wieder mit A, und so in wiederkehrender Reihe A, B, C, D, E, F, G alle Tage des Jahres, so wird jeder Buchstabe auf einen bestimmten Wochentag fallen. Der Buchstabe, welcher in einem bestimmten Jahre dem Sonntage entspricht, heisst Sonntagsbuchstabe. Um bei den Gemeinen- und Schaltjahren nach derselben Regel verfahren zu können, gibt man dem 23. und dem 24. Februar des Schaltjahres denselben Buchstaben. Dadurch erhält das Jahr zwei Sonntagsbuchstaben, von denen der eine bis zum 23. Februar und der andere für den Rest des Jahres gilt. Der letztere tritt um eine Stelle gegen den ersten zurück, so dass wenn der erste B ist, der andere A ist u. s. w. Da im Gemeinjahr der 31. December auf denselben Wochentag als der 1. Januar trifft, so hat der 31. December denselben Buchstaben, und daher tritt in jedem Jahre der Sonntagsbuchstabe um eine Stelle gegen den des vorigen Jahres zurück. Diese Regel gilt auch bei der obigen Annahme für das Jahr nach dem Schaltjahre.

Der Sonntagsbuchstabe für ein gegebenes Jahr lässt sich leicht bestimmen. Indess ist es sehr einfach, direct für den 1. Januar den entsprechenden Wochentag zu finden. Thut man dies, so hat man den Wochentag, welcher dem A entspricht und somit leicht den Sonntagsbuchstaben.

Wir suchen die betreffenden Regel zunächst für den Julianischen Kalender. In demselben ist immer das vierte Jahr ein Schaltjahr.

Bezeichnen wir die Wochentage vom

Digitized by Google

Sonntage an mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, so dass 7 dem Sonnabend entspricht, und bemerken, dass im Jahre vor der Geburt Christi, welches wir hier mit Null bezeichnen, der erste Januar auf einen Donnerstag fällt, also mit 5 zu bezeichnen ist. Ist N die Jahreszahl und $N = 4s + k$, wo s das grösste in $N-1$ enthaltene Vielfache von 4 ist, so wird alle vier Jahr die Zahl des ersten Januars um 5 fortschreiten, derart, dass im ersten Jahre, nach dem Schaltjahre Null diese Zahl um 2, in den drei folgenden nur um 1 zunimmt, u. s. w. Die Zunahme in N Jahren ist also:

$$5s + k + 2,$$

welche Zahl zu 5 zu zählen ist. Die Zahl Z des ersten Januars ist also:

$$Z = 5s + k + 7.$$

Da aber die Zahlen 1 bis 7 in cyklischer Reihe wiederkehren, so ist nur der Divisionsrest dieser Zahl nach 7 zu nehmen. Bezeichnen wir mit $R\left(\frac{a}{b}\right)$ den Rest von a nach Divisor b, so ist:

$$Z = R\left(\frac{5s+k}{7}\right).$$

Es ist auch leicht zu sehen, wie man den Wochentag jedes beliebigen Tages im Julianischen Jahre findet.

Sei nämlich d die Anzahl der Tage des Jahres vom ersten Januar bis zu dem verlangten einschliesslich, so ist $d-1$ zu Z zu zählen, so dass die entsprechende Zahl ist:

$$Y = R\left(\frac{5s+k+d+6)}{7}\right).$$

Man kann diese Formel etwas umgestalten. Es ist nämlich:

$$s = \frac{N-k-1}{4},$$

oder wenn man, wie dies doch gestattet ist, ein Vielfaches von 7 also $7\,\frac{N-k-1}{4}$ zuzählt, so erhält man:

$$s \equiv 8\,\frac{N-k-1}{4} \equiv 2N - 2k - 2$$
$$\equiv 2N + 5k + 5 \bmod 7,$$

also:

$$5s \equiv 10N + 25k + 25 \equiv 3N + 4k + 4 \bmod 7,$$

und wird dies in Y eingesetzt, so kommt:

$$Y = R\left(\frac{3N+5k+d+3}{7}\right),$$

$$Z = R\left(\frac{3N+5k+4}{7}\right),$$

wo $k = R\left(\frac{N}{4}\right)$ ist.

Diese Formel gilt für Jahre vor und nach Christus, die erstere als negativ betrachtet, wenn man, wie dies in wissenschaftlichen Rechnungen nothwendig ist, das Jahr vor Christus mit 0, das vorhergehende mit -1 bezeichnet u. s. w., eine Rechnung, die dem historisch gebräuchlichen Jahreszahlen derart entspricht, dass die vor Christus um eins vermindert und mit dem Minuszeichen versehen werden müssen.

Beispiel. Cäsar wurde am 15. März des Jahres 44 v. Chr. ermordet.

Es ist also $N = -43$, $k = 0$ (die entsprechenden Reste sind immer positiv zu nehmen).

Das Jahr ist ein Gemeinjahr, dem 15. März entspricht die Zahl:

$$d = 31 + 28 + 16 \equiv 4 \bmod 7$$
$$3N \equiv 4 \bmod 7, \quad 5k = 0,$$

also:

$$Y = \frac{4+1+4+3}{7} = 4,$$

Der betreffende Tag ist also ein Mittwoch.

Es ist jetzt die Regel für den Gregorianischen Kalender zu finden.

Hier tritt zunächst gegen den Julianischen die von den zehn im Jahre 1582 weggelassenen Tagen herrührende Veränderung ein. Der Erfolg ist offenbar, dass von den Zahlen Y oder Z, 10 oder, was dasselbe ist, 3 abzuziehen ist, was einer Hinzufügung von 4 gleichkommt. Ferner fällt vom Jahre 1700 an in immer je drei Jahren, deren Zahlen volle Hunderte bilden, 1700, 1800, 1900, der Schalttag aus, im vierten aber nicht,

Mit jedem ausfallenden Schalttage wird aber Y und Z um 1 verringert. Ist also J die in N enthaltene Anzahl der vollen Hunderte, und $J = 4\alpha + \beta$, wo α das in J enthaltene grösste Vielfache von 4 sein soll, so ist aus diesem Grunde Y und Z um $\beta + 3\left(\alpha - \frac{16}{4}\right)$ zu vermindern, oder was dasselbe ist um $12 - \beta - 3\alpha$ zu vermehren, wofür sich auch setzen lässt:

$$5 + 6\beta + 4\alpha.$$

Zählt man hier die von den zehn ausgelassenen Tagen herrührenden vier Ein-

heiten zu, so erhält man $6\beta + 4\alpha + 2$, also:

$$Y = R\left(\frac{5s + k + d + 6\beta + 4\alpha + 1}{7}\right),$$

$$Z = R\,(5s + k + 6\beta + 4\alpha + 2).$$

Auch kann man setzen, $4\alpha = J - \beta$, wofür $J + 6\beta$ gesetzt werden kann, und somit erhält man, wenn man wie vorhin auch für s substituirt:

$$Y = R\left(\frac{4N + J + 5(k+\beta) + d + 5}{7}\right),$$

$$Z = R\left(\frac{3N + J + 5(k+\beta) + 6}{7}\right),$$

wo zu setzen ist:

$$k = R\left(\frac{N-1}{4}\right), \quad \beta = R\left(\frac{J}{4}\right).$$

N ist die Jahreszahl, J das grösste darin enthaltene Vielfache von 100.

Beispiel. Friedrich Wilhelm der Dritte starb am 7. Juni 1840. Es war dies ein Pfingstsonntag.

In der That ist hier:

$$N \equiv 6 \bmod 7, \quad J = 18 \equiv 4 \bmod 7,$$

$$k = 3, \quad \beta = 2,$$

$$d = 8b + 29 + 31 + 30 + 31 + 7 \equiv 5 \bmod 7,$$

$$3N + J + 5(k+\beta) + d + 5$$
$$= 18 + 4 + 25 + 5 + 5 \equiv 1 \bmod 7.$$

Der betreffende Tag ist also wirklich ein Sonntag.

Spannkraft (Mechanik), s. Elasticität.

Spannung (Mechanik).

Gleichbedeutend mit Druck. Die Einwirkung, welche zwei Punkte A und B, die irgend wie mechanisch mit einander verbunden sind, auf einander ausüben. Die Spannung, welche A auf B ausübt, ist der, welche B auf A ausübt, stets gleich aber entgegengesetzt gerichtet.

Sparren (Statik).

Bei Holz- und Eisenconstructionen werden diejenigen Stücke so genannt, deren Längedimension gegen den Horizont geneigt ist.

Sparrenschub (Statik).

Der Druck, den ein Sparren gegen seine Stützen ausübt. Ueber die Berechnung desselben vergl. den Artikel: Holz- und Eisenconstruction.

Species Arithmetik).

Die Grundoperationen des Rechnens. Zu den vier Species des bürgerlichen Rechnens: Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren kommen bei der wissenschaftlichen Behandlung der Arithmetik, noch das Potenziren, Wurzelausziehen und Logarithmiren hinzu, so dass man sieben Species hat.

Specifisches Gewicht (Statik und Physik).

Das Verhältniss des Gewichts der Raumeinheit eines gegebenen Körpers zu dem der Raumeinheit eines andern, den man als Einheit betrachtet. Gewöhnlich ist der letztere Körper das Wasser.

Tafel der specifischen Gewichte.

Namen der Stoffe.	Specifisches Gewicht.
Ahornholz	0,75
Alabaster	2,70
Alaun	1,71
Alkohol	0,79
Antimon	6,70
Apfelbaum	0,79
Asphalt	1,11
Basalt	2,79
Bergtheer	1,13
Bernstein	1,07
Bimstein	1,28
Birkenholz vom Stamm frisch	0,70
Birkenholz vom Stamm trocken	0,58
Birnbaum, Stamm, trocken	0,66
Blei, gegossen engl.	11,60
Blei, gegossen deutsch	11,35
Bleispath	6,46
Blende	4,07
Bolus	1,97
Borax	1,72
Brasilienholz	1,03
Braunkohle	1,28
Braunstein	3,72
Buchen, siehe Roth- und Weissbuchen.	
Buchsbaum, französisch	0,91
Buchsbaum, holländisch	1,03
Buchsbaum, brasilianisch	1,03
Campecheholz	0,91
Caoutchouc	0,93
Cedernholz, wild	0,59
Cedernholz, palästin.	0,61
Cedernholz, indisches	1,31
Cedernholz, amerikan.	0,56
Citronenholz	0,73
Cocosbaumholz	0,73
Copal	1,10

Digitized by Google

Namen der Stoffe.	Specifisches Gewicht.
Cypressenholz	0,64
Dachschiefer	2,67 – 3,50
Ebenholz von den Alpen	1,05
spanisches	0,80
indisches	1,21
amerikan.	1,33
Eibenbaumholz, holländisch.	0,79
spanisches	0,81
Eichenholz, s. Sommer- u. Steineichen.	
Eis	0,92
Eisen, gegossenes	7.25
geschmied. brandenb.	7.60
englisches	7.79
Eisenhammerschlag	5,48
Elfenbein	1,87
Erde, lehmicht, fest	
frisch	2,06
trocken	1,93
Erde, Garten-, fest	
frisch	2,05
trocken	1.68
Erde, magere, trocken	1,34
Erdkobalt	2,24
Erdpech	1,12
Erlenholz, Stamm trocken	0,62
Erlenholz, Stamm frisch	0,79
Splint, trocken	0,53
Eschenholz, Stamm, trocken	0,84
Zweige, desgl.	0,73
Feldspath	2,28
Feldstein	2,50
Fernambukholz	1,01
Feuerstein	2,65
Fichtenharz	1,07
Fichtenholz frisch	0,55
Fichtenholz trocken	0,48
Fliederholz, spanisches	0,77
Flusspath	3,20
Franzosenholz	1,33
Galmei	3,38
Gelberde	2,24
Glas, grünes Fensterglas	2,64
Krystallglas	2,95
engl. Spiegelglas	2,45
Flintglas, engl.	3,41
französ.	3,18
Körners	3,34
Frauenh.	3.78
Glimmer	2,79
Gold, reinstes, gegossen	19,26
gehämmert	19,36
Ducaten	19,35
französ. 22 car. gegossenes	17,49
Gold, französ. 22 car. geschlagenes	17,59
guineïsches	18,89
von engl. Guineen	17,63
Granat, gemeiner	3,71
edler	4,03
Granatbaum	1,35
Granit, gemeiner	2,75
ägyptischer	2,65
Graphit	2,34
Grobkohle	1,52
Guajakharz	1,20
Gummi, arabisches	1,45
Gummilack	1,14
Gyps, dichter	1,87 – 2,96
faseriger	2,30
körniger	2,25
speremberger	2,23
gebrannter do.	1,81
frisch gegossener do.	1,29
gegossener, trockener	0,97
Gypsspath	2,32
Haselnussholz	0,60
Holunderbaum	0,69
Holzkohle	0,28 – 0,44
Hornblende	3,17
Kadmium, gegossen	8,60
gehämmert	8,69
Kalk, kieselsaurer	2,83
phosphorsaurer	3,18
Kalkmörtel frisch	1,79
Kalkmörtel trocken	1,64
Kalkspath	2,71
Kalkstein, dichter	2,57
rüdersdorfer	2,40
körniger	2,78
gebr. rüdersdorfer	1,27
Kannelkohle	1,24
Kiefernholz, Kern frisch, harzig	0,72
Kern u. Splint, frisch	0,64
Kern, trocken	0,62
Kern u. Splint, trocken	0,60
Splint, trocken	0,40 – 0,57
Kieselerde	2,66
Kieselkupfer	2,10
Kirschbaumholz	0,71
Knochen (von Ochsen)	1,66
Kobalt, gegossen	8,71
gestreckt	9,15
Kobaltglanz	6,29

Digitized by Google

Namen der Stoffe.	Specifisches Gewicht.	Namen der Stoffe.	Specifisches Gewicht.
Kochsalz	2,14	Mennige	9,14
Korkholz	0,24	Mergel, erdiger	1,61
Kreide, schwarze	2,21		2,40
weisse	2,23		2,80
Kupfer, gegossen	8,79	harter	2,70
gehämmert	9,00	Messing, gegossen	8,40
schwedisches	8,78	Draht	8,54
japanisches	8,43	Mispelbaumholz	0,94
Kupferdraht	8,88	Mohnöl	0,92
Kupferera, rothes	5,85	Molybdän	8,05
Kupfer-Glanz	5,69	Mühlenstein	2,49
Kies	4,16	Nickel, gegossen	8,28
Lambertsnussholz	0,60	gestreckt	8,67
Lava	2,76	Olivenbaumholz	0,93
Lehm, fett, frisch	1,66	Olivenöl	0,92
hart	1,52	Onyx	2,73
mit Stroh vermischt (Staken) frisch	1,19	Opal	1,91
trocken	1,07	Orangenbaumholz	0,70
Limonienbaumholz	0,70	Pappel, s. Schwarz- u Weisspappel.	
Lindenholz	0,60	Pech	1,15
Lorbeerbaumholz	0,82	weisses	1,07
Luft, atmosph. bei 10° R.	0,0012823	Pechblende	6,55
Magnesia	2,30	Pechkohle	1,32
Magneteisenstein	5,09	Pechstein	2,21
Magnetkies	4,40	Pflaumenbaumholz	0,78
Mahagoniholz	1,06	Phosphor	1,73
Malachit	3,83	Eisen	6,70
Mangan	7,51	Kupfer	7,12
Marmor, aegypt., grün	2,67	Platin, gegossen	20,35
baireuther	2,84	gehämmert	21,25
blankenburger	2,67	gezogen	21,45
carrarischer	2,72	Porphyr	2,75
Marmor, elbingeroder	2,85	Porzellan, berliner	2,29
italien., schwarzer	2,71	französisches	2,15
weisser	2,73	sächsisches	2,49
parischer	2,84	wiener	2,23
schlesisch. Jaspism.	2,74	Probirstein	2,41
blauer	2,71	Quarz	2,65
grüner	2,70	Quecksilber, deutsches	14,00
weisser	2,65	englisches	13,59
schwedischer	2,72	Quittenbaumholz	0,70
Mastix	1,06	Rothbuchen, Stamm, trocken	0,76
Mastixbaum	0,85	Splint, trocken	0,66
Mauer mit Kalkmörtel von rüdersdorfer Bruchsteinen frisch	2,46	Rothgiltigerz	5,62
trocken	2,40	Rothtannen, siehe Fichten.	
v. magdeburgischen Sandstein frisch	2,12	Rübsamenöl	0,91
trocken	2,05	Salpeter	1,93
von Ziegelstein frisch	1,68	feuerbeständig	2,74
trocken	1,53	Sand, gemeiner, trocken	1,64
Mauerstein, siehe Ziegel.		aus Bächen	1,90
Maulbeerbaumholz	0,90	mit Wasser gesättigt	1,94
		Sandarach	1,07
		Sandelholz, weisses	1,04
		rothes	1,13
		gelbes	0,81

Digitized by Google

Namen der Stoffe.	Specifisches Gewicht.
Sandstein	2,32
magdeburger	2,05
Sassafrassholz	0,48
Schiefer	2,67
Schieferthon	2,64
Schmergel	3,92
Schwarzgiltigerz	6,08
Schwarzpappel, trocken	0,38
Schwefel, geschmolzen	1,99
gediegener	2,08
krystallisirt	2,03
Blumen	2,09
Kies	4,75
Säure	1,97
Wismuth	6,50
Schwerspath	4,54
Selen	4,31
Selenblei	7,70
Serpentin	2,55
Silber (16 löth.) geschmolzen	10,41
geschlagen	10,62
Silberglanz	7,05
Silberhornerz	6,69
Oxyd	7,20
Sommmereichen:	
Kern, trocken	0,76
Kern und Herz, trocken	0,66
Splint, trocken	0,61
Stamm, frisch	0,85
Wurzel, frisch	0,88
Zweige, frisch	0,74
Speckstein	2,60
Speiskobalt	2,46
Stahl, geschlagen	7,82
ungeschlagen	7,83
kölnischer	8,21
von engl. Feilen	8,19
Steinsichen:	
Stamm, frisch	1,04
Stamm, trocken	0,74
Wurzel, frisch	1,10
Zweige, frisch	0,82
Steinkohle	1,38
Steinkohlentheeröl	0,77
Steinöl	0,79
Steinsalz	2,28
Strahlkies	4,76
Stroh, zusammengebunden	0,05
zusammengepresst	0,12
Talkerde	2,35
Tannenholz, weisses	0,55
rothes	0,50
Taxus, siehe Eichenbaum.	
Terpentinöl	0,84
Thon, Töpfererde	1,80 bis 2,68
Thonerde, reine	1,50
Thran	0,93
Titan	5,30
Titaneisen	4,75
Topas	3,52
Traganth	1,32
Tripel	1,60
Ulmenh., Stamm, trocken	0,67
Uran	9,00
Wachholder	0,56
Wach, gelbes	0,96
weisses	0,97
Walkererde	1,75
Wallnussbaumholz	0,67
Wasser	1,00
Weidenholz	0,58
Weingeist, höchst rect.	0,83
Weissbuchenholz, Stamm, trocken	0,78
Weissgiltigerz	5,32
Weisspappel, trocken	0,53
Wismuth, gegossen	9,83
Wolfram	7,60
Ziegel, gebrannt	1,41 bis 2,21
Zink, gehämmert	7,86
geschmolzen	7,21
Blüthe	3,35
Oxyd	5,51
Spath	4,44
Vitriol	1,91
Zinn, gegossen	7,29
gehämmert	7,80
Zinnober	8,09

Specifische Wärme (Wärmelehre).

Diejenige Wärmemenge, welche dazu erforderlich ist, die Gewichtseinheit eines Körpers (1 Pfund) um 1 Grad (gewöhnlich Centesimalgrad) zu erwärmen.

Als Einheit der Wärmemenge nimmt man hierbei in der Regel die Wärme, welche die Gewichtseinheit Wasser um ein Grad erwärmt.

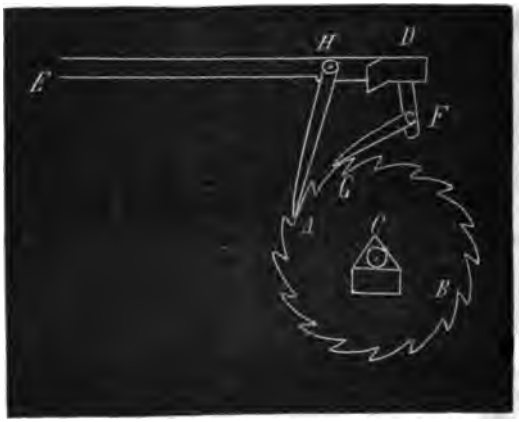
Sperrklinke, siehe Sperrrad.

Sperrrad (Maschinenlehre).

Wird namentlich angewandt, um eine schwingende Bewegung in eine langsame Kreisbewegung zu verwandeln. — Das Sperrrad hat nämlich Zähne, die nur nach einer Seite hin abgeschrägt sind.

Zu jedem Sperrrade gehören zwei Sperrklinken, welche an der schwingenden Be-

Fig. 396.



wegung Theil nehmen, zwischen die Zähne greifen, und die Umdrehung nach einer Seite bewirken, die nach der andern aber unmöglich machen. Diese Sperrklinken können an einem Hebel EDF (Fig. 396) angebracht sein, welcher um D drehbar ist. Wird derselbe bei E niedergedrückt, so schiebt Klinke HA das Rad um einen Zahn fort, und ebenso gleitet Klinke FG zurück. Beim Heben des Hebels geschieht das Umgekehrte.

Versieht man die Klinken mit Widerhaken, so geschieht die Bewegung in umgekehrter Richtung. Das Kronsperrrad (Fig. 397) hat mit dem Hebel auf welchem sich die Klinken befinden dieselbe Axe. Bei dem Hinschwingen des Hebels schiebt Klinke D, beim Zurückschwingen E das Rad weiter.

Sei beim gewöhnlichen Sperrrad

$$ACB = DCE = \alpha$$

der Theilungswinkel (Fig. 398), so rückt bei jedem Schwunge des Hebels MK das Rad um α Grad vor. Ist also n die Anzahl der Zähne, so hat man $\alpha = \frac{360}{n}$. Halbire man den Winkel α durch Linie CL und CN, mache LO und NB gleich dem Hebelarme, der die Sperrklinken enthält, und ziehe in O und R Lothe auf CO und CR, die sich in M schneiden, so ist M der Drehungspunkt des Hebels. $MO = AF$, $MR = EG$ sind die entsprechenden Klinkenlängen.

Sei der Schwingungswinkel:

$$KMK_1 = FMF_1 = GMG_1 = \beta,$$

und der Halbmesser $CA = r$. Der Hebelarm $LO = NR = r_1$, so ist annähernd:

$$r_1 = \frac{DE}{\beta} = \frac{\alpha r}{\beta},$$

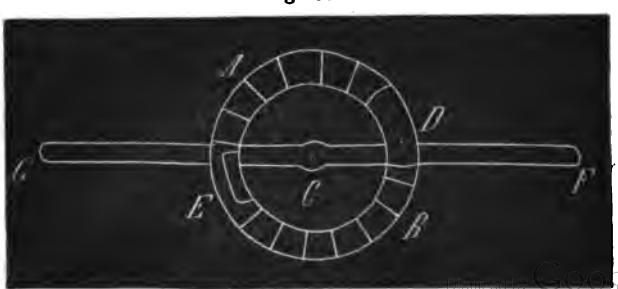
wo β im Bogenmaass genommen ist.

Sei $MO = l$ $MR = l_1$, Winkel $ACD = \delta$, so kommt ferner:

$$l = \frac{(r + r_1)\cos\delta - (r - r_1)}{\sin\delta}$$

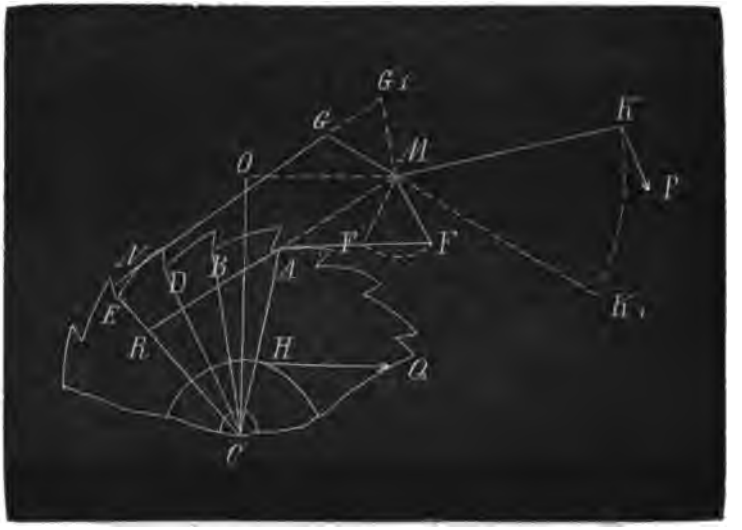
$$l_1 = \frac{(r + r_1) - (r - r_1\cos\delta}{\sin\delta}.$$

Fig. 397.



Digitized by Google

Fig. 398.



δ ist hier der Winkel, um welchen die Angriffspunkte A und D der Klinken von einander abstehen. Wirkt Kraft P an Hebelarm $MK = a$, und Last Q an Arm $CH = b$, so ist:

$$P : Q = r_1 b : r\alpha = \alpha b : \beta a.$$

Sphärik (Geometrie).

Die Lehre von den Constructionen auf der Kugeloberfläche.

Sphärische Abweichung (Optik).

Gleichbedeutend mit Abweichung von der Kugelgestalt, vgl. die Artikel: Optik und Licht.

Sphärisches Dreieck (Geometrie).

Ein Dreieck, welches von drei grössten Kreisen auf der Kugel gebildet wird.

Sphärische Trigonometrie, vergl. den Artikel: Trigonometrie.

Sphäroid (Geometrie).

Gleichbedeutend mit Rotationsellipsoid.

Spiegel (Optik).

Eine Fläche, welche Licht reflectirt. (siehe die Artikel: Optik und Licht, auch Wellenlehre.)

Spiegelfernrohr, siehe Fernrohr.

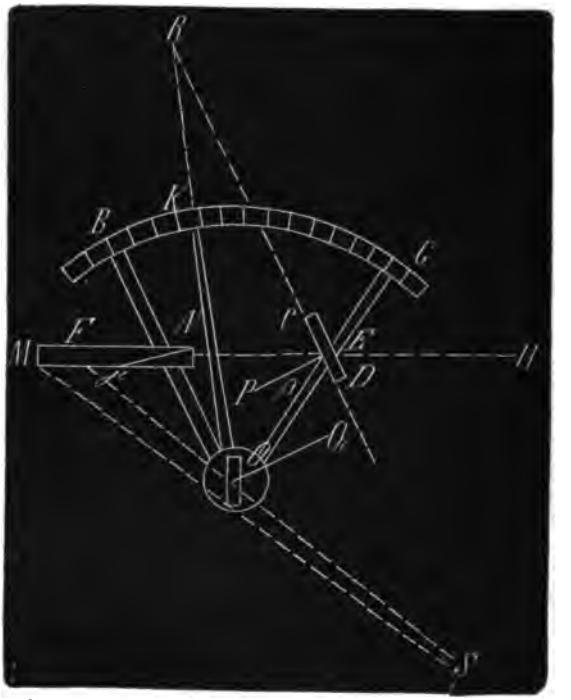
Spiegelsextant (Optik).

Instrument, welches zur Messung derjenigen Winkel dient, welche die vom Auge nach zwei entfernten Punkten gehenden Strahlen mit einander machen.

Er besteht aus einem Bogen BG von 60 Grad (Fig. 399) und zwei Schenkeln AB und AG gewöhnlich von Messing. Schenkel AK trägt einen auf der Ebene des Bogens senkrechten kleinen Spiegel. Auf Schenkel AG in E befindet sich ein zweiter Spiegel CD, der Richtung AB parallel, und ebenfalls senkrecht auf der Kreisebene. Dieser Spiegel ist jedoch nur auf der untern Hälfte belegt. In gleicher Höhe mit E ist auf AB das Fernrohr MN angebracht, so dass man durch den obern Theil von CD einen Gegenstand H in der Sehlinie. in dem untern belegten Theil aber zugleich das reflectirte Bild eines andern Gegenstandes sehen kann. Damit dies geschehe, muss der reflectirte Strahl die Richtung NE haben, und da $NE = NA$ ist, (NE ist die Seite eines Sechsecks) und beide Linien mit AB also auch mit CD gleiche Winkel bilden, so hat dieser Strahl vor der Reflexion die Richtung AE, was der Fall ist, wenn ein vom Gegenstand S ausgehender Strahl SA von Spiegel A in dieser Richtung reflectirt wird

Um nun die scheinbare Entfernung zweier Gegenstände S und H von M aus gesehen, d. h. den Winkel SMH zu finden, stelle man das Instrument so, dass man H in Richtung MH sieht, während Spiegel A in der Richtung AB sich befindet, drehe dann diesen Spiegel bis er in die Richtung AK fällt, und so, dass

Fig. 399.



das Bild von S den Gegenstand deckt. Es lässt sich dann Winkel SMH bestimmen.

Sei $SMH = \gamma$, $BAK = \delta$. Sei AQ das auf Spiegel A errichtete Einfallsloth, so ist Winkel

$$SAG = 2\,GAQ = 2\,\mathrm{R} - 2\,GAH,$$

aber

$$GAK = 60 - \delta,$$

so dass man hat:

$$SAG = 60 + 2\,\delta.$$

Ferner ist:

$$\gamma = SAG - AEN = 60 + 2\,\delta - 60,$$

so dass also

$$\gamma = 2\,\delta$$

ist. Zählt man also auf der Theilung BG jeden halben Grad für einen vollen, so gibt der Drehungswinkel die scheinbare Entfernung der Punkte S und H an.

Spiegeltelescop.

Gleichbedeutend mit Spiegelfernrohr.

Spindel (Maschinenlehre).

Stehende Welle von geringem Durchmesser.

Spirale (Geometrie).

Eine Curve, die sich um einen Punkt herum in unendlich viel Windungen legt. Sie kann also in der Art entstanden gedacht werden, dass man eine grade Linie um einem festen Punkte dreht, dabei aber mit zunehmendem Centriwinkel den Endpunkt des Radius weiter herausrücken lässt.

Gewöhnlich versteht man unter Spiralen nur ebene Curven.

Um die Gleichungen von Spiralen aufzustellen, bedient man sich oft der Polarcoordinaten, und zwar darum, weil, wenn ϑ der Centriwinkel r der Radius vector ist, jede Curve, bei welcher r gleichzeitig mit ϑ wächst, oder immer abnimmt, wenn ϑ wächst, eine Spirale ist.

Alle Gleichungen, die auf gradlinige Coordinaten x und y bezogen, Curven geben, worin x und y diese Eigenschaft haben, geben auf Polarcoordinaten bezogen Spiralen. Dergleichen sind also z. B.

$$r = a\vartheta.$$

Die Curve heisst archimedische Spirale.

$$r^2 = p(\vartheta - \alpha).$$

Parabolische Spirale.

Digitized by Google

$$r\vartheta = A$$

Hyperbolische Spirale.

Es ist zu bemerken, dass letztere für $r = 0$, $\vartheta = \infty$ gibt, also diese Curve sich, so zu sagen, asymptotisch um den Anfangspunkt der Coordinaten herumwickelt.

$$\vartheta = a \operatorname{tg} r$$

Logarithmische Spirale.

Ueber die merkwürdigen Eigenschaften derselben, vergleiche die Artikel: Evolvente, Transformation und Trajectorie.

Auch kann man als Coordinaten den Winkel, welchen die Tangente der Curve mit einer Axe macht l, und die Bogenlänge s einführen. Auch hier ergeben sich Spiralen, wenn l mit s zugleich wächst, oder abnimmt, wenn l wächst. Z. B. die Gleichung:

$$s = \varphi(l),$$

wo $\varphi(l)$ eine ganze rationale Function von l $n$ten Grades ist, stellte die Kreisevolvente $n$ten Grades vor, wenn man die Evolvente der gewöhnlichen Kreisevolvente als Kreisevolvente zweiten Grades u. s. w. bezeichnet. Diese Curven bilden eine Spirale oder auch deren zwei, die in eine Spitze zusammenlaufen (vgl. den Artikel: Trajectorie).

Die logarithmische Spirale hat die Eigenschaft, in den eben angeführten Coordinaten eine ganze ähnliche Gleichung zu geben, wie in Polarcoordinaten. Offenbar ist nämlich:

$$\operatorname{tg} l = \frac{dy}{dx} = \frac{r\frac{d\vartheta}{dr} + \operatorname{tg}\vartheta}{-r\operatorname{tg}\vartheta\frac{d\vartheta}{dr} + 1} = \frac{a + \operatorname{tg}\vartheta}{1 - a\operatorname{tg}\vartheta},$$

also, wenn man $a = \operatorname{tg}\alpha$ setzt:

$$\operatorname{tg} l = \operatorname{tg}(\alpha + \vartheta), \qquad l = \vartheta + \alpha.$$

Es ist ferner:

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{r^2\frac{d\vartheta^2}{dr^2} + 1} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}\alpha^2} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

also

$$s = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{e^{\frac{\vartheta}{\operatorname{tg}\alpha}}}{\cos\alpha} = \frac{e^{\frac{1-\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}}}{\cos\alpha}.$$

Also wenn man

$$\frac{e^{-\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\beta}$$

setzt:

$$l = a\lg(\beta s),$$

wofür man bei angemessener Wahl des Anfangspunktes auch

$$l = a\lg s$$

schreiben kann.

Spiralkorb (Maschinenlehre).

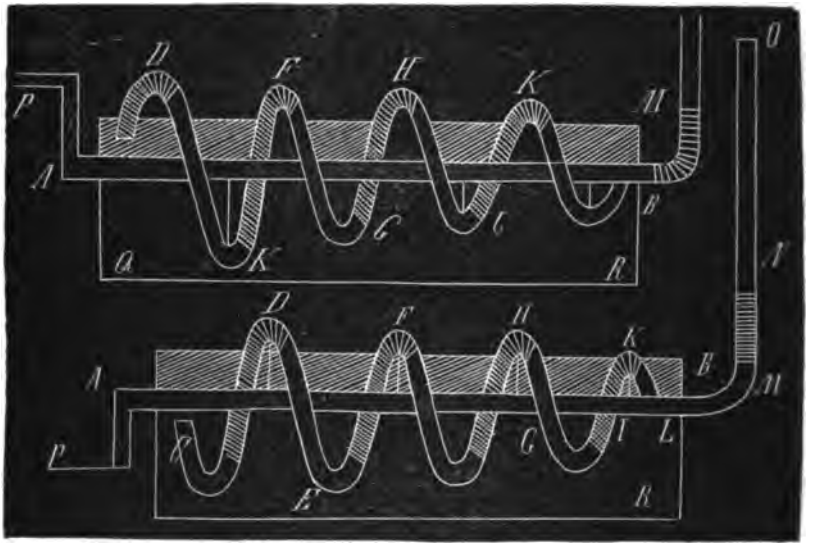
Der Korb oder die Trommel, um den sich beim Hand- oder Pferdegöpel das Seil wickelt, wenn dieser Korb nicht cylindrisch, sondern konisch geformt ist.

Spiralpumpe (Maschinenlehre).

Eine schraubenförmig um eine horizontale Welle gewundene Röhre (Schlange), welche zum Heben des Wassers dient. Die Welle muss sich nahe dem Niveau des Wassers befinden, und die Schlange communicirt mit dem unteren Ende einer vertikalen Röhre, in welcher das Wasser in die Höhe steigt. Die Kurbel P (Fig. 400), dient zum Drehen der Welle AB, die Schlange OGL, die mit der Welle fest verbunden ist, hat bei C ein weites Mundstück (Horn) und steht bei L mit dem hohlen Wellenende in Verbindung. Offenbar werden beim Drehen, je nachdem das Horn über oder unter der Welle sich befindet, die Theile D, F, H . . ., oder C, E, G . . . mit Wasser gefüllt sein, die andern mit Luft. Im Horne CD (Fig. 400) hat die Luft den atmosphärischen Druck k, in EF kommt hiezu noch ein Druck, der der Höhe h_1 des Wasserbogens DE, in GH ein der Höhe h_2 von FG entsprechender Druck u. s. w.

Digitized by Google

Fig. 400.



k soll ebenfalls durch die Höhe einer Wassersäule gemessen sein: also in der letzten Windung in LM ist der ganze Druck:

$$k + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \ldots$$

und damit Gleichgewicht herrsche, muss in der Steigröhre BMN sich eine Wassersäule von der Höhe:

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \ldots$$

befinden, da der atmosphärische Druck k noch hinzu kommt. Da l während einer Umdrehung die Wasserbögen und Luftbögen nach B hin vorrücken, so müssen angemessen der Verdichtung der Luft, die Windungen der Schnecke abnehmen. Zugleich muss um eine hinreichende Wassermenge zu fassen, das Horn, welches ja nur $\frac{1}{4}$ Windung enthält, doch dieselbe Wassermenge aufnehmen können, als die halbe Windung DE, dies geschieht, wenn der Querschnitt des Horns doppelt so gross als der der Schlange ist. Sei ϱ der Querschnitts-Halbmesser der Schlange, ϱ_0 der des Horns, so ist also:

$$\varrho_0^2 = 2\varrho^2, \quad \varrho_0 = \varrho\sqrt{2}.$$

Sei jetzt r_1 der Halbmesser der ersten Windung, so ist die Wassermenge in DE:

$$V = \pi\varrho^2 \pi r_1 = \pi^2 \varrho^2 r_1,$$

und die Höhe $h_1 = DQ$ derselben:

$$h_1 = 2(r_1 - \varrho).$$

Ist jetzt die Anzahl der Wasserbögen n, V_n das Luftvolum in der letzten Windung, so ist nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$\frac{V_n}{V} = \frac{k}{k+h};$$

wo k und h die obige Bedeutung haben. V_n entspricht also die Länge:

$$l_n = \frac{V_n}{\pi\varrho^2} = \frac{k}{k+h}\pi r_1$$

hierzu kommt der Wasserbogen πr_1, so dass man für die Länge JKR der letzten Windung hat:

$$l + l_n = \left(\frac{k}{k+h} + 1\right)\pi r_1$$

und der Halbmesser r_n dieser Windung ergibt sich, wegen $2\pi r_n = l + l_n$ offenbar:

$$r_n = \frac{2k+h}{k+h}\,\frac{r_1}{2}.$$

Wenn also die Windungshalbmesser in arithmetischer Reihe abnehmen, so ist die Differenz dieser Reihe:

$$d = \frac{r_1 - r_n}{n-1} = \frac{h}{k+h}\,\frac{r_1}{2(n-1)}$$

und die Windungshalbmesser beziehlich:

$$r_1,\ r_1(1-d),\ r_1(1-2d) \ldots r_1(1-\overbrace{n-1}d).$$

Digitized by Google

Sei β^0 der Centriwinkel der letzten Windung l, so ist:

$$\beta : 360 = l : l + n,$$

also:

$$\beta = 360 \frac{k+h}{2k+h} = \frac{180\, r_1}{r_n}$$

und die Höhe dieser Windung:

$$h_n = r_n = \varrho - r_n \cos\beta = r_n(1 - \cos\beta) - \varrho.$$

Die mittlere Wasserhöhe in allen Umdrehungen:

$$\frac{h_1 + h_n}{2} = \left(1 + \frac{2k+h}{k+h} \frac{1-\cos\beta}{4} r_1 - \tfrac{1}{2}\varrho\right).$$

Die erforderliche Anzahl n der Windungen ist:

$$n = \frac{2h}{h_1 + h_n}.$$

Macht die Welle u Umdrehungen in der Minute, so wird in der Secunde gehoben das Wasserquantum:

$$Q = \frac{u}{60} V = \frac{u}{60} n^2 \varrho^2 r_1.$$

Da die Maschine aber auch eine entsprechende Menge Luft comprimirt, so ist die Arbeit eine doppelte, und ergibt sich dieselbe, wenn γ das Gewicht eines Kubikfusses Wasser ist:

$$L = Qh\gamma + Qk\gamma ln\left(\frac{k+h}{k}\right),$$

unter ln den natürlichen Logarithmus verstanden.

Vermischt sich in der Steigröhre die Luft mit dem Wasser, und dehnt sich erstere also dabei allmälig aus, so ist die Steighöhe dann gleich:

$$h + kln \frac{k+h}{k}.$$

Bleiben aber Wasser und Luft getrennt, so setzt sich die Steighöhe aus der Summe der Luft- und Wassersäulen zusammen. Sei ϱ_1 der Halbmesser der Steigröhre, so ist die einem Wasserbogen entsprechende Wassersäule: $\frac{l\varrho^2}{\varrho_1^2}$, die Anzahl dieser und der Luftsäulen:

$$m = \frac{h\varrho_1^2}{l\varrho^2}.$$

Die oberste Luftsäule, die durch eine Wassersäule von der Länge $\frac{h}{m}$ gedrückt ist, hat die Länge: $\frac{kh}{mk+h}$, die nächst tiefere, welcher die Länge $\frac{2h}{m}$ der drückenden Wassersäule entspricht: $\frac{kh}{mk+2h}$ u. s. w., also die ganze Förderhöhe ist:

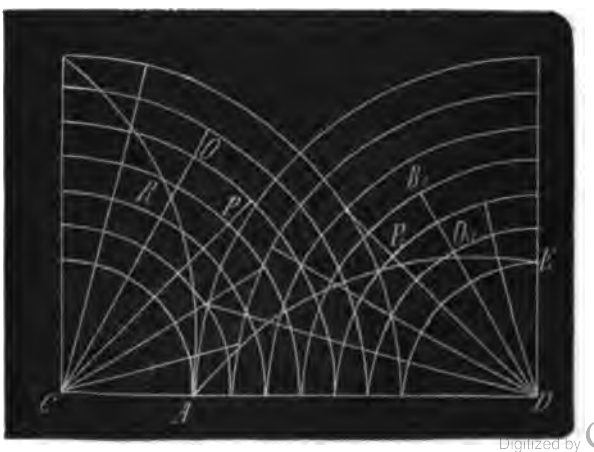
$$h + \frac{kh}{mk+h} + \frac{kh}{mk+2h} + \ldots + \frac{kh}{mk+mh}.$$

Wirke die Umdrehungskraft P der Welle auf den Arm a, so ist:

$$P = \frac{30L}{nua} = \frac{V\gamma}{2\pi a}\left(h + l\frac{k+h}{k}\right).$$

Die Spiralzunge wird auch bloss zum Comprimiren der Luft verwendet; dann ist der Welle eine geneigte Gestalt zu geben, damit das Wasser nicht gehoben werde, sondern ausfliesse. In dieser Ge-

Fig. 401.



Digitized by Google

stalt kann die Spiralsunge als Gebläse (Schraubengebläse) dienen.

Spiralrad (Maschinenlehre).

So werden Zahn- oder Riemenräder genannt, die in einer logarithmischen Spirale geformt sind. Der Zweck derselben ist, eine veränderliche Umdrehungsgeschwindigkeit zu erzielen.

Sei ACB (Fig. 401) ein Stück des einen, ADE des andern Rades, die Kreisbogen, welche durch die verschiedenen Punkte gelegt sind, geben die Drehungen der entsprechenden Punkte an. Damit Punkte P und P_1, Q und Q_1 zur Berührung kommen, muss zunächst die Summe ihrer Entfernungen bezüglich von C und D constant sein, also wenn s und s_1 die anfänglichen Radien CA und DA, r und r_1 beliebige zusammengehörige Radien sind, so hat man

$$s + s = r + r_1,$$

ferner müssen, wenn die Entfernungen PQ und P_1Q_1 sehr klein sind, die Winkel RPQ und $R_1P_1Q_1$ gleich sein. Der eine Winkel $R_1P_1Q_1$ ist jedoch negativ zu nehmen. Sind also $\alpha\alpha_1$ diese Winkel, so ist:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Sei nun $ACP = \varphi$, $ADP_1 = \varphi_1$, so hat man:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{dr}{r d\varphi}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{dr_1}{r_1 d\varphi_1}.$$

Sei nun α constant, so kommt:

$$\varphi \operatorname{tg}\alpha = \ln\frac{r}{s}, \qquad r = s e^{\varphi \operatorname{tg}\alpha}$$

und ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale. Eben so ergibt sich:

$$r_1 = s_1 e^{-\varphi_1 \operatorname{tg}\alpha}.$$

Die Spiralräder werden zuweilen auch so abgeändert, dass sie eine vieleckige Grundform haben, z. B. eine quadratische (Fig. 402). Seien $CA = DE = s$ die kleinsten Halbmesser, so ergibt sich für die grössten:

$$CB = DA = s_1 = Z\sqrt{2},$$

und dem entspricht der Winkel:

$$\varphi = ACB = ADE = \frac{\pi}{4}$$

in die Gleichung der Spirale:

$$\frac{r}{s} = e^{\varphi \operatorname{tg}\alpha},$$

ist nun zu setzen, wenn man $r = s_1$ nimmt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{\pi}\ln\sqrt{2} = \frac{2}{\pi}\ln 2 = 0{,}44128,$$

also:

$$\frac{r}{2} = e^{0{,}44128\,\varphi}.$$

Bei der Berührung in A ist das Umsetzungsverhältniss (vergl. den Artikel: Rad):

$$\psi = \frac{s}{s_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7072,$$

bei der zwischen B und E dagegen:

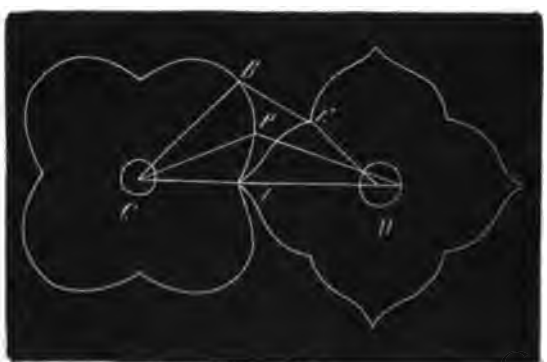
$$\psi_1 = \frac{s_1}{s} = \sqrt{2} = 1{,}4142,$$

also das Verhältniss der grössten zur kleinsten Winkelgeschwindigkeit:

$$R = \frac{\psi_1}{\psi} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2.$$

Es gibt auch conische Spiralräder, deren Zähne in Spirallinien neben einander stehen.

Fig. 402.



Digitized by Google

Sind φ_1 und φ die entsprechenden Umdrehungswinkel, so ist das Umsetzungsverhältniss:

$$\psi = \frac{d\varphi_1}{d\varphi}.$$

Nimmt man also z. B. an, dass

$$\psi = \alpha + \beta\varphi$$

sei, so hat man:

$$\varphi_1 = \int \psi d\varphi = \alpha\varphi + \frac{\beta}{2}\varphi^2.$$

Sind d der Abstand der Radaxen, r und r_1 die φ und φ_1 entsprechenden Halbmesser, so erhält man wie bei den gewöhnlichen conischen Rädern (vergl. den Artikel: Rad):

$$r = \frac{\psi d}{1+\psi}, \quad r_1 = \frac{d}{1+\psi}.$$

Wird nun die Forderung gestellt, dass sich das Getriebe n_1 mal umdreht, während das Treibrad n mal geht, so geben diese Formeln:

$$2n_1\pi = 2n\pi\alpha + \frac{\beta}{2}(2n\pi)^2,$$

$$n_1 = 2\alpha + n^2\beta\pi.$$

Ausserdem nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit des Treibrades nach n Umdrehungen auf das $p$fache steigen soll, dann ist für $\varphi = 2n\pi$, ψ $p$mal so gross als für $\varphi = 0$, also wegen $\psi = \alpha + \beta\varphi$:

$$\alpha + 2n\pi\beta = p\alpha.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$(4-n)\alpha = 2n_1 - pn\alpha,$$

d. h.:

$$\alpha = \frac{2n_1}{4+(p-1)n}$$

und

$$\beta = \frac{n_1(p-1)}{(4+(p-1)n)n\pi}.$$

Für jeden Werth von φ lassen sich dann ψ, r und r_1 berechnen.

Ist z. B. $n=2$, $n_1=3$, $p=2$, so kommt:

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{4\pi}.$$

Für $\varphi = 0$, also im Anfange der Drehung ist:

$$r = \frac{\alpha d}{1+\alpha}, \quad r_1 = \frac{d}{1+\alpha},$$

also in unserm Beispiel:

$$r = \frac{d}{2}, \quad r_1 = \frac{d}{2}$$

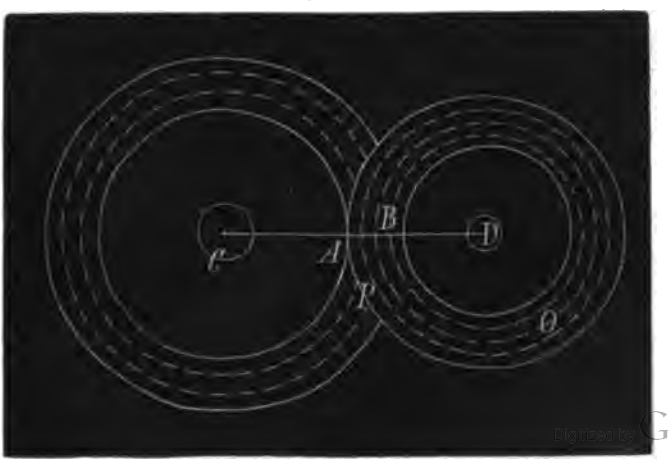
und beim Schlusse derselben in demselben Beispiele, wo $\varphi = 4\pi$:

$$r = \frac{2}{3}d, \quad r_1 = \frac{1}{3}d.$$

Hieraus ergibt sich die Theorie der conischen Spiralräder, deren Zähne schraubenförmig neben einander stehen (Fig. 403). In unserm Beispiel, während die Zähne des Treibrades CA in zwei, die des Getriebes DB in drei Windungen neben einander laufen. Zuerst ist der Eingriff in A und nach zwei bezüglich drei Umdrehungen in B.

Es gibt aber auch conische Spiralräder, die statt der Zähne durch Ketten mit

Fig. 403.



Digitized by Google

einander verbunden sind, und dann sind den Rädern schraubenförmige Windungen zu geben.

Spirische Oberfläche (Geometrie).

Sie entsteht, wenn sich ein Kreis um eine Grade, die sich in seiner Ebene befindet dreht. Die Kugel ist also ein specieller Fall derselben.

Spitze (Geometrie).

Gleichbedeutend mit Scheitel, auch mit Rückkehrpunkt.

Splint (Maschinenlehre), siehe Keil.

Sprengwerke (architektonische Statik).

Eine Construction, welche zur Unterstützung von unten dient (siehe Holz- und Eisenconstructionen).

Springbrunnen (Mechanik), siehe Ausfluss des Wassers.

Spritze (Maschinenlehre), siehe Feuerspritze.

Sprossenrad (Maschinenlehre), siehe Tret-Rad.

Spröde (Mechanik).

So heisst ein Körper, der keine Formänderung ausserhalb der Elasticitätsgrenze zulässt, ohne zu zerspringen.

Stabilität (Mechanik).

1) Allgemeines.

Wenn ein System in Ruhe ist, oder eine bestimmte Bahn unter dem Einflusse gewisser Kräfte durchläuft, (wie z. B. die Planeten, Ellipsen und die Sonne), so kann, falls man sich durch irgend einen Stoss oder andere Einwirkung die Punkte dieses Systems um ein Weniges aus der ihnen zu irgend einer Zeit zukommenden Lage gerückt denkt, (also aus der Gleichgewichtslage im Falle der Ruhe) zweierlei eintreten: Entweder die Abweichungen der Punkte von ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage oder Bewegung bleiben fortwährend nur klein, oder das System verändert immer mehr und mehr seinen Zustand gegen den ursprünglichen. Im ersten Falle heisst dieser ursprüngliche Zustand stabil, im letztern wird er gewöhnlich labil genannt.

Nehmen wir zunächst an, das System wäre ursprünglich in Ruhe und die darauf wirkenden Kräfte seien der Art, dass für sie der Satz von den lebendigen Kräften gilt, so hat man also, wenn X, Y, Z die Componenten der auf einen Punkt von Masse m wirkenden Kräfte, φ die Kräfte-Function, v die Geschwindigkeit eines Punktes ist:

$$\Sigma m\,(X dx + Y dy + Z ds) = d\varphi = \Sigma m v dv.$$

Also im Falle des Gleichgewichts, wo $v=0$, wird $d\varphi=0$. Es wird also φ ein Maximum oder Minimum sein, wenn nicht die bekannten Beschränkungen eintreten, unter welchen die Gleichung $d\varphi = 0$ keinem von beiden entspricht.

Es lässt sich nun zeigen, dass das Gleichgewicht des Systems immer dann ein stabiles sei, wenn φ ein Maximum ist.

Geben wir den Coordinaten der einzelnen Punkte x, y, z, x', y', z' ... kleine aber sonst willkürliche Zunahmen, wie sie den Verbindungen der einzelnen Punkte entsprechen, so ist nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \delta\varphi = 0.$$

Denkt man sich diese Zunahmen durch eine plötzliche Verrückung hervorgebracht, durch welche das System in Bewegung geräth, seien v ... die Geschwindigkeiten zu irgend einer Zeit, v_0 ... im Anfange der Verrückung, δx, δy, δz ... und δx_0, δy_0, δz_0 ... die Verrückungen ebenfalls bezüglich zu irgend einer Zeit und im Anfange, so gibt der Satz von den lebendigen Kräften:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m v^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 = \varphi(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z\ \ldots) - \varphi(x+\delta x_0,\ y+\delta y_0,\ z+\delta z_0\ \ldots)$$

Wenn $\varphi(x, y, z)$ ein Maximum ist, so fallen aus der Entwickelung nach Potenzen von δx, δy, δz ... die Glieder erster Dimension ganz weg, die Glieder zweiter Dimension mit umgekehrtem Vorzeichen aber lassen sich als eine Summe von Quadraten linearer Functionen von δx, δy, δz ..., die keine unabhängigen Glieder enthalten, darstellen (vergl. die Artikel: Quadrat, Maxima und Minima).

Seien $s, s_1, s_2 \ldots$ diese Function, so hat man, wenn R der Rest der Reihe ist:

$$\varphi(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z\ \ldots) = \varphi(x, y, z) - (s^2 + s_1^2 + s_2^2 + \ldots) + R.$$

Sind σ, σ_1, σ_2 ... und ϱ die Anfangswerthe von s, s_1, s_2 ... und r, ferner:

$$c = \tfrac{1}{2}\Sigma m v_0^2 + \sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots - \varrho,$$

Digitized by Google

so ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = c - (s^2 + s_1^2 + s_2^2 + \ldots) + R,$$

wo c der Annahme nach eine jedenfalls sehr kleine Grösse ist.

Zwischen den Grössen s, s_1, s_2 ... finden Beziehungen statt, welche sich aus den Verbindungen der Punkte des Systems ergeben, aber diese Beziehungen geben jedenfalls Gleichungen von der Gestalt:

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z + E\delta x_1 + \ldots = 0.$$

Aus diesem folgt, dass wenn die Verschiebungen δx, δy ... sehr klein sind, dies auch mit s, s_1 ... stattfindet und umgekehrt. Letzteres aber lässt sich leicht beweisen. Σmv^2 ist nämlich stets positiv, ebenso C, wenn man das verschwindende ϱ vernachlässigt, es muss aber, da R gegen $s + s_1^2 + s_2^2 \ldots$ verschwindet, diese Summe kleiner als c, und folglich s, s_1 ... sehr klein sein. Das Gleiche also findet zu jeder Zeit mit den Verrückungen δx, δy, δz statt. Wohl zu merken aber ist, dass keineswegs, wenn φ ein Minimum sein sollte, deshalb die Bewegung eine labile sein muss.

Der einfachste Fall ist der, dass auf einen Körper die Schwere allein wirkt. Nimmt man die Axe der x in der Richtung dieser Kraft, so erhält man:

$$\varphi = Mgx_0,$$

wenn M die Masse des Körpers, x_0 die Abscisse seines Schwerpunktes ist. Im Falle des stabilen Gleichgewichts, muss also x_0 ein Maximum sein, d. h. der Schwerpunkt sich so tief als möglich befinden. Dies ist auch selbstverständlich, da die Schwere den Schwerpunkt des Körpers zu senken strebt. Wirklich kommt der Kettenlinie die Eigenschaft des tiefsten Schwerpunktes zu (vgl. den Artikel: Seilcurve).

In diesem Falle ist es auch klar, dass, wenn der Schwerpunkt eines Körpers sich in der grössten Höhe befindet, das Gleichgewicht nur ein labiles sein kann.

2) Von der Stabilität fester Körper auf horizontaler und schiefer Unterlage.

Ein Körper, der auf einer horisontalen Grundlage steht, und auf den nur die Schwere wirkt, ist in Ruhe, wenn die durch seinen Schwerpunkt gesogene Vertikale durch die Unterlage geht, da dann der Druck derselben der Schwere das Gleichgewicht hält. Dreht man den Körper ein wenig um eine Kante, so wird er zur Ruhe sogleich wieder gelangen, wenn die neue Lage des Schwerpunkts sich noch immer über der früheren Unterlage befindet, denn dann tritt nur eine kleine Drehung um die Kante ein, die den Körper in die alte Lage bringt. Es kommt also dem Körper eine gewisse Stabilität zu, und diese wird so lange stattfinden, als die Drehung nicht so gross wird, dass der Schwerpunkt nicht mehr über der alten Unterlage sich befindet. Man kann also von einem Maasse der Stabilität sprechen, und diese wird für drehende Bewegungen grösser sein, für grössere Unterlagen, d. h. Grundflächen des Körpers als für kleinere. Die Stabilität ist Null, wenn der Körper nur auf einer Kante ruht, da dann bei jeder Drehung um dieselbe der Schwerpunkt nicht mehr über der Kante sich befinden kann.

Finde (Fig. 404) eine Drehung um Kante C statt, erregt durch eine Kraft P

Fig. 404.

in Richtung EP, sei $CE = a$ senkrecht auf P, und $CN = e$ die Entfernung der Kante, von der durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalen, auf welcher das Gewicht wirkt. Im Falle des Gleichgewichts muss also sein: $Pa = Ge$. Ist Pa grösser als Ge so findet eine Drehung statt, die den Körper aus seiner anfänglichen Lage entfernt, ist $Pa < Ge$ so wird er der alten Lage wieder zugeführt. Man kann also Ge als Maass der Stabilität bei einer Drehung um die Kante C betrachten, und dieses Maass ist folglich das Product des Gewichtes in die Entfernung zwischen C und der durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalen.

Zuweilen aber nimmt man als Maass der Stabilität die zum Umstürzen des Körpers nöthige Arbeitsgrösse, d. h. das Gewicht des Körpers multiplicirt mit der Vertikalprojection S_1N des Bogens SS_1, den der Schwerpunkt S zu machen hat, um sich senkrecht über der Kante C zu befinden, wo der Körper aufhört in stabilem Zustande zu sein. Sei (Fig. 405) $CS = CS_1 = r$, $CM = NS = e$, $CN = MS = a$, so ist:

$$S_1N = s = (r - a) = \sqrt{a^2 + c^2} - a.$$

Digitized by Google

Fig. 405.

Es ist also das Maass der Stabilität in dem jetzt angenommenen Sinne:

$$G(\sqrt{a^2+e^2}-a).$$

Dieser Ausdruck ist offenbar um so grösser, je kleiner a und je grösser e ist, daher die Stabilität desto grösser, je tiefer der Schwerpunkt und je grösser die Basis.

Ruht der Körper aber auf schiefer Unterlage AC (Fig. 406), die mit dem Horizonte AB den Winkel α macht, so wirkt in S das Gewicht $SG = G$, welches wir uns nach dem Punkte T übertragen denken können, in welchem SG die Basis schneidet. Ist also der Punkt T nicht unterstützt, so wird nicht allein ein Fortschieben des Körpers auf der schiefen Unterlage, sondern auch ein Kippen um seine Kante H entstehen. Untersuchen wir in Bezug auf letzteres die Stabilität.

Das Gewicht G lässt sich in die beiden Componenten $TV = G\cos\alpha$ senkrecht auf und $TU = G\sin\alpha$ parallel der schiefen Ebene zerlegen, und die erstere wird durch den Gegendruck der Ebene aufgehoben, wenn der Körper in T unterstützt ist; es wirkt also dann nur noch parallel der schiefen Ebene die Kraft $TU = G\sin\alpha$. Diese lässt sich ersetzen durch eine durch den Schwerpunkt gehende gleiche Kraft, und ein Paar, dessen Moment ist $SW \cdot TU$, welches eine Drehung um den Schwerpunkt hervorbringen würde, und wo SW die Entfernung des Schwerpunkts von der schiefen Ebene ist. Befindet sich nun ein Theil des Körpers auf der andern Seite von SW als ST, so ist eine solche Drehung offenbar unmöglich, da die entsprechenden Punkte Z bei der Drehung um S durch die schiefe Ebene hindurch gehen müssten.

Setzen wir also voraus, dass dies stattfände, so wird nur ein Herabgleiten stattfinden.

Das Maass der Stabilität in Bezug auf das Kippen um Kante H ist nun gleich $G \cdot HL$, wenn HL das von H auf die Senkrechte SG gezogene Loth ist. Wäre die Ebene horizontal, so wäre $G \cdot HW$ das Maass der Stabilität.

Sei nun:

$$HW = e, \qquad SW = a,$$

so erhält man:

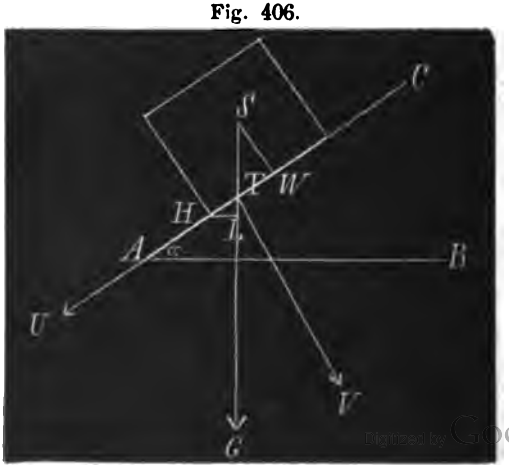
$$HL = e\cos\alpha - a\sin\alpha.$$

Die Stabilität gegen die schiefe Ebene verhält sich also gegen die auf der horizontalen wie:

$$\frac{e}{a}\cos\alpha - \sin\alpha : 1;$$

die erstere wird Null wenn $\operatorname{tg}\alpha = \frac{e}{a}$ ist. Jedenfalls ist sie in Bezug auf die untere

Fig. 406.



Digitized by Google

Kante kleiner auf der schiefen als auf der horizontalen Ebene. Für eine Drehung um die obere Kante z ist aber, wenn $zw = f$ ist, das Verhältniss:

$$\frac{f}{a}\cos\alpha + \sin\alpha : 1,$$

also die auf der schiefen Ebene grösser.

Ueber die Stabilität schwimmender Körper vergl. den Artikel: schwimmender Körper.

Stabilitätscoefficient (Statik).

So heissen im Allgemeinen die Coefficienten, mit denen man namentlich in der Statik der Bauwerke gewisse theoretisch gefundene Ausdrücke über Mauerdicken u. s. w. multiplicirt, um ihnen in der Anwendung grössere Sicherheit zu geben.

Staberad (Hydraulik), siehe Wasserrad.

Stadium (Messkunst).

Ein Längenmaass der Alten von verschiedener Grösse.

Das Stadium der Ptolomäer = 221,67 Meter.

Das ägyptische (olympische, römische) Stadium . . . . = 184,72 Meter

Das Stadium des Cleomedes oder Posidonias . . . . . = 166,25 Meter.

Nach Andern ist das des Cleomedes von dem des Posidonias verschieden und das erstere beträgt . = 68,46 Toisen.

Das Stadium des Eratosthenes und Hipparch . . . . . = 158,33 Meter.

Das babylonische (persische, chaldäische, jüdische) Stadium . = 147,78 Meter.

Das Stadium des Archimedes = 133 Meter.

Das kleine ägyptische, das des Herodot, Aristoteles, Stearchus, Megosthenes, Dimachus . . . . = 99,75 Meter.

Das philitärische oder königl. Stadium = 210,14 Meter.

Stampfer, Stempel (Maschinenlehre).

Ein Gewicht, welches in einer Senkrechtführung frei herunter fällt.

Stampfwerk, Pochwerk (Maschinenlehre).

Eine Maschine, welche aus mehreren aufrechten Stampfern besteht, welche gewöhnlich durch eine horizontale Daumenwelle gehoben werden und niederfallen. Der Zweck ist, die untergelegten Körper zu zerkleinern oder zu zerpressen.

Standlinie (Geodäsie).

Die Linie, an deren Endpuunkten der Geometer sein Instrument aufstellt.

Stange (Maschinenlehre), vgl. Kolbenstange.

Stange, gezahnte, Zahnstange (Maschinenlehre).

Dieselbe wird in Gemeinschaft mit einem Zahnrade angewandt, wenn es darauf ankommt, eine kreisförmige Bewegung in eine gradlinige auf- und abgehende zu verwandeln und umgekehrt. Die gezahnte Stange ist als ein Kreis mit unendlich grossem Radius zu betrachten, und es kann also die Theorie der Zahnräder ohne weiteres angewandt werden; man braucht nur den Radius des einen Kreises $r = \infty$ zu nehmen. An die Stelle des Theilungskreises tritt bei der Stange eine Grade parallel der Stange, welche den Theilungskreis des Rades berührt. Namentlich gilt dann der Satz (vergl. den Artikel: Rad):

„Wenn eine Curve einmal auf oder in dem Theilungskreise des Rades, das andere Mal auf der Theilungslinie der Stange rollt, so beschreibt irgend ein Punkt derselben auf beiden zusammengehörige Zahncurven."

Hat man also auf dem Rade Punktzähne, so entspricht diesen als rollende Curve der Theilungskreis selbst, und als Stangenzahn eine Cycloide, deren Erzeugungskreis gleich dem Theilungskreise ist.

Eine radiale Grade entsteht, wenn ein Kreis, dessen Radius halb so gross als der Theilungskreis ist, in der letztern rollt, dieser Kreis gibt auf der Stange ebenfalls eine Cycloide.

Einem Punkte als Stangenzahn entspricht als Erzeugungslinie die Theilungslinie selbst, und diese gibt auf dem Theilungskreise die Kreisevolvente.

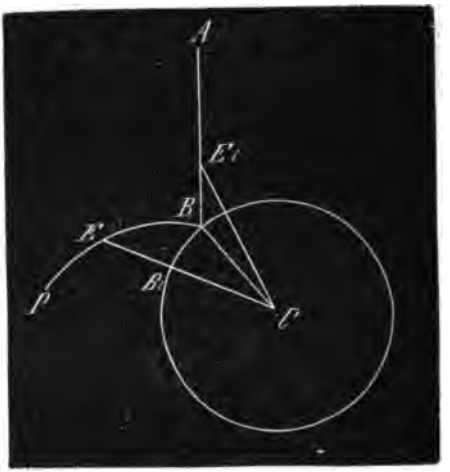
Man kann daher auch Cycloiden als Stangenzähne nehmen, und die Radzähne aus Graden und Evolventen zusammensetzen. Der Cycloidenbogen bleibt dann mit der Graden in Berührung, und ein Punkt des ersteren schiebt sich dann auf der Evolvente entlang.

Ist das Rad ein Drilling, also die Zähne Kreise, so entspricht denselben als Stangenzahl die Parallelcurve (d. h. die Evolvente der Cycloide) (vergl. den Artikel: Rad).

Auch machen wir auf die, Abschnitt 13, gefundenen Formeln aufmerksam, welche allgemein das Problem lösen, wenn die eine Zahncurve gegeben ist, die entsprechende zu finden.

Digitized by Google

Fig. 407.



Es lässt sich aber der Theorie der Zahnstangen noch eine praktisch angewandte Ausdehnung geben. Es ist nämlich nicht immer der Fall, dass die Stange oder deren Theilung den Theilungskreis des Rades berührt, sondern sie kann denselben, so wie verlängert, das Rad auch schneiden.

Sei AB (Fig. 407) die Stange, welche verlängert durch das Rad C mit Radius ϱ geht. Man gibt dem Rade noch einen Ansatz BP, Daumen genannt, welcher den Radzahn vertritt; an Stelle des Stangenzahnes betrachten wir den Punkt B selbst. Zweck der Vorrichtung ist die Stange in einer Kulisse herauf bezüglich wieder herunter zu schieben, und suchen wir die geeignete Daumenform unter der Voraussetzung, dass die Stange sich gleichmässig und dem Drehungswinkel proportional heben und senken soll.

Sei φ der Drehungswinkel, $CE = r$ die Entfernung des Punktes B der Stange vom Mittelpunkte C, wenn die Drehung um Winkel φ fortgeschnitten ist, $ABC = \alpha$ der Winkel zwischen Stange und Berührungsradius im Anfange. Ist die Drehung um Winkel φ fortgeschnitten, so hat sich die Stange um das Stück $BE_1 = B_1E$ gehoben. Es ist also:

$$BE = A\varrho\varphi,$$

wo A eine beliebige Constante sein soll, $CE = r$, also in Dreieck E_1BC:

1) $$r^2 = \varrho^2 (A^2\varphi^2 + 1 - 2A\varphi \cos\alpha).$$

Führt man Polarcoordinaten r und den Winkel $\vartheta = ECB$ ein, so ist offenbar $\vartheta = \varphi + BCE_1$, und

2) $$\frac{\sin(\vartheta - \varphi)}{A\varrho\varphi} = \frac{\sin\alpha}{r}.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ist dann φ zu eliminiren. Ist aber die Stange radial gerichtet, so hat man

$$\vartheta = \varphi, \quad \cos\alpha = -1$$

$$r = \varrho(A\varphi + 1),$$

oder, wenn man vermöge einer Aenderung der Anfangsrichtung des Radius vector setzt:

$$\vartheta = \varphi + \frac{1}{A},$$

so ergibt sich:

$$r = A\varrho\vartheta.$$

und die Daumencurve ist also eine archimedische Spirale.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass falls die Stange den Kreis berührt, die Daumencurve in die Kreisevolvente als Zahncurve übergeht.

Soll die Stange auch gleichmässig sinken, so ist an die Daumencurve eine symmetrische abwärts gerichtete anzuschliessen, der Daumen bildet dann eine sogenannte Herzscheibe. Oft versieht man, um gleitende Reibung zu vermeiden, die Stange unten mit einem Frictionsrädchen. Aus denselben Gründen, die bei der Theorie der Zahnräder auseinander gesetzt sind, muss für die Daumencurve, der nunmehr statt des Punktes B ein Kreis entspricht, die Parallelcurve der oben gegebenen, d. h. diejenige genommen werden, die Evolvente derselben Evolute ist als die erstere und von ihr um den Radius des

Frictionsrades absteht. In Bezug auf die archimedische Spirale ist dies die Neoide oder Spinnlinie.

Stangenzirkel (Messkunst).

Zirkel zum Ziehen grosser Kreise. Er besteht aus einer Stange an dessen einem Ende ein mittels einer Hülse und Mikrometerschraube verschiebbarer Zirkelfuss angebracht ist.

Statik.

1) Einleitung.

Die Statik ist derjenige Theil der Mechanik, welcher sich mit dem Gleichgewichte der Körper beschäftigt, d. h. diese Wissenschaft gibt die Umstände an, unter welchen Kräfte, welche auf einen gegebenen Körper oder ein gegebenes System wirken, Ruhe erzeugen, also sich aufheben, d. h. so wirken, als wenn gar keine Kraft vorhanden wäre. Indess kann man die Statik noch anders definiren.

Wirken nämlich auf einen Körper in irgend welchen Punkten die Kräfte, A, A_1, A_2 . . . einerseits und die Kräfte B, B_1, B_2 . . . andererseits, und halten dieselben sich zusammen in Gleichgewicht, man bringt aber an den Punkten, wo B, B_1, B_2 wirken, bezüglich die Kräfte C, C_1, C_2 an, die den ersteren gleich aber entgegengesetzt gerichtet sind, so ist die Gesammtwirkung offenbar dieselbe, als wenn die Kräfte C, C_1, C_2 . . . allein wirkten. Zugleich aber hebt sich auch die Wirkung der Kräfte B und C, B_1 und C_1, B_2 und C_2 . . . auf, und die Gesammtwirkung ist also auch die als wenn die Kräfte A, A_1, A_2 . . . allein wirkten, und folglich bringen A, A_1, A_2 . . . einerseits und C, C_1, C_2 . . . andererseits dieselbe Wirkung hervor.

Aus diesem Grunde lässt sich die Statik auch definiren als diejenige Wissenschaft, welche angibt, unter welchen Umständen zwei Systeme von Kräften an einem Körper angebracht, dieselbe mechanische Wirkung ausüben.

Auf diese Wirkung selbst geht die Statik nicht ein. Die Dynamik dagegen beschäftigt sich mit derselben. Es erscheint daher völlig gerechtfertigt, dass der Vortrag der Statik der der Dynamik vorangehe, um so mehr als letztere Wissenschaft vermöge des D'Alembert'schen Prinzips, von welchem später die Rede sein soll, sich auch als ein statistisches Problem auffassen lässt. Dieser Gang ist der früher allgemein genommene; in neuerer Zeit hat man auch die Dynamik zuerst behandelt, und die Statik wie vermöge der ersteren hier gegebenen Erklärung dieser Wissenschaft es sich rechtfertigt, als besondern Fall dieser Wissenschaft. Indess scheint uns das erstere Verfahren den Vorzug zu verdienen.

Da Statik und Dynamik auf gemeinschaftlichen Grundlagen basiren, so sind diese hier zu geben, sie bestehen in gewissen Voraussetzungen, die zum Theil aus dem Begriffe der Bewegung selbst sich ergeben, zum Theil aber auch als Erfahrungssätze über die Art der Bewegungen, welche ausschliesslich in der Natur vorkommen, aufgefasst werden müssen.

2) Ueber die Begriffe: Körper, Bewegung, Geschwindigkeit und Kraft.

Während in der Geometrie der Körper lediglich als ein begrenzter Theil des Raumes aufgefasst werden kann, ist in der Mechanik mit diesem Worte etwas Begrenztes im Raume zu bezeichnen, welches seine Stellung im Raume ändern kann. Diese Raumänderung heisst Bewegung, und es muss als Erfahrungssatz angenommen werden, dass jede in der Natur vorkommende Bewegung continuirlich ist, d. h. dass ein Körper nur von dem Raume, den er einnimmt, zu einem unmittelbar an ihn grenzenden, von diesem zu einem nächsten u. s. w. übergehen kann. Im Uebrigen kann diese Ortsänderung der allerverschiedensten Art sein. Namentlich kann sie auch mit einer Deformation des Körpers verbunden sein, d. h. derselbe kann während der Bewegung aufhören, seiner anfänglichen Gestalt congruent zu sein. Aus diesem Grunde ist es nöthig, den Körper sich in solche Theile getheilt zu denken, welche nach allen Dimensionen hin unendlich klein sind. Solche Theile nennen wir mechanische Punkte, auch wohl Atome. Jeder Körper besteht also aus Punkten, (wobei das Wort Punkt jedoch nur in dem obigen mechanischen Sinne zu nehmen ist) und aus der Bewegung jedes einzelnen davon ergibt sich die Bewegung und zugleich die Deformation des ganzen Körpers.

Während der Bewegung beschreibt jeder Punkt eine Linie. Um die Art seiner Bewegung zu kennen, muss diese Linie bekannt sein. Dies reicht jedoch nicht aus, man muss auch wissen, in welcher Zeit jeder Theil dieser Linie zurückgelegt wird. Die Bewegung kann also nicht allein gradlinig oder krummlinig, sie kann auch gleichmässig oder ungleichmässig sein, mit dem ersteren

Ausdrucke bezeichnen wir nämlich eine Bewegung, vermöge welcher der Punkt in gleichen Zeiten auch gleiche Strecken zurücklegt, mit dem letztern eine jede andere.

Bei einer gleichmässigen Bewegung wird die Strecke, welche ein Körper in der Zeiteinheit, (welche willkürlich zu bestimmen ist, also z. B. in einer Secunde) zurücklegt, seine Geschwindigkeit genannt, und eben wegen der Gleichmässigkeit findet zwischen der in einer beliebigen Zeit t zurückgelegten Strecke s und der Geschwindigkeit v die Beziehung statt:

$$v:1=s:t, \quad v=\frac{s}{t}.$$

Es kann also auch die Geschwindigkeit als das Verhältniss der zurückgelegten Strecke zu der darauf verwandten Zeit definirt werden. Es lässt sich dieser Begriff der Geschwindigkeit auch auf ungleichmässige Bewegungen übertragen. Denn diese können doch während einer unendlich kleinen Zeit dt als gleichmässig betrachtet werden. Wird in einer solchen die unendlich kleine Strecke ds zurückgelegt, so ist also:

$$v=\frac{ds}{dt}$$

die Geschwindigkeit des ungleichmässig bewegten Punktes. Wohl zu merken aber ist v hier eine veränderliche Grösse, da die Strecke, welche in einem folgenden Zeitraum dt zurückgelegt wird eine andere ist, als die im ersten Zeitraume.

Von allen Bewegungen eines Punktes die einfachste ist die gleichmässige und gradlinige Bewegung. Ist ein Punkt A einer solchen unterworfen, so kann dieselbe geometrisch dargestellt werden durch eine grade Linie AB, deren Richtung die der Bewegung ist, und deren Länge die Geschwindigkeit angibt. Zugleich versieht man die Linie AB mit einer Pfeilspitze B um anzudeuten, dass die Bewegung im Sinne von A nach B nicht von B nach A erfolgt. — Bei jeder andern Bewegung ist eine solche Darstellung zunächst unausführbar. Damit ein Punkt von der Ruhe zur Bewegung übergehe, muss nothwendig eine Ursache vorhanden sein, wie die Bewegung selbst eine einfachere und complicirtere sein kann, so findet gleiches auch bei den Ursachen der Bewegung statt. Es lassen sich aber diese letzteren auf solche zurückführen, welche dem Punkte eine gleichmässige und gradlinige Bewegung geben, und diese Ursache heisst Kraft. Jede Kraft bestimmt also die Richtung und Geschwindigkeit des Punktes, auf den sie wirkt, und kann mithin ganz wie diese Bewegung selbst durch eine grade Linie dargestellt werden. Statt der Bewegungen betrachten wir jetzt die Kräfte. Der Vortheil hierbei ist der folgende:

„Bewegungen lassen sich nicht zerlegen oder auf andere zurückführen, dagegen kann jede Bewegung als durch eine Reihe von Kräften (also den Ursachen der einfachsten Bewegung), die entweder gleichzeitig oder nach einander zu wirken anfangen hervorgebracht, gedacht werden.

3) Vom Parallelogramm der Kräfte.

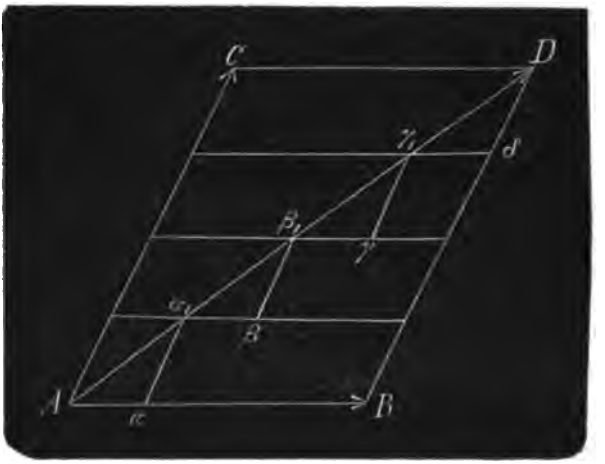
Von den Kräften wissen wir zunächst nur, dass sie mechanische Punkte oder Atome zur Bewegung veranlassen. Es ist also zunächst der Punkt A zu betrachten, auf den eine gegebene Kraft P wirkt. Findet dieses statt, so muss diese Kraft als dem Punkte A angehörig betrachtet werden, sie bestimmt zu jeder Zeit seine Geschwindigkeit und Richtung, und damit diese sich ändern, ist eine neue Ursache, d. h. eine neue Kraft nöthig. So lange eine solche nicht eintritt, wird sich also Punkt A unter Einfluss der Kraft P gleichmässig und gradlinig bewegen. Diese Eigenschaft mechanischer Punkte wird Trägheit genannt, sie ist eine unmittelbare Anwendung des metaphysischen Satzes vom zureichenden Grunde, demgemäss keine Wirkung einer einmal vorhandenen Ursache sich ändern kann, ohne dass eine neue Ursache hinzutritt. Aber aus diesen Betrachtungen folgt noch etwas.

Wenn ich mir das Atom A zuerst in Punkt O des Raumes und dann in einem andern Punkte O_1 denke, beide Mal aber von derselben Kraft P angegriffen, so wird sich das Atom von beiden Orten aus in gleicher also in paralleler Richtung und mit derselben Geschwindigkeit bewegen.

Hieraus folgt die Art, wie sich ein Punkt A bewegt, auf welchen gleichzeitig mehrere Kräfte wirken, also die Art wie Kräfte zusammengesetzt werden können. Dieses Zusammenwirken wird ausgedrückt durch einen Satz, den man als den vom Parallelogramm der Kräfte bezeichnet

Sei Punkt A von der Kraft AB (Fig. 408) angegriffen, d. h. möge er in der Zeiteinheit (eine Secunde) die Strecke AB mit gleichmässiger Geschwindigkeit zurücklegen, wenn keine andere Ursache

Fig. 408



hinzutritt. Er wird also in $\frac{1}{n}$ der Zeiteinheit die Strecke $A\alpha = \frac{AB}{n}$ zurücklegen.

Werde nun, nachdem dies geschehen, der Punkt auf irgend eine Weise von α nach α_1 versetzt, derart, dass α, α_1 einer gegebenen Linie AC parallel und gleich $\frac{AC}{n}$ ist. Es wird dann unter Einfluss der Kraft AB der Punkt in $\frac{1}{n}$ der Zeiteinheit die Strecke $\alpha_1\beta = \frac{AB}{n}$ und parallel AB zurücklegen. Er wird nun wieder von β nach β_1 versetzt, wo $\beta\beta_1$ parallel AC und gleich $\frac{AC}{n}$ ist und so fort, so dass endlich der Punkt nach Verlauf der Zeiteinheit in δ anlangt und von da nach D versetzt wird. Es ist dann klar, dass BD gleich und parallel AC ist, dass sich also der Punkt nach Verlauf der Zeiteinheit in der A gegenüberliegenden Ecke eines Parallelogramms befindet, dessen anstossende Seiten AC und AB sind. Was ferner die Punkte anbetrifft, in welche er nach Verlauf von je $\frac{1}{n}$ Secunde versetzt wird, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$, so liegen diese in der Diagonale AD desselben Parallelogramms, und die Entfernungen $A\alpha_1, \alpha_1\beta_1, \beta_1\gamma_1 \ldots$ sind unter einander gleich und gleich $\frac{1}{n}$ der Diagonale AD, wie sehr einfache geometrische Betrachtungen ergeben. Nehmen wir nun an, dass n unendlich gross sei, so wird $\frac{1}{n}$ der Zeiteinheit eine unendlich kleine Zeit. Die unendlich kleine Strecke $A\alpha$ und der unendlich kleine Sprung $\alpha\alpha_1$, die der Punkt zurücklegt, wollen dann ganz dasselbe folgern, als hätte der Punkt das Stück $A\alpha_1$ der Diagonale selbst zurückgelegt u. s. w. und der Erfolg ist also, dass der Punkt die gleichen Strecken $A\alpha_1, \alpha_1\beta_1$ u. s. w. in gleichen Zeiträumen nämlich $\frac{1}{n}$ der Zeiteinheit, d. h. die Diagonale AD mit gleichmässiger Geschwindigkeit in der Zeiteinheit zurücklegt. Also der Punkt bewegt sich so, als wäre er von einer Kraft angegriffen, welche der Richtung und Grösse nach durch die Diagonale AD dargestellt wird.

Betrachten wir nun die Ursachen dieser eben gefundenen Bewegung. Derselben sind zwei; die erste war die, dass der Punkt von der Kraft AB angegriffen war, die zweite, dass er nach Verlauf von je $\frac{1}{n}$ der Zeiteinheit sprungweise von α nach α_1, von β nach β_1 versetzt wurde. Ist aber n unendlich gross, so geht diese sprungweise Ortsveränderung offenbar in eine continuirliche und zwar in eine solche über, dass der Punkt in je $\frac{1}{n}$ Zeiteinheit die Strecken $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1 \ldots$ zurücklegt, welche parallel AC sind, und $\frac{1}{n}$ dieser Strecke betragen. Mit einem Worte: diese Bewegung kann als solche von einer Kraft hervorgebracht gedacht

werden, welche der Grösse und Richtung nach die Linie AC darstellt.

Man erhält also den folgenden Satz, eben den vom Parallelogramm der Kräfte, welcher als die Grundlage der Mechanik zu betrachten ist:

„Wenn auf einen Punkt A gleichzeitig zwei Kräfte AB und AC wirken, so ist die Gesammtwirkung gleich der einen Kraft, welche der Grösse und Richtung nach durch die durch A gehende Diagonale AC desjenigen Parallelogramms dargestellt wird, dessen zusammenstossende Seiten AB und AC sind."

Das gleichzeitige Zusammenwirken zweier und somit auch mehrerer Kräfte (von denen man ja erst zwei, dann mit ihnen die dritte u. s. w. vereinen kann) bringt also immer eine gradlinige und gleichmässige Bewegung vor. Die Kräfte, welche auf einen Punkt nach verschiedenen Richtungen wirken, bezeichnet man als Seitenkräfte oder Componenten, die Kraft, welche sie nach dem Parallelogramm der Kräfte ersetzt, als Mittelkraft oder Resultante.

Ungleichmässige und krummlinige Bewegungen, können also nur dann eintreten, wenn die Kräfte, welche einen Punkt angreifen, nach einander zu wirken anfangen. Sei der Punkt A (Fig. 409) von einer Kraft AB angegriffen, nachdem er AA_1 zurückgelegt hat, möge nun eine zweite Kraft A_1C hinzutreten; man muss dann von den Kräften $A_1B_1 = AB$ und A_1C die Diagonale A_1C_1 bilden, und der Punkt wird also auf der gebrochenen Linie AA_1C_1 sich bewegen, tritt später eine neue Kraft ein, so wird statt der Linie A_1C_1 abermals eine gebrochene, A_1A_2D und so fort eintreten. Man sieht aber sogleich, dass wenn die Kräfte in unendlich kurzer Zeit nach einander zu wirken anfangen, und ihre Richtung unendlich wenig von einander abweicht, die gebrochene Bahn in eine krummlinige übergeht.

Beim Parallelogramm der Kräfte sind noch die zwei einfachsten Fälle besonders zu betrachten.

Wenn die Seiten AC und AB einen sehr kleinen Winkl machen, so nähert sich die Diagonale AD der Richtung beider Seiten und ihrer Grösse nach der Summe derselben, mit welcher sie zusammenfällt, wenn AC und AB eine Richtung haben. Also:

„Die Mittelkraft zweier gleich gerichteten Seitenkräfte ist ihrer Summe gleich und hat die Richtung derselben."

Wenn dagegen AB und AC einen Winkel machen, der nahe an 180 Grad grenzt, so nähert sich die Diagonale zwar ebenfalls in der Richtung der der grösseren Seitenkraft AB, ihre Grösse aber der der Differenz der Seitenkräfte. Also:

„Wenn beide Seitenkräfte in eine Linie fallen, aber entgegengesetzt gerichtet sind, so ist die Mittelkraft der grössern gleich gerichtet und gleich der Differenz beider."

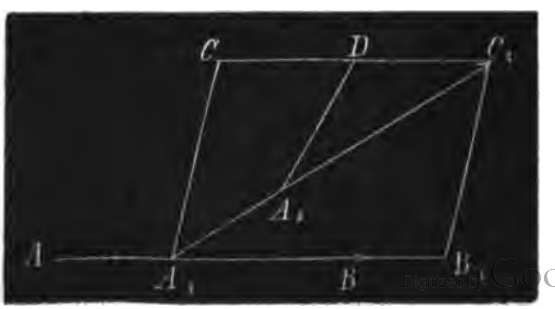
Beide Sätze kann man vereinen, wenn man die Kraft, welche mit einer andern der Grösse nach gleichen P in dieselbe Linie fällt, ihr aber entgegengesetzt gerichtet ist, durch $-P$ bezeichnet. — Es wird dann immer, wie sogleich erkenntlich, die Mittelkraft zweier in eine Linie fallenden Kräfte durch ihre algebraische Summe der Grösse und Richtung nach bezeichnet. Also:

„Die Mittelkraft der in eine Linie fallenden Kräfte von P und $-Q$ ist gleich $P-Q$, und das Vorzeichen dieser Grösse gibt an, ob die Mittelkraft mit P oder $-Q$ gleich gerichtet ist."

Die Kräfte P und $-P$ haben die Mittelkraft Null. D. h:

„Zwei entgegengesetzte sonst gleiche und in dieselbe Linie fallende Kräfte bringen Gleichgewicht hervor."

Fig. 409.



Digitized by Google

Also auch:

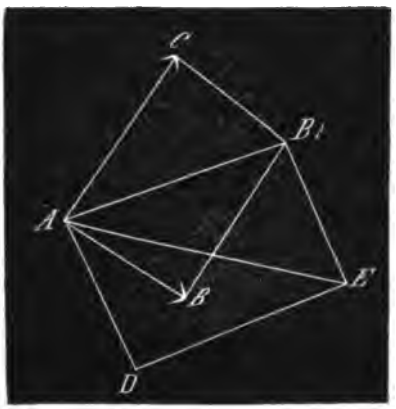
„Soll eine Kraft zwei andern P und Q, die einen Punkt A angreifen, das Gleichgewicht halten, so muss sie der Diagonale des aus P und Q gebildeten Parallelogramms gleich aber entgegengesetzt sein,"

Dieser Satz ist natürlich die Grundlage der Lehre vom Gleichgewicht, ganz wie das Parallelogramm der Kräfte die der Mechanik überhaupt.

Wir müssen jetzt noch etwas auf den allgemeinen Fall eingehen, wo eine beliebige Anzahl von Kräften gleichzeitig denselben Punkt A angreifen.

Seien zunächst wieder nur zwei Kräfte gegeben AB und AC (Fig. 410) und sei

Fig. 410



AB_1 die Mittelkraft, so ist CB_1 gleich und parallel AB. Wenn man also die Kraft AB in ihrer Richtung nach dem Endpunkte C der Kraft AC verlegt, so bilden diese mit ihrer Mittelkraft ein Dreieck.

Wenn man die Seiten einer Figur so durchschreitet, dass man von dem Endpunkt A einer Seite bis zu ihrem andern C fortgeht, von C bis zum andern Endpunkte B_1 der folgenden Seite u. s. w., so soll diese Richtung als die eine, dagegen die Richtung von B_1 nach C, von C nach A u. s. w. als die entgegengesetzte betrachtet werden. Es folgt also hieraus:

„Wenn man von zwei Kräften, die einen Punkt angreifen, die eine nach dem Endpunkte der andern verlegt, so bilden sie mit ihrer Mittelkraft ein Dreieck, dabei sind die Seitenkräfte in einer Richtung, die Mittelkraft in der entgegengesetzten zu nehmen."

Nimmt man AB_1 in umgekehrter Richtung, so hat man die Kraft B_1A, welche, an A angebracht, AC und AB das Gleichgewicht hält. Also:

„Wenn drei Kräfte an einen Punkt angebracht, einander Gleichgewicht halten sollen, so bilden sie, jede nach dem Endpunkte der vorhergehenden verlegt, ein Dreieck, dessen drei Seiten in derselben Richtung zu nehmen sind."

Komme jetzt zu AB und AC eine dritte Kraft AD hinzu.

Wir bemerken, dass AD nicht mit AB und AC in einer Ebene zu liegen braucht.

Um die Mittelkraft von AB, AC, AD zu erhalten, brauchen wir nur die Mittelkraft AB_1 der beiden erstern mit AD zu vereinigen. Ist AE diese Mittelkraft, so bilden AC, CB_1 (gleich und parallel AB) B_1E (gleich und parallel AD) mit AE ein geschlossenes Viereck, von dem alle Seiten bis auf AE in derselben Richtung zu nehmen sind. Indem man so fortfährt, kommt man zu folgendem Satz:

„Die Mittelkraft von n Kräften, welche einen Punkt A angreifen wird gefunden, wenn man jede an den Endpunkt der vorhergehenden verlegt, ohne ihre Richtung zu ändern. Die Ordnung, in der dies geschieht ist gleichgültig. Diejenige Grade, welche die so entstehende gebrochene Linie zum geschlossenen $n + 1$ Ecke ergänzt, stellt die Mittelkraft vor. Jedoch ist sie in der den übrigen Seiten entgegengesetzten Richtung zu nehmen."

Selbstverständlich braucht das geschlossene Vieleck kein ebenes zu sein.

Ausserdem ergibt sich noch folgender Satz für das Gleichgewicht ganz wie oben:

„Damit n Kräfte, welche einen Punkt A angreifen sollen, sich in Gleichgewicht halten, ist es nothwendig und ausreichend, dass, wenn man jede an den Endpunkt der vorhergehenden in beliebiger Ordnung anbringt, dieselben ein geschlossenes Vieleck bilden, dessen Seiten alle in derselben Richtung zu nehmen sind."

In diesem Satze ist die Statik eines Punktes gewissermaassen vollständig enthalten, und es bedarf nur der analytischen Ausführung desselben.

4) Ueber das Verhalten der Kräfte zu den Punkten und Körpern, welche sie angreifen. Ueber die Begriffe der Masse und Dichtigkeit

Den Kräften kommen in Bezug auf die Punkte oder Körper, welche sie angreifen, gewisse Eigenschaften zu, von denen hier zunächst nur zum Theil die Rede sein soll.

Digitized by Google

Zunächst ist zu bemerken, dass wir mechanische Punkte als nach allen Richtungen unendlich kleine Körper definirt haben, es fällt also ihre Bedeutung nicht mit der eines mathematischen Punktes zusammen. Man kann von der Form eines mechanischen Punktes sprechen, derselbe kann z. B. ein unendlich kleines Parallelepipedon oder eine unendlich kleine Kugel sein. Ferner kann man einen Punkt getheilt denken, da doch unendlich kleine Körper diese Eigenschaft haben. Kräfte, die einen Punkt angreifen, müssen sich also auch über die unendlich kleine ihm zu gebende Ausdehnung erstrecken. Auch ein endlicher Körper kann von Kräften angegriffen werden, und dann erstrecken diese sich über den ganzen Raum, den der Körper einnimmt. Es ist somit gerechtfertigt, wenn man sagt, dass sich eine Kraft über einen gewissen Raum erstrecke, und ist darunter zu verstehen, dass sie die in jenem Raume etwa befindlichen mechanischen Systeme in Bewegung versetzt.

Denken wir uns zwei Punkte von gleichen Dimensionen (die also z. B. zwei congruente Kugeln mit unendlich kleinem Radius bilden), beide derselben Kraft unterworfen, d. h. nach einander in den Raum versetzt, über den sich eine gewisse Kraft erstreckt — so können dieselben entweder gleiche oder verschiedene Bewegungen annehmen. Die Erfahrung zeigt nun, dass letzteres unter den angegebenen Umständen nie in Bezug auf die Richtung, sondern nur auf die Geschwindigkeit geschieht. Findet also zwischen beiden Punkt verschiedene Geschwindigkeit statt, so sagt man die Punkte hätten ungleiche Masse, im entgegengesetzten Falle, sie hätten gleiche Masse.

Man muss nun jedenfalls als Erfahrungssatz das folgende annehmen. Wenn eine Kraft K zweien (räumlich gleichen) Punkten A und A_1 bezüglich die Geschwindigkeiten v und v_1 gibt, und eine andere K_1 eben denselben die Geschwindigkeiten w und w_1, so findet immer die Beziehung:

$$v : v_1 = w : w_1$$

statt.

Wir haben oben die Kraft K durch die Geschwindigkeit gemessen, welche sie irgend einem Punkte ertheilt. Da dies nun je nach der Masse des Punktes eine verschiedene sein kann, so wollen wir jetzt, dass Maass der Kräfte dem Punkte A entnehmen, den wir sogleich näher bestimmen wollen. Es ist also $K = v$, $K_1 = w$, also für den Punkt A_1:

$$\frac{K}{w} = \frac{K_1}{w_1}$$

und dieser Quotient ist also für einen gegebenen Punkt eine constante Grösse, die wir als das Maass der Masse eines Punktes betrachten. D. h.:

„Die Masse m eines Punktes A ist gleich einer den Punkt angreifenden Kraft dividirt durch die Geschwindigkeit, welche sie ihm ertheilt."

Ferner ist:

$$K = wm.$$

Es kann also die Kraft K gleich der Masse irgend eines Punktes den sie angreift multiplicirt mit der Geschwindigkeit, die sie ihm ertheilt, gesetzt werden.

Offenbar sind zwei Kräfte gleich, wenn sie Punkten von gleicher Masse, (dieselben immer auch von gleichen Dimensionen gedacht) gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit ertheilen. Wenn diese Kräfte den Punkten nicht gleichgerichtete aber dem Zahlenwerthe nach gleiche Geschwindigkeit ertheilen, so sagt man die Kräfte hätten gleiche Intensität.

Es kann nun aber eine Kraft sich auch über einen Körper von endlichen Dimensionen erstrecken, d. h. jeder Punkt desselben kann eine gewisse Geschwindigkeit erlangen. Unter einem Körper verstehen wir hier übrigens weiter nichts als eine continuirliche Aneinanderreihung mechanischer Punkte, ohne dass deren Formänderungen gewissen Bedingungen unterliegen sollen.

Kann man den Körper in mechanische Punkte von gleichen Dimensionen und gleicher Masse theilen, so nennen wir den Körper homogen. Ist jeder Punkt desselben von einer Kraft angegriffen, die allen eine gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeit ertheilt, so nennen wir die über den Körper sich erstreckende Kraft gleichmässig. Wird ein anderer homogener Körper, der dem ersteren congruent ist, derselben gleichmässigen Kraft unterworfen, so werden alle Punkte desselben ebenfalls unter einander gleiche Geschwindigkeit erhalten, diese kann aber von der des ersten Körpers verschieden sein. Im letztern Falle haben dann die Punkte des Körpers ungleiche Masse, und von den ganzen Körpern sagt man sie hätten ungleiche Dichtigkeit. Man nimmt als Einheit der Dichtigkeit die eines beliebigen homogenen Körpers, (z. B. die des destillirten Was-

sers) an. Ertheilt dann eine Kraft, welche sich über einen Körper von der Dichtigkeitseinheit erstreckt, demselben die Geschwindigkeit K, so ist K das Maass dieser Kraft, ertheilt sie einem andern homogenen Körper von denselben Dimensionen A die Geschwindigkeit v, so ist $\frac{K}{v}$ eine für diesen Körper unveränderliche Grösse, und wird als das Maass der Dichtigkeit betrachtet. Die Dichtigkeiten zweier homogener Körper verhalten sich also wie die Massen ihrer Punkte.

Wenn über irgend einem Körper sich eine Kraft gleichmässig erstreckt, die einzelnen Punkte aber ungleiche Geschwindigkeiten erhalten, so ist der Körper nicht homogen. Er zerfällt dann in Punkte von ungleicher Masse. Jedenfalls aber kann man dann jeden nach allen Richtungen unendlich kleinen Theil des Körpers (also einen Punkt) als von gleicher Dichtigkeit betrachten, und diese Dichtigkeit wird durch die Grösse $\frac{K}{v}$ gemessen. Ein nicht homogener Körper hat also in verschiedenen Punkten verschiedene Dichtigkeit.

Bei homogenen Körpern heisst das Product der Dichtigkeit in sein Volum, (eine beliebige Einheit des letztern z. B. Kubikfuss angenommen) Masse des Körpers. Bei nicht homogenen Körpern versteht man unter dieser Bezeichnung die Summe der Producte der unendlich kleinen Volumina der einzelnen Punkten in ihre Dichtigkeiten.

Um auch ein Maass für Kräfte zu haben, welche gleichmässig endliche Körper oder Punkte von beliebigen Dimensionen angreifen, nimmt man als Krafteinheit diejenige Kraft, welche der Volumeinheit desjenigen homogenen Körpers der die Dichtigkeitseinheit hat, d. h. der Masseneinheit die Geschwindigkeit 1 ertheilt. (Also z B. diejenige Kraft ist gleich 1 zu setzen, welche sich gleichmässig über einen Kubikfuss Wasser erstreckt, und demselben ein Fuss Geschwindigkeit in der Secunde gibt.) Hat ein Körper die Masse M und die gleichmässige Geschwindigkeit v, so ist Mv gleich der ihn angreifenden Kraft, welches auch seine Dimensionen seien. Die Grösse Mv wird auch mechanisches Moment genannt.

5) Ueber mechanische Systeme, und die von ihnen ausgehenden und auf sie wirkenden Kräfte.

Wir haben bis jetzt Körper nur als eine continuirliche Aneinanderreihung von Punkten betrachtet. Indess sind die in der Natur vorkommenden Körper und Punkte zugleich Träger von Kräften, d. h. von ihnen gehen Kräfte aus, welche andere Punkte angreifen. Ueber die Natur dieser Kräfte lässt sich zunächst folgendes sagen. Die Kraft, welche von einem Punkt A mit Masse m ausgeht, und einen andern B mit Masse μ angreift, ist immer nach der Verbindungslinie AB gerichtet, sie kann anziehend sein, d. h. den Punkt B zur Bewegung nach A hin treiben oder abstossend, d. h. eine Bewegung nach der Verlängerung der Linie AB veranlassen. Im Uebrigen ist sie dem Product der Massen μm proportional, und sonst nur von der Entfernung $AB = r$ abhängig. Die Intensität dieser Kraft hat also den Ausdruck $\mu m f(r)$, wo f irgend eine Function von r ist. Die von B nach A wirkende Kraft hat die umgekehrte Richtung BA, wenn die ebenbetrachtete nach AB gerichtet ist. Es ist also für sie $f(r)$ mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen, und der Ausdruck für ihre Intensität $-\mu m f(r)$. Also:

„Die Kraft oder das mechanische Moment, welche ein Punkt A auf einen andern B ausübt, ist der, welche B auf A ausübt immer entgegengesetzt, sonst gleich."

Dieser Satz wird der von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung genannt.

Solche Einwirkungen finden nun zwischen den Punkten eines jeden Körpers statt, und somit kann ein solcher nicht als eine blosse räumliche Aneinanderreihung von Punkten betrachtet werden. Diese Einwirkungen nennen wir Cohäsionskräfte, und unterscheiden von ihnen die Adhäsionskräfte, welche zwischen den einander sehr nahen Punkten verschiedener Körper stattfinden. Sprechen wir zunächst von den erstgenannten.

Die Kräfte, welche z. B. einen Körper zum festen oder flüssigen machen, die Elasticität, welche ihm zukommt u. s. w. sind Cohäsionskräfte.

Um aber hierauf näher einzugehen, ist noch etwas über die Körper im Allgemeinen zu sagen.

Wir haben oben einen Körper als eine continuirliche Aneinanderreihung von Punkten betrachtet. Diese Annahme unterliegt einem Bedenken.

Betrachten wir nämlich zwei Atome des Körpers A und B von irgend welcher Gestalt. Dieselben üben eine Anziehung oder Abstossung auf einander

aus. Man kann aber ihre Entfernung r so gering annehmen, wenn der Körper, dem sie angehören, nämlich continuirlich ist, dass die Dimensionen von A und B im endlichen Verhältnisse zu r stehen. Denkt man sich nun A und B getheilt, so wirken Kräfte von endlich verschiedener Richtung, die alle von B ausgehen auf A. Man kann also nicht annehmen, dass sich die Kraft, welche von B ausgeht, gleichmässig auf A erstreckt. Vielmehr ändern sich diese Richtungen und Grössen noch, wenn man A und B einander näher liegend denkt als anfänglich, und die Einwirkungen der Cohäsionskräfte würden somit ganz unbestimmt sein, und jede Berechnung unmöglich machen, da eine solche voraussetzt, dass wenigstens unendlich kleine Theile eines Körpers nur von gleichmässig sich darüber erstreckenden Kräften angegriffen werden.

Man nimmt nun gewöhnlich an, dass die Atome der Körper in der Natur nicht continuirlich, sondern so gelagert sind, dass jeder vom andern eine Entfernung hat, die so gross gegen die Dimensionen des Atoms selbst ist, dass das Verhältniss dieser Grössen als unendlich gedacht werden kann. Offenbar sind dann alle Theile von A von irgend welchen Theilen von B als gleich entfernt, und die Kräfte, welche zwischen diesen Theilen herrschen, als parallel und gleich zu betrachten, so dass diese Kräfte, welche sich über A und B erstrecken gleichmässig sind.

Eine andere Annahme, welche man gewöhnlich macht, wonach man den Atomen in der Natur eine Unveränderlichkeit der Gestalt zuschreibt, ist unnöthig, da das Atom ja bei unserer ersten Annahme nur Kräften unterliegt, welche es gleichmässig angreifen, also eine Formänderung von selbst nicht stattfindet. Diese letztere Annahme ist aber auch unstatthaft, denn unveränderlich kann auch ein sehr kleiner Körper nur vermöge gewisser in ihm herrschender Kräfte sein, welche den Formänderungen das Gleichgewicht halten. Es würde also die bei der ersten Annahme gehobene Schwierigkeit sich hier aufs Neue herausstellen. Indess kann in der That noch die Frage entstehen, wie sich denn die Theile eines Atoms gegen einander in Bezug auf die darin wirkenden Kräfte verhalten. Die Antwort würde sein, dass es auf dieselben gar nicht ankommt, da man nicht die Gestalt und die Aenderung derselben in Bezug auf jedes Atom, sondern nur in Bezug auf den Körper selbst der Betrachtung zu unterwerfen hat. Eine dritte Annahme, vermöge deren Einige statt der Atome nur mathematische Punkte, von denen Kräfte ausgehen (Kraftcentra), sich denken, ist daher ebenfalls ohne alle Nothwendigkeit, und diese ist jedenfalls die unstatthafteste von allen. Denn die Atome sind ja nicht allein die Ausgangspunkte von Kräften, sondern Kräfte wirken auch auf dieselben und setzen sie in Bewegung. Wie aber ein mathematischer Punkt oder ein Kraftcentrum bewegt werden soll, ist gewiss nicht klar. Bewegung ist Raumänderung, der bewegliche Gegenstand muss also einen bestimmten Raum, sei er endlich oder unendlich klein, zunächst einnehmen.

Aber auch die erste Annahme, dass die Atome von einander sehr grosse Entfernungen haben, lässt sich durch eine andere ersetzen, wobei den Körpern die Continuität verbleiben kann. Man braucht nämlich nur anzunehmen, dass zwei Atome A und B in beliebiger Nähe von einander sich befinden können, ihre Anziehung und Abstossung auf einander erst dann eine merkliche Grösse annimmt, wenn ihre Entfernung gegen ihre Dimensionen sehr gross ist.

Von dieser Annahme, welche über die Lagerung der Atome gar nichts voraussetzt, wollen wir als von der Allgemeinern hier ausgehen. Sie schliesst die erst gegebene als einen besondern Fall ein. Ob diese von der Natur bestätigt wird oder nicht, bleibt also dahingestellt. Eine Entscheidung darüber wird sich in der That wohl kaum treffen lassen.

Ueberhaupt muss über die Kräfte, welche von Punkt zu Punkt, gleichviel ob dieselbe einem Körper angehören oder nicht, folgendes bemerkt werden.

In merklichen Entfernungen wirken nur Kräfte von der Form $\frac{\mu m A}{r^2}$, also die Function $f(r)$ ist $= \frac{A}{r^2}$, wo A eine beliebige Constante ist. Diese Kräfte sind also völlig bekannt.

In sehr kleinen Entfernungen dagegen wirken Kräfte deren, Intensität sich nicht vollständig bestimmen lässt. Woher dies komme, und warum dieselbe von denen in grösserer Entfernung abweicht, ob die verschiedene Natur der Atome, namentlich auch der Gegensatz zwischen Körper-Atome und denjenigen Atomen, welche dem Aether angehören, also die Erscheinungen von Licht und Wärme hervorbringen, hier einen Einfluss aus-

übt, kann an dieser Stelle nicht der Gegenstand der Erörterung sein.

Diese zuletzt betrachteten Kräfte nennen wir Molekularkräfte, Cohäsion und Adhäsion gehören in die Reihe derselben; von ihnen ist folgendes anzunehmen.

Nach dem Obigen fangen sie erst an zu wirken, wenn die Entfernung der Atome eine gewisse Grösse hat. Sonach müssen wir den Begriff Atom etwas modificiren. Atom nennen wir nämlich jetzt nicht mehr einen Körper von unendlich kleinen, sondern von so kleinen Dimensionen, dass die zwischen seinen Theilen wirkenden Molekularkräfte eine unmerkliche Intensität, also eine solche, die gleich Null zu setzen ist, haben.

Die Molekularkräfte wirken aber auch nur in an sich sehr kleinen, wenn auch gegen die Dimensionen eines Atoms sehr grossen Entfernungen.

Körper, deren Dimensionen der Art sind, dass zwischen ihren Theilen die Molekularkräfte eine endliche Grösse haben, heissen Molekule (*molecule*). Ein Molekul kann in der Rechnung als aus unendlich viel Atomen bestehend, betrachtet werden, und zwar sind die Dimensionen des erstern noch so gering, dass ein sehr kleiner Theil eines Körpers, den man in der Rechnung ebenfalls als unendlich klein denkt, noch so zu betrachten ist, als bestände er aus unendlich viel Molekulen. — Diese Betrachtungen sind zu scharfer Begründung der statischen und mechanischen Erörterungen nicht zu entbehren.

Alle Punkte, die auf einen gegebenen A eine den Molekularkräften angehörige Einwirkung ausüben, bilden also eine Hohlkugel deren Mittelpunkt, und deren innerer und äusserer Radius bezüglich die Entfernungen sind, in denen die Molekularkräfte merklich und wieder unmerklich werden. Gewöhnlich betrachtet man statt deren die ganze Vollkugel, da der innere Radius gegen den äusseren verschwindend klein ist, und nennt diese Kugel Molekularsphäre.

Mechanische Körper sind jetzt für uns Verbindungen von Atomen, in welchen Molekularkräfte thätig sind. Diesen gegenüber setzen wir die äusseren Kräfte, die auf die Punkte des Körpers wirken.

Wenn letztere nicht vorhanden sind, so kann man annehmen, dass die Theile vieler in der Natur vorkommenden Körper durch das Wirken der Molekularkräfte sich so gruppiren, dass letztere einander das Gleichgewicht halten, also der Körper in Ruhe ist. Eine solche Lage des Körpers wollen wir Gleichgewichtslage nennen.

Also z. B. feste und flüssige Körper, auf die keine äusseren Kräfte wirken, befinden sich in Gleichgewichtslagen. Bei luftförmigen Körpern ist dies aber nicht der Fall, da dieselben, wenn sie nicht mit andern Körpern in Verbindung stehen, solcher Gleichgewichtslagen unfähig sind. Den Gleichgewichtslagen der Körper kommt aber noch eine Eigenschaft, die der Stabilität zu. Hierunter verstehen wir nämlich, dass, wenn andere Kräfte auf den Körper zu wirken anfangen, diese die Lage der Molekule so ändern, dass die modificirten Kräfte in äusserst geringer Zeit den neuen das Gleichgewicht halten, so dass nur eine sehr geringe, also in der Rechnung zu vernachlässigende Aenderung in der Anordnung der Theile des Körpers hervorgebracht wird Indess ist bei den in der Natur vorkommenden Körpern in der Regel diese Stabilität nur gegen gewisse Form- und Raumänderungen vorhanden.

Wir benutzen die Art derselben als Eintheilungsprinzip der Körper.

Einen Körper, der gegen jede Raumänderung diese Stabilität besitzt, heisst absolut fest, oder um ihn von den Körpern, die man sonst als fest bezeichnet, zu unterscheiden, unbeweglich. Es können auch einzelne Punkte eines im Uebrigen beliebigen Körpers unbeweglich sein.

Ein Körper heisst fest, wenn er stabil ist gegen jede Formänderung, möge dieselbe nun seine Dimensionen vergrössern oder verringern.

Ein Körper heisst biegsam, wenn er stabil ist gegen jede Aenderung der Länge gewisser auf ihm befindlichen Linien.

Wir unterscheiden 1) biegsame Fäden, Körper, bei denen zwei Dimensionen gegen die dritte, die Länge, sehr gering sind. Stabilität findet hier gegen jede Veränderung der Länge statt.

2) Biegsame Flächen bei denen eine Dimension gegen die beiden andern sehr gering ist, und die sich stabil gegen die Aenderung der Länge jeder Linie verhalten, die sich auf derjenigen Fläche befindet, deren Dimensionen mit den beiden zuletzt genannten zusammenfallen.

Ein Körper heisst flüssig, wenn er sich gegen jede Verringerung, nicht aber gegen Vermehrung seines Volums stabil verhält.

Den luftförmigen Körpern kommt keine Stabilität zu, die in ihnen wirkenden Kräfte streben dahin, das Volum immer mehr zu vergrössern.

Digitized by Google

Bei den übrigen hier genannten Körpern ist die Stabilität derartig, dass Veränderungen, denen sie entgegenwirkt, nie eine merkliche Grösse erreichen, oder um es präciser auszudrücken, die äussersten Punkte des Körpers nicht von ihrer anfänglichen Lage über den Radius der Molekularsphäre hinaus entfernen. Diese Aenderungen sind also stets zu vernachlässigen. Natürlich aber findet die Stabilität nur so lange statt, als die äussern Kräfte eine gewisse Grösse nicht überschreiten. Geschieht letzteres so ändert der Körper seinen Aggregatzustand, (zerreisst, zerbricht u. s.w.). Andere Körper aber besitzen die Stabilität nur in geringerem Masse, d. h. die Formänderungen nehmen eine merkliche Grösse an. Dies ist z. B. bei den elastischen Körpern der Fall. (Vergl. den Artikel: „Schwingungen elastischer Körper".) Die bezeichneten Kräfte gehören den Cohäsionskräften an.

Wir müssen jetzt noch etwas auf diejenigen Kräfte eingehen, die zwischen den Punkten zweier verschiedenen Körper herrschen, und haben hier namentlich diejenigen Einwirkungen zu besprechen, welche die Erscheinungen hervorbringen, die man gewöhnlich Undurchdringlichkeit der Körper nennt.

Wenn ein Punkt A sich einem andern B bis auf eine gewisse, an der Grenze des Gebiets der Molekularkräfte liegende Entfernung nähert, so kann derselbe nicht näher an A heranrücken, d. h. es findet eine abstossende Kraft von B aus statt, die mit der Annäherung so gross wird, dass sie die derselben entsprechende Geschwindigkeit aufhebt.

Setzen wir jetzt statt des Punktes B einen Körper, von dem wir jedoch zunächst voraussetzen, dass seine Oberfläche in der Nähe von A continuirlich gekrümmt sei. Da der Punkt A sich an der Grenze der Molekularanziehung von B befindet, so wird, wenn man von A eine Normale an B zieht, nur in dieser Richtung eine Einwirkung zwischen B und A stattfinden, da alle anderen Punkte von B ausserhalb der Molekularsphäre liegen. Also:

„Die Kräfte, die von einem Körper auf einen ihm unmittelbar nahen Punkt wirken, haben eine Resultante die normal auf die Oberfläche des Körpers ist und demjenigen Theil der zukommenden Geschwindigkeit, welcher nach dieser Normale gerichtet ist, und auf Annäherung an den Körper wirkt, das Gleichgewicht hält."

Setzen wir an der Stelle des Körpers eine continuirlich gekrümmte Fläche, so bleibt das Gesagte noch richtig.

Wenn man sich anstatt des Körpers B eine blosse Curve denkt, d. h. einen Körper bei dem zwei Dimensionen gegen die dritte verschwindend klein sind, so muss die Anziehung zwischen A und B aus den eben gegebenen Gründen auf dieser Curve normal sein. Nun aber gibt es für jeden Punkt einer Curve unendlich viel Normalen, welche alle sich in der Normalebene befinden. Es ist also in diesem Falle nicht völlig die Richtung der Einwirkung gegeben, sondern nur bekannt, dass dieselbe in der Normalebene liegt.

Ganz ähnlich verhält es sich, wenn A sich auf einem Körper oder einer Fläche oder in einem Punkte befindet, der keiner continuirlichen Krümmung, sondern einer (graden oder gekrümmten) scharfen Kante angehört. Aus denselben Gründen wie vorhin wird dann die Einwirkung der Kante normal sein. Hier lässt sich aber die Richtung des Druckes völlig bestimmen. Sei nämlich EF (Fig. 411) die Tangente der Kante in A, legen wir durch dieselbe eine Ebene, welche den Ebenenwinkel halbirt, und ziehen auf der Kante senkrecht zwei Linien AC und AD, welche gleiche Winkel mit der Halbirungsebene machen, deren Länge aber glaich dem Halbmesser der Molekularsphäre ist. Nehmen wir aber noch an, in der Umgegend der Kante finde keine discontinuirliche Aenderung der Dichtigkeit statt, so dass also hier die Fläche oder der Körper als homogen zu betrachten ist. Jedem Punkt von AC

Fig. 411.

Digitized by Google

wird dann einer von AD entsprechen, der gleichweit von A entfernt ist, und also eine gleiche Einwirkung auf A ausübt, die Resultante beider Einwirkungen wird also den Winkel DAC halbiren, und diese Halbirungslinie gibt somit die Richtung aller von AD und AC ausgehenden Einwirkungen an. Sie liegt aber offenbar in der Halbirungsebene des Ebenenwinkels. Und da jeder auf CF senkrechten Linie eine zweite entspricht, welche gleichen Winkel mit der Halbirungsebene macht, so werden alle Einwirkungen auf A sich in der Halbirungsebene vereinen. D. h.:

„Liegt ein Punkt auf einer Kante eines Körpers oder einer Fläche, so wird die Richtung der wechselseitigen Einwirkung bestimmt durch die Linie, welche auf der Kante normal steht, und in der Halbirungsebene des Ebenenwinkels liegt."

Aehnliche Schlüsse lassen sich machen, wenn der Punkt A sich auf einer Linie befindet, jedoch in einer Spitze BAC. Wenn man den Winkel dieser Spitze durch Linie AD in der Winkelebene halbirt, so wird A von beiden Seiten dieser Linie gleiche Einwirkungen erleiden. Die Resultante geht also durch die Linie, welche in der Ebene der beiden Tangenten BA und AC geht, und den Winkel an der Spitze halbirt.

Findet endlich die Einwirkung auf eine Spitze einer Fläche statt, so muss man durch dieselbe sich Kraftrichtungen denken, welche auf den Flächen, die die Spitze bilden, senkrecht stehen, denn von allen diesen gehen Wirkungen aus, und sie sind gleich, wenn Homogenität an der Spitze stattfindet. Die Resultante aller dieser gleichen Kräfte bestimmt die Richtung der Gesammtwirkung.

Alle diese Einwirkungen eines Körpers auf einen andern oder auf die Theile desselben in der Nähe der Grenze der Molekularsphäre nennt man Druck oder Spannung.

Es ist an dieser Stelle noch zweckmässig, die ganze Art der Bewegung, welche sich aus einer Spannung ergibt in ihrem aller einfachsten Falle zu verfolgen und zwar aus dem Grunde, weil diese Betrachtungen es gestatten, an die Stelle einer bloss theoretischen Definition des Begriffes Masse, wie wir sie früher geben konnten, die Art und Weise treten zu lassen, wie Massen wirklich bestimmt und berechnet werden können.

Seien A und B zwei Punkte (also Körper von als unendlich klein zu betrachtenden Dimensionen), deren Massen m und μ seien, von denen der eine A sich mit einer Geschwindigkeit v, in Richtung AB dem zweiten B, welcher in Ruhe ist, nähert. Kömmt A in die Molekularsphäre von B, so übt er eine abstossende Kraft auf B aus, so dass dieser Punkt sich in derselben Richtung als A bewegt, und zwar mit zunehmender Geschwindigkeit, da mit der Annäherung von A diese Kraft wächst. Vermöge der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung, wird aber auf A eine seiner Geschwindigkeit entgegengesetzte Kraft von B aus wirken, und erstere somit abnehmen. Es müssen also in einer gewissen und zwar in einer sehr kleinen Zeit A und B, deren Geschwindigkeiten somit bezüglich ab- und zunehmen, endlich gleiche und gleich gerichtete Geschwindigkeit erhalten. Ist dies der Fall so kann allerdings die Geschwindigkeit von A noch ferner ab- und die von B zunehmen, und dies ist z. B. der Fall, wenn den unendlich kleinen Körpern Elasticität zukommt. In der Natur tritt aber auch oft der Fall ein, dass beide Punkte sich mit dieser gleichen Geschwindigkeit unverändert weiter bewegen. Es lässt sich dann zeigen, dass wenn dies eintritt, die Entfernung zwischen A und B grade der Halbmesser der Molekularsphäre ist. Denn wäre erstere kleiner, so müsste eine neue Spannung sich ergeben, also die Geschwindigkeiten bezüglich sich zu ändern fortfahren. Sie kann aber auch nicht grösser sein, weil sonst schon früher die Einwirkung zwischen A und B aufgehört, also eine constante Geschwindigkeit beider sich ergeben hätte.

Diese Einwirkung von A auf B und umgekehrt nennen wir Stoss, und zwar unelastischen Stoss, wenn die obige Bedingung erfüllt ist. Suchen wir die gemeinschaftliche Geschwindigkeit φ beider Punkte. Möge, wenn die Bewegung gleichmässig ist, die von A auf B geübte Abstossung gleich ϱ sein, so ist, da die Geschwindigkeit φ einer Kraft von der Grösse $\mu\varphi$ entspricht:

$$\varrho = \mu\varphi.$$

Auf A wirkt zunächst die der Anfangsgeschwindigkeit v entsprechende Kraft mv, ausserdem wegen der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung die Abstossung $-\varrho$, und man hat also:

$$mv - \varrho = m\varphi.$$

Zählen wir zu dieser Gleichung die erste zu, so kommt:

Digitized by Google

$$mv = (m+\mu)\varphi,$$
$$\varphi = \frac{1}{1+\frac{\mu}{m}}\, v.$$

Also wenn ein ruhender Punkt B durch einen andern A, der die Geschwindigkeit v hat, vermöge eines Stosses die Geschwindigkeit αv erhält, so ist:

$$\alpha = \frac{1}{1+\frac{\mu}{m}}, \qquad \frac{\mu}{m} = \frac{1}{\alpha} - 1$$

und mithin $\frac{1}{\alpha} - 1 : 1$ das Verhältniss der Massen beider Punkte.

5) Statik der mechanischen Punkte.

Da jeder Körper als aus Punkten zusammengesetzt gedacht werden kann, so lässt sich die gesammte Statik auf die des Punktes zurückführen.

Indess macht hier der Umstand einige Schwierigkeit, dass man die Cohäsionskräfte, welche die Zustände der verschiedenen Körper hervorbringen nicht als bekannt voraussetzen kann, dafür aber die bekannten Gleichungen hat, welche diese Zustände selbst ausdrücken. Jedenfalls aber ist natürlich mit der Statik des Punktes zu beginnen. Es handelt sich hierbei indess nur darum, dem Satze, dass die Kräfte, welche an einem Punkte einander in Gleichgewicht halten ein geschlossenes Vieleck bilden einen analytischen Ausdruck zu geben.

Denke man sich in irgend einem Punkte des Raumes O drei feste Axen X, Y, Z und in A den mechanischen Punkt, den wir betrachten. Auf diesen mögen die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ wirken, und möge nun P_s bezüglich mit den Axen Winkel machen, deren Cosinus $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, seien ferner X_s, Y_s, Z_s die Projectionen von P_s auf die Axen, so ist bekanntlich:

1) $X_s = P_s\alpha_s, \quad Y_s = P_s\beta_s, \quad Z_s = P_s\gamma_s,$

Die Ausdrücke X_s, Y_s, Z_s haben auch folgende Bedeutung. Wenn man diejenigen drei, bezüglich nach den Axen X, Y, Z gerichteten Kräfte sucht, deren Mittelkraft P_s ist, so werden dieselben mit P_s ein geschlossenes Viereck mit drei rechten Winkeln bilden, wenn man jede nach dem Endpunkt der vorhergehenden überträgt; und man überzeugt sich leicht, dass man dafür setzen kann bezüglich in drei Seiten X_s, Y_s, Z_s und die durch ihren Eckpunkt gehende Diagonale P_s eines rechtwinkligen Parallelepipedons, so dass also X_s, Y_s, Z_s die nach der Richtung der Axen genommenen Seitenkräfte sind, die sich zur Mittelkraft P_s vereinen, in die also P_s zerlegt werden kann.

Die Eigenschaft eines geschlossenen Vielecks ist nun, dass die Summe der Projectionen aller Seiten auf irgend einer Linie algebraisch genommen der Null gleich ist. Wir haben also:

2) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \Sigma X = 0$
$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = \Sigma Y = 0$
$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \Sigma Z = 0,$

als die Bedingungen des Gleichgewichts. Offenbar sind diese drei Bedingungen nothwendig und ausreichend.

Es lassen sich diese Betrachtungen auffassen zugleich als eine Zerlegung und eine Zusammensetzung der auf A wirkenden Kräfte.

Was die Zerlegung der Kräfte anbetrifft, so ist diese eine höchst wichtige Methode in der Statik, namentlich die hier angewandte Methode der Zerlegung nach drei festen Axen. Unwesentlich ist es hierbei, dass die Axen auf einander senkrecht sind.

Denkt man sich drei den Punkt A angreifende Kräfte, welche nicht in einer Ebene liegen, so setzt man zwei davon nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen, und vereint die Diagonale mit der dritten Kraft zu einer vierten, welche die Mittelkraft aller drei ist. Hierbei ist es einleuchtend, dass diese vierte Kraft immer betrachtet werden kann als die Diagonale eines Parallelepipedons, wovon die drei Seitenkräfte anstossende Seiten sind.

Dieser Satz, eine unmittelbare Folge des Parallelogramms der Kräfte, wird gewöhnlich als der Satz vom Parallelepipedon der Kräfte bezeichnet. Er lehrt zugleich auch, eine Kraft nach drei gegebenen Richtungen zu zerlegen.

Was die drei Gleichungen des Gleichgewichts anbetrifft, so lässt sich übrigens deren Form vielfach ändern.

Jede derselben drückt aus, dass die Projectionssumme der Kräfte auf irgend eine Linie der Null gleich sei. Es ist

dabei unwesentlich, dass diese drei Linien durch einen Punkt gehen, und rechtwinklig auf einander stehen. Nur dürfen, um die dritte Gleichung nicht identisch zu machen, nicht alle drei Linien in einer Ebene liegen. — Unwesentlich ist es ferner, dass die rechtwinkligen Projectionen genommen sind, da wenn man beliebige Projectionen nimmt, d. h. durch die Endpunkte jeder Kraft, oder durch die Eckpunkte des Vielecks Ebenen legt, die alle einer gegebenen parallel sind, die Summe der von einer Linie durch diese Ebenen abgeschnittenen Stücke zusammen der Null gleich sind. — Es ist jedoch unnöthig, hierfür die complicirteren analytischen Ausdrücke zu gewinnen, wenn gleich diese Betrachtungen oft für statische Betrachtungen wichtig sind.

Liegen alle Kräfte in einer Ebene, so kann diese als Ebene der XY betrachtet werden, mache dann die Kraft P_s mit der Axe der X den Winkel ϑ_s, so ist:

$$\alpha_s = \cos\vartheta_s, \quad \beta_s = \sin\vartheta_s, \quad \gamma_s = 0,$$

die Gleichungen 1) haben also die Gestalt:

1a) $$X_s = P_s\cos\vartheta_s, \quad Y_s = P_s\sin\vartheta_s$$

und von den Gleichungen 2) fällt die dritte als identisch aus.

Denkt man sich von einem beliebigen Punkte in der Ebene O Lothe $p_1, p_2 \ldots$ bezüglich auf die Richtung der Kräfte $P_1, P_2 \ldots$ gefällt, und nimmt man die Richtung A als Axe der X, setzt die Strecke $OA = q$, so ist offenbar:

$$p_s = q\sin\vartheta_s.$$

Es ist aber hierbei darauf zu achten, ob man die Linie q in dem einen oder andern Sinne drehen müsste, um sie in die Richtung P_s zu bringen, denn je nachdem dies geschieht ist ϑ_s, also auch $\sin\vartheta_s$ und p_s positiv oder negativ zu nehmen.

Die zweite Gleichung 1a) wird nun:

$$Y_s q = P_s p_s$$

und die zweite Gleichung 2) also:

$$\Sigma(Pp) = 0.$$

Den Ausdruck $P_s p_s$ nennt man statisches Moment der Kraft P_s in Bezug auf Punkt O. p_s heisst der Arm des Momentes. Damit also Kräfte, die in einer Ebene liegen und einen Punkt angreifen einander in Gleichgewicht halten, ist es nothwendig und ausreichend, dass die statischen Momente in Bezug auf zwei Punkte in der Ebene der Null gleich sein.

Seien jetzt $P_1, P_2, \ldots P_n$ beliebige Kräfte, die einen Punkt A angreifen. Es soll deren Mittelkraft gefunden werden. Sei letztere gleich Q, so müssen dann die Kräfte:

$$P_1, P_2 \ldots P_n \text{ und } -Q$$

das Gleichgewicht halten. Die Gleichungen 2) bestimmen die Seitenkräfte von $P_1, P_2 \ldots P_n$. Seien noch λ, μ, ν die Cosinus der Winkel, welche Q mit den Axen macht, und sind dann U, V, W die Seitenkräfte von Q nach den Coordinatenaxen, so ist also auch:

3) $$U = Q\lambda, \quad V = Q\mu, \quad W = Q\nu$$

und die Gleichungen 2) nehmen die Gestalt an, wenn man $-U$, $-V$, $-W$ berücksichtigt:

$$U = \Sigma X, \quad V = \Sigma Y, \quad W = \Sigma Z,$$

oder:

4) $$Q\lambda = \Sigma X, \quad Q\mu = \Sigma Y, \quad Q\nu = \Sigma Z.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

bestimmen die Grösse und Richtung der Kräfte Q.

Erhebt man nämlich die Gleichungen 3) ins Quadrat und addirt sie, so kommt:

5) $$Q^2 = (\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2,$$

die Gleichungen 4) geben aber, wenn Q bekannt ist, λ, μ und ν.

Setzen wir in Gleichung 5) für X, Y, Z noch die Werthe ein, so ist:

$$Q^2 = (\Sigma P_s\alpha_s)^2 + (\Sigma P_s\beta_s)^2 + (\Sigma P_s\gamma_s)^2,$$

wo der Grösse s die ganzen Werthe von 1 bis n zu geben sind. Man hat offenbar also:

$$Q^2 = \Sigma(P_s^2) + 2\Sigma P_s P_t(\alpha_s\alpha_t + \beta_s\beta_t + \gamma_s\gamma_t),$$

wo in der zweiten Summe für s und t alle Combinationen zu zweien der Zahlen 1 bis n zu nehmen sind, die gleichen ausgeschlossen.

Ist aber $r_{s,t}$ der Winkel, welchen die Kräfte P_s und P_t mit einander machen, so hat man bekanntlich:

Digitized by Google

$$\cos r_{s,t} = \alpha_s \alpha_t + \beta_s \beta_t + \gamma_s \gamma_t$$

also hier:

6) $$Q^2 = \Sigma(P_s^2) + 2\Sigma(P_s P_t \cos r_{s,t}).$$

In diesen Betrachtungen ist die Statik des Punktes enthalten. Jedoch ist noch auf den Fall einzugehen, wo die Bahn desselben keine freie ist, d. h. wo er mit unbeweglichen Flächen oder Linien in Verbindung steht.

Es möge sich ein Punkt A zunächst auf einer unbeweglichen und undurchdringlichen Fläche befinden. Es sei die Gleichung der letzten

$$f(x, y, z) = 0.$$

Zunächst ist zu bestimmen, auf welcher Seite der Fläche sich Punkt A befinde. Dies geschieht in dem man durch A eine Normale an die Fläche zieht, welche die letztere in B schneidet; die Richtung AB bestimmt dann die Lage des Punktes A zur Fläche. Macht dieselbe mit der Richtung der Schwere einen spitzen Winkel, so ist der Punkt unterhalb der Fläche, macht sie einen stumpfen, so ist er über derselben. Wirken nun gewisse Kräfte auf den Punkt A, so ist leicht einzusehen, dass, wenn man die Mittelkraft von denselben bildet, es nur darauf ankommt, ob der Winkel, welchen letztere mit der Richtung AB macht, ein spitzer oder stumpfer sei. Im letztern Falle entfernt sich der Punkt von der Fläche, sie übt keinen Druck auf ihn aus, und die Gleichungen 2) finden unbedingt statt. Im erstern Falle aber ist, damit Gleichgewicht herrsche, der von der Undurchdringlichkeit der Fläche herrührende Druck in die Zahl der Kräfte P mit aufzunehmen. Wir haben also diesen Fall allein hier zu betrachten.

Sei Q die unbekannte Intensität des Druckes; derselbe ist nach der Normale der Fläche gerichtet (vergl. den vorigen Abschnitt) und diese macht mit den Axen bekanntlich Winkel, deren Cosinus bezüglich sind:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{R}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{R}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{R},$$

$$R = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2}}.$$

Setzt man also $\frac{Q}{R} = S$, so sind die Componenten des Druckes nach den Axen:

$$S\frac{\partial f}{\partial x}, \quad S\frac{\partial f}{\partial y}, \quad S\frac{\partial f}{\partial z}$$

und so haben die Gleichungen 2) jetzt die Gestalt:

7) $$\Sigma X + S\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\Sigma Y + S\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\Sigma Z + S\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Da drei Gleichungen zur Bestimmung des Gleichgewichts hinreichen, S aber unbekannt ist, so braucht man noch eine Gleichung. Diese aber ist offenbar die Gleichung der Fläche

$$f = 0,$$

da A sich immer auf derselben befindet.

Die Gleichungen 7) in Verbindung mit dieser bestimmen nun den Druck $Q = RS$ der Grösse und Lage nach.

Befinde sich jetzt Punkt A auf einer festen Linie, deren Gleichungen sein sollen:

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

Ueber die Richtung der den Punkt angreifenden Kräfte ist dieselbe Bemerkung wie oben zu machen. Wir betrachten also nur den Fall, wo die durch A gezogene Normale an die Linie mit der Mittelkraft einen spitzen Winkel macht.

Der Druck der Linie, der auf derselben Normale ist, lässt sich in zwei Seitenkräfte zerlegen, deren eine auf der Fläche $f = 0$, der andere auf der Fläche $\varphi = 0$ normal ist, denn jede auf einer dieser Flächen, die sich in der gegebenen Linie schneiden, senkrechte Grade, die durch die Linie geht, steht auch auf letzterer senkrecht; also wie auch die Richtung des Druckes sei, wird er mit den Normalen beider Flächen in einer Ebene liegen, und nach dem Parallelogramm der Kräfte sich nach den Richtungen dieser Normalen zerlegen lassen. Seien Q_1, Q_2 die Intensitäten dieser Seitenkräfte. Ferner:

$$Q_1 = R_1 S_1, \quad Q_2 = R_2 S_2,$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{\partial f^2}{\partial x^2} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} + \frac{\partial f^2}{\partial z^2}},$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial z^2}},$$

dann ist ganz wie im vorigen Falle:

Digitized by Google

8) $$\Sigma X + S_1 \frac{\partial f}{\partial x} + S_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$
$$\Sigma Y + S_1 \frac{\partial f}{\partial y} + S_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$
$$\Sigma Z + S_1 \frac{\partial f}{\partial z} + S_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Wird aus diesen Gleichungen S_1 und S_2 eliminirt, so bleibt nur noch eine Gleichung übrig, welche jedoch mit:

$$f = 0 \text{ und } \varphi = 0$$

zu verbinden ist, so dass man wieder drei Gleichgewichtsbedingungen hat. Man hat somit fünf Gleichungen, aus denen man S_1, S_2, x, y, z, mithin auch

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

bestimmen kann. Es ist also auch Q_1 und Q_2 der Lage und Grösse nach bekannt. Durch Vereinigung dieser beiden Seitenkräfte erhält man den Druck, welchen die Linie ausübt, der Richtung und Grösse nach.

Den Gleichungen 7) und 8) lässt sich aber auch eine Gestalt geben, aus welcher der Druck ganz eliminirt ist.

Wenn man nämlich die Gleichungen 7) oder 8) bezüglich mit dx, dy, ds multiplicirt und addirt, dabei die Gleichungen, welche durch Differenziiren der Bedingungsgleichungen entstehen, berücksichtigt, nämlich:

9) $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

wovon die letztere nur im Falle einer unbeweglichen Linie besteht, so erhält man:

10) $$dx\Sigma X + dy\Sigma Y + dz\Sigma Z = 0,$$

eine Gleichung, die auch für einen freien Punkt aus den Gleichungen 2) folgt. In diesem Falle sind dx, dy, dz ganz beliebig, also die Coefficienten dieser Ausdrücke einzeln der Null gleich, wie dies die Gleichungen 2) selbst angeben. Im Falle der Flächen sind dx, dy, ds durch die erste Gleichung 9) verbunden; eliminirt man nun dz, so bleibt noch eine Gleichung übrig, in der dx und dy beliebig sind, also ihre Coefficienten einzeln der Null gleich gesetzt werden können. Auf diesem Wege erhält man die beiden Gleichungen, welche mit $f = 0$ verbunden das Gleichgewicht bestimmen. Im Falle einer unbeweglichen Linie bestimmen die beiden Gleichungen 9) die Verhältnisse von dx, dy, ds aber völlig, und nach Elimination derselben liefert 10) nur eine Gleichung, die mit $f = 0$ und $\varphi = 0$ zu verbinden ist. Mit Hülfe der Bedingungen bestimmt also 10) immer das Gleichgewicht des Punktes. Die Gleichung 10) wollen wir noch etwas verändern.

Denkt man sich den Punkt A unendlich wenig aus seiner Lage verschoben, und zwar in ganz willkürlicher Richtung, wenn dieser Punkt frei ist, auf der Fläche oder Linie selbst dagegen, wenn er sich auf einer solchen befindet, sei ds sein Weg, so sind dx, dy, dz die Projectionen desselben nach den Axen, wo im Falle der Fläche die erste, im Falle der Linie beide Gleichungen 9) diese Differenziale mit einander verbinden. Sind λ, μ, ν die Cosinus der Winkel, welche eine beliebige Grade U mit den Axen macht, so ist die Projection von ds auf diese Grade, die wir mit dp bezeichnen wollen, gleich der Summe der Projectionen von dx, dy, dz auf U, (denn ds, dx, dy, dz bilden ein geschlossenes Viereck). Wir haben somit:

$$dp = \lambda dx + \mu dy + \nu dz.$$

Sei nun U die Mittelkraft aller auf den Punkt A wirkenden Kräfte, also:

$$U\lambda = \Sigma X, \quad U\mu = \Sigma Y, \quad U\nu = \Sigma Z,$$

so nimmt die Gleichung 10) die Form an:

$$U(\lambda dx + \mu dy + \nu dz) = 0,$$

oder mit Hülfe der eben gefundenen Gleichung:

11) $$Udp = 0.$$

Um diese Gleichung so in Worte zu fassen, führen wir noch eine Bezeichnung ein.

Jede unendlich kleine Verschiebung ds eines Punktes lässt sich als einer geradlinigen und gleichmässigen Bewegung entsprechend also als eine Geschwindigkeit auffassen.

Wir nennen eine solche Geschwindigkeit virtuell, wenn sie, wie hier ds, nur eine mögliche nicht eine durch die auf den Punkt A wirkenden Kräfte hervorgebrachte ist, jedoch so, dass die entsprechende Bewegung den Bedingungen des Systems genügt, also hier den Punkt nicht von der Fläche oder Line entfernt. Nennen wir ferner Moment der virtuellen Geschwindigkeit eines Punktes das Product der Mittelkraft aller ihn angreifenden Kräfte in die Projection der virtuellen Geschwindigkeit auf dieselbe, so drückt die Gleichung 11) aus: „dass das Moment der virtuellen Geschwindigkeit

des Punktes A verschwindet*)". Diese allgemeine Gleichgewichtsbedingung wird Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit genannt. Welche höchst allgemeine Ausdehnung demselben zu geben ist, wird später gezeigt werden.

Uebrigens lässt sich dem Begriff der virtuellen Geschwindigkeit noch eine etwas weitere Ausdehnung geben.

Befinde sich der Punkt A z. B. auf der Fläche oder Linie MN, so steht er mit derselben nur so lange in Verbindung als die Mittelkraft U, der auf ihn wirkenden Kräfte nach Innen hinein gerichtet ist, und dies ist also hier anzunehmen. Als virtuelle Geschwindigkeit, d. h. der Verbindung des Punktes mit MN ist aber jede, nicht allein die Bewegung AB auf MN, sondern auch jede andere AC, AD über MN aufzufassen; man sieht aber leicht, dass die Projectionen von AC und AD auf U, die dieser Kraft entgegengesetzte Richtung haben, also wird Udp negativ sein. Man kann also, wenn man den Begriff der virtuellen Geschwindigkeit so erweitert auffasst, als Gleichgewichtsbedingung aufstellen: „dass das Moment der virtuellen Geschwindigkeit nicht positiv, (d. h. entweder negativ oder der Null gleich) sein muss".

6) Statik fester Körper.

Bei einem jeden Körper ist es natürlich Bedingung des Gleichgewichts, dass jeder Punkt sich in solchem befinde, d. h. dass die auf ihn wirkenden, von den andern Punkten ausgehenden Spannungen die äusseren Kräfte aufheben. — Es müssen aber die sich hieraus ergebenden Gleichungen derart sein, dass nach Elimination aller Spannungen, die ja nicht bekannt sind, noch eine hinreichende Anzahl Gleichgewichtsbedingungen, also für jeden Punkt drei zurückbleiben.

Was nun die festen Körper anbetrifft, so ist leicht zu finden, wie viel Gleichgewichtsbedingungen überhaupt für sie erforderlich sind.

Bestehe der feste Körper aus n Punkten, so muss die Entfernung eines jeden derselben von jedem andern eine unveränderliche sein. Dies ist aber offenbar schon der Fall, wenn die Entfernungen jedes Punktes von drei andern gegebenen, die wir mit A, B, C bezeichnen, und die nicht in einer Graden liegen und ausserdem die Entfernung dieser drei unter einander constant ist. Denn unter dieser Bedingung ist die Entfernung jedes Punktes von der Ebene dieser drei Punkte und von irgend einer darin befindlichen Linie eine feste, womit auch die Lage jedes Punktes zu irgend einer andern Ebene, Linie oder einem Punkte als constant gegeben ist. Da nun ausser den drei Punkten noch $n-3$ andere vorhanden sind, so hat man im ganzen $3n-9$ Gleichungen, welche die Entfernungen jeden Punktes von einem der dreien, und drei, welche dieselbe in Bezug auf je zwei der drei Punkte unter einander ausdrücken, also $3n-6$ Gleichungen von der Form:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

wo a, b, c die Coordinaten eines der drei Punkte, x, y, z die eines beliebigen Punktes, und r die constante Entfernung ist. Es sind aber für das Gleichgewicht der n Punkte $3n$ Gleichungen nöthig. Also, um das Gleichgewicht eines festen Körpers zu bestimmen, braucht man im Ganzen sechs Gleichungen, welche jedoch die Spannungen nicht enthalten dürfen. Von diesen sechs Gleichungen, welche wir sogleich entwickeln werden, wird die ganze Art der Entstehung zeigen, dass sie nicht für feste Körper allein, sondern für alle Systeme nothwendig sind. Bei den festen aber sind sie auch nach dem Obigen ausreichend. Aus ihrer allgemeinen Gültigkeit aber folgt der gewöhnlich als Prinzip angenommene Satz, dass jeder im Gleichgewicht sich befindende Körper in demselben verbleibt, wenn man ihn fest geworden denkt.

Seien A und B zwei beliebige Punkte des Körpers, deren Coordinaten bezüglich x, y, z und x', y', z' und deren Entfernung r ist. Wie auch der Zustand des Systems sei, findet von A nach B eine Spannung ϱ, und von B nach A eine solche $\varrho' = -\varrho$ statt, welche beide nach der Verbindungslinie r gerichtet sind, also nach den Axen in die Componenten zerfallen:

$$\varrho\frac{x-x'}{r}, \quad \varrho\frac{y-y'}{r}, \quad \varrho\frac{z-z'}{r}$$

$$\varrho\frac{x'-x}{r}, \quad \varrho\frac{y'-y}{r}, \quad \varrho\frac{z'-z}{r}$$

*) Uebrigens leuchtet dies von selbst ein, die Gleichung $Udp = 0$ sagt nur, dass entweder $U = 0$ oder $dp = 0$, d. h. dass die Richtung ds auf U senkrecht, oder U normal gegen die Fläche oder Linie gerichtet ist, was der Fall nothwendig sein muss, wenn U dem Drucke der Fläche oder Linie das Gleichgewicht halten soll.

Digitized by Google

wirken nun auf den Punkt A beliebige Kräfte, deren Componenten nach den Axen bezüglich sind

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ X_2,\ Y_2,\ Z_2\ \ldots,$$

so sind für diesen Punkt:

$$S(X)+S\left(\varrho\frac{x-x'}{r}\right)=0$$

$$S(Y)+S\left(\varrho\frac{y-y'}{r}\right)=0$$

$$S(Z)+S\left(\varrho\frac{z-z'}{r}\right)=0,$$

wo das Zeichen S die Summe aller Componenten X, Y, Z, welche den Punkt A angreifen, anzeigt, die zweite Summe also auf alle von den übrigen Punkten nach A hin wirkenden Spannungen geht. Betrachtet man aber die entsprechenden Gleichungen für die übrigen Punkte, so muss jedem $\varrho\frac{x-x'}{r}$, ein $\varrho\frac{x'-x}{r}$ für irgend einen andern Punkt entsprechen, addirt man also diejenigen entsprechenden Gleichungen für alle Punkte, welche die nach derselben Axe gerichteten Componenten aufhalten, so fallen die zweiten Summen ganz weg, und man hat:

1) $\quad \Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0,$

wo das Zeichen Σ die Summe aller Kräfte, die auf den Körper wirken, anzeigt. Oefter schreibt man diese Gleichungen, welche völlig identisch mit den für einen Punkt stattfindenden sind, auch unter der Form:

1a) $\Sigma mX=0,\quad \Sigma mY=0,\quad \Sigma mZ=0,$

wo unter m die Masse eines der Punkte verstanden wird, welche den Körper bilden. Es sind dann die Kräfte durch mX, mY, mZ, m_1X_1 ... ausgedrückt, weil wie früher gezeigt, die Einwirkungen, welche mechanische Punkte auf einander ausüben den Massen proportional sind.

Diese drei Gleichungen 1) sind aber nicht ausreichend wie beim Punkte. Wir wollen jetzt die erste der ursprünglichen Gleichungen mit y, die zweite mit x multipliciren und subtrahiren, wo x, y die Coordinaten des in Rede stehenden Punktes sind. Es ergibt sich:

$$S(Xy-Yx)+S\varrho\left(\frac{x-x'}{r}y-\frac{y-y'}{r}x\right)=0.$$

Jedem Ausdrucke unter der zweiten Summe entspricht für einen anderen Punkt, dessen Coordinaten x', y', z sind ein Ausdruck:

$$\varrho\left(\frac{x'-x}{r}.y'-\frac{y'-y}{r}x'\right)$$

und dieser zum erstgenanten addirt gibt:

$$\varrho\left[\frac{x'-x}{r}(y'-y)-\frac{y'-y}{r}(x'-x)\right]=0,$$

so dass auch hier die zweiten Summen wegfallen, wenn man die allen Punkten entsprechenden Gleichungen addirt. Man hat also:

$$\Sigma(Xy-Yx)=0.$$

Wenn man mit der zweiten und dritten, und mit der dritten und ersten unserer ursprünglichen Gleichung ebenso verfährt, so erhält man also:

2) $\quad \Sigma(Xy-Yx)=0,$
$\quad\ \Sigma(Ys-Zy)=0,$
$\quad\ \Sigma(Zx-Xz)=0,$

oder auch bei der oben eingeführten Bezeichnung:

2a) $\quad \Sigma m(Xy-Yx)=0,$
$\quad\ \Sigma m(Ys-Zy)=0,$
$\quad\ \Sigma m(Zx-Xz)=0.$

Die Gleichungen 1) und 2) sind für feste Körper also ausreichend — nach der Entstehung aber allgemein gültig, und zwar selbst dann, wenn ϱ kein Druck, sondern irgend eine Kraft ist, welche von einem Punkt im Innern des Körpers ausgehend auf einen andern wirkt.

Die drei Gleichungen 1) zeigen, dass wenn man alle den festen Körper angreifenden Kräfte sich in einem Punkt angebracht denkt, die Mittelkraft der Null gleich sein muss.

Was die Gleichungen 2) anbetrifft, so kommen wir sogleich auf deren geometrische und mechanische Bedeutung. Uebrigens zeigt die Entstehungsweise dieser Gleichungen unmittelbar, dass dieselben noch gültig bleiben, wenn die Axen schiefwinklig, X, Y, Z die Componenten der Kräfte nach diesen schiefen Axen, x, y, z die Coordinaten der Angriffspunkte sind. Denn immer hat man, wenn ϱ der Druck, S seine Componente nach der Axe der x ist:

$$\frac{\varrho}{r}=\frac{S}{x-x'},$$

also:

$$S=\varrho\frac{x-x'}{r}.$$

Es sollen jetzt die in den Gleichungen 2) vorkommenden Ausdrücke näher untersucht werden. Wir wollen hierbei

Digitized by Google

zunächst einen geometrischen Satz ins Gedächtniss zurückrufen.

Seien

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\quad \frac{x_1}{a_1}=\frac{y_1}{b_1}=\frac{z}{c_1}$$

die Gleichungen zweier Linien, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. a, b, c, a_1, b_1, c_1 bezüglich die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen machen. Sei ferner:

$$\lambda x+\mu y+\nu z=0$$

die Gleichung der durch sie gehenden Ebene, λ, μ, ν die Cosinus der Winkel, welche die Normale dieser Ebene mit den Axen macht, so hat man, wenn man x, y, z aus den obigen Gleichungen einsetzt:

$$\lambda a+\mu b+\nu c=0,\qquad \lambda a_1+\mu b_1+\nu c_1=0.$$

also:

$$\lambda:\mu:\nu=cb_1-bc_1:ac_1-ca_1:ba_1-ab_1,$$

also:

$$\lambda=\frac{cb_1-bc_1}{U},\qquad \mu=\frac{ac_1-ca_1}{U},\qquad \nu=\frac{ba_1-ab_1}{U}$$

und wenn man alle drei Gleichungen ins Quadrat erhebt und addirt:

$$\begin{aligned}U^2&=(cb_1-bc_1)^2+(ac_1-ca_1)^2+(ba_1-ab_1)^2=c^2(a_1^2+b_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2)\\&\quad+a^2(b_1^2+c_1^2)-2bb_1cc_1-2cc_1aa_1-2aa_1bb_1=c^2(1-c_1^2)+b^2(1-b_1^2)\\&\quad+a^2(1-a_1^2)-2bb_1cc_1-2cc_1aa_1-2aa_1bb_1=1-(aa_1+bb_1+cc_1)^2.\end{aligned}$$

Offenbar ist nun $aa_1+bb_1+cc_1$ gleich dem Cosinus desjenigen Winkels ϑ, welchen beide Linien mit einander machen, und somit:

$$U^2=1-\cos\vartheta^2,\qquad U=\sin\vartheta$$

also:

$$cb_1-bc_1=\lambda\sin\vartheta,\qquad ac_1-ca_1=\mu\sin\vartheta,\qquad ba_1-ab_1=\nu\sin\vartheta.$$

Betrachten wir jetzt den Ausdruck:

$$Xy-Yx.$$

Sei P diejenige Kraft, deren Componenten X, Y, Z genannt wurden, α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen macht, q die Verbindungslinie des Angriffspunktes der Kraft q mit dem Anfangspunkte der Coordinaten und a, b, c die Cosinus der Winkel, welche Linie q mit den Axen macht, so ist:

$$\begin{aligned}x&=qa,\quad & y&=qb,\quad & z&=qc,\\X&=P\alpha,\quad & Y&=P\beta,\quad & Z&=P\gamma,\end{aligned}$$

$$Xy-Yx=Pq(ab-\beta a).$$

Möge nun die Normale der Ebene, in der sich P und q befinden die Winkel mit den Axen machen, deren Cosinus bezüglich λ, μ, ν sind, sei ferner ϑ der Winkel, welchen P und q mit einander machen, so hat man:

$$Xy-Yx=Pq\nu\sin\vartheta.$$

Sei

$$q\sin\vartheta=p$$

so stellt p das vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die Kraftrichtung P gezogene Loth vor, und man hat:

A)
$$\begin{aligned}Xy-Yx&=Pp\nu,\\Yz-Zy&=Pp\lambda,\\Zx-Xz&=Pp\mu.\end{aligned}$$

Die Gleichungen 2) nehmen also die Form an:

2b) $\Sigma Pp\lambda=0,\quad \Sigma Pp\mu=0,\quad \Sigma Pp\nu=0.$

Der Ausdruck Pp ist das, was wir im vorigen Abschnitte statisches Moment nannten. Beim statischen Moment ist durch die Richtung der Kraft, und den Punkt O, auf welche sich das Moment bezieht eine Ebene bestimmt, die Momentenebene. Die Normale derselben macht die Winkel deren Cosinus λ, μ, ν sind, mit den Axen, Das Moment Pp kann man sich auf dieser Normale abgetragen denken, und man hat dann eine Linie, welche ihrer Grösse nach das Moment, ihrer Richtung nach die Momentenebene bestimmt, und die wir als Momentenaxe bezeichnen.

Die Gleichungen 2) oder 2b) drücken nun aus, dass die Projectionen dieser Axe auf die drei Coordinatenaxen der Null gleich sind.

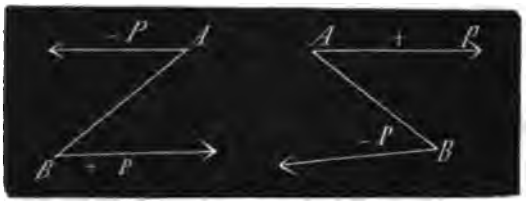
Die Gleichungen 2b) gelten natürlich auch für einen Punkt, sie werden aber in diesem Falle mit den Gleichungen 1) identisch.

Das eben Gesagte gibt den Gleichungen 2) eine geometrische Deutung. Poinsot hat denselben aber einen mechanischen Ausdruck gegeben von dem jetzt die Rede sein soll.

Wenn zwei feste Punkte A und B

Digitized by Google

Fig. 412.



eines festen Körpers (Fig. 412) bezüglich von zwei entgegengesetzten sonst gleichen Kräften P und $-P$ angegriffen sind, so nennt man diese Verbindung ein Paar (Kräftepaar, *couple*). Man unterscheidet:

1) den Arm des Paares p, d. h. den senkrechten Abstand beider Kräfte,

2) das Moment desselben, d. h. das Product aus Arm und Kraft, oder das statische Moment der Kraft P in Bezug auf Punkt B.

Das Moment kann positiv oder negativ sein. Um zu prüfen, wann eines oder das andere der Fall sei, verfährt man am einfachsten, wenn man sich einen der Punkte, B, fest denkt, und untersucht in welchem Sinne mittels der Kraft P eine Drehung des Punktes A um B erfolgen kann. Ist diese Drehung die des Zeigers einer Uhr so kann das Moment z. B. als positiv, im andern Falle als negativ betrachtet werden. Dieselben Betrachtungen sind übrigens auch bei statischen Momenten zu machen.

3) Die Axe des Paares ist eine Grade, welche auf letzterem senkrecht steht, nach dem einen oder anderen Sinne gerichtet ist, je nachdem das Moment positiv oder negativ ist, und durch ihre Länge die Grösse des Momentes angibt. Diese Axe repräsentirt das Paar völlig, und man pflegt auch statt zu sagen, die Axe sei so gerichtet oder habe diese Grösse, dies vom Paare selbst auszusagen.

Kehren wir nun zu dem von beliebigen Kräften angegriffenen Körper zurück.

Wenn man durch irgend einen Punkt O, den wir immer als Anfangspunkt betrachten können, Kräfte P legt, die entsprechend allen auf den Körper wirkenden gleich und gleichgerichtet sind, zugleich aber die entgegengesetzten Kräfte $-P$, so wird, da diese die ersteren in Gleichgewicht halten, der Zustand des Körpers nicht geändert. Zugleich kann man einerseits die Kräfte P, welche an O angebracht sind, besonders betrachten, und in eine Mittelkraft vereinen. Es bleibt dann noch in O eine Kraft $-P$, die in Gemeinschaft mit der an irgend einem Punkte A wirkenden Kraft P ein Paar bildet. Die auf den Körper wirkenden Kräfte lassen sich also ersetzen, durch eine in einem beliebigen Punkte angebrachte Mittelkraft und einer Reihe von Paaren. Es lässt sich aber zeigen, dass alle diese Paare, sich zu einem einzigen vereinen lassen.

Denn denke man sich eine Kraft Q, die in Punkt O wirkt, Winkel mit Cosinus a, b, c mit den Axen macht, ferner ein Paar, dessen Kräfte gleich R, dessen Arm gleich r sein soll, dessen Axe Winkel mit Cosinus l, m, n mit den Axen macht, so müssen, damit diese beiden alle auf das System wirkenden Kräfte ersetzen, die Kraft $-Q$ und die beiden Kräfte $+R$ und $-R$ in ihren Angriffspunkten (von denen keiner mit dem Anfangspunkt zusammen zu fallen braucht) in entgegengesetzter Richtung angebracht, d. h. das Paar entgegengesetzt genommen, den übrigen das Gleichgewicht halten. Das so entstehende Paar wird dann das Moment $-Rr$ haben. Aus den Gleichungen 1) fallen $+R$ und $-R$ ganz weg und man hat:

3) $\Sigma P\alpha = Qa, \quad \Sigma P\beta = Qb, \quad \Sigma P\gamma = Qc$

Gleichungen, welche nur ausdrücken, dass Q die Mittelkraft der in O vereinigten Kräfte ist (vergl. den vorigen Abschnitt). Aus den Gleichungen 2) oder 2b) fällt die Kraft Q ganz aus, da der Arm dieser Kraft Null ist, also:

4)
$$\Sigma Pp\lambda = Rrl,$$
$$\Sigma Pp\mu = Rrm,$$
$$\Sigma Pp\nu = Rrn.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen völlig das Moment Rr und die Richtung des Paares. Sie lassen völlig willkürlich, wie die Kraft des Paares in ihrer Ebene liege, vorausgesetzt, dass das Product aus Kraft und Arm einen gegebenen Werth habe, ferner bleibt auch, da nur l, m, n bestimmt sind, die Ebene des Paares beliebig, vorausgesetzt, dass sie einer gegebenen Ebene parallel ist. D. h.:

„Ein Paar, welches auf irgend einen Körper wirkt, lässt sich ersetzen durch jedes andere, dass mit ihm gleiches Moment hat, und dessen Axe der seinen parallel ist."

Denke man sich jetzt mehrere Paare

$$Rr,\ R_1r_1,\ R_2r_2\ \ldots,$$

welche die Winkel mit Cosinus:

$$l, m, n,\quad l_1, m_1, n_1,\quad l_2, m_2, n_2\ \ldots$$

mit den Axen machen. Bilden die Axen dieser Paare in dem oben genommenen Sinne ein geschlossenes Vieleck, so ist:

$$\begin{aligned} Rrl &= R_1r_1l_1 + R_2r_2l_2 + \ldots \\ Rrm &= R_1r_1m_1 + R_2r_2m_2 + \ldots \\ Rrn &= R_1r_1n_1 + R_2r_2n_2 + \ldots \end{aligned}$$

d. h. in den Gleichungen 4) können statt des Paares Rr auch sämmtliche Paare $R_1r_1, \ldots R_2r_2$ genommen werden. Also:

„Beliebige Paare lassen sich in einziges (mittleres Paar) vereinen; zu dem Ende braucht man nur die Axe jedes derselben an den Endpunkt der Axe des vorhergehenden anzubringen und die entstehende Figur zum vollständigen Vieleck zu ergänzen, ganz wie dies bei Kräften, die auf einen Punkt wirkten, stattfinden. D. h.:

„Paare lassen sich in ein einziges (mittleres Paar) vereinen, wenn man ihre Axen zunächst wie Kräfte betrachtet, die irgend einen Punkt angreifen, aus ihnen die Mittelkraft bildet, und diese als Axe des mittleren Paares betrachtet, welche also der Richtung nach das letztere und der Länge nach sein Moment bestimmt."

Bei zwei Paaren folgt der Satz:

„Die Resultante zweier Paare ist ein drittes, dessen Axe der Länge und Lage nach durch die Diagonale des aus beiden Axen gebildeten Parallelogramms repräsentirt wird."

Dies ist der Satz vom Parallelogramm der Paare.

Die Gleichungen 2) und 2b) drücken nun aus, (wenn man sich statt

$$R_1r_1,\ R_2r_2\ \ldots\ P_1p_1,\ P_2p_2\ \ldots$$

gesetzt denkt), dass das aus sämmtlichen Paaren gebildete mittlere Rr der Null gleich ist, wenn Gleichgewicht stattfinden soll. Die Gleichungen 1) und 2) haben also jetzt folgende Bedeutung:

„Wenn man das System der Kräfte P durch einen beliebigen Punkt O legt, und die dazu gehörigen Paare nimmt, so sind im Falle des Gleichgewichts die Resultante aller Kräfte, die durch O gehen, und die Resultante der Paare einzeln der Null gleich."

Wenn man den Vereinigungspunkt der Kräfte O verlegt, so hat dies natürlich auf die Richtung und Grösse der Resultante keinen Einfluss, wohl aber auf das mittlere Paar, da die Arme der einzelnen Paare sich ändern.

Sei jetzt O_1 der Punkt in welchem alle Kräfte vereint werden. Betrachten wir O_1 als Anfangspunkt neuer Coordinaten x', y', z', welche den alten parallel sind, und seien ξ, η, ζ die Coordinaten von O_1 selbst auf O bezogen, so ist:

$$x' = x - \xi,\quad y' = y - \eta,\quad z' = z - \zeta.$$

Die erste Gleichung 4) gebe nun, wenn man O_1 als Anfangspunkt nimmt, $P\varrho$ als Moment des neuen mittleren Paares betrachtet, dessen Axe Winkel mit den Coordinatenaxen machen soll, deren Cosinus l_1, m_1, n_1 sind:

$$\Sigma[X(y-\eta) - Y(x-\xi)] = P\varrho n_1.$$

Der Ausdruck links aber nimmt die Form an:

$$\Sigma(Xy - Yx) - \eta\Sigma X + \xi\Sigma Y,$$

d. h., wenn man die beiden andern Gleichungen 4) in derselben Weise behandelt:

$$\begin{aligned} 5)\qquad Rrn &- (\eta a - \xi b)Q = P\varrho n_1 \\ Rrl &- (\zeta b - \eta c)Q = P\varrho l_1 \\ Rrm &- (\xi c - \zeta a)Q = P\varrho m_1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bestimmen das neue mittlere Paar völlig aus dem alten, wenn der Angriffspunkt verlegt wird, und die Coordinaten ξ, η, ζ des neuen bekannt sind. Multipliciren wir die drei Gleichungen 5) bezüglich mit c, b, a und addiren, so kommt:

$$6)\quad Rr(la + mb + nc) = P\varrho(l_1a + m_1b + n_1c).$$

Offenbar sind die Ausdrücke in den Klammern die Cosinus derjenigen Winkel, welche die mittlere Kraft mit der Axe des Paares macht, die Ausdrücke rechts und links also die Projectionen der bezüglichen Paaraxen auf die Richtung der Mittelkraft. Zerlegt man alle mittleren Paare, die sich bei irgend einer Annahme des Vereinigungspunktes ergeben, also nach dem Parallelogramm der Paare in je zwei, deren Axen bezüglich auf der Mittelkraft senkrecht und derselben parallel sind, so sagt die Gleichung 6): „dass die ersteren Componenten veränderlich, die zweiten bei allen gleich sind."

Digitized by Google

Man kann aber unter andern den Punkt O_1 so bestimmen, dass $l_1 = a$, $m_1 = b$, $n_1 = c$, die Axe des mittleren Paares der Kraftrichtung parallel ist. In diesem Falle ist die veränderliche Componente der Null gleich, mithin das mittlere Paar das kleinste mögliche. Also:

„Wenn der Angriffspunkt der Mittelkraft O_1 so bestimmt ist, dass die Axe des mittleren Paares der Mittelkraft parallel ist, so ist ersteres ein Minimum."

Um den Punkt O_1 zu bestimmen der diese Eigenschaft hat, muss in den Gleichungen 5) $l_1 = a$, $m_1 = b$, $n_1 = c$ gesetzt werden. Von diesen Gleichungen wird jedoch eine durch 6) ersetzt, welche die Gestalt hat:

$$Rr(la + mb + nc) = P\varrho,$$

also das Moment des mittleren Paares gibt. Die übrigen beiden Gleichungen 5) bestimmen die Coordinaten ξ, η, ζ von O_1 derart, dass dieser Punkt willkürlich auf einer Graden liegt, welche mit den Axen dieselben Winkel macht, (deren Cosinus a, b, c sind), als die Mittelkraft. Also:

„Damit das Paar ein Minimum sei, können die Kräfte durch jeden Punkt einer gewissen der Mittelkraft parallelen Graden gelegt werden."

Diese Grade nennt man Centralaxe. Sie ist gegeben, wenn man einen Punkt in ihr kennt, z. B. den, wo sie die Ebene xy schneidet; da hier $\zeta = 0$ ist, so geben die beiden letzten Gleichungen:

$$\eta = \frac{P\varrho a - Rrl}{cQ}, \quad \zeta = -\frac{P\varrho b - Rrm}{cQ}.$$

Uebrigens kann man O_1 so wählen, dass dem Momente $P\varrho$ alle Werthe zukommen, die grösser als der Minimumwerth sind, da man $l_1 a + m_1 b + n_1 c$ dann angemessen bestimmen kann. Ist dieser Ausdruck gleich Null, d. h. die Axe des Gegenpaares auf der Mittelkraft senkrecht, so wird das Moment $P\varrho$ unendlich gross.

Auch kann die Lage der Axe des Paares beliebig gewählt, d. h. l_1, m_1, n_1 irgend wie bestimmt werden, dann ist $P\varrho$ bekannt, und zwei der Gleichungen 5) zeigen dann, dass alle dieser Lage entsprechenden Angriffspunkte O_1 auf einer der Mittelkraft parallelen Graden liegen. Also:

„Für alle Punkte einer der Mittelkraft parallelen Graden ist das mittlere Paar constant."

Setzt man $\zeta = 0$, so hat man:

$$\eta = \frac{P\varrho l_1 - Rrl}{cQ}, \quad \zeta = -\frac{P\varrho m_1 - Rrm}{cQ},$$

für den Punkt, wo die entsprechende Grade die Ebene yz schneidet.

Für alle Paare übrigens, wo

$$l_1 a + m_1 b + n_1 c$$

constant ist, d. h. deren Axen denselben Winkel mit der Centralaxe machen, ist das Moment $P\varrho$ des mittleren Paares dasselbe.

Um das Wichtigste des eben Gesagten nochmals zusammenzufassen, so lassen sich die einen festen Körper angreifenden Kräfte stets in eine Kraft und ein Paar zusammensetzen, jedoch auf unendlich viel Arten. Bei allen diesen ist constant die Richtung und Grösse der Kraft so wie die Componente des Paares, deren Axe der Mittelkraft parallel ist, veränderlich der Angriffspunkt der Kraft, so wie diejenige Componente des Paares, deren Axe auf der Mittelkraft senkrecht ist. Letzteres bleibt jedoch unverändert, wenn man den Angriffspunkt der Kraft innerhalb der von ihrer Richtung gebildeten Graden verlegt.

Hieraus folgt auch der allerdings selbstverständliche Satz, dass sich eine Kraft, die einen festen Körper angreift, beliebig in ihrer Richtung verlegen lässt. — Wie die Theorie der Paare und der festen Körper auf einfachem synthetischen Wege sich ergibt, enthält der Artikel Paar. Hier ist diesen Betrachtungen eine analytische Form gegeben.

In besondern Fällen kann das Moment des mittleren Paares verschwinden, dann lassen sich alle Kräfte in eine Mittelkraft vereinigen. Suchen wir hierfür die Bedingungen.

Offenbar reicht dazu aus, dass das kleinste Paar verschwindet. Gleichung 6) zeigt, dass in diesem Falle entweder $Rr = 0$ ist, d. h. dass sich alle Kräfte in eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Mittelkraft vereinen, oder dass

$$la + mb + nc = 0,$$

d. h. die Ebene des sich ergebenden mittleren Paares der Mittelkraft parallel ist. Es muss sich die Kraft Q und das Paar Rr dann immer in eine Kraft vereinigen. Die Linie, in welcher dieselbe liegt, geben zwei der Gleichungen 5), wenn man die rechte Seite der Null gleich setzt.

Mögen jetzt alle Kräfte in einer Ebene liegen, und nehmen wir diese als Ebene der XY, dann ist

$$z_1 = z_2 = \ldots = 0, \; Z_1 = Z_2 = \ldots = 0,$$

in diesem Falle werden von den Gleichungen 1) und 3) die letzten, von den

Digitized by Google

Gleichungen 2) und 4) die beiden letzten identisch, so dass die Gleichgewichtsbedingungen nur drei sind:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(Xy - Yx) = 0.$$

Die Mittelkraft und das mittlere Paar geben die Gleichungen:

$$\Sigma X = Q \cos \tau$$
$$\Sigma Y = Q \sin \tau$$
$$\Sigma(Xy - Yx) = Rr,$$

wo τ der Winkel der Mittelkraft mit den Axen ist, das mittlere Paar liegt natürlich in der Ebene selbst, also:

$$l = m = 0, \quad n = 1.$$

Die Bedingungsgleichung

$$la + mb + nc = 0$$

ist hier immer erfüllt, da $c = 0$ ist.

Also wird eine Mittelkraft sich mit Ausnahme eines gleich zu erwägenden Falles immer ergeben.

Die Linie, in welcher dieselbe liegt, bestimmen die Gleichungen 5), welche sich auf eine reduciren:

$$\frac{Rr}{Q} = \eta \cos \tau - \xi \sin \tau.$$

Die Gleichung

$$la + mb + nc = 0$$

wird aber in einem Falle das kleinste mittlere Paar nicht verschwinden lassen; dies findet statt, wenn gleichzeitig $Q = 0$ ist, d. h. wenn die Mittelkraft verschwindet. In diesem Falle geben die Gleichungen 5):

$$l = l_1, \quad m = m_1, \quad n = n_1, \quad Rr = P\varrho.$$

Das mittlere Paar ist also unabhängig von der Auswahl des Punktes O_1. Gleichung 6) gibt dann keinen Sinn mehr.

Hieraus folgt, dass wenn alle Kräfte in einer Ebene liegen, sie immer sich in eine Kraft vereinigen lassen, mit Ausnahme des Falles, wo diese Mittelkraft verschwindet, wo dann eine Vereinigung in ein Paar stattfindet.

Wir wollen jetzt annehmen, dass alle Kräfte parallel seien. Die Gleichungen 3) und 4) werden dann, da α, β, γ für alle Kräfte gleich sind:

$$7) \quad \alpha\Sigma P = Qa, \quad \beta\Sigma P = Qb, \quad \gamma\Sigma P = Qc.$$

$$8) \quad \begin{aligned} \alpha\Sigma Py - \beta\Sigma Px &= Rrn, \\ \beta\Sigma Pz - \gamma\Sigma Py &= Rrl, \\ \gamma\Sigma Px - \alpha\Sigma Pz &= Rrm. \end{aligned}$$

Erhebt man die drei Gleichungen 7) ins Quadrat und addirt sie, so ergibt sich:

$$Q^2 = (\Sigma P)^2, \qquad Q = \Sigma P,$$
$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma,$$

also die Mittelkraft ist den Seitenkräften immer parallel und gleich ihrer algebraischen Summe.

Multiplicirt man die Gleichungen 8) bezüglich mit γ, α, β und addirt, so kommt:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

d. h. die Kräfte lassen sich immer in eine Kraft vereinen, wenn nicht $\Sigma P = 0$ ist. Schliessen wir diesen Fall aus, so geben für unsern Fall die Gleichungen 5):

$$9) \quad \begin{aligned} \beta\Sigma Pz - \gamma\Sigma Py &= \Sigma P(\zeta\beta - \eta\gamma) \\ \gamma\Sigma Px - \alpha\Sigma Pz &= \Sigma P(\xi\gamma - \zeta\alpha) \\ \alpha\Sigma Py - \beta\Sigma Px &= \Sigma P(\eta\alpha - \xi\beta), \end{aligned}$$

welche die Linie bestimmen, in welcher die Mittelkraft liegt. Diese Gleichungen werden aber identisch, wenn man setzt:

$$\zeta\Sigma P = \Sigma Pz, \quad \xi\Sigma P = \Sigma Px, \quad \eta\Sigma P = \Sigma Py.$$

Diese drei Gleichungen bestimmen einen Punkt, dessen Lage von den Grössen α, β, γ ganz unabhängig ist. D. h.:

„Wenn ein fester Körper von nur parallelen Kräften angegriffen wird, deren algebraische Summe nicht Null ist, so gibt es immer eine Mittelkraft, welche durch einen Punkt geht, dessen Lage unabhängig von der Richtung der Kräfte ist, also sich nicht ändert, wenn man die Kräfte in ihren Angriffspunkten derart dreht, dass sie parallel bleiben."

Im Falle die Kräfte den Massen proportional sind ist dieser Punkt der Schwerpunkt (vgl. den Artikel: Schwerpunkt). Im Allgemeinen nennen wir ihn den Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Nimmt man die auf den parallelen Kräften senkrechte Ebene als die der x, y, so ist $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, und die Gleichungen 9) werden:

$$\Sigma Py = \eta P\Sigma, \qquad \Sigma Px = \xi\Sigma P.$$

Diese Gleichungen bestimmen den Punkt, in welchem die Mittelkraft die Ebene xy schneidet, und auch die Projection des Mittelpunktes auf diese Ebene. Offenbar kann man die Ebene xy auch durch den Mittelpunkt selbst legen. — Nimmt man diesen als Anfangspunkt der Coordinate, so wird:

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

also:

$$\Sigma Px = \Sigma Py = \Sigma Pz = 0.$$

Liegen alle parallelen Kräfte in einer Ebene, und nimmt man diese als die der xy, so hat man:

Digitized by Google

$\alpha = \cos\tau$, $\beta = \sin\tau$, $\gamma = 0$, $s = \zeta = 0$, wenn τ der Winkel der Kraftrichtung mit der Axe der x ist. Die Gleichungen 9) geben dann:

$$\cos\tau\Sigma Py - \sin\tau\Sigma Px = (\eta\cos\tau - \xi\sin\tau)\Sigma P.$$

Ist die Axe der x zugleich die Kraftrichtung, so hat man $\tau = 0$:

$$\Sigma Py = \eta\Sigma P,$$

oder wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in der Mittelkraft nimmt:

$$\Sigma Py = 0.$$

Sind nur zwei Kräfte vorhanden, so hat man:

$$(P_1 + P_2)\eta = P_1y_1 + P_2y_2,$$

oder wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in der Mittelkraft nimmt:

$$P_1y_1 + P_2y_2 = 0$$
$$P_1y_1 = -P_2y_2.$$

Angriffspunkt der Mittelkraft ist also jeder Punkt in der Ebene beider Kräfte, für den die Producte seiner Entfernung von jeder der Kraftrichtung (y_1 und $-y_2$) in die Intensitäten der Kräfte, d. h. die statischen Momente in Bezug auf diesen Punkt gleich sind. Sind die Kräfte gleich gerichtet, so liegt übrigens der Angriffspunkt der Mittelkraft zwischen ihnen, sonst ausserhalb derselben, da im ersten Fall y_1 und y_2 ungleiches Vorzeichen haben. Einen solchen Punkt erhält man z. B. wenn man die Angriffspunkte der Kräfte A und B verbindet, und die Verbindungslinie AB in C so theilt, dass sich AC und AB umgekehrt, wie die in ihren Endpunkten angebrachten Kräfte verhalten. Hierauf beruht bekanntlich die Theorie des Hebels.

Wir haben bis jetzt den festen Körper als völlig frei betrachtet. Wir wollen denselben jetzt gewissen Bedingungen unterwerfen. Wie diese auch beschaffen seien, so werden die Gleichungen 1) bis 6) noch immer gelten, wenn man den entsprechenden Druck berücksichtigt.

A) Möge ein Punkt O des Körpers unbeweglich sein. — Von demselben geht dann ein Druck ϱ aus, der mit den Axen die Winkel mit Cosinus A, B, C machen möge. Nehmen wir O als Anfangspunkt, so werden also die Gleichgewichtsbedingungen 1) in ϱ:

1b)
$$\Sigma X + \varrho A = 0,$$
$$\Sigma Y + \varrho B = 0,$$
$$\Sigma Z + \varrho C = 0.$$

Aus den Bedingungen 2) fällt ϱ ganz aus, da die Kraft durch O geht, den Punkt, in welchen alle vereint werden, also das entsprechende Paar den Arm und das Moment Null hat. Die Gleichungen 2) bleiben also unverändert, sie sind die einzigen Gleichgewichtsbedingungen, während die Gleichungen 1a) die Richtung und Grösse des Druckes bestimmen.

B) Möge eine Linie (Axe) im Körper unbeweglich sein. Wir nehmen dieselbe als Axe der Z. Von jedem ihrer Punkte gehen Drucke aus, die sich nach dem Obigen alle in eine Kraft ϱ und in ein Paar S zusammensetzen lassen. Dieses Paar geht offenbar durch die Axe der z, seine Axe ist also der Ebene xy parallel. Ist also σ der Winkel, welchen sie mit der Axe der x macht, so zerfällt S nach den Axen der X und Y in die Componenten $S\cos\sigma$ und $S\sin\sigma$. Die Gleichungen 2) werden somit:

2c)
$$\Sigma(Xy - Yx) = 0,$$
$$\Sigma(Yz - Zy) + S\cos\sigma = 0,$$
$$\Sigma(Zx - Xz) + S\sin\sigma = 0,$$

während die Gleichungen 1b) gelten.

Ausser diesen Gleichungen, welche die Mittelkraft des Druckes bestimmen, dienen die beiden letzten der eben entwickelten zur Bestimmung des mittleren Paares der Druckkräfte, so dass nur die erste, welche vom Drucke frei ist, als Gleichgewichtsbedingung bleibt und auch ausreicht.

C) Der Körper möge sich längs einer gegeben Linie schieben und um dieselbe drehen können.

Da in diesem Falle nur ein Druck senkrecht auf der Linie stattfindet, so ist $C = 0$; sei τ der Winkel der Druckkraft mit der Axe der x, so kommt wegen 1b):

$$\varrho\cos\tau + \Sigma X = 0,$$
$$\varrho\sin\tau + \Sigma Y = 0,$$
$$\Sigma Z = 0,$$

während die Gleichungen 2c) unverändert bleiben. Man hat also zwei Gleichgewichtsbedingungen:

$$\Sigma Z = 0, \qquad \Sigma(Xy - Yx) = 0.$$

D) Stütze sich der Körper auf eine unbewegliche Ebene.

Man nimmt dieselbe als Ebene der xy. Alle von ihr ausgehenden Druckkräfte stehen senkrecht auf der Ebene. Setzt man dieselbe also in eine Kraft ϱ und in ein Paar S zusammen, so hat man:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + \varrho = 0,$$

Digitized by Google

also aus den Gleichungen 1) entstehen zwei Gleichgewichtsbedingungen und eine zur Bestimmung der Mittelkraft des Drucks.

Die Axe des Paares S liegt in der xy-Ebene, macht sie also Winkel σ mit der Axe der X, so hat man wieder die Gleichung 2c). Im Ganzen finden also drei Gleichgewichtsbedingungen statt.

Wir bemerken hierbei noch, dass, wenn sich der Körper nur auf eine Ebene stützt, dies eben nur so lange richtig ist, als die ihn angreifenden Kräfte so beschaffen sind, dass sie eine Bewegung in die Ebene hinein hervorbringen würden. Ist dies nicht der Fall, so ist der Körper als frei zu betrachten. In jedem Falle ausreichend aber bleiben die drei Gleichgewichtsbedingungen, wenn sich der Körper etwa zwischen zwei parallelen Ebenen befindet, von welchen er nach keiner Seite getrennt werden kann.

7) Statik der biegsamen Körper.

Die Biegsamkeit erfordert, dass entweder eine oder zwei Dimensionen des Körpers klein sind, dass derselbe sich also in der Rechnung als eine Fläche bezüglich Linie betrachten lasse. Beginnen wir mit der letztern.

Die biegsame Linie ist zu denken als ein Körper von sehr kleinem Querschnitt. Welche Form sie auch bilde, so lässt sich dieselbe ersetzen durch eine unendlich oft gebrochene Linie, deren Seiten $AB = BC$ (Fig. 413) die Bogenelemente

Fig. 418

darstellen. Nehmen wir in den auf einander folgenden Elementen AB und BC Punkte A_1 und C_1 an, und untersuchen wir, unter welchen Bedingungen in dem Stücke $A_1BC_1 = ds$ Gleichgewicht stattfinde. Wenn wir die in A_1 und C_1 wirkenden, von den benachbarten Punkten ausgehenden Druckkräfte mit in Rechnung bringen, so ist A_1BC_1 als ein selbständiges System zu betrachten, und es finden also namentlich die sechs für feste Körper entwickelten Gleichungen auch hier statt, von denen wir jedoch nur die drei ersten brauchen.

Mögen auf jeden Punkt von A_1BC_1 Kräfte wirken, die aus den oben angegebenen Gründen für diese unendlich kleine Strecke als gleichmässig zu betrachten sind, und einzeln wirkend dem Punkt eine Geschwindigkeit geben, deren Componenten nach den Axen X, Y, Z sind, ist ferner ε der Querschnitt, δ die Dichtigkeit von A_1BC_1, so haben wir als Componente der sich über A_1BC_1 erstreckenden Kraft bezüglich:

$$\delta X_\varepsilon ds, \quad \delta Y_\varepsilon ds, \quad \delta Z_\varepsilon ds.$$

Die auf C_1 wirkenden Spannungen sind, wie früher gezeigt, senkrecht auf C_1, also auf BC gerichtet, welche Richtung die der Tangente in B ist und mit den Axen Winkel macht, deren Cosinus

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

sind. Ist also $-P_\varepsilon$ diese Spannung, so sind deren Componenten:

$$-P_\varepsilon \frac{dx}{ds}, \quad -P_\varepsilon \frac{dy}{ds}, \quad -P_\varepsilon \frac{dz}{ds};$$

die auf A_1 wirkende Spannung ist entgegengesetzt gerichtet und die Zunahme derselben entspricht offenbar einer Vermehrung der Bogenlänge um ds, so dass die Componente, der Axe der x parallel, ist:

$$P\frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds}\left(P_\varepsilon \frac{dx}{ds}\right) ds,$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die andern Componenten.

Da nun die Summe der entsprechenden Componenten aller Kräfte der Null gleich ist, so hat man die drei Gleichgewichtsgleichungen:

$$1) \qquad \delta X_\varepsilon + \frac{d}{ds}\left(P_\varepsilon \frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$\delta Y_\varepsilon + \frac{d}{ds}\left(P_\varepsilon \frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$\delta Z_\varepsilon + \frac{d}{ds}\left(P_\varepsilon \frac{dz}{ds}\right) = \varepsilon.$$

(Die Entwickelungsweise dieser Gleichungen ist etwa wie die im Artikel: Seilcurven angewandte. Es kam darauf an, hier der Strenge wegen, die Vereinigung der Massen in gewisse Punkte zu vermeiden.)

Ist der Querschnitt ε constant, so fällt dieser Ausdruck ganz weg.

Da zum Gleichgewicht eines Punktes, also auch zu der eines Körpers von un-

endlich kleinen Dimensionen drei Gleichungen nöthig sind, nach Elimination von P aber nur zwei verbleiben, so sind die Gleichungen 1) nur unter der Bedingung ausreichend, wenn für jeden unendlich kleinen Theil der Linie noch eine dritte Beziehung stattfindet. Dies ist in der That der Fall, wenn der Körper unausdehnsam ist, denn seien x, y, z die Coordinaten von A, x_1, y_1, z_1 die von B, so ist:

$$ds^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = l^2$$

einer Constante gleich. Wäre der Körper zugleich ausdehnsam, so wäre aus den Gesetzen der Ausdehnsamkeit die dritte Gleichung zu entnehmen. — Auf diese Weise kann man zu den Gleichungen der elastischen Linie (vgl. den Artikel: Schwingungen elastischer Körper) gelangen.

Gehen wir jetzt zu den biegsamen Flächen, d. h. zu den Körpern über, bei denen eine Dimension sehr klein sei, die also von zwei parallelen unendlich nahen Oberflächen begrenzt ist. Denken wir uns in irgend einem Punkte der einen Oberfläche eine Normale, von welcher die andere ein Stück h abschneidet, so ist h die Dicke der Fläche. Wir legen jetzt zwei Schaaren von Ebenen durch die Fläche, deren die eine der Ebene xz, die andere der Ebene yz parallel ist. Je zwei von diesen Ebenen schneiden ein unendlich kleines Parallelepipedon aus, auf dessen vier Grenzflächen, die den Ebenen der xz und yz parallel sind, Spannungen wirken, welche nach der Fläche selbst gerichtet sind. Dies findet offenbar aus ähnlichen Gründen wie bei der biegsamen Linie statt.

Die auf die eine xz parallele Ebene wirkende Spannung zerlege sich nach den Axen in $-An$, $-Bn$, $-Cn$, wo n der Inhalt der Grenzfläche ist, so werden die auf der parallelen Grundfläche wirkenden Spannungen sein:

$$An + \frac{\partial An}{\partial x}\,dx, \qquad Bn + \frac{\partial Bn}{\partial x}\,\partial x, \qquad Cn + \frac{\partial Cn}{dx}\,dx,$$

und sind $-A_1 n_1$, $-B_1 n_1$, $-C_1 n_1$ die auf die neue yz parallele Ebene wirkenden Spannungscomponenten, so hat man für die parallele Ebene:

$$A_1 n_1 + \frac{\partial A_1 n_1}{\partial y}\,dy, \qquad B_1 n_1 + \frac{\partial B_1 n_1}{\partial y}\,dy, \qquad C_1 n_1 + \frac{\partial C_1 n_1}{\partial z}\,\partial z.$$

Seien noch α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Axen macht, so hat man, da die senkrecht auf die Fläche gerichtete Componente verschwindet:

$$2) \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \qquad A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0.$$

Eine der Axe der z parallele Linie zwischen beiden parallelen Oberflächen hat die Länge $\frac{s}{\gamma}$, und es ist:

$$3) \qquad \alpha = \frac{-\partial z}{h\partial x}, \qquad \beta = \frac{-\partial z}{h\partial y}, \qquad \gamma = \frac{1}{h}, \qquad h = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

mithin ist:

$$n = sh\,dx, \qquad n_1 = sh\,dy.$$

Sind X, Y, Z, die sich auf die Körpereinheit erstreckenden Kraftcomponenten, so ist die Summe aller sich auf das unendlich kleine Parallelepipedon erstreckenden:

$$X s\varrho h\,dx\,dy, \qquad Y s\varrho h\,dx\,dy, \qquad Z s\varrho h\,dx\,dy,$$

wenn ϱ die Dichtigkeit, also $sh\varrho\,dx\,dy$ die Masse des Parallelepipedons ist. Man kann hier alle sechs Gleichungen anwenden, die für beliebige Systeme gelten und die bei den festen Körpern entwickelt sind. Von den drei Momentengleichungen gibt jedoch nur diejenige ein Resultat, welche die der Ebene xy parallelen Momente enthält. Der Bequemlichkeit wegen denken wir uns, wie dies ja nach dem Obigen immer geschehen kann, das Parallelepipedon, das als homogen zu betrachten ist, auch fest. Die Spannungen vereinigen sich dann bezüglich in der Mitte der Seitenflächen, die Kräfte X, Y, Z in der Mitte des Parallelepipedons; verlegen wir in dieselbe auch den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist das bezügliche Moment, da X, Y, Z, A, C, B_1, C_1 die Momente Null haben:

$$Bndy - A_1 n_1 dx = 0,$$

$\frac{dy}{2}$, $\frac{dx}{2}$ sind nämlich die Entfernungen

Digitized by Google

der Kräfte B und A_1 vom Mittelpunkt, der Zuwachs $\frac{\partial Bn}{\partial x}dx$, $\frac{\partial A_1 n_1}{\partial y}dy$ hat aber ein verschwindend kleines Moment und fällt also weg. Wegen der Werthe von n und n_1 ergibt sich hieraus:

$$B = A_1;$$

es werden somit die drei noch übrigen Gleichungen die Gestalt haben:

$$4)\quad \frac{\partial(\varepsilon hA)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hB)}{\partial y} + \varrho\varepsilon hX = 0,$$
$$\frac{\partial(\varepsilon hB)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hB_1)}{dy} + \varrho\varepsilon hY = 0,$$
$$\frac{\partial(\varepsilon hC)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon hC_1)}{\partial y} + \varrho\varepsilon hZ = 0.$$

Die Gleichungen 2), 3), 4) sind zur Lösung des Problems ausreichend.

Da α, β, γ durch 3) gegeben sind, so hat man fünf Gleichungen, welche die Unbekannten A, B, C, B_1, C_1 enthalten. Zu diesen kommen aber noch diejenigen hinzu, welche die Unausdehnbarkeit der Fläche darstellen, d. h. dass die Fläche nur auf einander abwickelbare Formen annehmen kann. Diese Gleichungen ergeben sich aus den Betrachtungen, dass jedes auf der Fläche angenommene unendlich kleine Dreieck unveränderlich ist.

Sind ds, $d\sigma$ zwei Seiten eines solchen, ϑ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so sind also ds, $d\sigma$ und ϑ constant. Sind x, y, z als Functionen zweier Variablen u und v gegeben, so hat man sonach:

$$5)\quad \frac{\partial x^2}{\partial u^2} + \frac{\partial y^2}{\partial u^2} + \frac{\partial z^2}{\partial u^2} = f(u, v),$$
$$\frac{\partial x^2}{\partial v^2} + \frac{\partial y^2}{\partial v^2} + \frac{\partial z^2}{\partial v^2} = \psi(u, v)$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(u, v),$$

wo $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ gegebene Functionen von u und v sind.

Man hat also nach Elimination von A, B, C, B_1, C_1 noch drei Gleichungen übrig, welche zur Bestimmung des Gleichgewichts ausreichen.

Wir wollen noch die Gleichungen 4) bezüglich mit α, β, γ multipliciren und addiren, mit Berücksichtigung von 2) ergibt sich dann:

$$A\frac{\partial\alpha}{\partial x} + B\frac{\partial\alpha}{\partial y} + B\frac{\partial\beta}{\delta x} + B_1\frac{\partial\beta}{\partial y} + C\frac{\partial\gamma}{\partial x} + C_1\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \varrho(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0,$$

oder wenn man mittels der Gleichungen 3) C und C_1 eliminirt:

$$\gamma A\frac{\partial\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}{\partial x} + \gamma B\frac{\partial\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}{\partial y} + \gamma B\frac{\partial\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}{\partial x} + \gamma B_1\frac{\partial\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}{\partial y} - \varrho(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = 0,$$

oder wenn man die Gleichungen 3) berücksichtigt:

$$6)\quad A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + B_1\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varrho\left(Z - X\frac{\partial z}{\partial x} - Y\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Sei z. B. die Fläche homogen und von gleicher Dicke und nur von der Schwere angegriffen, die Axe der Z der Schwere parallel. Es ist dann ε und ϱ constant, $X = Y = 0$, $Z = g$. Die beiden ersten Gleichungen 4) geben dann:

$$\frac{\partial(hA)}{\partial x} + \frac{\partial(hB)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(hB)}{\partial x} + \frac{\partial(hB_1)}{\partial y} = 0.$$

Sind U, V beliebige Functionen von x, y, z, so ergibt sich aus der ersten Gleichung:

$$hA = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad hB = -\frac{\partial U}{\partial x},$$

und aus der zweiten:

$$hB = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad hB_1 = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

also wegen der beiden Werthe von hB, wenn W eine ebenfalls beliebige Function von x und y ist:

$$V = -\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad U = \frac{\partial W}{\partial x},$$

also:

Digitized by Google

$$hA = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \qquad hB = -\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}, \qquad hB_1 = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

und die Gleichung 6) nimmt die Gestalt an:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \varrho hg = 0.$$

Indess ist diese vollständige Integration selbst dieser verhältnissmässig einfachen Aufgabe nicht zu bewerkstelligen.

8) Statik der flüssigen Körper.

Flüssigkeiten müssen als eine Reihe lose an einander liegender Punkte oder unendlich kleiner Körper betrachtet werden, deren Einwirkung auf einander nur in ihrer Undurchdringlichkeit besteht. Aus dieser Anschauung folgen sogleich die Gleichgewichtsgleichungen.

Möge in irgend einem Punkte die Flüssigkeit von der Dichtigkeit ϱ und von Kräften angegriffen sein, die auf die Raumeinheit reducirt die Componenten X, Y, Z haben.

Betrachten wir ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Seiten unendlich klein und den Axen parallel sind, somit bezüglich die Länge dx, dy, dz haben, so ist die Summe der der Axe der X parallelen Componenten:

$$\varrho X\,dx\,dy\,dz.$$

Ausserdem wirken die Spannungen von Punkt zu Punkt, aus den betreffenden Summen fallen aber die innerhalb der Punkte des Parallelepipedons selbst wirkenden ganz weg, wegen der Gleichheit der Wirkungen und Gegenwirkungen. Es bleiben also nur die für die Grenzflächen, welche, nach dem oben Gesagten senkrecht auf diesen Flächen sind. Ist also die auf die Flächeneinheit sich erstreckende Spannung für die eine Grenzfläche, welche auf der Axe der X senkrecht ist, gleich $-p$, somit die auf der parallelen Grenzfläche, welche offenbar entgegengesetzt gerichtet ist:

$$+p + \frac{\partial p}{\partial x}dx,$$

so sind die Ausdrücke mit dem Inhalt der Grenzfläche $dydz$ zu multipliciren, um die Summe aller Spannungen zu haben. Sind noch q und r die Spannungen für die eine Grenzfläche, welche den Axen der Y und Z senkrecht ist, so hat man im Falle des Gleichgewichts, wenn man die Summen der gleichgerichteten Componenten gleich Null setzt.

$$\varrho X = \frac{-\partial p}{\partial x}, \quad \varrho Y = \frac{-\partial q}{\partial y}, \quad \varrho Z = \frac{-\partial r}{\partial z}.$$

Es lässt sich indess nicht der ganze von Flüssigkeit erfüllte Raum immer in Parallelepipeda wohl aber stets in dreiseitige Pyramiden zerlegen, von denen drei Seiten den Axen parallel sind.

Seien wieder dx, dy, dz die Längen dieser Seiten, so sind die Inhalte der entsprechenden drei Grenzflächen bezüglich gleich $\frac{dy\,dz}{2}$, $\frac{dz\,dy}{2}$, $\frac{dx\,dy}{2}$, also die Spannungssummen, welche auf dieselben wirken bezüglich:

$$p\frac{dy\,dz}{2}, \quad q\frac{dz\,dx}{2}, \quad r\frac{dx\,dy}{2}.$$

Die vierte Grenzfläche habe den Flächeninhalt F und möge ihre Normale, Winkel mit den Axen machen, deren Cosinus bezüglich λ, μ, ν sind, so ist:

$$F\lambda = \frac{dy\,dz}{2}, \quad F\mu = \frac{dz\,dx}{2}, \quad F\nu = \frac{dx\,dy}{2}.$$

Sei noch $-s$ die auf die Einheit bezogene, senkrecht auf diese Fläche wirkende Spannung, so sind die Componenten derselben bezüglich gleich:

$$-s\lambda, \qquad -s\mu, \qquad -s\nu,$$

also die Summe aller Spannungscomponenten für die ganze Fläche bezüglich:

$$-Fs\lambda = -s\frac{dy\,dz}{2},$$

$$-Fs\mu = -s\frac{dz\,dx}{2},$$

$$-Fs\nu = -s\frac{dx\,dy}{2}.$$

Auf die Pyramide wirken nun die Kräfte X, Y, Z noch, und deren Summen für die ganze Pyramide werden:

$$X\frac{dx\,dy\,dz}{3}, \quad Y\frac{dx\,dy\,dz}{3}, \quad Z\frac{dx\,dy\,dz}{3},$$

also unendlich klein dritter Ordnung, während die Spannungssummen nur unendlich klein zweiter Ordnung sind.

Aus den betreffenden Gleichgewichtsgleichungen fallen also die Kräfte X, Y, Z ganz weg, und man hat:

$$p - s = 0, \quad q - s = 0, \quad r - s = 0,$$

woraus sich die wichtige Beziehung

$$s = p = q = r$$

ergibt.

Digitized by Google

„Die Spannung, welche auf eine Flüssigkeit ausgeübt wird, ist in allen Richtungen oder auf jeder durch einen Punkt der Flüssigkeit gelegten Ebene dieselbe."

Statt der zuerst entwickelten Gleichgewichtsgleichungen haben wir jetzt:

$$1)\quad \varrho X = \frac{-dp}{dx},\ \varrho Y = \frac{-dp}{dy},\ \varrho Z = \frac{-dp}{dz}.$$

Diese Gleichungen lassen sich unter der Form einer einzigen schreiben, wenn man bezüglich mit dx, dy, dz multiplicirt und addirt:

$$2)\quad -dp = \varrho X dx + \varrho Y dy + \varrho Z dz.$$

Die Bedingung, dass eine Flüssigkeit im Gleichgewicht sich befinde, ist also die, dass der Ausdruk:

$$\varrho X dx + \varrho Y dy + \varrho Z dz$$

ein vollständiges Differenzial sein muss. Die Spannung in irgend einem Punkte gibt dann die Gleichung:

$$-p = \int (\varrho X dx + \varrho Y dy + \varrho Z dz)$$

Die ganze Art der Entwickelung zeigt, dass die Gleichungen 1) und 2) für jede lose Zusammenstellung von Molekulen gilt, also auch für Körper wie Sand u. s. w., wenn man die einzelnen Körner nämlich als unendlich klein betrachtet. Indess wird das Gesetz der gleichmässigen Fortpflanzung des Druckes, auf welchen diese Gleichungen beruhen selbst bei vielen in der Natur vorkommenden Flüssigkeiten nur annäherungsweise, bei losen Körpern aber nur sehr unvollkommen bestätigt. Der Grund kann der sein, dass eben diese losen Körperchen nicht unendlich klein sind.

Zugleich findet aber hier noch etwas Anderes statt. Die Materie, d. h. die Körperatome finden sich in der Natur immer verbunden mit Aetheratomen, welche letztere unter Andern die Wärmeerscheinungen hervorbringen. Aus dem Zusammenwirken beider Arten Atome ergeben sich gewisse Kräfte und damit bei diesen die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung stattfindet, wären die Aetheratome und ihre Bewegung selbst in Betracht zu ziehen, was von grosser Schwierigkeit sein würde. Bei der Reibung z. B. und selbst beim Drucke finden bekanntlich Wärme-Erscheinungen, also Aetherbewegungen statt, wenn sich die Flüssigkeitstheile also gegen einander reiben, man aber die Bewegung des Aether vernachlässigt, so sind die Gleichungen 1) und 2) nicht mehr genau richtig.

Im Allgemeinen ist jedoch bei den eigentlichen Flüssigkeiten diese Abweichung gering, und kommt namentlich bei statischen Aufgaben nicht in Betracht.

Es fragt sich jetzt, ob die Gleichungen auch ausreichend sind. Wie die Flüssigkeit auch beschaffen sei, so können wir voraussetzen, dass sich kein Theil derselben von dem andern trenne, also zwei in irgend einer Gestalt derselben einander unendlich nahe Atome in keiner andern Gestalt eine endliche Entfernung haben. Wenn dies in der Natur auch nicht immer der Fall ist, wo Flüssigkeiten z. B. in von einander getrennte Theile zerlegt werden, wie z. B. beim Umgiessen aus einem Gefäss ins Andere, so ist auf solche Vorgänge um so weniger Rücksicht zu nehmen, als dabei die Continuität der Flüssigkeit, also auch die Bedingungen, unter welchen die Gleichungen stattfinden, nicht mehr geltend sind. Dies vorausgesetzt, seien die Coordinaten von vier einander benachbarten Atomen bei irgend einer Gestalt der Flüssigkeit bezüglich:

$$x, y, z,\ x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2,\ x_3, y_3, z_3;$$

durch diese Punkte wird eine unendlich kleine Pyramide bestimmt, deren Flächeninhalt die Grösse hat:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} dx_1, & dy_1, & dz_1 \\ dx_2, & dy_2, & dz_2 \\ dx_3, & dy_3, & dz_3 \end{vmatrix} = \frac{\triangle}{3},$$

wo $\triangle$ eine Determinante vorstellt, die aus den Elementen:

$$x_1 - x = dx_1,\ y_1 - y = dy_1,\ z_1 - z = dz_1$$
$$x_2 - x = dx_2,\ y_2 - y = dy_2,\ z_2 - z = dz_2$$
$$x_3 - x = dx_3,\ y_3 - y = dy_3,\ z_3 - z = dz_3$$

besteht. Sind aber bei irgend einer andern Gestalt $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \xi_1 \ldots$ die Coordinaten von denselben Atomen, so wird der Flächeninhalt der entsprechenden Pyramiden sein:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} d\xi_1, & d\eta_1, & d\zeta_1 \\ d\xi_2, & d\eta_2, & d\zeta_2 \\ d\xi_3, & d\eta_3, & d\xi_3 \end{vmatrix} = \frac{\triangle_1}{3}.$$

Hat nun in der entsprechenden Stelle die Flüssigkeit in der ersten Gestalt die Dichtigkeit ϱ in der letztern ϱ_1, so wird also, da die Masse der Pyramide sich doch nicht ändern kann, sein:

$$3)\quad \varrho\triangle = \varrho_1\triangle_1.$$

Ist ϱ bekannt, so hat man zwischen den Coordinaten und dem Drucke p die drei Gleichungen 1) und die Gleichung 3),

also nach Elimination von p noch drei Gleichungen, welche zur Bestimmung des Gleichgewichts ausreichen. Bei tropfbaren Flüssigkeiten findet keine Zusammendrückung statt, es ist also ϱ in jeder Gestalt der Flüssigkeit dasselbe. Die Gleichung wird also:

$$\Delta = \Delta_1.$$

Bei ausdehnsamen Flüssigkeiten ist die Dichtigkeit eine gegebene Function des Druckes, bei constanten Gasen und Dämpfen, welche von der Temperatur, bei welcher sie flüssig werden, entfernt sind, hat man:

$$p = k\varrho\,(1 + \alpha\vartheta),$$

wo ϑ die Temperatur in Graden, k und α constante Coefficienten sind. Hier ist nach Regnault zu setzen $\alpha = \frac{1}{274}$, wenn ϑ Centesimalgrade vorstellt. k ist für die verschiedenen Gase verschieden. Für den Gefrierpunkt ist

$$p = k\varrho.$$

Bei der atmosphärischen Luft entspricht dem Barometrischen Drucke von 760 Millimeter die Dichtigkeit $\frac{1}{769{,}44}$, die des Wassers als Einheit genommen. Man hat also:

$$760 \cdot 769{,}44 = k,$$

wenn der Druck durch die Barometerhöhe in Millimetern, die Dichtigkeit durch das specifische Gewicht ausgedrückt ist. Es ergibt sich:

$$k = 590158.$$

In jeder Flüssigkeit kann man diejenigen Flächen betrachten, deren Punkte constanten Druck erleiden; diese Flächen heissen Niveauflächen, und man hat für dieselben

$$dp = 0,$$

also:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Da $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel sind, welche irgend eine Tangente der Niveaufläche mit den Axen macht, X, Y, Z aber den Cosinus derjenigen Winkel proportional sind, welche die Kraftrichtung in Punkt x, y, z mit den Axen macht, so drückt diese Gleichung auch aus, dass in jeder Niveaufläche die in jedem Punkt wirkende Kraft normal der Fläche gerichtet ist.

Da p ein vollständiges Differenzial ist, so erhält man auch $p = c$ für die Niveauflächen, und jedem Werthe von C entspricht eine andere solche Fläche. Wirkt nur die Schwere und ist die Axe der z derselben parallel, so hat man

$$X = Y = 0, \quad Z = g,$$

also für die Niveauflächen $\varrho g z = c$. Dieselben sind also horizontale Ebenen.

Im Allgemeinen hat man, falls die Schwere allein wirkt und die Dichtigkeit constant ist, als Bedingung des Gleichgewichts das Integral der Gleichung 2):

$$p - p_0 = \varrho g (z_0 - z),$$

wo p_0 der Werth von p, z_0 der von z für irgend einen Punkt ist. Ist der Druck also auf der Oberfläche constant, wie dies z. B. der Fall ist, wenn nur der Druck der Luft auf die in einem Gefässe befindliche Flüssigkeit wirkt, so hat man für diese Oberfläche $p = p_0$, $z = z_0$, also die Oberfläche ist eine horizontale Ebene.

Dasselbe tritt auch noch ein, wenn ϱ veränderlich ist, es ist dann nämlich:

$$p - p_0 = -g \int \varrho dz.$$

ϱ muss also im Falle des Gleichgewichts eine Function von z allein sein. Auch in diesem Falle sind, wie leicht zu sehen, die Niveauflächen horizontale Ebenen.

Flüssigkeiten üben natürlich auch einen Druck auf die Wände des Gefässes aus, in welchem sie enthalten sind. Setzen wir wieder voraus, dass die Schwere allein wirkt, und ist dm das Element einer solchen Wand, also eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, so ist der darauf ausgeübte Druck gleich

$$[p_0 + g\varrho(z_0 - z)]\,dm,$$

oder wenn man den von der Flüssigkeit ausgehenden Druck allein betrachtet, d. h. den an der Oberfläche $p_0 = 0$ setzt:

$$g\varrho(z_0 - z)\,dm.$$

Sei noch $h = z_0 - z$ die Entfernung des Punktes der Wand von der freien Oberfläche, so ist $g\varrho h dm$ der Druck. Ist die Wand eben, so sind die auf die einzelnen Elemente ausgeübten Druckkräfte gleichgerichtet, und ihre Resultante gleich

$$g \int \varrho h dm,$$

wo sich das Integral über die ganze Wand erstreckt, ein Ausdruck, welcher bei constantem ϱ gleich ist:

$$g\varrho h_0 M,$$

wenn M der Flächeninhalt der Wand, h_0 die Entfernung ihres Schwerpunkts von der Oberfläche ist. Dieser Schwer-

punkt ist aber nur in dem Falle auch der Angriffspunkt des Gesammtdruckes, wenn die Fläche horizontal, also b constant ist.

Im Allgemeinen lässt sich der Angriffspunkt (Mittelpunkt des Druckes) auf folgende Weise bestimmen.

Das Moment des Druckes $g\varrho hdm$ in Bezug auf die Oberfläche ist gleich $g\varrho h^2dm$, und wenn man diese als Ebene der xy betrachtet, so sind die Momente des Gesammtdruckes in Bezug auf alle drei Coordinatenebenen:

$$\int g\varrho z^2dm, \quad \int g\varrho yzdm, \quad \int g\varrho xzdm,$$

also wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des Druckmittelpunktes sind:

$$\int z^2dxm = \zeta z_1 M, \qquad \int yzdm = \eta z_1 M, \qquad \int xzdm = \xi z_1 M,$$

wo z_1 die Entfernung des Schwerpunktes von der freien Oberfläche ist:

$$\xi = \frac{\int xzdM}{Mz_1}, \qquad \eta = \frac{\int yzdM}{Mz_1}, \qquad \zeta = \frac{\int z^2dM}{Mz_1},$$

wo nach dem Obigen zu setzen ist:

$$z_1 = \frac{\int zdm}{M} \quad \text{also} \quad \zeta = \frac{\int z^2dM}{\int z_1 dM}.$$

Von den beiden Ausdrücken:

$$\Sigma\alpha_p\Sigma(\alpha_q z_q^2) \quad \text{und} \quad [\Sigma(\alpha_q z_q)]^2$$

ist nun offenbar der erstere gleich:

$$\Sigma(\alpha_q^2 z_q^2) + \Sigma\alpha_p\alpha_q(z_p^2 + z_q^2),$$

und der letztere gleich:

$$2\Sigma\alpha_p\alpha_q z_p z_q + \Sigma\alpha_q^2 z_q^2.$$

Sind nun alle α positiv, so wird immer die erstere Summe grösser als die letztere sein, denn es ist:

$$z_p^2 + z_q^2 - 2z_p z_q = (z_p - z_q)^2,$$

also positiv und daher:

$$z_p^2 + z_q^2 > 2z_p z_q.$$

Setzt man nun α unendlich klein und gleich dm, so ist auch:

$$\int dm \int z^2dm > \left(\int zdm\right)^2,$$

d. h.:

$$\zeta z_1 M^2 > z_1^2 M^2 \quad \text{oder} \quad \zeta > z_1,$$

d. h.:

„Wenn die Wand nicht horizontal ist, so liegt der Mittelpunkt des Druckes tiefer als der Schwerpunkt."

Ist die Wand gekrümmt, so sind die Druckkräfte nicht parallel, sie lassen sich also nicht immer in eine Mittelkraft, immer aber in eine solche und ein Paar oder auch in zwei Kräfte vereinen.

Sei ein fester Körper in eine schwere Flüssigkeit getaucht, so können wir die Oberfläche zunächst durch eine Schaar Horizontalebenen in Scheiben zerlegen. Jede dieser Scheiben zerlegen wir wieder in Elemente durch eine Schaar Ebenen, welche der Ebene xz parallel sind, (unter z immer die Richtung der Schwere verstanden). Es entstehen dann unendlich viel Rechtecke, deren Projectionen auf die Ebene yz alle gleich $dyds$ sind.

Sei nun der Druck auf eine solche Scheibe gleich p für die Flächeneinheit, α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Oberfläche mit den Axen macht, ω der Flächeninhalt des eben erwähnten kleinen unendlich ebenen Rechteckes, so sind die Druckcomponenten eines solchen bezüglich gleich:

$$p\omega\alpha, \quad p\omega\beta, \quad p\omega\gamma,$$

d. h. gleich:

$$pdyds, \quad pdzdx, \quad pdxdy.$$

Digitized by Google

Jedem dieser Rechtecke entspricht offenbar ein zweites, das von denselben Ebenen abgeschnitten wird, und dessen der Axe der x parallelen Druckcomponente gleich $-pdydz$ ist, so dass diese Druckcomponenten verschwinden. Wählen wir statt der xz parallelen Ebene eine Schaar solcher, die yz parallel sind, so ergibt sich eben so, dass die der Axe y parallelen Componenten verschwinden. Es bleibt also nur die Vertikalcomponente des Druckes übrig. Zerlegen wir, um diese zu bestimmen, die Oberfläche in unendlich kleine Rechtecke durch zwei Ebenenschaaren bezüglich den Ebenen xz und yz parallel, so werden je zwei Rechtecke dieselbe Projection $dxdy$ haben. Die entsprechenden Drucke auf das obere und untere dieser Rechtecke sind:

$$gdxdy\int_{z_0}^{z_1}\varrho dz,$$

$$-gdxdy\int_{z_0}^{z_2}\varrho dz,$$

wo z_1, z_2 die Ordinaten der entsprechenden Punkte der Oberfläche des eingetauchten Körpers, z_0 die der Oberfläche der Flüssigkeit ist, während ϱ von z allein abhängig ist; beide Drucke summiren sich in:

$$-g\int_{z_1}^{z_2}\varrho dz\,dx\,dy,$$

und die auf den ganzen Körper ausgeübten in:

$$-g\iiint\varrho dz\,dx\,dy,$$

wo sich das dreifache Integral auf die Oberfläche des eingetauchten Körpers bezieht. Dies Integral mit umgekehrtem Vorzeichen aber stellt dar das Gewicht einer Flüssigkeitsmasse die dem eingetauchten Körper congruent ist, und gleiche Dichtigkeit mit der hat, in welche ersterer eingetaucht ist, d. h. die Flüssigkeit, die er verdrängt. Ist letztere nämlich nicht homogen, so hängt ihre Dichtigkeit nur von der Höhe ab, und dieser Höhe gemäss ist die Dichtigkeit der hier betrachteten Masse auch zu nehmen. Auf den eingetauchten Körper wirken somit zwei Kräfte, 1) seine eigene Schwere in seinem Schwerpunkte, 2) eine Kraft gleich der Schwere der verdrängten Flüssigkeit im Schwerpunkt der letzteren aber in dem der Schwere entgegengesetzten Sinne. Diesen von Archimedes herrührenden Satz drückt man in einer allerdings nur für homogene Flüssigkeiten und eingetauchte Körper völlig richtigen Weise gewöhnlich so aus:

„Ein in eine nicht bewegte Flüssigkeit getauchter Körper verliert soviel an Gewicht, als das der verdrängten Flüssigkeit beträgt."

Als in dies Gebiet gehörig knüpfen wir hieran noch die Theorie der barometrischen Höhenmessung, d. h. des Druckes der Luft in einer bestimmten Höhe. Die Schwerkraft ist hier, da beträchtliche Höhen in Betracht gekommen nach dem Newton'schen Gesetze umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde zu nehmen.

Ist also g die Schwere an der Erdoberfläche γ in der Höhe z über derselben, r der Radius der Erde, so hat man:

$$\gamma=\frac{gr^2}{(r+z)^2}.$$

Ist ferner wie oben ϑ die Temperatur in Centesimalgraden, p der Druck, ϱ die Dichtigkeit der Luft, so kommt:

$$p=k\varrho(1+\alpha\vartheta),$$

wo

$$\alpha=\frac{1}{273}=0{,}004.$$

Nimmt man die Axe z im Sinne der Schwere, so ist zu setzen:

$$X=Y=0,\quad Z=\gamma,$$

also:

$$dp=-\frac{\varrho gr^2dz}{(r+z)^2},$$

oder wenn man für ϱ einsetzt:

$$\frac{dp}{p}=-\frac{gr^2dz}{k(1+\alpha\vartheta)(r+z)^2}$$

Die Integration würde sehr bedeutenden Schwierigkeiten unterliegen, wenn man die ϑ als Function der Höhe, wie sie es in der That ist, betrachten wollte. Indess reicht es hier aus, ϑ als constant zu betrachten, und zwar nimmt man dafür das Mittel aus den Temperaturen des höchsten und tiefsten Punktes der Messung, dann ergibt sich:

$$\lg p=\frac{gr^2}{k(1+\alpha\vartheta)(r+z)}+\text{const.}$$

Oder wenn p_0, z_0 sich auf den tiefsten Punkt beziehen:

$$\lg\frac{p_0}{p}=\frac{gr^2}{k(1+\alpha\vartheta)}\frac{z-z_0}{(r+z_0)(r+z)}.$$

Digitized by Google

Die Ausdrücke p_0 und p gibt das Barometer. — Sind nämlich h_0, h die Barometerhöhen auf beiden Stationen, jedoch mittels des Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers auf Nullgrad Temperatur reducirt, δ die Dichtigkeit des Quecksilbers bei Nullgrad und γ_0, γ die Schwere bei beiden Stationen, so ist:

$$p_0 = \delta\gamma_0 h_0, \qquad p = \delta\gamma h,$$

oder:

$$\frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{(r+z)^2}{(r+z_0)^2},$$

also:

$$\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h}\left(\frac{r+z}{r+z_0}\right)^2.$$

Setzen wir noch:

$$r+z=\zeta, \qquad r+z_0=\zeta_0,$$

so ergibt diese Gleichung in Verbindung mit 1):

$$2) \qquad \zeta = \frac{k(1+\alpha\vartheta)\zeta_0^2}{Mgr^2}\left[\lg\frac{h_0}{h} + 2\lg\left(1+\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)\right]\left(1+\frac{\zeta}{\zeta_0}\right).$$

In erster Näherung kann rechts gesetzt werden $1+\frac{\zeta}{\zeta_0}=1$, man erhält somit einen Näherungswerth für z, setzt man diesen dann rechts ein, so gibt dieselbe Formel den genaueren Werth für ζ.

Um $\frac{h_0}{h}$ zu bestimmen, seien H_0, H die benachbarten Barometerstände, τ_0, τ die entsprechenden Temperaturen. Da $\frac{1}{5550}$ der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers ist, hat man:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H}\,\frac{1+\frac{\tau}{5550}}{1+\frac{\tau_0}{5550}},$$

oder wenn man die höheren Potenzen von $\tau-\tau_0$ vernachlässigt:

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H}\cdot\frac{1}{1+\frac{\tau_0-\tau}{5550}}.$$

Was die Grösse g anbetrifft, so hat man für Paris in Metern:

$$g = 9{,}80896,$$

und für einen beliebigen Ort unter der Breite ψ, wenn ψ_0 die von Paris ist (siehe den Artikel: Schwere):

$$g = 9{,}80896\,\frac{1-0{,}002588\cos 2\psi}{1-0{,}002588\cos 2\psi_0}.$$

Setzt man für k den oben gegebenen Werth und $\psi_0 = 48^\circ\,50'\,13''$, so kommt:

$$3) \qquad \zeta = \frac{18336^{m}(1+\alpha\vartheta)}{1-0{,}002588\cos 2\psi}\left[\lg\frac{h_0}{h} + 2\lg\left(1+\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)\right]\left(1+\frac{\zeta}{\zeta_0}\right).$$

9) Die allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen.

Als allgemeinste Gleichungen des Gleichgewichts haben wir die sechs Gleichungen des Abschnitts 3), welche für die festen Körper ausreichend sind, bereits kennen gelernt. In diesen sechs Gleichungen sind alle zwischen je zwei Punkten des Systems stattfindenden Kräfte eliminirt, und zwar setzen die ersten drei derselben nur voraus, dass diese Kräfte zu zweien gleich und parallel aber entgegengesetzt gerichtet, die letzten drei, dass sie immer in eine Linie fallen. Es ist also nicht die Bedingung nöthig, dass die zwischen je zwei Punkten wirkenden Kräfte auch der Masse beider und einer Function ihrer Entfernung proportional seien. Aus dem Grunde, dass hier alle inneren Kräfte wegfallen, konnten diese Gleichungen unmöglich für alle Systeme ausreichend sein, und wenn wir sie allein für feste biegsame und flüssige Körper anwandten und zu ausreichenden Gleichungen gelangten, ebenso wie dies auch z. B. für die elastischen Systeme (siehe den Artikel: Schwingungen) möglich ist, so ist der Grund der, dass wir sehr kleine Theile der Systeme betrachteten,

wo denn die Einwirkungen an der Grenze je zweier solcher Theile eine Rolle spielten und gewisse bekannte Gesetze für die an den Grenzen stattfinden Spannungen stattfanden. Es ist aber möglich, mit Hinzunahme der zuletzt angeführten Bedingungen zu Gleichungen zu gelangen, welche für alle, in der Natur vorkommenden Systeme nothwendig und ausreichend, wobei ferner alle die Spannungen, welche keine Bewegungen bewirken, sondern eben nur die Zustände des betrachteten Systems (seine Festigkeit, Flüssigkeit, u. s. w.) eliminirt, und durch die Gleichungen, welche eben diese Zustände ausdrücken, ersetzt sind.

Diese wichtigen Gleichungen sollen hier entwickelt werden. Zunächst wollen wir der obigen Bedingung aber noch eine allgemeinere und sehr wichtige Form geben.

Seien m, m_1 die Massen zweier Punkte, r ihre Entfernung, so ist die von m auf m_1 wirkende Kraft gleich $m \cdot m_1 f(r)$, und die von m_1 auf m wirkende gleich $-m \cdot m_1 f(r)$. Sind x, y, z die Coordinaten von m, und x_1, y_1, z_1 die von m_1, so zerfällt die erstere Kraft in die Componenten:

$$mm_1 f(r)\frac{x-x_1}{r},$$

$$mm_1 f(r)\frac{y-y_1}{r},$$

$$mm_1 f(r)\frac{z-z_1}{r}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2$$

und ihrer Differenziale:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_1}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y_1}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-z_1}{r}$$

kann man hierfür schreiben, wenn man

$$q(r)=m_1 m\int f(r)dr$$

setzt:

$$\frac{\partial q(r)}{\partial x},\quad \frac{\partial q(r)}{\partial y},\quad \frac{\partial q(r)}{\partial z}$$

und, wie sogleich zu sehen, sind die Componenten der von m_1 nach m wirkenden Kraft:

$$\frac{\partial q(r)}{\partial x_1},\quad \frac{\partial q(r)}{\partial y_1},\quad \frac{\partial q(r)}{\partial z_1}.$$

Hieraus folgt, dass, wenn von allen Punkten des Systems, das aus n Punkten bestehen soll, auf m eine Einwirkung stattfindet, (wobei die von gewissen Punkten ausgehenden auch der Null gleich sein kann) diese Einwirkungen sich nach den Axen in drei Componenten zerlegen von der Gestalt:

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z},$$

wo

$$U=mm_1\int f(r)dr+mm_2\int f(r)dr_1$$
$$+\ldots+mm_n\int f(r_{n-1})dr_{n-1},$$

und $r, r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ die Entfernung der einzelnen Punkte von m, ferner:

$$m_1, m_2 \ldots m_n$$

ihre bezüglichen Massen sind.

Man kann aber auch setzen:

$$U=\Sigma m_p m_q\int f(r_{p,q})dr_{p,q},$$

wo unter m_p, m_q die Massen je zweier beliebigen Punkte des Systems, $r_{p,q}$ ihre Entfernung ist. Denn in allen Gliedern der Summe, wo nicht $m_p = m$ ist, werden, da

$$r_{p,q}=(x_p-x_q)^2+(y_p-y_q)^2+(z_p-z_q)^2$$

die Differenzialquotienten nach x, y, z der Null gleich sein, so dass die entsprechenden Theile in den Componenten

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z}$$

nicht vorkommen. Dies gilt für alle Punkte des Systems, man hat also als Componenten der auf Punkt x_s, y_s, z_s wirkenden Spannungen, die Grössen:

$$\frac{\partial U}{\partial x_s},\quad \frac{\partial U}{\partial y_s},\quad \frac{\partial U}{\partial z_s}.$$

D. h.: Es gibt eine Function von U, welche allein von den Coordinaten der Punkte des Systems abhängt, derart, dass die Componenten aller auf einen Punkt des Systems wirkenden inneren Kräfte die partiellen Differenzialquotienten dieser Function nach den Coordinaten dieses Punktes sind. Diese wichtige Function U wird Kräftefunction genannt, und eine solche ist unter der obigen Voraussetzung bei den in der Natur vorkommenden Systemen immer vorhanden. Es wirken nun ausserdem auf die Punkte des Systems noch äussere Kräfte, die

Digitized by Google

wir für jeden Punkt m_p in eine Kraft zusammensetzen, und diese in drei Componenten nach den Axen, X_p, Y_p, Z_p, zerlegen. Da diese und die inneren Kräfte einander Gleichgewicht halten, so hat man für jeden der Punkte die drei Gleichungen:

$$X_p + \frac{\partial U}{\partial x_p} = 0,$$

$$Y_p + \frac{\partial U}{\partial y_p} = 0,$$

$$Z_p + \frac{\partial U}{\partial z_p} = 0,$$

also für n Punkte drei n Gleichungen, die man jedoch unter der Gestalt einer einzigen schreiben kann.

Denkt man sich nämlich den Punkt m_p unendlich wenig verschoben, so erfahren seine Coordinaten ganz willkürliche Zunahmen, die wir mit δx_p, δy_p, δz_p bezeichnen. Multipliciren wir hiermit bezüglich die drei Gleichungen des Gleichgewichts, verfahren eben so mit den auf die andern Punkte bezüglichen, und addiren alle diese Gleichungen. Mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial U}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial U}{\partial z_2}\delta z_2 + \ldots$$

hat man dann:

$$1)\quad \delta U + \Sigma_p (X_p \delta x_p + Y_p \delta y_p + Z_p \delta z_p) = 0,$$

welche mit den obigen völlig gleichbedeutend ist, wenn man δx_1, δy_1, δz_1, δx_2 . . . als willkürlich betrachtet.

Es ist nun auf die Eigenschaften der in der Natur vorkommenden Systeme einzugehen.

Als Grundeigenschaft der festen, der biegsamen, (tropfbar) flüssigen, losen Körper lässt sich diejenige betrachten, dass sie unendlich viel Lagen annehmen können, in welchen sie in Gleichgewicht sind, wenn keine äusseren Kräfte wirken, nämlich alle Lagen, in welchen sie fest, flüssig u. s. w. bleiben. Diese Lagen folgen continuirlich auf einander, man muss bei der Rechnung annehmen, dass der Körper sich nur in solchen befinde, oder doch in solchen, die sich nur sehr wenig von derselben entfernen. Das letztere ist nämlich so lange genau richtig, als der Körper seinen Zustand nicht verändert, also z. B. ein tropfbar flüssiger Körper nicht elastisch flüssig wird. Solche Uebergänge aber kommen in den mechanischen Betrachtungen nicht vor, auf welche sich unsere Gleichungen beziehen. — Dergleichen Lagen nennen wir Gleichgewichtslagen. Die in ihnen wirkenden innern Kräfte, und die Kräftefunction U sind also so beschaffen, dass sie keine Bewegung hervorbringen, sondern nur gewisse, dem Zustande des Systems entgegenwirkende Kräfte compensiren. Aber nicht alle Körper befinden sich nach dieser Auffassung immer in Gleichgewichtslagen, z. B. die elastischen, welche Deformationen annehmen, in denen die entstehenden inneren, sogenannten Elasticitätskräfte Bewegung hervorbringen. Man kann dann aber jedenfalls diese Kräfte als äussere betrachten, und sie in die durch X_p, Y_p, Z_p bezeichneten Componenten, die wir ja keinerlei Bedingungen unterwerfen, mit aufnehmen. Die übrigen nicht Bewegung hervorbringenden inneren Kräfte, wenn dergleichen vorhanden sind, werden dann immer die obigen Bedingungen erfüllen, und eine Kräftefunction U auch für sich haben. In diesem Sinne kann man also auch die letztgenannten Körper als solche betrachten, die nur durch Gleichgewichtslagen gehen, also z. B. die elastischen als lose Systeme, die von äusseren die Elasticität bewirkenden Kräften angegriffen sind. Jedoch bezieht sich dann auf die letzteren die Kräftefunction U nicht und sie werden, wie wir gleich bemerken wollen, nicht aus den allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen eliminirt, sie müssen also bekannt sein. Dies unterscheidet sie wesentlich von den zuerst genannten. So z. B. ist es bei tropfbar flüssigen Körpern nicht nöthig, von vorn herein das Gesetz der inneren Kräfte zu kennen, wohl aber bei ausdehnsam flüssigen, für welche das Mariotte-, Gay-Lussac'sche Gesetz gilt.

Wir nehmen also jetzt an, dass die Körper sich in Gleichgewichtslagen befinden. Die Bedingung für eine solche ergibt sich aus 1), wenn man

$$X = Y = Z = 0$$

setzt, also:

$$2)\quad \delta U = 0$$

und bezieht sich das Differenzialzeichen d auf den Uebergang aus einer Gleichgewichtslage zu einer unendlich nahen im Uebrigen beliebigen, so ist also auch:

$$3)\quad d\delta U = \delta dU = 0.$$

Wenn auf einen Körper nun äussere

Google

Kräfte einwirken, so kann genau genommen das Gleichgewicht nur dann ununterbrochen erhalten bleiben, wenn die auf jeden Punkt wirkenden inneren und äusseren Kräfte, die Resultante Null haben. Denn bringt man die inneren Kräfte mit in Rechnung, so ist ja jeder Punkt als frei zu betrachten, und da sich dieselben in Gleichgewicht halten, so müssen die äusseren nothwendig Bewegung erzeugen. Indessen tritt hier folgender Fall ein, der in der Rechnung als Fall des Gleichgewichts betrachtet werden muss. Es tritt Bewegung ein, dadurch werden die Punkte aus der Gleichgewichtslage gedrängt; nach einer als unendlich klein zu betrachtenden Zeit und in einer Lage, die sich von der anfänglichen nur unendlich wenig unterscheidet, sind aber die innern Kräfte eben durch veränderte Lage so modificirt, dass wieder Gleichgewicht herrscht. Es ist also keine sichtliche und der Rechnung zu unterwerfende Aenderung eingetreten, und somit das Gleichgewicht als erhalten zu betrachten. Dies soll jetzt durch Rechnung ausgedrückt werden. Beziehe sich das Differenzialzeichen ∂ auf den Uebergang von der Gleichgewichtslage zu der unendlich nahen Lage, welche durch die kurze Bewegung, die nach dem Obigen stattfindet, erzeugt wird. Nachdem Ruhe wieder eingetreten ist, hat sich dann die Kräftefunction U verwandelt in $U+\partial U$, und folglich wird die Gleichung 1) die Gestalt haben:

$$\partial U + \partial\delta U + \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0.$$

Wegen der anfänglichen Gleichgewichtslage ist aber $\partial U = 0$ nach Gleichung 2).

Die beliebige durch δ ausgedrückte Verschiebung kann nun derart beschränkt werden, dass sie einen Uebergang von einer Gleichgewichtslage zur andern angibt, also d für δ geschrieben werden muss. Dann ist auch $\partial dU = 0$, wie sich ergibt, wenn man in die Gleichung 3) für δ, ∂ setzt, also:

$$4) \qquad \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Diese Gleichung ist, wie wir gleich sehen werden, fürs Gleichgewicht nicht nur nöthig, sondern auch ausreichend, daher die allgemeine Form der Gleichgewichtsgleichungen. Sie wird das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit genannt. Um diesen Namen zu rechtfertigen ist die Gleichung 4) einer leichten Transformation zu unterwerfen.

Wie die Verschiebung auch gedacht sei, so wird jeder Punkt m einen unendlich kleinen Bogen ds zurücklegen, er wird diese Bewegung mit einer Geschwindigkeit verrichten, die nach dem in Abschnitt 1) Gesagten gleich $v = \frac{ds}{dt}$ ist, wenn unter t die Zeit verstanden ist. Es gibt aber hier v keine, wirklich dem Punkte ertheilte Geschwindigkeit, sondern nur eine den Bedingungen des Systems nach mögliche, die wir als virtuelle Geschwindigkeit bezeichnen.

Seien jetzt α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Temperatur des Bogenelementes ds mit den Axen macht, also:

$$dx = \alpha ds, \quad dy = \beta ds, \quad dz = \gamma ds.$$

Sei P die Resultante der Kräfte, welche auf den Punkt m wirken, λ, μ, ν die Cosinus ihrer Winkel mit den Axen, also:

$$X = P\lambda, \quad Y = P\mu, \quad Z = P\nu,$$

folglich:

$$Xdx + Ydy + Zdz = (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)Pds.$$

Sei noch ϑ der Winkel, welchen die Kraft P mit der Bahn ds macht, also:

$$\cos\vartheta = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

und

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pv\cos\vartheta dt.$$

Die Gleichung 4) wird dann:

$$5) \qquad \Sigma(Pv\cos\vartheta) = 0.$$

$Pv\cos\vartheta$ ist das Produkt der in m wirkenden Kraft in die Projection der virtuellen Geschwindigkeit auf dieselbe. Dieses Product wird Moment der virtuellen Geschwindigkeit genannt, und die Gleichung 4) oder 5) drückt somit aus, dass die Summe der Momente der virtuellen Geschwindigkeiten verschwindet.

Um zu zeigen, dass die Gleichung 4) zum Gleichgewichte auch ausreichend ist, denken wir uns das System aus n Punkten bestehend.

Es sind dann, wie früher gezeigt wurde, $3n$ Gleichungen erforderlich. Wie das System auch beschaffen sei, so lässt sich der Zustand desselben durch gewisse, die Coordinaten der einzelnen Punkte enthaltende Gleichungen definiren, deren Anzahl p sein soll. p ist dann kleiner als $3n$, weil, wenn $p = 3n$ ist, jede Coordinate sich constant ergeben würde, also die Punkte unbeweglich wären. Diesen p Gleichungen sind die Verschiebungen, welche durch d ausgedrückt sind, unterworfen und keinen andern Bedingungen, während also die p Gleichungen p der Grössen x, y, z, x_1, . . . als Functionen der Coordinaten geben, werden ihre Differenzialgleichungen die Differen-

ziale dx, dy, dz, dx_1 ... derselben ausdrücken, und eliminirt man diese Grössen aus Gleichung 4), so bleiben $3n-p$ Coordinaten und deren Differenziale übrig. Die Letzteren aber sind jetzt keinen weiteren Bedingungen unterworfen, also vollkommen von einander unabhängig, so dass jeder Coefficient der noch übrigen Differenziale

$$dx_q,\ dy_q,\ dz_q,\ dx_{q+1} \ldots$$

einzeln der Null gleich ist.

Dies sind $3n-p$; also in Verbindung mit den p Gleichungen, welche den Zustand des Systems ausdrücken, hat man $3n$, also eine ausreichende Anzahl Gleichungen.

Die Elimination gibt La Grange in folgender einfachen Gestalt.

Seien die p Bedingungsgleichungen:

6) $\quad f_1 = 0,\ f_2 = 0 \ldots f_p = 0,$

so sind ihre Differenziale von der Gestalt:

$$0 = \frac{\partial f_s}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_s}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_s}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial f_s}{\partial x_2} dx_2 + \ldots$$

Multiplicirt man diese nach einander mit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ und addirt sie zu Gleichung 4) so kommt:

$$\Sigma_q \left\{ \left(X_q + \Sigma_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_q} \right) dx_q + \left(Y_q + \Sigma_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_q} \right) dy_q + \left(Z_q + \Sigma_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial z_q} \right) dz_q \right\} = 0,$$

Bestimmt man die Ausdrücke $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$ nun so, dass p der Coefficient von dx_q, dy_q, dz_q ... verschwinden, so sind nach dem Obigen die übrigen identisch gleich Null, da nur p Bedingungen stattfinden; man hat also $3n$ Gleichungen von der Form:

7)
$$X_q + \Sigma_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_q} = 0,$$

$$Y_q + \Sigma_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_q} = 0,$$

$$Z_q + \Sigma_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial z_q} = 0.$$

Die Gleichungen 6) und 7), an Anzahl $3n+p$, geben nun die $3n$ Gleichgewichtsbedingungen und ausserdem die p Grössen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p$.

Die Gleichungen 5) oder 7) sind mit einander gleichbedeutend. Die Gleichung 5) wird Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit genannt. Demselben gibt aber Gauss noch eine erweiterte Bedeutung.

Zunächst bemerken wir, dass selbstverständlich in den Gleichungen auch der Fall eingeschlossen ist, wo gewisse Punkte sich auf unbeweglichen Flächen oder Linien bewegen. Für die Punkte dieser unbeweglichen Linien oder Flächen sind die virtuellen Verschiebungen dx, dy, dz aber der Null gleich, so dass in den Gleichgewichtsgleichungen weder die Coordinaten der Punkte dieser Flächen und Linien noch die etwa auf sie wirkenden Kräfte vorkommen. In diesem Falle, so wie auch in dem, wo Punkte durch biegsame Linien verbunden sind, aber die Bewegung der Punkte des Systems nur nach einer Seite einer Fläche oder Linie gehemmt, nach der andern Seite indess völlig frei ist (z. B. wenn ein Punkt auf einer festen Linie liegt), findet völlige Freiheit statt für alle Bewegungen, die mit der in Bezug auf die feste Fläche nach Innen gerichteten Normale einen stumpfen Winkel machen.

Da in diesem letzteren Falle von den Gleichungen 6) diejenigen, welche die entsprechenden Hemmungen der Bewegung ausdrücken, nicht stattfinden, hören die Gleichungen 5) oder 7) auf, richtig

Digitized by Google

zu sein, wenn man dergleichen virtuelle Verschiebungen berücksichtigt. Leicht einzusehen ist aber, dass, damit Gleichgewicht stattfinde, entweder die auf die entsprechenden Punkte wirkenden Kräfte der Null gleich (wo die virtuellen Momente verschwinden), oder gegen die Fläche nach Innen gerichtet sein müssen; für die virtuellen Verschiebungen der letzteren Art sind die Momente dann offenbar negativ, da Verschiebung und Kraft einander entgegengesetzt gerichtet sind, und da die Summe der übrigen Momente nach Gleichung 5) verschwindet, so ist die Gesammtsumme ebenfalls negativ. Dieser Fall ist also berücksichtigt, wenn man das Prinzip so ausdrückt:

Im Falle des Gleichgewichts ist die Momentensumme der virtuellen Geschwindigkeiten nicht positiv.

Indess ist nur selten auf diesen Fall einzugehen, um so mehr da die Bildung der entsprechenden Gleichungen oder Ungleichheiten zu grossen Schwierigkeiten führen würde.

Noch eine Eigenschaft der im Gleichgewicht befindlichen Systeme leiten wir von den Gleichungen 6) und 7) ab.

Sei ein solches in Gleichgewicht und denken wir uns zu den p Gleichungen 6) noch andere, $f_{p+1} = 0$, $f_{p+2} = 0 \ldots$ hinzugefügt, so vermehrt sich jede der Gleichungen 7) um die Glieder:

$$\lambda_{p+1} \frac{\partial f_{p+1}}{\partial x_\varrho} + \lambda_{p+2} \frac{\partial f_{p+2}}{\partial x_\varrho} + \ldots$$

Waren nun diese Gleichungen vorher identisch erfüllt, so bleiben sie es auch jetzt noch, wenn man setzt:

$$\lambda_p = \lambda_{p+1} = \ldots = 0$$

und da dieses immer geschehen kann, so findet das Gleichgewicht unverändert statt. Also:

Ein System in Gleichgewicht bleibt noch in solchem, wenn man zu den Verbindungen, worin die Punkte desselben mit einander stehen, noch andere hinzufügt.

Hiervon ist der schon früher betrachtete Fall, dass ein Theil eines Systems fest wird ein besonderer. Natürlich darf aber der gegebene Satz nicht umgekehrt, also gewisse der Bedingungsgleichungen nicht etwa weggelassen werden.

Schliesslich bemerken wir noch, um einem gewöhnlichen Missverständniss vorzubeugen, dass bei der Bildung der Gleichgewichtsgleichungen die Kraft der Reibung als äussere Kraft behandelt werden muss, also nicht weggelassen werden darf, und zwar aus dem Grunde, da diese zwar jedenfalls aus Abstossungen und Anziehungen sich ergibt, aber zum Theil aus Punkten ausgeht, die dem betrachteten System nicht angehören (Aethermolecule und auch materielle Punkte, die man im Uebrigen nicht berücksichtigt)

Der hier gegebene Beweis des Prinzipes schliesst sich der Theorie der Kräfte, also dem übrigen Vortrag der Mechanik an. Einen allgemeinen Beweis hat sonst nur noch Poinsot gegeben. Derselbe macht aber Voraussetzungen, die man glaubte vermeiden zu müssen.

Statisches Moment (Mechanik).

Das Produkt der auf einen Punkt wirkenden Kraft in eine Entfernung von einem festen Punkte.

Stauung (Hydrodynamik).

Eine durch Hemmnisse (Ueberfälle, Wehren) hervorgebrachte Erhöhung des Wasserspiegels.

Steifigkeit (Statik).

Die in der Praxis vorkommenden biegsamen Körper sind meistentheils nicht als vollkommen biegsam zu betrachten, sondern bieten dem Umbiegen oft, wie z. B. dicke Seile, einen sehr beträchlichen Widerstand, den man Steifigkeit nennt. Im uneigentlichen Sinne spricht man auch bei Ketten von Steifigkeit, und versteht darunter die durch das Umbiegen hervorgebrachte Reibung der Kettenglieder oder Bolzen in einander.

Wird ein Seil auf eine Rolle oder von derselben abgewickelt, so wirkt die Steifigkeit der Bewegung entgegengesetzt. Für die Grösse derselben gibt Prony nach Coulombs Versuchen die Formel:

$$1) \qquad S = \frac{e^n}{a}(K + rQ),$$

wo e die Seilstärke, a der Rollenhalbmesser bis zur Axe des Seiles, Q die Spannung des Seiles beim Auf- oder Abwickeln, n, K, r Erfahrungszahlen sind.

Nach Prony ist für neue Seile:

$$n = 1{,}7, \quad K = 13{,}31, \quad r = 0{,}295$$

und für alte:

$$n = 1{,}4, \quad K = 6{,}89, \quad r = 0{,}141,$$

Digitized by Google

wenn preussische Zolle und Zollpfunde vorausgesetzt werden.

Dagegen setzt Eitelwein:

$$2) \qquad S = \frac{e^2 Q}{3500 a},$$

wo a in preussischen Fussen, e in preussischen Linien, Q und S in irgend einem Gewichtsmaasse gegeben sind.

Getheerte Seile haben eine um $\frac{1}{6}$ grössere Steifigkeit als ungetheerte, nasse eine $\frac{1}{12}$ grössere als trockene. Uebrigens geben beide Formeln Resultate, welche einander sehr wenig entsprechen.

Nach Morin ist:

$$3) \qquad S = \frac{e^2}{a}(\alpha + \beta e^2 + \gamma Q),$$

wo e und a in Zollen, S und Q in Zollpfunden gegeben sind, und zwar ist für ungetheerte Seile:

$$\alpha = 0{,}580, \quad \beta = 24{,}47, \quad \gamma = 0{,}3548,$$

für getheerte:

$$\alpha = 2{,}049, \quad \beta = 17{,}89, \quad \gamma = 0{,}2939,$$

ausserdem setzt Morin, wenn das Seil aus n Fäden besteht, für ungetheerte Seile:

$$e = \sqrt{0{,}1398\, n} \text{ Centimeter},$$

und für getheerte:

$$e = \sqrt{0{,}186\, n} \text{ Centimeter},$$

hieraus ergibt sich in Zollen

$$e = 0{,}1398\sqrt{n} \text{ für ungetheerte}$$

$$e = 0{,}1649\sqrt{n} \text{ für getheerte Seile.}$$

Endlich setzt Weissbach:

$$4) \qquad S = K + \frac{rQ}{a}$$

und findet wenn a in Zollen, S in Pfunden gegeben ist, für getheertes Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke:

$$K = 3{,}0, \quad r = 0{,}216,$$

für neues ungetheertes Hanfseil von $\frac{1}{2}$ Zoll Stärke:

$$K = 0{,}17, \quad r = 0{,}0625,$$

für Drahtseil von 8 Linien Dicke:

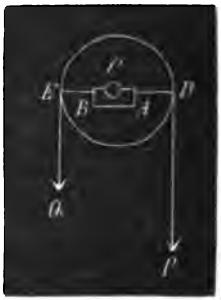
$$K = 0{,}98, \quad r = 0{,}0910$$

für frischgetheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile von 7 Linien Dicke:

$$K = 1{,}14, \quad r = 0{,}00264.$$

Das Gesagte soll jetzt auf die Theorie der Leitrolle angewandt werden. Sei AOB (Fig. 414) eine solche, a ihr Halbmesser, r der des Zapfens, G das Gewicht, d die Seilstärke, Q die angehängte Last, F die Zapfenreibung (reducirt auf den Umfang der Rolle), S die Steifigkeit, P die Kraft; es muss dann sein, wenn Gleichgewicht bei Ueberwindung der Hindernisse stattfinden soll:

Fig. 414.



$$P = Q + F + S.$$

Es findet nun bei Hanfseilen und bei Drahtseilen der Unterschied statt, dass jene sich beim Abwickeln später, diese früher ablösen, als dies bei mangelnder Steifigkeit geschähe, es wird dadurch der Hebelarm CD der Kraft im erstern Falle grösser, im letztern kleiner sein als der Rollenhalbmesser a. Der Arm der Last QE ist in beiden Fällen grösser als a. Vernachlässigen wir die Zapfenreibung, so ist also:

$$(Q + S)\, CD = Q \cdot OE,$$

$$S = \left(\frac{CE}{CD} - 1\right) Q,$$

$$\frac{CE}{CD} = 1 + \frac{S}{Q},$$

für S ist nach einer der obigen Formeln der Werth einzusetzen. Berücksichtigt man F, so ist in die Formel:

$$P = Q + S + F,$$

für S sein Werth und (vergl. den Artikel: Reibung) für F zu setzen:

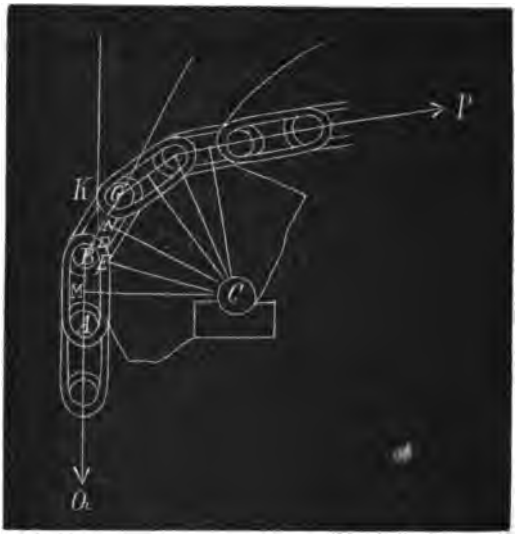
$$F = \frac{\mu r}{a}(Q + G + P),$$

wo μ der Reibungscoefficient ist; auch kann man annähernd setzen:

$$F = \frac{\mu r}{a}(2Q + G).$$

Was die sogenannte Steifigkeit der Kette anbetrifft, so seien AB und BG zwei auf einander folgende Glieder einer Kette (Fig. 415); von der Axe C der

Fig. 415.



Rolle, um welche sich dieselbe wickelt, werden die Lothe CM und CN gegen die Längenaxen der Kettenglieder gezogen, so ist $\alpha = MCN$ der Winkel, um welchen sich beim Auflegen eines neuen Gliedes die Rolle drehen muss. Ist $r_1 = BD = BC$ der Halbmesser des Bolzens, so durchläuft Punkt D beim Auflegen des Gliedes Bogen $DE = r_1\alpha$, da Winkel $KBG = \alpha$ ist. Sei $\mu_1 Q$ die Reibung, welche einer an der Kette angebrachten Last Q entspricht, so ist die Arbeit der Reibung in D also gleich $\mu_1 Q r_1 \alpha$. Denkt man sich die zur Ueberwindung derselben dienende Kraft P_1 in der Richtung der Längenaxe BG wirkend, so ist der Weg $s = CN \cdot \alpha$, also die Arbeit gleich $P_1 \cdot \alpha \cdot CN$, also:

$$P_1 \cdot CN = \mu_1 Q r_1,$$

oder wenn man den um die halbe Kettenstärke vergrösserte Halbmesser CN der Rolle mit a bezeichnet:

$$P_1 = \mu_1 \frac{Q r_1}{a},$$

welche zu der auf Ueberwindung der Last gerichteten Kraft Q zu addiren ist. Die ganze Kraft also ist:

$$P = \left(1 + \mu \frac{r_1}{a}\right) Q.$$

Beim Abwiekeln findet ein gleicher Widerstand statt.

Bei Leitrollen also, wo auf der einen Seite Abwickeln auf der andern Aufwickeln der Kette stattfindet, hat man also:

$$P = \left(1 + \mu_1 \frac{r_1}{a}\right)^2 Q,$$

oder angenähert:

$$P = \left(1 + 2\frac{\mu_1 r_1}{a}\right) Q.$$

Berücksichtigt man auch den Zapfendruck R, und sei der Zapfenhalbmesser gleich r, so kommt:

$$P = \left(1 + 2\mu_1 \frac{r_1}{a}\right) Q + \mu \frac{r}{a} R.$$

Sterbekasse (praktische Arithmetik).

Kassen, welche gegen einmal oder in gewissen Terminen während des ganzen Lebens einer Person zu zahlenden Beitrag (Prämie) eine gewisse Summe beim Todesfall der in Rede stehenden Person zahlen. Ueber die Berechnung der Prämien siehe den Artikel: Rente.

Sterblichkeits-Tafeln (praktische Arithmetik).

Tafeln, welche enthalten, wieviel von einer in demselben Jahre geborenen Anzahl Menschen nach Verlauf von 1, 2 3, u. s. w. Jahren noch am Leben sind. Für Lebensversicherungs- und ähnliche Anstalten sind sie unentbehrlich. Man muss bei ihrer Anfertigung natürlich nicht auf ein bestimmtes Jahr, sondern auf die mittleren Durchschnittszahlen

Digitized by Google

langer Zeiträume sich stützen, und dient ihrer Anfertigung wiederum die Erfahrung der Sterbe-Wittwenkassen u. s. w. zum sichersten Anhalt. Bei Sterblichkeitstafeln gelten verschiedene Resultate für verschiedene Länder und selbst Orte, auch für beide Geschlechter, und zwar ist die Sterblichkeit des männlichen die grössere. Dagegen ändert sich an bestimmten Orten das durchschnittliche Sterbeverhältniss nicht merklich. Dergleichen Tafeln enthält z. B.: „Vegas Sammlung mathematischer Tafeln herausgegeben von Hülsse."

Stereographische Projection, siehe Projection.

Stereometrie, siehe Raumlehre.

Sternbedeckung (Astronomie).

Der Eintritt des Mondes in die grade Linie, welche vom Stern und der Erde gebildet wird.

Sternfigur (Geometrie).

Ein Vieleck mit abwechselnd hohlen und erhabenenen Polygonwinkeln (siehe den Artikel: Vieleck).

Sternjahr (Astronomie), siehe siderisches Jahr.

Sternkunde, siehe Astronomie.

Sternrad (Hydraulik).

Ein Wasserrad, dessen Arme durch eine durchlochte Welle gesteckt sind.

Sterntag, siehe siderischer Tag.

Sternzeit (Chronologie).

Die Zeit in Einheiten ausgedrückt, die gleich einem Sterntage sind.

Stetigkeit (Continuität, Analysis).

Die Eigenschaft der Functionen um unendlich wenig zu- oder abzunehmen, wenn dies mit denjenigen Variablen, von denen sie abhängen, geschieht (vgl. den Artikel: Quantität).

Steuer (Hydraulik).

Apparat zum Lenken der Schiffe. Es besteht im Wesentlichen aus Schaft und Blatt. Letzteres ist eine breite Fläche, welche sich um den Schaft dreht. Dieser ist durch ein Loch, den Gucker, in den Schiffsraum geführt, durch sein Kopfende geht durch die Pinne, eine Hebelvorrichtung, mittels welcher er gedreht wird. Dies Drehen geschieht mit der freien Hand bei kleinen, durch ein Steuerrad bei grossen Fahrzeugen.

Damit das Fahrzeug seine Richtung ändre, gibt man dem Blatte eine gegen die Längenaxe des Schiffes schiefe Richtung, so dass der Druck des Wassers auf dass Steuer in Gemeinschaft mit der fortbewegenden Kraft sich zur Resultante, die durch den Schwerpunkt geht, und einem Paare vereint, das letztere bringt eine Drehung hervor, welche das Schiff in die verlangte Richtung bringt, wo dann das Steuerblatt in die Axe des Schiffes fällt.

Steuerung (Maschinenlehre), siehe Dampfmaschine

Stirnrad (Maschinenlehre), siehe Rad.

Störungen (Astronomie), siehe Perturbation.

Storchschnabel (Pantograph).

Instrument um eine Zeichnung in verändertem Maassstabe wiederzugeben. Er besteht aus zwei verschiebbaren Parallelogrammen. Die Spitze des einen, der des andern gegenüberstehend, wird auf dem Original geschoben, während die letztere die Zeichnung ausführt Die Verschiebung regulirt das Verhältniss der Maasse.

Storchschnabel (Maschinenlehre).

So werden zuweilen das Wattsche Parallelogramm und ähnliche Vorrichtungen genannt.

Stornirен (kaufmännische Rechenkunst).

Die Compensation eines fehlerhaft übertragenen Postens bei der Buchführung durch einen entsprechenden Gegenposten.

Stoss (Dynamik).

1) Allgemeines.

Unter Stoss zweier Körper, versteht man die Einwirkung, welche sie auf einander vermöge ihrer Undurchdringlichkeit ausüben, wenn sie in unmittelbarer Nähe von einander gelangen. Da die Undurchdringlichkeit ein Resultat einer abstossenden Kraft ist, so kann der Stoss als Wirkung einer solchen angesehen werden.

Bei dem Stosse findet vermöge der Einwirkung der Körper auf einander jedesmal eine Deformation derselben statt, welche sie also z. B., wenn sie im Uebrigen als fest zu betrachten sind, diese Eigenschaft nicht völlig beibehal-

ten lässt. Es ist aber zweierlei möglich. Entweder diese Deformation ist eine bleibende, oder sie bringt Kräfte hervor, welche den Körper wieder in seine alte Gestalt zurückzuführen streben, mit andern Worten die Körper sind elastisch. Man theilt also den Stoss in den unelastischen und den elastischen ein. Der letztere besteht aus zwei Einwirkungen, deren erstere von der Deformation begleitet, und völlig mit der beim unelastischen Stoss zusammenfällt, die letztere aber aus der durch die Deformation erzeugten Elasticität entsteht. Je nachdem nun die Elasticität eine vollständige oder unvollständige ist, d. h. die Körper vollständig oder unvollständig ihre frühere Gestalt annehmen, wird auch der Stoss ein vollkommen oder unvollkommen elastischer sein. Ob dies der Fall sei, hängt nicht allein von der Beschaffenheit der Körper, sondern auch von der Grösse des Stosses, d. h. die Geschwindigkeiten, womit sie zusammentreffen, ab. Die Zeit, welche ein Stoss dauert, ist selbstverständlich nicht unendlich klein, jedoch sehr gering, und kann und muss in der Rechnung wenigstens diese Zeitdauer, so wie die Zustände, welche die Körper während derselben annehmen, vernachlässigt werden. Ebenso ist die Deformation so klein, dass anzunehmen ist, der Körper verhalte sich gegen die übrigen wirkenden Kräfte vor dem Stosse wie nach demselben.

Wenn die Richtung der sich treffenden Körper dieselbe ist und durch die Schwerpunkte beider geht, so ist der Stoss ein centraler.

Ist die Richtung beider dieselbe, geht aber nicht durch ihre Schwerpunkte, so ist der Stoss ein excentrischer und grader, sind beide Bewegungsrichtungen verschieden, so ist der Stoss schief.

2) Vom Stosse fester Körper.

Wir erörtern in Bezug auf die festen Körper zunächst den Theil des Stosses, während dessen die Deformation, die hier offenbar ein Abplatten sein muss, stattfindet. Dieser Theil macht den ganzen Stoss aus, wenn der Körper unelastisch ist.

Wir nehmen zunächst an, dass die Körper, zwei an der Zahl, ganz frei sind, und sich beim Stosse nur in einem Punkt berühren. Vor und nach dem Stosse ist die Bewegung beider Körper bestimmt durch die Schwerpunktsgeschwindigkeit, und die Rotation um eine zu bestimmende durch den Schwerpunkt gehende Axe. Beide Bewegungen werden für jeden Körper nach den drei Axen zerlegt. Unverändert durch den Stoss bleibt die Lage des Schwerpunkts, so wie die der zu ihm gehörigen Hauptaxen im Raume (vergl. den Artikel: Rotation), da zu deren Aenderung eine endliche Zeit gehört, und wie die Zeit des Stosses als verschwindend klein betrachten. Es ist daher gestattet, da nicht beide Körper auf dieselben Axen bezogen zu werden brauchen, für jeden derselben die zum Schwerpunkt gehörigen Hauptaxen als solche festzusetzen.

Es seien jetzt für den ersten Körper m das Massenelement, u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunkts vor, U, V, W, dieselben nach dem Stosse, p, q, r die Rotationscomponenten vor, P, Q, R nach dem Stosse, a, b, c die Coordinaten des Berührungspunkts, α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Normale in demselben mit den Axen macht

Die entsprechenden Grössen für die andern Körper unterscheiden wir durch Indices m_1, u_1, v_1, w_1 . . .

Die Einwirkung der Körper auf einander findet an der Berührungsstelle statt und ist mit der Normale gleichgerichtet.

Sei die Grösse dieser Einwirkung oder abstossenden Kraft gleich N, sie ist vermöge des Satzes von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung für beide Körper gleich aber entgegengesetzt gerichtet.

Die Geschwindigkeit eines Punktes m vor dem Stosse hat bekanntlich zu Componenten bezüglich die Grössen:

$$u + ry - qz,\quad v + pz - rx,\quad w + qx - py.$$

Diese Grössen nach dem Stosse ergeben sich, wenn man statt der kleinen Buchstaben, mit Ausnahme von x, y, z grosse schreibt.

Bildet man nun die sechs Gleichungen für die verlorenen Kräfte, so kommt:

$$N\alpha + \Sigma m\,[u - U + (r - R)y - (q - Q)z] = 0$$
$$N\beta + \Sigma m\,[v - V + (p - P)z - (r - R)x] = 0$$
$$N\gamma + \Sigma m\,[w - W + (q - Q)x - (p - P)y] = 0$$

Digitized by Google

$$N(c\beta - b\gamma) + \Sigma mz[v - V + (p - P)z - (r - R)x] - \Sigma my[w - W + (q - Q)x - (p - P)y] = 0,$$
$$N(a\gamma - c\alpha) + \Sigma mx[w - W + (q - Q)x - (p - P)y] - \Sigma mz[u - U + (r - R)y - (q - Q)z] = 0$$
$$N(b\alpha - a\beta) + \Sigma my[u - U + (r - R)y - (q - Q)z] - \Sigma mx[v - V + (p - P)z - (r - R)x] = 0.$$

Aus diesen Gleichungen werden die für den andern Körper gebildet, wenn man sämmtliche Buchstaben mit Ausnahme von N mit Indices versieht. N bleibt unverändert, wenn man sich die Axen, auf die der zweite Körper bezogen ist, denen des ersten entgegengesetzt gerichtet denkt. Im andern Falle ist N mit $-N$ zu vertauschen.

Wir denken uns jetzt in der That die Hauptaxen des Schwerpunkts als Coordinatenaxen, und um deren Richtung festzustellen, nehmen wir als positive Seite die Projectionen der nach Aussen gerichteten Normale als solche an. Die Axen beider Körper sind also entgegengesetzt gerichtet.

Seien M, M_1 die Massen der ganzen Körper, es ist dann:

$$\Sigma mx = \Sigma my = \Sigma mz = 0$$
$$\Sigma myz = \Sigma mzx = \Sigma mxy = 0.$$

Setzen wir ferner:

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = A, \qquad \Sigma m(z^2 + x^2) = B, \qquad \Sigma m(x^2 + y^2) = C,$$

so kommt:

1)
$$N\alpha + M(u - U) = 0,$$
$$N\beta + M(v - V) = 0,$$
$$N\gamma + M(w - W) = 0,$$

2)
$$N(c\beta - b\gamma) + A(p - P) = 0,$$
$$N(a\gamma - c\alpha) + B(q - Q) = 0,$$
$$N(b\alpha - a\beta) + C(r - R) = 0.$$

Die entsprechenden sechs Gleichungen für den zweiten Körper bezeichnen wir mit 1a) und 2a), sie entstehen durch Hinzufügung der Indices an alle Buchstaben mit Ausnahme von N. Es sind nun zu bestimmen die Grössen:

$$U,\ U_1,\ V,\ V_1,\ W,\ W_1,\ P,\ P_1,\ Q,\ Q_1,\ R,\ R_1,\ N,$$

also im Ganzen 13. Es ist also noch eine Gleichung nöthig.

Diese ergibt sich aus der Betrachtung, dass, wenn der eine Körper sich dem andern nähert, und zwar so, dass der Berührungspunkt desselben in Richtung der Normale grössere Geschwindigkeit hat, als der des andern, nothwendig eine Durchdringung beider eintreten muss, wenn sich diese Geschwindigkeit mittels der abstossenden Kraft N nicht vermindert; um eine Durchdringung zu verhindern, müssen aber beide sich berührende Punkte in Richtung der Normale entweder gleiche Geschwindigkeit oder der gestossene muss die grössere Geschwindigkeit haben. Da aber wenn ersteres eintritt, bereits keine Durchdringung stattfindet, also die Abstossung beseitigt ist, wenn keine Elasticität stattfindet, so wird bei Beendigung des ersten Theils des Stosses in der That die nach der Normale zerlegte Geschwindigkeit beider Berührungspunkte gleich sein. Dies drückt folgende Gleichung aus:

3) $(U + Rb - Qc)\alpha + (V + Pc - Ra)\beta + (W + Qa - Pb)\gamma + (U_1 + R_1b_1 - Q_1c_1)\alpha_1 + (V_1 + P_1c_1 - R_1a_1)\beta_1 + (W_1 + Q_1a_1 - P_1b_1)\gamma_1 = 0.$

Die betreffende Componente ist für den zweiten Körper negativ genommen, weil dies die Wahl der Coordinatensysteme offenbar so bedingt.

Somit wäre der unelastische Stoss völlig bestimmt. Legen wir demselben jetzt einen beliebigen Grad von Elasticität bei. Es wirkt dann eine Stosskraft M, welche nur dann gleich N ist, wenn der Stoss ein vollständig elastischer ist, wo dann der Körper alle Einwirkung und Deformationen wie im ersten Theile in umgekehrter Ordnung wieder erleidet, beim unvollständig elastischen Stoss aber

ist M' kleiner als N. Die Gleichungen 1), 2), 1a) und 2a) bleiben also für den ganzen Stoss gültig, wenn man unter U, V, W, P, Q, R die entsprechenden Grössen versteht, wie sie nach dessen Vollendung sich ergeben; für N aber die Gesammteinwirkung $N + M'$ schreibt. Nimmt man an, dass das Verhältniss $\frac{M}{N}$, welches im Fall völlständiger Elasticität gleich Eins, im Falle des unelastischen Stosses gleich Null ist, in allen andern Fällen gegeben und gleich ε sei, so ist $N + M = N(1+\varepsilon)$, und der Gang der Rechnung im Falle des elastischen Stosses der folgende. Aus den Gleichungen 1), 2), 1a), 2a), 3), wie sie hier stehen, wird nur N berechnet, woraus sich $N(1+\varepsilon)$ ergibt. Dieser Ausdruck wird dann in 1), 2), 1a), 2a) für N geschrieben, und aus diesen zwölf Gleichungen U, V, W, P, Q, R und die entsprechenden Grössen für den andern Körper berechnet, wie sie sich nach Schluss des ganzen Stosses ergeben.

Von der Grösse ε nehmen wir an, dass sie, wie die Erfahrung zu zeigen scheint, von den Elasticitäts- und Dimensionsverhältnissen der beiden Körper abhänge.

Es bleibt noch übrig, diese Entwicklungen von den obengemachten Beschränkungen zu befreien.

a) Seien noch immer zwei Körper vorhanden, mögen diese aber sich gleichzeitig in n Punkten stossen. Es kommen dann statt des mit N multiplicirten Gliedes in 1) und 2) so viel Glieder als Berührungspunkte vorhanden sind, also statt der Glieder $N\alpha, \ldots N(c\beta - b\gamma)$ treten Summen von der Form:

$$N\alpha + N'\alpha' + N''\alpha'', \ldots N(c\beta - b\gamma) + N'(c'\beta' - b'\gamma') + \ldots$$

ein. Statt der Gleichung 3) hat man eben so viel entsprechende Gleichungen als Berührungspunkte, wo die Grössen a, b, c, α, β, γ, a_1, b_1, c_1, α_1, β_1, γ_1, die jedem Punkte entsprechenden sind. Dadurch entstehen gewisse Beziehungen zwischen den Lagen der Berührungspunkte, wie dies auch sein muss. Dagegen reichen die Gleichungen 1) und 2) nicht völlig mehr zu, die Spannungen zu bestimmen, wenn nicht anderweitig über dieselben etwas festgesetzt ist.

Was von den N gilt, tritt ebenfalls auch bei $N(1+\varepsilon)$ ein; die Grösse ε braucht übrigens nicht für alle Punkte dieselbe zu sein.

b) Mögen sich die Punkte in einer ganzen Fläche berühren. Ist df das Element derselben, so ist in den Gleichungen N mit Ndf zu vertauschen, und die Summen für alle Punkte der Fläche zu nehmen, so dass statt

$$N\alpha \ldots N(c\beta - b\gamma) \ldots$$

Glieder von der Form:

$$\int N\alpha df, \quad \int N(c\beta - b\gamma)\, df$$

erscheinen. Die Gleichung 3) gilt dann für alle Punkte der Berührungsfläche. Die Bestimmung von N ist in diesem Falle noch weniger vollständig als im Falle a).

Ist die Berührungsstelle eine Ebene, so ist α, β, γ für diese constant, also das entsprechende Glied in den Gleichungen 1) gleich αH, βH, γH wo

$$H = \int N df$$

ist. Oft kann man annehmen, dass die Grösse N für alle Punkte der Berührungsstelle dieselbe sei, es ist dann, wenn F der Flächeninhalt derselben ist:

$$\int N df = NF.$$

Sind a_0, b_0, c_0 die Coordinaten des Schwerpunkts der Berührungsstelle, so ist in den Gleichungen 2) zu setzen:

$$\int N c df = N c_0 F \ldots$$

die Gleichung 3) multiplicirt man mit pt und integrirt. Hieraus folgt, dass in diesem Falle die Gleichungen 1), 2), 3), wie beim Punkte sind, wenn man bezüglich vertauscht:

$$N,\ a,\ b,\ c \text{ mit } NF,\ a_0,\ b_0,\ c_0.$$

Die Aufgabe ist also wie beim Punkte zu behandeln. Diese Annahme rechtfertigt sich aber nur dann, wenn alle Punkte der Berührungsstelle dieselbe Geschwindigkeit haben. D. h. wenn keine Rotation stattfindet.

c) Seien die Körper oder einer davon an der Berührungsstelle nicht continuirlich gekrümmt. Die Normalrichtung ist dann nach allgemein statischen Principien zu ersetzen:

A) im Falle der Stoss in einer Kante stattfindet, durch die Linie, welche die beiden auf der Kante senkrechten Tangenten im Berührungspunkte halbirt;

B) im Falle derselbe in einer Ecke stattfindet, durch die Richtung, welche so viel gleichen Kräften, als Flächen in der Ecke zusammenstossen und diesen normal gerichtet sind, als Resultante entspricht.

Digitized by Google

Damit ein Stoss überhaupt stattfinde, muss die Normale des einen Körpers, wenn dieser an der Berührungsstelle continuirlich gekrümmt ist, mit der so bestimmten Richtung zusammenfallen, oder es müssen die Richtungen bei beiden Körpern, wenn beide Berührungsstellen nicht continuirlich gekrümmt sind, in eine Grade fallen.

d) Mögen mehr als zwei Körper gleichzeitig zusammenstossen.

Es treten dann für jeden Körper Gleichungen, die 1) und 2) analog sind, und für jeden Berührungspunkt eine dritte entsprechende Gleichung ein. Wird ein Körper von mehreren andern gestossen, so sind die mit N multiplicirten Glieder in den Gleichungen 1) und 2) für denselben durch die entsprechenden Gliedersummen zu ersetzen.

e) Seien die sich stossenden Körper zum Theil oder sämmtlich nicht völlig frei.

Im Allgemeinen ist dann der von dem Hindernisse hervorgebrachte Gegendruck in die Gleichungen 1) und 2) mit aufzunehmen. Besonders aber zu bemerken sind folgende Fälle:

A) Habe ein Körper einen unbeweglichen Punkt.

Man nimmt dann diesen zum Anfangspunkt der Coordinaten dieses Körpers. Die Gleichungen 1) fallen dann weg, und die Gleichungen 2) bleiben dann noch richtig, wie sich dies aus den Principien der Rotation (vergl. den betreffenden Artikel), oder auch aus der Betrachtung ergibt, dass man für den festen Punkt eine unendlich grosse Masse annehmen, und ihn somit als Schwerpunkt betrachten kann. In der Gleichung 3) ist dann $U = V = W = 0$.

B) Habe ein Körper eine unbewegliche Axe.

Indem man einen Punkt derselben als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt, und diese Axe selbst als die der x, y betrachtet, fallen die Gleichungen 1) ganz weg und von den Gleichungen 2) bleibt nur die dritte. In der Gleichung 3) ist dann $P = Q = 0$ zu setzen, und ebenso $U = V = W = 0$.

C) Sei ein Körper ganz unbeweglich.

Dieser Fall entspricht dem Stosse gegen eine unbewegliche Fläche. Für dieselbe kann jeder Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen werden. Indem die Gleichungen 1) und 2) für den unbeweglichen Körper wegfallen, kommen die ihm noch entnommenen Grössen nur noch in Gleichung 3) vor.

Man sieht leicht, wie diese Betrachtungen für beide Theile des Stosses gelten, und mit Ausnahme der Fälle a) und b) immer ausreichende Gleichungen geben.

Setzen wir jetzt aber zwei Körper voraus, die sich in einem Punkte berühren. Multiplicirt man die Gleichungen 1) bezüglich mit α, β, γ und addirt dieselben, so kommt:

$$4)\quad \frac{N}{M} + (u - U)\alpha + (v - V)\beta + (w - W)\gamma = 0,$$

Seien λ, μ, ν die Cosinus der Winkel, welche irgend eine auf der Normale senkrechte Richtung mit den Axen macht, also:

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$$

Wenn man die Gleichungen 1) bezüglich mit λ, μ, ν multiplicirt und addirt, so kommt:

$$5)\quad (u - U)\lambda + (v - V)\mu + (w - W)\nu = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dass wenn man die Schwerpunktsgeschwindigkeit vor dem Stosse, die wir mit k und die nach dem ersten Theile desselben, die wir mit K bezeichnen, parallel der Normale und nach zwei darauf senkrechten Richtungen zerlegt, die beiden letzten Componenten für beide Geschwindigkeiten gleich sind, und sich daher auch in dieselbe Kraft bei beiden zusammensetzen. D. h. man kann die Geschwindigkeit vor dem Stosse in eine normale und eine tangentiale Componente zerlegen. Die letztere bleibt ungeändert, und die Schwerpunktsgeschwindigkeit nach demselben ist gegeben, wenn man sie mit der veränderten normalen Geschwindigkeit zusammensetzt. Ist ϱ der Winkel der Schwerpunktsgeschwindigkeit der Normale vor dem Stosse, σ nach demselben, so hat man also:

$$4a)\quad \frac{N}{M} + k\cos\varrho = K\cos\sigma,$$

$$5a)\quad k\sin\varrho = K\sin\sigma.$$

Nach dem Obigen gelten diese Gleichungen noch, wenn die Berührungsstelle eine Ebene ist.

Die Gleichungen 2) mit α, β, γ multiplicirt und addirt, geben:

$$6)\quad A\alpha(p - P) + B\beta(q - Q) + C\gamma(r - R) = 0,$$

d. h. dies nach der Normale zerlegte statische Moment der Geschwindigkeiten ändert sich nicht durch den Stoss.

Ferner hat man, wenn man die Gleichungen 2) bezüglich mit a, b, c multiplicirt und ebenso verfährt:

7) $Aa(p-P)+Bb(q-Q)+Cc(r-R)=0.$

Sei e die Länge der Verbindungslinie des Schwerpunktes und des Berührungspunktes, die Cosinus der Winkel, welche diese Linie mit den Axen macht, sind dann bezüglich gleich $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{e}$, also:

Das statische Moment der nach dieser Linie zerlegten Geschwindigkeiten bleibt ebenfalls durch den Stoss unverändert. Durch einfache Betrachtungen folgt auch, dass, wenn l, m, n die Entfernungen des Schwerpunkts von den Projectionen der Normale bezüglich auf die Ebene der yz, zx, xy sind, man hat:

$$l=c\beta-b\gamma, \qquad m=a\gamma-c\alpha, \qquad n=b\alpha-a\beta,$$

so dass die Gleichungen 2) auch die Gestalt haben:

8) $Nl+A(p-P)=0, \qquad Nm+B(q-Q)=0, \qquad Nn+C(r-R)=0.$

Multiplicirt man diese Gleichungen auch mit l, m, n und addirt, so kommt:

$$[a^2+b^2+c^2-(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2]N+Al(p-P)+Bm(q-Q)+Cn(r-R)=0,$$

oder wenn τ der Winkel der Normale mit der Linie $s=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ist:

9) $Ne^2\sin\tau^2+Al(p-P)+Bm(q-Q)+Cn(r-R),$

wo

$$\cos\tau=\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{e}$$

ist. — Die Gleichung 3) nimmt jetzt auch die Gestalt an:

10) $K\cos\sigma+K_1\cos\sigma_1+Pl+Qm+Rn+P_1l_1+Q_1m_1+R_1n_1=0,$

wo sich immer die gestrichenen Grössen auf den zweiten Körper beziehen.

Es ist nun leicht die Rechnung auszuführen. Zunächst ist N zu berechnen. Dann in allen Gleichungen mit Ausnahme von 3) oder 10) N mit $N(1+\varepsilon)$ zu vertauschen, und die übrigen Grössen zu finden. Setzt man aus 4a) und 8) in 10) ein, so kommt:

$$\frac{N(M+M_1)}{MM_1}+k\cos\varrho+k_1\cos\varrho_1+N\left(\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}+\frac{l_1^2}{A_1}+\frac{m_1^2}{B_1}+\frac{n_1^2}{C_1}\right)+pl+qm+rn+p_1l_1+q_1m_1+r_1n_1=0,$$

also, wenn man setzt:

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{M}+\frac{1}{M_1}+\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}+\frac{l_1^2}{A_1}+\frac{m_1^2}{B_1}+\frac{n_1^2}{C_1}$$

11) $N=-u(k\cos\varrho+k_1\cos\varrho_1+pl+qm+rn+p_1l_1+q_1m_1+r_1n_1).$

Die Gleichungen 4a), 5a) und 8) geben dann K, σ, P, Q, R nach Schluss des Stosses, wenn man für N setzt $N(1+\varepsilon)$, und N aus Gleichung 10) entnimmt:

3) Stoss bei unveränderter Rotation.

Geht die gemeinschaftliche Normale durch den Schwerpunkt des einen Körpers, so ist:

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}$$

für denselben, also:

$$l=m=n=0,$$

also wegen 8):

$$P=p, \qquad Q=q, \qquad R=r.$$

„Die Rotation des betrachteten Körpers, wird durch den Stoss nicht geändert.“ Geht sie durch die Schwerpunkte beider Körper, wie dies z. B. immer bei homogenen Kugeln der Fall ist, so ist auch:

$$l_1=m_1=n_1=0, \qquad P_1=p_1, \qquad Q_1=q_1, \qquad R_1=r_1.$$

Digitized by Google

Die Gleichung 10) wird dann:

$$1) \qquad N = -\frac{MM_1}{M+M_1}(k\cos\varrho + k_1\cos\varrho_1).$$

Offenbar sind die Bewegungen beider Körper entgegengesetzt gerichtet, wenn k und k_1 positiv sind. Ist k positiv und k_1 negativ, so erfolgt nur ein Stoss wenn $k\cos\varrho > k_1\cos\varrho_1$ ist, damit sich die Körper nähern. k und k_1 können auch nicht gleichzeitig negativ sein, da sie sich dann von einander entfernen.

Die Gleichung 4a) gibt nun, wenn man $N(1+\varepsilon)$ für N setzt:

$$2) \qquad -\frac{(1+\varepsilon)M_1}{M+M_1}(k\cos\varrho + k_1\cos\varrho_1) = K\cos\sigma - k\cos\varrho$$

$$-\frac{(1+\varepsilon)M}{M+M_1}(k\cos\varrho + k_1\cos\varrho_1) = K_1\cos\sigma_1 - k_1\cos\varrho_1,$$

woraus sich ergibt:

$$3) \qquad K\cos\sigma = \frac{(M-\varepsilon M_1)k\cos\varrho - (1+\varepsilon)M_1k_1\cos\varrho_1}{M+M_1},$$

$$K_1\cos\sigma_1 = \frac{(M_1-\varepsilon M)k_1\cos\varrho_1 - (1+\varepsilon)Mk\cos\varrho}{M+M_1},$$

wozu noch kommt:

$$K\sin\sigma = k\sin\varrho, \qquad K_1\sin\sigma_1 = k_1\sin\varrho_1.$$

Ist also der zweite Körper vor dem Stosse in Ruhe, so kommt:

$$k_1 = 0, \text{ also auch } \sigma_1 = 0,$$

$$4) \qquad K_1 = \frac{-(1+\varepsilon)Mk\cos\varrho}{M+M_1}, \qquad K\cos\sigma = \frac{(M-\varepsilon M_1)k\cos\varrho}{M+M_1}.$$

Der Körper M_1 erhält also nur eine normale Bewegung. Eine Rotation aber findet bei ihm nicht statt. Sind die Körper völlig elastisch, also $\varepsilon = 1$, und ausserdem an Masse gleich, also $M = M_1$, so kommt:

$$K_1 = -k\cos\varrho, \qquad K = 0.$$

Der erste Körper überträgt also seine Geschwindigkeit an den zweiten und kommt zur Ruhe.

4) Andere einzelne Fälle.

Wenn einer der Körper M_1 einen unbeweglichen Punkt hat, so ist, wenn man diesen als Anfangspunkt der Coordinaten nimmt:

$$k_1 = K_1 = 0.$$

Es fallen also die entsprechenden Gleichungen 4a) und 5a) weg. Die Gleichung 11) wird dann, wenn man ganz wie oben verfährt, nur in so weit verändert, dass $k_1 = 0$ und in dem Werthe von μ auch $\frac{1}{M_1} = 0$ wird.

Hat der Körper eine unbewegliche Axe, so ist, wenn man diese als Axe der z nimmt:

$$k_1 = 0, \qquad p_1 = q_1 = 0, \qquad \frac{1}{M_1} = 0.$$

Es fallen ausserdem von den Gleichungen 8) für den entsprechenden Körper die beiden ersten weg, und deshalb ist in dem Werthe von μ noch

$$\frac{1}{A_1} = \frac{1}{B_1} = 0,$$

zu setzen. Ist ein Körper absolut fest, so ist:

$$k_1 = 0, \qquad p_1 = q_1 = r_1 = 0, \qquad \frac{1}{M_1} = 0, \qquad \frac{1}{A_1} = \frac{1}{B_1} = \frac{1}{C_1} = 0,$$

also:

Digitized by Google

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{l^2}{A_2} + \frac{m^2}{B^2} + \frac{n^2}{C^2}.$$

Diese Schlüsse sind zu wiederholen, wenn Aehnliches für den zweiten Körper gilt. Stosse z. B. einen freier Körper M an einen andern M_1, der um eine feste Axe beweglich ist, derart, dass die gemeinschaftliche Normale durch den Schwerpunkt des ersteren geht. Dann ist:

$$p = P, \quad q = Q, \quad r = R, \quad l = m = n = 0, \quad p_1 = q_1 = 0, \quad \frac{1}{A_1} = \frac{1}{B_1} = 0, \quad \frac{1}{M_1} = 0.$$

Die Gleichung 11) des Abschnitts 2) also wird:

$$N = -\frac{MC_1}{C_1 + Mn_1^2}(k\cos\varrho + r_1 n_1),$$

und somit, wenn man in 4a) N mit $N(1+\varepsilon)$ vertauscht:

$$K\cos\sigma = -\frac{C_1}{C_1 + Mn_1^2}(1+\varepsilon)(k\cos\varrho + r_1 n_1) + k\cos\varrho,$$

oder:

$$K\cos\sigma = \frac{(Mn_1 - C_1\varepsilon)\,k\cos\varrho - (1+\varepsilon)\,C_1 r_1 n_1}{C_1 + Mn_1^2},$$

ebenso folgt aus 8):

$$R_1 - r_1 = -\frac{M(1+\varepsilon)(k\cos\varrho + r_1 n_1)}{C_1 + Mn_1^2}.$$

Mögen sich beide Körper um eine unbewegliche Axe drehen. Es ist dann offenbar

$$p = q = 0, \quad p_1 = q_1 = 0, \quad \frac{1}{A} = \frac{1}{B} = \frac{1}{A_1} = \frac{1}{B_1} = 0, \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} = 0, \quad k = k_1 = 0,$$

und somit wird die Gleichung 11):

$$N = -\frac{CC_1(rn + r_1 n_1)}{n^2 C_1 + n_1^2 C},$$

und aus der letzten Gleichung 8) folgt, wenn man $N(1+\varepsilon)$ für N setzt:

$$R - r = -\frac{C_1(rn + r_1 n_1)}{n^2 C_1 + n_1^2 C}.$$

Ist in dem einen Körper ein fester Punkt, oder eine feste Axe vorhanden, oder ist derselbe ganz fest, und geht im ersten Falle die Normale durch diesen Punkt, im zweiten durch die Axe, in allen dreien aber durch den Schwerpunkt des andern freien Körpers, so ist in den Gleichungen 2) des Abschnitts 3) zu setzen:

$$\frac{1}{M_1} = 0, \qquad k_1 = 0,$$

also jedenfalls:

$$K\cos\sigma = -\varepsilon k\cos\varrho, \qquad K_1 = 0;$$

in Verbindung mit der Gleichung:

$$K\sin\sigma = k\sin\varrho,$$

folgt hieraus:

$$\operatorname{tg}\sigma = -\varepsilon\operatorname{tg}\varrho.$$

Für unelastische Körper ist also $\sigma = 0$, d. h. die normale Componente verschwindet beim Stosse ganz, für vollkommen elastische Körper $\sigma = -\varrho$.

Der Schwerpunkt des Körpers wird unter einem Winkel mit der Normale zurückgeworfen, der dem Einfallswinkel gleich ist. Dies ist das bekannte Reflexionsgesetz.

Es soll aber noch in einem einfachen Falle der gleichzeitige Stoss dreier Körper erörtert werden.

Seien die Massen M, M_1, M_2. Die letztere sei vor dem Stosse in Ruhe und werde von den beiden andern getroffen. Die Normalen in den Berührungs-

punkten von MM_2 und M_1M_2 gehen durch die Schwerpunkte beider Körper. Für jeden Berührungspunkt findet die Beziehung: $\alpha\beta - b\alpha = 0$ . . . statt, so dass, wie in Abschnitt 3) gezeigt wurde, die Rotationen unverändert bleiben. Die Gleichungen 1) des Abschnitts 1) werden dann:

$$N\alpha + M(u - U) = 0, \quad N_1\alpha_1 + M_1(u_1 - U_1) = 0, \quad N\alpha_2 + N_1\alpha'_2 - M_2U_2 = 0.$$

Jede dieser Gleichungen stellt drei andere vor, welche entstehen, wenn man α, u, U, α_1 . . . mit β, v, V, β_1 . . ., γ, w, W, γ_1 . . . vertauscht. Und wie in Abschnitt 2) bildet man:

$$\frac{N}{M} + k = K, \qquad \frac{N_1}{M_1} + k_1 = K_1.$$

k, k_1 sind die nach der Normale zerlegten fortschreitenden Geschwindigkeiten der beiden ersten Körper vor, K, K_1 nach dem Stosse. Die tangentialen Componenten werden auch hier durch den Stoss nicht verändert.

Die aus der dritten Gleichung entstehenden, multipliciren wir bezüglich mit α_2, β_2, γ_2 und α'_2, β'_2, γ'_2 und addiren. Sei der Winkel, welchen beide Normalen mit einander machen, gleich ϑ, K_2 die durch den Stoss erlangte fortschreitende Geschwindigkeit des dritten Körpers, σ, σ_1 ihre Winkel mit den beiden Normalen, so kommt:

$$\frac{N + N_1\cos\vartheta}{M_2} = K_2\cos\sigma,$$

$$\frac{N_1 + N\cos\vartheta}{M_2} = K_2\cos\sigma_1.$$

Die Gleichung 3) gibt jetzt zwei andere:

$$K + K_2\cos\sigma = 0, \qquad K_1 + K_2\cos\sigma_1 = 0,$$

also, wenn man die gefundenen Werthe von K, K_1, K_2 einsetzt:

$$\frac{N}{M} + \frac{N + N_1\cos\vartheta}{M_2} + k = 0$$

$$\frac{N_1}{M_1} + \frac{N_1 + N\cos\vartheta}{M_2} + k_1 = 0,$$

woraus dann folgt:

$$N = \frac{-M_2[Mk(M_1 + M_2) - MM_1k_1\cos\vartheta]}{(M + M_2)(M_1 + M_2) - MM_1\cos\vartheta^2}$$

$$N_1 = \frac{-M_1[M_1k_1(M + M_2) - MM_1k\cos\vartheta]}{(M + M_2)(M_1 + M_2) - MM_1\cos\vartheta^2}.$$

In den erst entwickelten Gleichungen muss nun N, N_1 mit $N(1+\varepsilon)$, $N_1(1+\varepsilon_1)$ vertauscht werden, wo ε und ε_1 nicht identisch zu sein brauchen, und es kommt:

$$K = \frac{N}{M}(1+\varepsilon) + k, \qquad K_1 = \frac{N_1}{M_1}(1+\varepsilon_1) + k_1.$$

$$M_2U_2 = N(1+\varepsilon)\alpha_2 + N_1(1+\varepsilon_1)\alpha'_2$$

$$M_2V_2 = N(1+\varepsilon)\beta_2 + N_1(1+\varepsilon_1)\beta'_2$$

$$M_2W_2 = N(1+\varepsilon)\gamma_2 + N_1(1+\varepsilon_1)\gamma'_1.$$

Durch die letzten drei Gleichungen sind die Geschwindigkeits-Componenten des Schwerpunktes des dritten Körpers gegeben. Addirt man ihre Quadrate so kommt:

$$M_2^2K_2^2 = N^2(1+\varepsilon)^2 + N_1^2(1+\varepsilon_1)^2 + 2NN_1(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1)\cos\vartheta.$$

Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeit K_2, die Richtung derselben geben die Winkel σ und σ_1, welche man den Gleichungen entnimmt:

$$K_2\cos\sigma = \frac{N(1+\varepsilon) + N_1(1+\varepsilon_1)\cos\vartheta}{M_2}$$

$$K_2\cos\sigma_1 = \frac{N_1(1+\varepsilon_1) + N(1+\varepsilon)\cos\vartheta}{M_2}.$$

Digitized by Google

Möge der eine Körper auf einer festen Ebene gleiten, die wir als Ebene der xy nehmen. Führt man die Gegendrücke ein, so bleiben von den Gleichungen 1), welche die fortschreitende Bewegung geben, nur die erste und zweite, von denen für die Rotation nur die dritte. Dagegen ist:

$$w = W = 0, \quad p = P = q = Q = 0.$$

Gleitet der Körper auf einer Linie, und ist diese Axe der z, so bleibt von allen sechs nur die dritte Gleichung für die fortschreitende Bewegung und es ist:

$$u = U = v = V = 0$$
$$p = P = q = Q = r = R = 0.$$

5) Bestimmung der Grösse ε.

Von der Grösse ε ist bis jetzt nur bekannt, dass sie gleich Eins ist, wenn beide Körper vollständig elastisch, gleich Null, wenn sie beide unelastisch sind.

In allen übrigen Fällen, also auch in dem, wenn einer vollkommen elastisch, der andere unelastisch ist, wird zur Bestimmung von ε noch ein anderes Moment, die Härte beider Körper, d. h. ihr Widerstand gegen die Deformation maassgebend sein.

Wir wollen jetzt ε unter gewissen Voraussetzungen bestimmen. Jedoch werden diese Betrachtungen, wenngleich vielleicht für die Praxis ausreichend, nicht derjenigen Sicherheit theilhaftig sein, die bei dem Vorigen stattfindet.

Nehmen wir also, wie die Erfahrung zu bestätigen scheint, an, dass die Grösse ε nur von den Figurations-Verhältnissen der beiden Körper, nicht aber von der Art des Stosses abhänge. Dann kann man zur Bestimmung sich des einfachsten Falles, des concentrischen Stosses, bedienen. In diesem Falle geben die Gleichungen 3) und 4), da $\varrho = 0$ ist:

$$K = \frac{(M - \varepsilon M_1)k - (1+\varepsilon)M_1 k_1}{M + M_1}$$
$$K_1 = \frac{(M_1 - \varepsilon M)k_1 - (1+\varepsilon)Mk}{M + M_1}$$
$$K - k = \frac{-(1+\varepsilon)M_1}{M + M_1}(k + k_1)$$
$$K_1 - k_1 = \frac{-(1+\varepsilon)M}{M + M_1}(k + k_1),$$

woraus dann sogleich folgt:

$$M(K - k) = M_1(K_1 - k_1).$$

Die durch den Stoss verlorene lebendige Kraft ist nun gleich:

$$M(k^2 - K^2) + M_1(k_1^2 - K_1^2) = M(k - K)(K + K_1 + k + k_1),$$

aber:

$$K + K_1 = -\varepsilon(k + k_1),$$

und

$$M(k - K) = \frac{(1+\varepsilon)MM_1}{M + M_1}(k + k_1),$$

woraus sich dann für die verlorene lebendige Kraft ergibt:

$$\frac{(1-\varepsilon^2)MM_1}{M + M_1}(k + k_1)^2.$$

Offenbar ist dies gleich Null im Fall der vollkommenen Elasticität. Es geht also bei derselben keine lebendige Kraft verloren, wie an sich ersichtlich, da die Deformation in derselben Weise ab- wie zunimmt. Im andern Falle zerfällt der Stoss in zwei Momente, in deren ersterem diejenige lebendige Kraft verloren geht, welche dem unelastischen Stosse, also dem Falle, wo $\varepsilon = 0$ ist, entspricht. Diese lebendige Kraft ist gleich:

$$\frac{MM_1}{M + M_1}(k + k_1)^2,$$

im zweiten Momente muss also die lebendige Kraft:

$$\frac{\varepsilon^2 MM_1}{(M + M_1)}(k + k_1)^2$$

wieder gewonnen werden, und das Verhältniss der letztern zur erstern ist somit gleich ε^2. — Dieser lebendigen Kraft entspricht ein doppeltes Arbeitsquantum, welches durch die Deformation im ersten Momente entsteht, und im letztern verschwindet und diese Arbeisquanta zerfallen in zwei Theile, die den Deformationen beider Körper entsprechen.

Seien also T, T_1 diese Arbeitsquanta jedes der beiden Körper in der ersten Hälfte des Stosses; es gehen dann die Quanta μT und $\mu_1 T_1$ während der zweiten wieder verloren, wo μ und μ_1 Erfahrungscoefficienten sind, die von der Elacticität jedes der beiden Körper allein herrühren, und man hat somit:

$$\varepsilon^2 = \frac{\mu T + \mu_1 T_1}{T + T_1}.$$

Die Grössen μ und μ_1 sind in folgender Weise zu bestimmen. Nehmen wir an, der eine Körper μ_1 sei absolut hart, d. h. er erleide gar keine Deformation, so ist:

$$T_1 = 0, \qquad \varepsilon^2 = \mu.$$

Lässt man also z. B. einen Körper μ auf einen unbeweglichen absolut harten

fallen, und ist die Fallhöhe gleich s, so ist die lebendige Kraft, welche beim ersten Theile des Stosses verloren geht, da er die Geschwindigkeit Null erhält, gleich der Arbeit gMs. Ist der Stoss elastisch und steigt der Körper wieder zur Höhe s', so ist die gewonnene Arbeit gMs', also:

$$\varepsilon^2 = \mu = \frac{s'}{s}.$$

Auf dieselbe Weise wird μ_1 berechnet. Für vollkommen elastische Körper ist $\mu = 1$, für unelastische $\mu = 0$. Stösst also ein vollkommen elastischer Körper M auf einen unelastischen M_1, so ergibt sich:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{T}{T+T_1}}.$$

Was die Grösse T und T_1 anbetrifft, so kommt es hier nur auf ihr Verhältniss an. Da die Deformation desto grösser, je geringer die Härte eines Körpers ist, so rechtfertigt sich die von Whewell gemachte Annahme, dass die Grössen T und T_1 den Härten der Körper, die wir mit h und h_1 bezeichnen umgekehrt proportional seien. Wir nehmen nämlich $\frac{1}{T}$ als das Maass der Härte an. Es ist also:

$$\varepsilon^2 = \frac{\mu h_1 + \mu_1 h}{h + h_1}.$$

Die Einheit der Härte ist ganz beliebig. Um das Verhältniss der Härten zweier Körper zu finden, führe man sie im concentrischen Stosse zusammen. Sind k, k_1 ihre ursprünglichen Geschwindigkeiten, so ist der Verlust an lebendiger Kraft:

$$\frac{(1-\varepsilon^2)MM_1}{M+M_1}(k+k_1)^2$$
$$= \frac{(1-\mu)h_1 + (1-\mu_1)h}{(M+M_2)(h+h_1)} MM_1(k+k_1)^2$$

und da diese Grösse sich durch die Geschwindigkeit nach dem Stosse direct finden lässt, so lässt sich das Verhältniss $\frac{h}{h_1}$ oder die Grösse h, wenn man einem der Körper M_1 die Einheit der Härte gibt, messen.

Whewell gibt aber auch ein absolutes Maass für die Härte wenigstens der graden prismatischen Körper. Es ist nämlich nach ihm:

$$h = \frac{Fe}{l},$$

wo F der Querschnitt, l die Länge, e der Elasticitätsmodul ist, welcher das Gewicht angibt, das zur Ausdehnung eines Prismas, dessen Querschnitt gleich der Einheit ist, um seine eigne Grösse erforderlich sein würde, falls die Ausdehnungskraft constant bleibt.

6) Allgemeinere Betrachtungen über den Stoss.

Wenn die stossenden Körper, wieviel auch ihrer, und welches ihr Aggregatzustand sei, alle vollkommen elastisch sind, so werden beim zweiten Theil des Stosses alle Zustände in umgekehrter Ordnung zurückgelegt, wie im ersten, also alle Arbeit wieder rückgängig gemacht. und es muss daher nach dem Stosse die lebendige Kraft von gleicher Grösse wie vor demselben sein. Beim unvollkommen elastischen Stosse wird nur ein Theil der Arbeit wieder aufgehoben, und es geht also jedenfalls lebendige Kraft verloren. Beim unelastischen Stoss ist dieselbe ein Maximum.

Seien in diesem Falle μ, μ_1, μ_2 die sich stossenden Massen, u_1, u_1 . . ., v, v_1 . . ., w, w_1 . . . ihre Geschwindigkeits-Componenten vor, U, U_1 . . ., W, W_1 . . . nach dem Stosse, bezogen auf dasselbe Coordinatensystem, N, N_1 . . . die Stosskräfte, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 die Cosinus ihrer Winkel mit den Axen, so gibt das D'Alembert'sche Prinzip die Gleichung:

$$\Sigma\mu(u-U)dx + \mu(v-V)dy + \mu(w-W)dz + N(\alpha dx + \beta dy + \gamma ds) = 0.$$

Die Grössen α, β, γ sind immer zu zweien gleich, N zu zweien entgegengesetzt und numerisch gleich. Für dx, dy, ds . . . kann jede mögliche Verschiebung, also auch die wirklichen Geschwindigkeiten nach dem Stosse U, V, W gesetzt werden.

Es sind dann $\alpha U + \beta V + \gamma W$ die normalen Geschwindigkeits-Componenten der sich berührenden Punkte nach dem Stosse, und da diese Componenten zu zweien gleich und die entsprechenden N entgegengesetzt, sonst gleich sind, so verschwinden in diesem Falle die mit N multiplicirten Glieder ganz, und man hat:

$$\Sigma\mu(uU - U^2) - \mu(vV - V^2) + \mu(wW - W^2) = 0,$$

also:

$$\Sigma\mu(u^2 - 2uU + U^2) + \ldots = \Sigma\mu(u^2 - uU) + \ldots = \Sigma\mu(u^2 - U^2) + \ldots$$

Digitized by Google

woraus dann folgt:

$$\Sigma\mu(u^2 - U^2) + \ldots = \Sigma\mu(u - U)^2.$$

D. h. die verlorene lebendige Kraft ist gleich der, welche der Differenz der Geschwindigkeit vor und nach dem Stosse entspricht.

Dieser Satz rührt von Carnot her.

7) Widerstand der Flüssigkeiten.

Die Gesetze des Widerstands der Flüssigkeiten leitet Newton aus der Stosstheorie ab. Derselbe nimmt an, dass der Widerstand von einem Stosse gegen das Mittel herrühre.

Denken wir uns zunächst den fortbewegten Körper m an der Fläche, mit der er gegen das Mittel bewegt wird und die wir gleich ω setzen, eben, ist v seine Geschwindigkeit, und mache diese mit der Normale an der Grenzfläche den Winkel λ, so geht beim Stosse eine normale Geschwindigkeit:

$$v\cos\lambda - v = \frac{m'v\cos\lambda}{m + m'}(1 + \varepsilon)$$

verloren, wo m' die Masse des Mittels ist, welche beim Stosse einwirkt, v die normale Geschwindigkeit nach dem Stosse. Ist ϱ nun die Dichtigkeit des Mittels, so wird in der Zeit dt, wo der Körper um vdt vorrückt die Masse $\varrho v\omega\cos\lambda dt$ verdrängt, und diese ist gleich m' zu setzen, aber im Nenner zu vernachlässigen, da m gegen m' sehr gross ist, so dass die verlorene Geschwindigkeit, also die Stosskraft der Normale an die Grenzfläche parallel und gleich:

$$\frac{\varrho v^2}{m}(\cos\lambda)^2\omega(1 + \varepsilon)\,dt,$$

also dem Quadrat der normalen Geschwindigkeit proportional ist.

Ist die Grenzfläche gekrümmt, $w = df$ ihr Element, so ist die Widerstandscomponente für jedes Element verschieden und auch verschieden gerichtet. Man kann diese Theilwiderstände dann nach drei Axen zerlegen und addiren. Kommt dem Körper nur eine fortschreitende Bewegung zu, so kann man die eine Componente derselben parallel nehmen, und man erhält dann den entsprechenden Gesammtwiderstand:

$$\frac{\varrho v^2}{m}(1 + \varepsilon)\,dt\int\cos\lambda^2 df.$$

Das Integral ist auf die der Flüssigkeit entgegenbewegte Fläche zu erstrecken. Bei einer Umdrehungsfläche die der Umdrehungsaxe parallel bewegt ist, sind offenbar die andern Componenten zu zweien entgegengesetzt gleich, und die obige Formel enthält also den gesammten Widerstand, der somit der Bewegung parallel ist.

Sei die Umdrehungsaxe Axe der z, und $y = \varphi(z)$ die Gleichung der Linie, deren Rotation die Fläche entspricht, so ist:

$$\cos\lambda = \frac{dy}{ds}, \quad df = ydsd\vartheta,$$

wo ϑ der Drehungswinkel,

$$ds^2 = dy^2 + dz^2$$

ist. Das Integral ist zu erstrecken über ϑ von Null bis 2π, und über y von 0 bis zum grössten Werthe a dieses Ausdrucks. Man erhält somit den Gesammtwiderstand:

$$W = \frac{2\pi\varrho v^2}{m}(1 + \varepsilon)\,dt\int_0^a y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 dy.$$

Für die Kugel mit Radius r ist $a = r$, $y = r\sin\lambda$, und das Integral gleich:

$$r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda^2\sin\lambda d\lambda = \frac{r^2}{4},$$

also:

$$W = \frac{\pi\varrho v^2(1 + \varepsilon)r^2}{2m},$$

also, wenn D die Dichtigkeit der Kugel ist:

$$W = \frac{2}{3}\frac{\varrho V^2(1 + \varepsilon)}{Dr}.$$

Ein von Borda angestellter Versuch gibt für die Luft:

$$W = \frac{1}{10}\frac{\varrho v^2}{Dr}.$$

Es bleibe dahin gestellt, in wiefern dies von dem Werthe von ε herrührt. Ueberhaupt sind die theoretischen Mängel dieses Verfahrens einleuchtend, indem man den stossenden Theil der Flüssigkeit sich isolirt denkt und jedes Atom davon selbstständig auf den bewegten Körper wirkend. In der That stimmt dies Gesetz auch nur für grössere Geschwindigkeiten (z. B. bei Kanonenkugeln) mit der Erfahrung, bei geringen, z. B. in der Theorie der Pendelschwingungen, setzt man richtiger den Luftwiderstand der normalen Geschwindigkeit selbst proportional.

Digitized by Google

8) **Stoss fester Körper, wenn beide Massen nach demselben fest verbunden bleiben.**

Wenn ein Körper auf einen unelastischen Körper von sehr geringer Härte stösst, so kann er dabei derart in ihn eindringen, dass beide einen einzigen festen Körper bilden. In diesem Falle sind die Bewegungsgleichungen so zu bilden, dass man die Grössen der Bewegung:

$$(u + ry - qz)m,$$
$$(v + pz - rx)m,$$
$$(w + qx - py)m,$$

jedes der Körper vor dem Stosse nach denselben drei Axen, am besten den durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen des durch die Vereinigung beider gebildeten Körpers, zerlegt, und die sechs Gleichgewichtsgleichungen zwischen diesen Componenten und den Grössen der Bewegung des neuen Körpers bildet, wodurch diese letztere völlig bestimmt sind. Man erhält also:

$$MU = H + h$$
$$MV = K + k$$
$$MW = L + l$$
$$AP = E + e$$
$$BQ = F + f$$
$$CR = G + g,$$

wo

$$H = \Sigma u(ry - qz)m,$$

für den ersten, h für den zweiten Körper ist, E, e, F, f u. s. w. die entsprechenden statischen Momente dieser Grössen, A, B, C die Hauptträgheitsmomente, M die Masse des neuen Körpers.

Diese sehr einfachen Betrachtungen finden nur in der Praxis Schwierigkeiten wegen der Deformation, welche durch das Eindringen der Körper in einander erzeugt wird, da die Coordinaten auf den deformirten Körper zu beziehen sind. Nur wenn der eine Körper sehr klein gegen den andern ist, kann diese Deformation vernachlässigt werden.

Dies ist z. B. der Fall bei Robins' ballistischem Pendel, dessen Theorie wir hier anknüpfen wollen und welches zur Ermittelung der Geschwindigkeit der Geschosse dient. Die Masse des letztern ist sehr gering gegen die eines physikalischen Pendels, in welches sie eindringt, und es dadurch in Schwingungen versetzt, und aus der Grösse des anfänglichen Schwingungsbogens ist die Geschwindigkeit des Geschosses zu ermitteln. — Sei dieselbe gleich v, die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Pendels gleich ω, und m die Masse der Kugel, M die des Pendels, C das Trägheitsmoment von M in Bezug auf die Drehungsaxe, indem wir die Masse M mit der vereinigten $M + m$ identificiren.

Sei ferner k die von der Drehungsaxe aus gezogene Senkrechte auf die Projection der Geschwindigkeitsrichtung v, welche in die auf die Drehungsaxe senkrechte Ebene fällt, so sind die auf letztere senkrechten Momente von v und ω bezüglich gleich:

$$mvk \text{ und } C\omega.$$

Für C setzen wir $M(a^2 + h^2)$, wo Mh^2 das Trägheitsmoment ist, welche auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe bezogen ist, die der Drehaxe parallel ist, und a die Entfernung des Schwerpunkts von der Drehaxe; es ist somit:

$$\omega = \frac{mvk}{M(a^2 + h^2)}.$$

Nach der Theorie des Pendels ist (siehe den Artikel: Rotation), wenn man unter ϑ den Drehungswinkel versteht:

$$(a^2 + h^2)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + ga\sin\vartheta = 0;$$

durch Integration folgt bekanntlich:

$$(a^2 + h^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - 2ga\cos\vartheta = B,$$

wo B eine Constante ist, und in Berücksichtigung, dass im Anfange der Bewegung:

$$\vartheta = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

ist:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{2ga}{a^2 + h^2}(1 - \cos\vartheta) = \omega^2.$$

Die grösste Ausweichung tritt ein, wenn $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ ist, und der entsprechende Winkel r gehört zu dem halben Schwingungsbogen, also:

$$2ga(1 - \cos r) = \frac{m^2v^2k^2}{M^2(a^2 + h^2)^2}.$$

Der Winkel r wird mittels einer Scala gefunden, und ergibt sich dann v, wenn m, k, M, a, h vorher durch Messung und Versuche genau bestimmt sind.

Mittels des ballistischen Pendels kann man sowohl die Anfangsgeschwindigkeit der Geschosse, wenn sich nämlich die Mündung des Rohrs dicht am Pendel befindet, messen, als auch die Geschwindigkeit nach der Zurücklegung beliebiger

Wurfstrecken, und somit durch Vergleich mit den Geschwindigkeiten, welche sich theoretisch für Geschosse im leeren Raum ergeben, Versuche zur Bestimmung oder Bestätigung des Luftwiderstandgesetzes machen. Auch kann dies Instrument dienen, um eine Relation zwischen dem Gewicht und der Beschaffenheit der Ladung und der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses durch Versuche zu finden. Man hat so ermittelt, dass sich unter übrigens gleichen Umständen die Quadrate der Anfangsgeschwindigkeiten wie die Gewichte der Ladungen verhalten; und das dies Gesetz desto genauer ist, je kleiner das Verhältniss der Länge der Ladung zur Länge des Rohrs ist.

9) Reibung beim Stosse.

Da der Stoss eben nur als ein Druck zu betrachten ist, der eine geringe in der Rechnung als unendlich klein zu betrachtende Zeit dauert, so wird auch bei dem Stosse eine Reibung stattfinden, die der in jedem Augenblicke stattfindenden Kraft, mit der die Körper sich abstossen, proportional, und der tangentialen Richtung, in welcher die Berührungspunkte der Körper über einander gleiten, entgegengesetzt gerichtet ist. Beim concentrischen Stosse, und dann wenn das Gleiten sich in ein blosses Rollen verwandelt, fällt also die Reibung weg.

Setzen wir wieder feste Körper voraus. In jedem Augenblicke des Stosses gelten dann die Gleichungen 1) und 2) des Abschnittes 2), wenn man die entsprechende Reibungscomponente hinzufügt. Diese Gleichungen sind:

1)
$$N\alpha + \eta N\lambda = M(U-u)$$
$$N\beta + \eta N\mu = M(V-v)$$
$$N\gamma + \eta N\nu = M(W-w)$$

2)
$$N(c\beta - b\gamma) + \eta(c\mu - b\nu)N = A(P-p)$$
$$N(a\gamma - c\alpha) + \eta(a\nu - c\lambda)N = B(Q-q)$$
$$N(b\alpha - a\beta) + \eta(b\lambda - a\mu)N = C(R-r);$$

hier ist η der Reibungscoefficient, λ, μ, ν die Cosinus der Winkel der tangentialen Componente des Berührungspunktes zu irgend einer Zeit während des Stosses. Im Momente, wo der erste Theil des Stosses beendigt ist, setzt man für N wie in Abschnitt 2) den aus diesen, den entsprechenden Gleichungen für den Körper M_1 und der Gleichung:

3)
$$U\alpha + (Rb+Qc)\alpha + V\alpha + (Pc-Ra)\beta + W\alpha + (Qa-Pb)\gamma$$
$$+ U_1\alpha_1 + (R_1b_1 - Q_1c_1)\alpha_1 + V_1\beta_1 + (P_1c_1 - R_1a_1)\beta_1$$
$$+ W_1\gamma_1 + (Q_1a_1 - P_1b_1)\gamma_1 = 0$$

gezogenen Werth.

Nach Schluss des ganzen Stosses ist $N = N_1(1+\varepsilon)$ in Gleichungen 1) und 2) zu setzen, wo N_1 der eben gefundene Werth von N ist.

Es fehlen aber noch Gleichungen zur Bestimmung von λ, μ, ν. Diese ergeben sich auf folgende Weise.

Seien l, m, n die Componenten der Geschwindigkeit des Berührungspunktes, also:

4)
$$l = U + Rb - Qc, \qquad m = V + Pc - Ra, \qquad n = W + Qa - Pb,$$

so hat man offenbar, wenn λ', μ', ν' die Cosinus derjenigen Winkel sind, welche die in der Berührungsebene befindliche, auf der Geschwindigkeit des Berührungspunktes senkrechte Linie mit den Axen macht:

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = 0$$
$$l\lambda' + m\mu' + n\nu' = 0$$
$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0,$$

woraus sich leicht ergibt, wenn e und g zu bestimmende Grössen sind:

$$\lambda = e\alpha + gl, \qquad \mu = e\beta + gm, \qquad \nu = e\gamma + gn,$$

also, wenn man mit α, β, γ entsprechend multiplicirt, in Berücksichtigung der Gleichung:

$$\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0,$$

erhält man:

$$e = -g(\alpha l + \beta m + \gamma n),$$

also:

Digitized by Google

5)
$$\frac{\nu}{g} = l - \alpha(\alpha l + \beta m + \gamma n)$$
$$\frac{\mu}{g} = m - \beta(\alpha l + \beta m + \gamma n)$$
$$\frac{\gamma}{g} = n - \gamma(\alpha l + \beta m + \gamma n),$$

welche Gleichungen mit 4) und

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

verbunden die Cosinus λ, μ, ν bestimmen. Die Rechnung ist im Allgemeinen wie früher, nur selbstverständlich complicirter. Uebrigens geben die Gleichungen 1) ganz wie früher:

$$\frac{N}{M} = K - k,$$

wo k, K die normale Componente der fortschreitenden Bewegung vor dem Stosse und zu irgend einer Zeit während desselben sind.

Möge jetzt die gemeinschaftliche Normale durch den Schwerpunkt eines Körpers gehen; es ist dann:

$$a\beta - b\alpha = b\gamma - c\beta = c\alpha - a\gamma = 0$$

und man hat:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = K = U\alpha + V\beta + W\gamma,$$

woraus sich dann ergibt:

6)
$$\frac{\lambda}{g} = l - aK, \qquad \frac{\mu}{g} = m - \beta K, \qquad \frac{\nu}{g} = n - \gamma K,$$
$$g = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - K^2}}.$$

Sei der Körper ein homogener Rotationskörper, und die Normale senkrecht auf der Axe desselben, eine Bedingung, welche eine homogene Kugel immer erfüllt, dann ist die Normale eine Hauptaxe und kann also als Axe der s betrachtet werden. Dann ist:

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = 1, \qquad a = b = 0, \qquad r = 0;$$

setzen wir noch

$$\lambda = \cos\vartheta, \qquad \mu = \sin\vartheta$$

so geben die Gleichungen 1) und 2):

7)
$$-qN\lambda = M(u - U), \qquad -qN\mu = M(v - V), \qquad N = M(W - w),$$

8)
$$-qcN\mu = A(p - P), \qquad qcN\lambda = B(q - Q), \qquad R = r.$$

Für den Fall einer Kugel ist noch $B = A$. Ausserdem:

9)
$$\cot\vartheta = \frac{l}{m}, \qquad \nu = K.$$

Findet Gleiches wie für den ersten Körper auch für den zweiten statt, so gibt Gleichung 3):

9a)
$$W + W_1 = 0,$$

also diese Gleichung in Vereinigung mit der dritten Gleichung 7) und der entsprechenden für den andern Körper:

10)
$$N_1 = -\frac{MM_1}{M + M_1}(w + w_1).$$

Die Gleichungen 4) aber geben:

11)
$$l = U - Qc, \qquad m = V + Pc, \qquad n = W.$$

Die Gleichungen 7), 8) und 11) geben nun, wenn eine Kugel vorausgesetzt wird:

Digitized by Google

$$\cot\vartheta = \frac{U-u}{V-v} = \frac{Q-q}{p-P} = \frac{U-Qc}{V+Pc},$$

also:

$$(V-v)\cot\vartheta = U-u, \qquad (V+Pc)\cot\vartheta = U-Qc$$

und durch Subtraction:

$$(Pc+v)\cot\vartheta + Qc = u,$$

also, wenn man:

$$Q = q + (p-P)\cot\vartheta$$

einsetzt:

12) $$\cot\vartheta = \frac{u-qc}{pc+v}.$$

Es ist also in diesem Falle, wie freilich vorauszusehen war, während des ganzen Stosses der Winkel ϑ constant. Die Gleichungen 7), 8) und 10) lösen nun das Problem völlig. Sei z. B. die Rotation um die Axe der y der Null gleich, und ebenso die fortschreitende Bewegung parallel der Axe der x, so ist:

$$u = q = 0, \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

also wegen 7) und 8):

$$U = 0, \quad M(V-v) = qN, \quad M(W-w) = N, \quad A(P-p) = qNc, \quad Q = o, \quad R = r.$$

Nach Verlauf des Stosses bleiben also die Bewegungsgrössen U, Q und R wie vor demselben. Die übrigen ergeben sich wenn man:

$$N = N_1(1+\varepsilon)$$

setzt, wo N_1 durch Gleichung 10) gegeben ist, also:

A) $$V = v + \frac{qN_1(1+\varepsilon)}{M}, \qquad W = w + \frac{N_1(1+\varepsilon)}{M}, \qquad P = p + \frac{qN_1c(1+\varepsilon)}{A}.$$

Bekanntlich hat man:

$$A = \tfrac{1}{2}Mc^2.$$

Was die wahre Geschwindigkeit des Berührungspunktes anbetrifft, so ist:

$$l = 0, \qquad m = v + pc - \tfrac{1}{2}\frac{M_1}{M+M_1}q(1+\varepsilon)(w+w_1)$$

$$n = w - \frac{M_1}{M+M_1}(1+\varepsilon)(w+w_1).$$

Hierbei ist eine wichtige Bemerkung zu machen, welche sich auf die allgemeine Theorie der Reibung erstreckt. Ihrer Natur nach kann dieselbe nämlich die tangentiale Geschwindigkeit nur vermindern, aber keine solche Geschwindigkeit hervorbringen. — Wird also während des Stosses dieselbe Null, so kann sie nicht weiter vom positiven zum negativen oder umgekehrt übergehen, sondern es ist für den übrigen Theil des Stosses eben die tangentiale Geschwindigkeit und somit die Reibung aufgehoben. Die Gleichungen 1) und 2) gelten also so lange, bis die tangentiale Geschwindigkeit der Null gleich wird, d. h. bis man hat:

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0,$$

oder nach Gleichungen 5):

13) $$l^2 + m^2 + n^2 = (\alpha l + \beta m + \gamma n)^2.$$

Seien für diesen Moment u', v', w', p', q', r' die Bewegungsgrössen, N' die Stosskraft, so ist also:

1a)
$$N'\alpha + qN'\lambda = M(u'-u)$$
$$N'\beta + qN'\mu = M(v'-v)$$
$$N'\gamma + qN'\nu = M(w'-w),$$

2a)
$$N'(c\beta - b\gamma) + \varphi(c\mu - b\nu)N' = A(p'-p)$$
$$N'(a\gamma - c\alpha) + \varphi(a\nu - c\lambda)N' = B(q'-q)$$
$$N'(b\alpha - a\beta) + \varphi(b\lambda - a\mu)N' = C(r'-r).$$

Digitized by Google

Für jede spätere Zeit des Stosses aber, da die Differenz der Stosskräfte $N - N'$ den Geschwindigkeitszunahmen das Gleichgewicht halten muss:

1b)
$$(N-N')\alpha = M(U-u')$$
$$(N-N')\beta = M(V-v')$$
$$(N-N')\gamma = M(W-w')$$

2b)
$$(N-N')(c\beta - b\gamma) = A(P-p')$$
$$(N-N')(a\gamma - c\alpha) = B(Q-q')$$
$$(N-N')(b\alpha - a\beta) = C(R-r'),$$

oder auch durch Addition dieser und der vorhergehenden Gleichungen:

1c)
$$N\alpha + qN'\lambda = M(U-u)$$
$$N\beta + qN'\mu = M(V-v)$$
$$N\gamma + qN'\nu = M(W-w),$$

2c)
$$N(c\beta - b\gamma) + qN'(c\mu - b\nu) = A(P-p)$$
$$N(a\gamma - c\alpha) + qN'(a\nu - c\lambda) = B(Q-q)$$
$$N(b\alpha - a\beta) + qN'(b\lambda - a\mu) = C(R-r).$$

Die Grösse N' ist den Gleichungen 1a) und 2a) zu entnehmen; um dieselbe zu bestimmen, hat man die Relation 13). Die Ausdrücke λ, μ, ν entsprechen dem Momente, wo die Gleichung 13) stattfindet, und dieselbe ist also mit 4) und 5) zu verbinden.

In unserm Beispiel ist unverändert $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Und da die Gleichungen 12) in Gültigkeit bleiben:

$$U = u' = 0, \quad M(v'-v) = qN', \quad M(w'-w) = N', \quad A(p'-p) = qN'c,$$
$$Q = q' = 0, \quad R = r' = r.$$

Die Gleichung 13) aber wird: $m = 0$, d. h.:

$$v' + p'c - a = 0,$$

oder:

$$v + pc + N'\left(\frac{q}{M} + \frac{qc^2}{A}\right) = 0,$$

oder wenn man für A und N' die Werthe setzt:

$$v + pc + \tfrac{1}{2}q(w'-w) = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$w' = -\frac{2}{7\varphi}(v+pc) + w$$

$$q \cdot N' = -\frac{2M}{7}(v+pc).$$

Nun geben die Gleichungen 1c):

$U = 0$, $M(V-v) = qN'$, $N = M(W-w)$, $A(P-p) = qN'c$, $Q = 0$, $R - r = 0$,

also wenn man N mit $N'(1+\varepsilon)$ vertauscht, bleibt noch, wie in den Gleichungen A):

$$W - w = -\frac{M_1}{M+M_1}(1+\varepsilon)(w+w_1),$$

während man hat:

B)
$$V - v = -\tfrac{2}{7}(v+pc), \qquad P - p = -\tfrac{2}{7}\frac{v+pc}{c}.$$

Diese Werthe ersetzen die in A) gegebenen für den Fall, dass die zuerst gefundene tangentiale Geschwindigkeit, nämlich:

$$m = v + pc - \tfrac{1}{2}\frac{M_1}{M+M_1}q(1+\varepsilon)(w+w_1)$$

Digitized by Google

mit $v + pc$ entgegengesetztes Zeichen hat. Damit ein Stoss erfolge, müssen w und w_1 entweder positives Zeichen haben, oder es kann höchstens die kleinere von beiden Grössen negativ sein, so dass der mit φ multiplicirte Ausdruck wesentlich positiv ist. φ selbst hat mit $v + pc$ gleiches Zeichen. Es wird also dieser Fall nur dann eintreten, wenn $v + pc$ kleiner als

$$\tfrac{1}{2}\frac{M_1}{M+M_1}\varphi(1+\varepsilon)(w+w_1)$$

ist. Sind der Einfalls- und der Reflexionswinkel bezüglich gleich τ und τ_1, so hat man:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{v}{w}, \qquad \operatorname{tg}\tau_1 = \frac{V}{W},$$

also im Falle, wo die Gleichungen A) gelten:

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{v - \frac{q M_1}{M+M_1}(1+\varepsilon)(w+w_1)}{w - \frac{M_1}{(M+M_1)}(1+\varepsilon)(w+w_1)}$$

und wenn die Gleichungen B) gelten:

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \frac{5v - 2pc}{7\left[w - \frac{M_1}{M+M_1}(1+\varepsilon)(w+w_1)\right]}.$$

Man kann statt des einen Körpers M_1 eine Ebene denken, und ist in diesem Falle $c_1 = \infty$ zu nehmen.

Ist diese Ebene absolut fest, so ändert sich in unsern Formeln nichts, als das $w_1 = 0$ gesetzt wird.

Ein anderer einfacher Fall ist der eines Billardballes, der gegen die Bande stösst. Der Ball selbst ist als vollkommen elastisch zu betrachten, nicht aber die Bande. Coriolis setzt:

$$\varepsilon = 0{,}55, \qquad q = 0{,}2.$$

Die Axe der z ist hier die auf der Bande senkrechte, also horizontale Linie, die der y sei der Bande parallel, also die der x vertikal. Es gelten hier die Gleichungen 7) bis 12). Ausserdem ist:

$$u = 0 \quad \text{also} \quad \cot\vartheta = \frac{-qc}{pc+v}.$$

Setzen wir voraus, dass der Ball sich nicht gleitend, sondern nur rollend bewegt. Es hat dann der Punkt, wo der Ball das Billard berührt, die Geschwindigkeit Null. Die Coordinaten dieses Punktes sind $x = c$, $y = z = 0$, also seine Geschwindigkeiten:

$$l' = u, \qquad m' = v - rc, \qquad n' = w + qc$$

und somit:

$$v - rc = 0, \qquad w + qc = 0,$$

$$\cot\vartheta = \frac{-qc}{v+pc} = \frac{w}{v+pc} = \frac{-q}{p+r}.$$

Die Gleichung 10) gibt für unsern Fall:

$$N_1 = -Mw,$$

woraus dann folgt:

$$W = -\varepsilon w, \qquad U = u - q(1+\varepsilon)w\cos\vartheta, \qquad V = v - q(1+\varepsilon)w\sin\vartheta,$$

$$P = p - \frac{5q(1+\varepsilon)\sin\vartheta w}{2c}, \qquad Q = q + \frac{5q(1+\varepsilon)\cos\vartheta w}{2c}, \qquad R = r.$$

Vorausgesetzt ist, dass die tangentiale Geschwindigkeit des Berührungspunktes also $l\cos\vartheta + m\sin\vartheta$ während der Bewegung ihr Zeichen nicht ändert. Es ist nun:

$$l\cos\vartheta + m\sin\vartheta = (U - Qc)\cos\vartheta + (V + Pc)\sin\vartheta\,[-qc + \tfrac{2}{5}q(1+\varepsilon)w\cos\vartheta]\cos\vartheta + [\vartheta + pc - \tfrac{2}{5}q(1+\varepsilon)w\sin\vartheta]\sin\vartheta.$$

Google

Damit also die Formeln Gültigkeit haben, muss dieser Ausdruck mit:

$$-qc\cos\vartheta+(v+pc)\sin\vartheta=\frac{v+pc}{\sin\vartheta}$$

dasselbe Zeichen haben. Ist dies der Fall, so hat man:

$$\operatorname{tg}\tau=\frac{v}{w},\qquad \operatorname{tg}\tau_1=\frac{q(1+\varepsilon)\sin\vartheta-\operatorname{tg}\tau}{\varepsilon},$$

also im Falle vollkommener Elasticität:

$$\operatorname{tg}\tau_1=2q-\operatorname{tg}\tau.$$

Wird aber der entsprechende Ausdruck negativ, so hat man zur Bestimmung von N', die Gleichungen $l=m=0$, d. h.:

$$w'=q'c,\qquad v'=p'c$$

und unter dieser Voraussetzung geben die Gleichungen 7) und 8):

$$qN'\cos\vartheta=MU',\qquad qN'\sin\vartheta=M(V'-v),\qquad N'=M(W'-w),$$

$$qN'c\cos\vartheta=\frac{A}{c}(qc-U'),\qquad qN'c\sin\vartheta=\frac{A}{c}(pc+V').$$

Aus der ersten und vierten dieser Gleichungen folgt:

$$U'=\frac{qN'\cos\vartheta}{M}=qc-\frac{5qN'\cos\vartheta}{2M},\qquad qN'=\frac{2M}{7\cos\vartheta}qc.$$

Es werden die Gleichungen 1c) und 2c) nun:

$$qN'\cos\vartheta=MU,\qquad qN'\sin\vartheta=M(V-v),\qquad N=M(W-w),$$

$$qN'c\cos\vartheta=A(q-Q),\qquad qN'c\sin\vartheta=A(P-p),\qquad R=r$$

und wie oben:

$$N_1=-MW,\qquad N=-(1+\varepsilon)Mw;$$

es bleibt also auch:

$$W=-\varepsilon w,$$

ausserdem aber wird:

$$U=\tfrac{1}{7}qc,\qquad V=v+\tfrac{1}{7}qc\operatorname{tg}\vartheta,\qquad P=p+\tfrac{1}{7}q\operatorname{tg}\vartheta,\qquad Q=\tfrac{1}{7}q.$$

Es ist also auch:

$$\operatorname{tg}\tau=\frac{V}{W}=-\tfrac{1}{7}\frac{qc\operatorname{tg}\vartheta}{\varepsilon}-\frac{\operatorname{tg}\tau}{\varepsilon}.$$

Betrachten wir noch den Fall einer gleitenden Bewegung.

Seien für beide Körper, deren einer auf einer festen Ebene gleitet, die Hauptaxen der s senkrecht auf dieser Ebene, falle ferner die gemeinschaftliche Normale in diese Hauptaxen, so hat man wieder:

$$\alpha=\beta=0,\qquad \alpha_1=\beta_1=0,\qquad \gamma=\gamma_1=1,$$

Für den gleitenden Körper bleiben von den Gleichungen 1) und 8) nur:

$$-qN\cos\vartheta=M(u-U),\qquad -qN\sin\vartheta=M(v-V),\qquad R=r,$$

während

$$P=Q=W=0$$

ist, man hat also auch:

$$N_1=-\frac{MM_1}{M+M_1}w_1,\qquad \cot\vartheta=\frac{u}{v},$$

also:

$$U-u=-\frac{qM_1}{M+M_1}(1+\varepsilon)w_1\cos\vartheta,$$

$$V-v=-\frac{qM_1}{M+M_1}(1+\varepsilon)w_1\sin\vartheta.$$

Hier ist auch $l=U$, $m=V$. Es muss also $U\cos\vartheta+V\sin\vartheta$ gleiches Zeichen mit $u\cos\vartheta+v\sin\vartheta$ haben. Der erstere Ausdruck ist aber gleich:

Digitized by Google

$$u\cos\vartheta + v\sin\vartheta - \frac{\varphi M_1}{M+M_1}(1+\varepsilon)w_1.$$

Findet dies nicht statt, so hat man:

$$u' = v' = 0.$$

D. h.:

$$-\varphi N'\cos\vartheta = Mu, \quad -\varphi N'\sin\vartheta = Mv.$$

Offenbar aber wird dann bis zum Schlusse des Stosses $U = V = 0$ sein, so dass nur die Rotation unverändert bleibt.

Gleitet der Körper auf einer Linie, so ist auch $V = R = 0$:

$$\cot\vartheta = \infty \text{ also } \vartheta = 0,$$

woraus

$$U - u = -\frac{\varphi M_1}{M+M_1}(1+\varepsilon)w_1$$

sich ergibt.

Strahl (Geometrie).

Jede von einem festen Punkt aus gezogene Linie. Die Gesammtheit solcher Linien heisst Strahlenbüschel.

Strahl (Optik, Wellenlehre).

Diejenige Grade, in welcher sich eine Wellenbewegung (Lichtwirkung), die man als eben denkt, fortpflanzt. Einer der wichtigsten Sätze von den Strahlen ist der folgende:

Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, und beliebige Reflexionen und Brechungen erleiden, jedoch nur durch homogene Mittel gehen, bilden immer ein Normalensystem derselben Oberfläche. (Vergl. den Artikel: Normale).

Straubrad (Maschinenlehre).

Ein Schaufelrad, dessen Schaufeln auf kurzen Armen sitzen.

Stübchen (Messkunst).

Ein norddeutsches Getränkmaass, etwa drei Quart preussisch enthaltend. In Hannover wird der Eimer in 16 Stübchen getheilt. Genau enthält ein Stübchen 3,88792 Litre.

Stützpunkt (Hypomochlion, Statik).

Der unbewegliche Punkt einer Hebelvorrichtung.

Stufenrad (Maschinenlehre).

Ein Zahnrad, dessen Zähne in zwei oder mehreren Reihen über einander stehen (vergl. den Artikel: Rad).

Stunde (Chronologie und Astronomie).

Der 24ste Theil des Tages.

Stunde (Markscheidekunst).

Der 24ste Theil der Peripherie.

Stundenkreis (Astronomie).

Gleichbedeutend mit Parallelkreis.

Stundenwinkel (Astronomie).

Der Ebenenwinkel, welchen irgend ein Meridian mit dem ersten (gewöhnlich dem, welcher durch den aufsteigenden Knoten geht) macht.

Sturmscher Satz (Algebra).

1) Der Sturmsche Satz im engern Sinne.

Dieser Satz, wie er ursprünglich von Sturm gegeben worden ist, enthält das beste und leichteste bekannte Mittel, zu erkennen, wie viel reelle Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ zwischen zwei gegebenen Werthen von x: α und β liegen. Er gibt also, indem man

$$\alpha = -\infty, \quad \beta = +\infty$$

setzt, auch die Anzahl der reellen Wurzeln überhaupt, und somit, wenn man diese von dem Grade der Gleichung abzieht, auch die der imaginären an,

$$\alpha = 0, \quad \beta = +\infty$$

gibt die positiven,

$$\alpha = -\infty, \quad \beta = 0$$

die negativen Wurzeln. Eine von Cauchy herrührende Erweiterung, welche im folgenden Abschnitte folgen soll, bezieht sich in ganz ähnlicher Weise auf die Auffindung der imaginären Wurzeln. — Da es auf diese Weise immer gelingt, die Wurzeln zu trennen, so führt, nachdem dies geschehen, die Newton'sche oder irgend eine andere Näherungsmethode sehr leicht zum Ziele, die Wurzeln mit beliebiger Genauigkeit wirklich zu bestimmen.

Wir geben zunächst den Satz selbst, den wir an einem Paar Beispielen erläutern, worauf dann der Beweis mitgetheilt werden soll.

Sei $f(x) = 0$ die gegebene Gleichung von der wir voraussetzen, dass sie keine gleichen Wurzeln haben.

Sei $\frac{dfx}{dx} = f_1 x$. Vollführen wir die algebraische Division von $f(x)$ durch $f_1(x)$, so sei $-f_2(x)$ der Divisionsrest. Es ist also das Vorzeichen des Restes umzukehren; auch kann immer durch einen positiven constanten Factor dividirt werden, so dass als der Coefficient der höchsten Potenz von $f_2(x)$ bezüglich

$+1$ oder -1 angenommen werden kann; man dividirt ferner $f_1(x)$ durch $f_2(x)$, dann sei der Divisionsrest $-f_3(x)$, $f_2(x)$ durch $f_3(x)$, wo der Rest $-f_4(x)$ sei u. s. w., so kommt man schliesslich auf eine constante Zahl $f_n(x)$, die also nach dem obigen als $+1$ oder -1 angenommen werden kann. Im Allgemeinen wird die Anzahl der Grössen

$$f(x),\ f_1(x)\ \ldots\ f_n(x)$$

um Eins grösser als der Grad der Gleichung $f(x)=0$ sein, was jedoch natürlich auch Ausnahmen erleidet. Das Verfahren ist genau das nämliche (bis auf die Aenderung der Vorzeichen der Reste) als sollte zwischen $f(x)$ und $f_1(x)$ der grösste gemeinschaftliche Factor gefunden, also die in $f(x)=0$ enthaltenen mehrfachen Wurzeln bestimmt werden. Da unserer Annahme nach nun solche nicht vorhanden sind, so wird man immer zuletzt wirklich auf eine Constante $f_n(x)$ kommen.

Es braucht aber nicht die Gleichung vorher untersucht zu werden, ob sie unserer Bedingung genüge. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde unser Verfahren ja eben die gleichen Wurzeln ergeben (die Umkehrung der Vorzeichen ist offenbar unerheblich), um so auf anderm Wege zum Ziele zu führen.

Nach Ausführung der obigen Rechnung ist nun leicht zu erfahren, wie viel Wurzeln in gegebenen Grenzen $x=\alpha$ und $x=\beta$ verhanden sind. Man bilde die Reihen:

$$f(\alpha),\ f_1(\alpha)\ \ldots\ f_n(\alpha)$$

$$f(\beta),\ f_1(\beta)\ \ldots\ f_n(\beta),$$

wo also die letzten Glieder unveränderlich sind. Von jedem Gliede merke man das Zeichen, so wird jede der beiden Reihen eine gewisse Anzahl Zeichenwechsel enthalten, d. h. Stellen wo auf ein positives Zeichen ein negatives oder umgekehrt, folgt. Z. B. die Reihe:

$$+\ -\ +\ -\ -\ +$$

enthält vier Zeichenwechsel. Ist a die Anzahl dieser Zeichenwechsel der einen, b die der andern Reihe und $b>a$, so ist $b-a$ die Anzahl der zwischen α und β enthaltenen Wurzeln. Vorausgesetzt ist, dass weder $f(\alpha)$ noch $f(\beta)$ verschwinden.

Im entgegengesetzten Falle würde man unmittelbar eine Wurzel haben. Soll die Anzahl der reellen Wurzeln überhaupt bestimmt werden, so ist

$$\alpha=-\infty,\quad \beta=+\infty,$$

also in den Ausdrücken f, f_1 nur das erste Glied zu berücksichtigen.

Für die positiven Wurzeln ist

$$\alpha=0,\quad \beta=\infty.$$

Der untern Grenze entspricht dann das Zeichen des letzten, der obern das des ersten Gliedes.

Folgende Beispiele mögen den Gang des einzuschlagenden Verfahrens erläutern.

Beispiel I.

Sei die gegebene Gleichung:

$$x^4-8x^3+9x=11,$$

also:

$$f(x)=x^4-8x^3+9x-11$$
$$f_1(x)=x^3-4x^2+1{,}5.$$

Es ist nach dem Differenziiren durch 6 dividirt.

Man erhält nun durch Division:

$$\begin{array}{l|l} x^4-8x^3+9x-11 & x^3-4x^2+1{,}5 \\ x^4-4x^3+1{,}5x & \overline{x} \\ \hline -4x^3+7{,}5x-11. & \end{array}$$

Also, wenn man im Reste die Zeichen ändert, und durch 4 dividirt:

$$f^2(x)=x^3-1{,}875x+2{,}75$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2+1.5 & x^3-1{,}875x+2{,}75 \\ & \overline{x^2+1{,}875} \\ \hline x^3+2{,}75x^2-1{,}875x^2 & \\ \hline 1{,}875x^2-6{,}75x^2+1{,}5 & \\ 1{,}875x^2+5{,}156-3{,}515x & \\ \hline -6{,}75x^2+3{,}515x-3{,}656 & \end{array}$$

also, wenn man durch $-6{,}75$ dividirt:

$$f_3(x)=x^2-0{,}52x+0{,}54$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-1{,}875x+2{,}75 & x^2-0{,}52x+0{,}54 \\ & \overline{x+0{,}52} \\ \hline x^3+0{,}54x-0{,}52x^2 & \\ \hline 0{,}52x^2-2{,}415x+2{,}75 & \\ 0{,}52x^2-0{,}27x+0{,}28 & \\ \hline -2{,}14x+2{,}47 & \end{array}$$

$$f_4(x)=x-1{,}1$$

$$\begin{array}{l|l} x^2-0{,}52x+0{,}54 & x-1{,}1 \\ & \overline{x+0{,}58} \\ \hline x^2-1{,}1x & \\ \hline 0{,}58x-0{,}54 & \\ 0{,}58x-0{,}64 & \\ \hline 0{,}11. & \end{array}$$

$$f_5(x)=-1.$$

Digitized by Google

In der Grössenreihe:

$$f(x) = x^6 - 8x^3 + 9x - 11$$
$$f_1(x) = x^5 - 4x^3 + 1{,}5$$
$$f_2(x) = x^3 - 1{,}875x + 2{,}75$$
$$f_3(x) = x^2 - 0{,}52x + 0{,}54$$
$$f_4(x) = x - 1{,}1$$
$$f_5(x) = -1$$

setzen wir $x = -\infty$, berücksichtigen also nur das erste Glied. Die Zeichenreihe ist dann:

$$+ - - + - -$$

Drei Zeichenwechsel finden statt.

Sei dann $x = 0$, wird also nur das constante Glied berücksichtigt. Die Zeichenreihe ist:

$$- + + + - -$$

Zwei Zeichenwechsel finden statt. Es ist also ein Wechsel verschwunden.

Die Gleichung hat eine negative Wurzel.

Für $x = +\infty$ ergibt sich die Reihe:

$$+ + + + + -$$

Ein Zeichenwechsel. Es verschwindet also zwischen 0 und $+\infty$ auch ein Wechsel, also eine positive Wurzel ist vorhanden.

Da die Gleichung vom sechsten Grade ist, so hat sie: eine positive, eine negative, vier imaginäre Wurzeln. Um die beiden ersteren in engere Grenzen einzuschliessen, setzen wir $\beta = 1$, und erhalten:

$f(1) = 1 - 8 + 9 - 11$ also $-$
$f_1(1) = 1 - 4 + 1{,}5$ also $-$
$f_2(1) = 1 - 1{,}875 + 2{,}75$ also $+$
$f_3(1) = 1 - 0{,}52 + 0{,}54$ also $+$
$f_4(1) = 1 - 1{,}1$ also $-$
$f_5(1) = -1$ also $-$

Es finden zwei Zeichenwechsel statt. Zwischen 0 und 1 liegt keine Wurzel.

Sei jetzt $\beta = 10$. Die Zeichenreihe ist wie leicht zu sehen:

$$+ + + + + -$$

Also ein Zeichenwechsel.

Zwischen 1 und 10 geht ein solcher verloren. Es gibt also eine Wurzel zwischen 1 und 10.

Sei jetzt $\alpha = 5$. Die Zeichenreihe wird:

$$+ + + + + -$$

Ein Zeichenwechsel.

Die Wurzel liegt zwischen 1 und 5.

Sei jetzt $\alpha = 2$. Die Zeichenreihe ist dann:

$$+ + + + + -$$

Ein Zeichenwechsel.

Die Wurzel liegt zwischen 1 und 2.

Da zwischen 1 und 2 aber nicht allein $f(x)$, sondern auch $f'(x)$ sein Zeichen ändert, so ist es gerathen, ehe man die Newton'sche Näherungsmethode anwendet, noch engere Grenzen zu suchen.

Wir setzen:

$$\alpha = 1{,}5.$$

Die Zeichenreihe ist:

$$- + + + + -$$

Es sind zwei Zeichenwechsel vorhanden. Die Wurzel liegt zwischen 1,5 und 2.

Wollte man die Newton'sche Methode anwenden und setzten wir:

$$\alpha = 2, \quad x = \alpha - \delta,$$

also:

$$f(\alpha - \delta) = 0,$$

oder mit Vernachlässigung der höheren Potenzen:

$$f(\alpha) - \delta f'(x) = 0,$$

$$\delta = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

$$f(\alpha) = \alpha^6 - 8\alpha^3 + 9\alpha - 11 = 7$$
$$f'(\alpha) = 6\alpha^5 - 24\alpha^2 + 9 = 105$$

so käme:

$$\delta = \frac{7}{105} = 0{,}067,$$

also:

$$x = 2 - 0{,}067 = 1{,}933 \ldots$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann dann x genauer bestimmt werden.

Was die negative Wurzel anbetrifft, so sei $\alpha = -1$.

Dies gibt die Zeichenreihe:

$$- - + + - -$$

Also zwei Zeichenwechsel, so dass die Wurzel zwischen $-\infty$ und -1 liegt.

Sei $\alpha = -10$, so ist die Zeichenreihe:

$$+ - - + - -$$

Es sind hier drei Zeichenwechsel, somit liegt die Wurzel zwischen -1 und -10.

Sei jetzt $\alpha = -2$. Die Zeichenreihe ist:

$$+ - - + - -$$

Drei Zeichenwechsel. Die Wurzel liegt zwischen -1 und -2.

Digitized by Google

Setzen wir $\alpha = -1$, so ist:

$$f(\alpha) = -11$$
$$f'(\alpha) = -21,$$

also:

$$\delta = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{11}{21} = 0{,}52,$$
$$x = \alpha - \delta = -1{,}52 \ldots$$

Beispiel II.

Sei die gegebene Gleichung:

$$x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x = 5,$$

also:

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 5$$
$$f_1(x) = x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 - 6x^3 + x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 5 & x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ \hline x^6 + \frac{1}{2}x^5 - 6x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x & x + \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2}x^5 - 3x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 5 & \\ \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} & \\ \hline -\frac{9}{4}x^4 + 4x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{9}{2} & \end{array}$$

also:

$$f_2(x) = x^4 - 0{,}941x^3 + 1{,}216x^2 - 1{,}843x + 1{,}333$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2{,}5x^4 - 6x^3 + x^2 - 2{,}333x + 1{,}333 & x^4 - 0{,}941x^3 + 1{,}216x^2 - 1{,}843x + 1{,}333 \\ \hline x^5 - 0{,}941x^4 + 1{,}216x^3 - 1{,}843x^2 + 1{,}333x & x + 3{,}441 \\ \hline 3{,}441x^4 - 7{,}216x^3 + 2{,}843x^2 - 3{,}666x + 1{,}333 & \\ 3{,}441x^4 - 3{,}238x^3 + 4{,}178x^2 - 6{,}341x + 4{,}386 & \\ \hline -3{,}978x^3 - 1{,}335x^2 + 2{,}675x - 3{,}253 & \end{array}$$

$$f_3(x) = 3{,}978x^3 + 1{,}335x^2 - 2{,}675x + 3{,}253.$$

Es ist von jetzt an nämlich nicht mehr der Coefficient des ersten Gliedes auf die Einheit reducirt. Die gewöhnliche Division würde erhebliche Rechnung verursachen, wenn man in dieser Weise bis $f_s(x)$ fortschreiten wollte. Man erreicht aber eine wesentliche Vereinfachung wenn man sich statt der Zahlencoefficienten der Logarithmen derselben bedient. Man thut dann wohl gradezu nicht die Zahlen selbst sondern deren Logarithmen als Coefficienten zu schreiben. Wir wollen die so gebildete $f_s(x)$ repräsentirende Grösse mit $lf(s)$ bezeichnen. Also:

$$lf_3(x) = 0 \cdot x^4 + 0{,}9736 - 1(n)x^3 + 0{,}0849x^2 + 0{,}2655(n)x + 0{,}1248$$
$$lf_3(x) = \quad\quad 0{,}5997x^3 + 0{,}1255x^2 + 0{,}4273(n)x + 0{,}5123$$

Das Zeichen (n) bedeutet wie immer, dass die entsprechende Zahl negativ ist. Die Division geschieht dann folgendermaassen.

Da der Theilquotient immer so zu bilden ist, dass das höchste Glied des Dividendus durch das des Divisors dividirt wird, so wird der Coefficient des letzteren von dem des ersteren abgezogen. Da ferner der Theilquotient mit jedem Gliede des Divisors multiplicirt unter den Dividendus zu schreiben ist, so tritt statt der Multiplication die Addition des Coefficienten des Theilquotienten zu jedem Coefficienten des Divisors ein. Da aber endlich beim Bilden der Reihe die Factoren der gleichen Potenzen der unter einander stehenden Grössen zu subtrahiren sind, muss man sich der Gauss'schen Tafeln für Logarithmen der Summen und Differenzen bedienen, und von den unter einanderstehenden Logarithmen, dann ihrer Summe nehmen, wenn nur einer mit einem (n) versehen ist, hat keiner oder beide ein (n), so ist die Differenz zu nehmen. Die Rechnung gibt das folgende Schema:

Digitized by Google

$0{,}5997x^3+0{,}1255x^2+0{,}473(n)x+0.5123$

A	$0\cdot x^4+0{,}9736-1(n)x^3+0{,}0849x^2$		$+0{,}2655(n)x$	$+0{,}1248$	$0{,}4003-1x$ $+0{,}5064-1(n)$
B	$0.5258-1$	$0\,8276-1(n)$	$0.9126-1(n)$		
C	$0{,}4478(n)$	$0{,}2573$	$0{,}3529(n)$		
D	$0{,}1325$	$0{,}1912$	$0{,}1595$		
E	$0{,}1061(n)x^3$	$+0.2761x^3$	$+0{,}4250(n)x$	$+0{,}1248$	
B		$0{,}6319-1(n)$	$0{,}9337-1$	0.0187	
	C	$0{,}9442(n)$	$0{,}4913$	$0{,}1001(n)$	
	D	$0{,}0888$	$0{,}1214$	$0{,}2512$	
	F	$0{,}3549x^2$	$+0{,}5464(n)x$	$+0{,}3760$	

Die Bildung des Restes erfordert drei Zeilen, die hier mit C, D, E bezeichnet sind. C entsteht, indem man von den unter einander stehenden Coefficienten A und B den unteren vom oberen abzieht, D ist die zu C gehörige aus den Gauss'schen Tafeln sich ergebende Zahl, und wenn man diese zu A addirt, hat man endlich die Coefficienten des Restes E, welcher bei der nächsten Rechnung wieder als A zu betrachten ist. Im letzten Rest sind die Zeichen der Coefficienten zu ändern. Es entsteht also $lf_4(x)$, indem man alle Coefficienten mit einem (n) versieht die keins haben, und den andern das (n) nimmt. Vertauscht man die so entstehenden Coefficienten mit ihren Numeri, so hat man $f_4(x)$ selbst, also:

$$lf_4(x) = 0{,}3549(n)x^3+0{,}5464x+0{,}3760(n)$$
$$f_4(x) = -2{,}264x^3 \quad +3{,}519x \quad -2{,}377$$

$0{,}3549(n)x^3+0{,}5464x+0{,}3760(n)$

$0{,}5997x^3+0{,}1255x^2+0{,}4273(n)x+0{,}5123 \;\big|\; 0{,}2448(n)x+0{,}5195(n)$

	$0{,}7912(n)$	$0{,}6206$	
	$0{,}6757$	$0{,}1935(n)$	
	$0{,}0832$	$0{,}2150$	
$0{,}8744x^3$	$+0{,}8358(n)x$	$+0{,}5123$	
	$1{,}6059(n)$	0.8955	
	$0{,}2301(n)$	$0{,}3832$	
	$0{,}3859$	$0{,}2319$	
	$0{,}6800x$	$+0{,}6636(n)$	

$$lf_3(x) = 0{,}6800(n)x+0{,}6636 \qquad f_3(x) = -4{,}787x+4{,}609$$

$0{,}3549(n)x^3+0{,}5464x+0{,}3760(n) \;\big|\; 0{,}6749-1x+0{,}4467-1(n)$

	$0{,}3385$		
	$0{,}2079$		
	$0{,}4197$		
$0{,}1267x$	$+0{,}3760(n)$		
	$0{,}1103(n)$		
	$0{,}2057$		
	$0{,}3395$		
	$0{,}0865(n)$		

$$f_2(x) = 1.$$

Es kommt hierbei nämlich nur auf das Zeichen an.
Man hat also:

Digitized by Google

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 5$$
$$f_1(x) = x^5 + 2{,}5x^4 - 6x^3 + x^2 - 2{,}333x + 1{,}333$$
$$f_2(x) = x^4 - 0{,}941x^3 + 1{,}216x^2 - 1{,}843x + 1{,}333$$
$$f_3(x) = 3{,}978x^3 + 1{,}335x^2 - 2{,}675x + 3{,}253$$
$$f_4(x) = -2{,}264x^2 + 3{,}519x - 2{,}377$$
$$f_5(x) = -4{,}787x + 4{,}609$$
$$f_6(x) = 1.$$

Wir bilden jetzt die Zeichenreihen für

$$x = -\infty, \quad x = 0, \quad x = +\infty.$$

Diese sind:

$x = -\infty$	$+ - + - - + +$
$x = 0$	$- + + + - + +$
$x = +\infty$	$+ + + + - - +$

Die erste Reihe hat vier Wechsel, die zweite deren drei, die dritte deren zwei.

Es gibt also eine positive, eine negative und vier imaginäre Wurzeln. Die Reihe ist jetzt für:

$$x = 10 \quad + + + + - - +$$

also wie bei $x = \infty$. Die positive Wurzel liegt also zwischen Null und 10.

Für $x = 1$ ist $f(x) = -7$

für $x = 2$ ist $f(x) = 15$.

Also liegt zwischen 1 und 2 eine Wurzel, und zwar nur eine, da es nur eine positive gibt.

Es ist die Reihe für:

$$x = -10 \quad + - + - - + +$$

also eine Wurzel zwischen 0 und 10.

Für $x = -1$ ist $f(x) = -33$

für $x = -1$ ist $f(x) = +145$.

Dieselbe liegt also zwischen -1 und -5.

Für $x = -4$ ist $f(x)$ negativ, also sind die Grenzen -4 und -5.

Die beiden reellen Wurzeln liegen also zwischen 1 und 2 und zwischen -4 und -5. Die Newton'sche Methode gibt nähere Grenzen.

Es ist nun das Sturm'sche Verfahren zu beweisen.

Zunächst ist klar, dass jeder der Ausdrücke $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ . . . nur dann sein Zeichen ändern kann, wenn er durch Null geht, denn es sind ja ganze algebraische Functionen von x. Findet also bei $f_s(x)$ für $x = s$ ein Nullwerth und Zeichenwechsel statt, so haben $f_s(s-\nu)$ und $f_s(s+\nu)$ verschiedene Zeichen, wo ν eine beliebig kleine und positive Grösse ist. Das Zeichen ersterer Grösse $f_s(s-\nu)$ ist das für jedes x, welches kleiner als s ist, wenn $f_s(x)$ zwischen x und s nicht nochmals verschwindet; mit derselben Beschränkung gilt das Zeichen von $f_s(s+\nu)$ für jedes x, das grösser als s ist.

Wir zeigen nun zunächst, dass zwei auf einanderfolgende Grössen $f_s(x)$ und $f_{s+1}(x)$ nicht für dasselbe x verschwinden, also auch nicht ihr Zeichen wechseln können. Denn nach dem Entstehen dieser Grössen ist:

$$f_s(x) = \alpha f_{s+1}(x) - f_{s+2}(x)$$
$$f_{(s+1)}x = \beta f_{s+2}(x) - f_{s+3}(x)$$
. . . .
. . . .
. . . .

α und β sind ganze Functionen von x, verschwänden also $f_s(x)$ und $f_{s+1}(x)$ gleichzeitig, so müsste nach der ersten Gleichung auch $f_{s+2}(x)$ verschwinden, deshalb nach der zweiten Gleichung auch $f_{s+3}(x)$, und so alle folgenden Grössen, also auch $f_n(x)$. Dies aber ist unmöglich, da die letzte $f_n(x)$ constant war.

Jetzt zeigen wir, dass wenn von den Grössen $f_1(x)$, $f_2(x)$ . . . $f_n(x)$ (also $f(x)$ ausgeschlossen) für $x = s$ eine ihr Zeichen ändert, dies ohne allen Einfluss auf die Anzahl der Zeichenwechsel bleibt. Denn sei $f_{s+1}(x)$ diese Grösse. Hat dann $f_{s+1}(s-\nu)$ das Zeichen $\pm$, so wird $f_{s+1}(s+\nu)$ das Zeichen $\mp$ haben, aber weder $f_s(x)$ noch $f_{s+2}(x)$ können nach dem Vorigen ihr Zeichen für $x = s$ ändern. Es wird ferner wegen:

$$f_s(x) = \alpha f_{s+1}(x) - f_{s+2}(x)$$

für $x = s$, wo $f_{s+1}(x)$ verschwindet:

$$f_s(s) = -f_{s+2}(s)$$

sein. Es haben also $f_s(x)$ und $f_{s+2}(x)$ für diesen Werth ungleiche Zeichen und

Gleiches findet nach dem Gesagten auch für $s-\nu$ und $s+\nu$ statt. Es können nun die Zeichenfolgen der Grössen f_s, f_{s+1}, f_{s+2} nur folgendermaassen beschaffen sein:

	f_s	f_{s+1}	f_{s+2}
$s-\nu$	+	$\pm$	−
$s+\nu$	+	$\mp$	+

oder:

	f_s	f_{s+1}	f_{s+2}
$s-\nu$	−	$\pm$	+
$s+\nu$	−	$\mp$	+.

Man sieht, dass in beiden Fällen sich sowohl für $s-\nu$ als für $s+\nu$ ein Zeichenwechsel hier findet, also beim Durchgange durch s die Anzahl der Zeichenwechsel unverändert bleibt.

Diese Schlussfolge verliert ihre Gültigkeit nur für $f(x)$ selbst, da hier in der Reihe kein vorhergehendes Glied vorhanden ist. Im Gegentheil aber lässt sich zeigen, dass jedes Verschwinden von $f(x)$ die Anzahl der Zeichenwechsel um eins und zwar in demselbon Sinne ändert, d. h. wenn z. B. beim Zunehmen von x einmal ein Zeichenwechsel verloren geht, derselbe bei abnehmendem x sich niemals wieder einstellen kann, und ebenso wenn beim Abnehmen ein solches Verlorengehen stattfindet. Mit dieser Betrachtung wäre dann der Sturm'sche Satz bewiesen.

Sei $f(s)=0$, so müssen

$$f(s-\nu)=f(s)-\nu f'(s)$$

und

$$f(s+\nu)=f(s)+\nu f'(s)$$

offenbar entgegengesetzte Zeichen haben, wenn nicht auch $f'(s)=0$ ist, welcher Fall hier ausgeschlossen worden ist Da also $f'(s)$ sein Zeichen nicht ändert, so sind nur die nachstehenden Zeichenfolgen möglich:

	f	f_1		f	f_1
$s-\nu$	+	+	$s-\nu$	+	−
$s+\nu$	−	+	$s+\nu$	−	−
	f	f_1		f	f_1
$s-\nu$	−	+	$s-\nu$	−	−
$s+\nu$	+	+	$s+\nu$	+	−

Im ersten und vierten Fall stellt sich beim Zunehmen von s ein Zeichenwechsel ein, im zweiten und dritten geht einer verloren. Wir zeigen noch, dass wenn das erste stattfindet, nie, wenn s grösser wird, ein Zeichenwechsel verloren gehen kann. Denn z. B. im ersten Falle ist für $s+\nu$ f negativ, f_1 positiv. Wenn nun mit zunehmendem s f wieder verschwinden soll, so muss vorher ein Maximum stattgefunden, also f_1 sein Zeichen gewechselt haben, so dass die Reihenfolge der Zeichen mit − − anfängt, ohne dass jedoch, wie früher gezeigt wurde, hierdurch die Anzahl der Zeichenwechsel geändert wird.

Ist nun $s'>s$ und $f_s'=0$, so hat man:

	f	f_1
$s'-\nu$	−	−
$s'+\nu$	+	−

Es stellt sich also wieder ein Zeichenwechsel ein. Ganz Aehnliches findet im Falle 4) statt, und in den Fällen 2) und 3) zeigt man in gleicher Weise, dass mit zunehmendem x sich die Anzahl der Zeichenwechsel nur vermindern kann.

2) Der verallgemeinerte Sturmsche Satz.

1. Satz von Cauchy.

Um das Sturm'sche Verfahren auf die imaginären Wurzeln zu erweitern, ist zunächst ein Satz von Cauchy nothwendig, der auch für andere Theile der Analysis von der grössten Wichtigkeit ist. Um denselben geben zu können, machen wir folgende Voraussetzungen:

A) Sei $s=x+yi$ eine beliebige complexe Grösse, so sollen unter x und y immer Abscissen und Ordinaten eines Punktes in der Ebene verstanden werden, der ebenfalls mit z bezeichnet werden soll.

B) Wir denken uns, um Alles fest zu stellen, die obere Seite der Ordinatenaxe und die rechte der Abscissenaxe positiv. Ferner, wenn wir Polarcoordinaten einführen, also setzen:

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta,\quad z=re^{\vartheta i},$$

so soll r immer positiv, ϑ für Punkte auf der positiven Seite der Abscissenaxe gleich $2n\pi$, für solche auf der negativen gleich $(2n+1)\pi$ sein, also auf der positiven Seite der Ordinatenaxe $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ auf der negativen $(4n+3)\frac{\pi}{2}$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

C) Denkt man sich eine geschlossene Curve und geht auf derselben von einem Punkte aus die Curve entlang, bis man zum Anfangspunkte zurückkehrt, so wird die Richtung als positiv genommen, in

welcher, wenn man sich den Anfangspunkt der Coordinaten innerhalb der Curve denkt, der Winkel ϑ zunimmt. Die entgegengesetzte Richtung ist negativ.

Denkt man sich die Ebene horizontal, und Denjenigen, welcher die Curve umkreist in aufrechter Stellung, so wird er beim positiven Umkreisen den von der Curve eingeschlossenen Flächenraum zur Linken haben. Nach diesen Vorbereitungen lässt sich der Cauchy'sche Satz folgendermaassen aussprechen.

Sei zu dem Ende $z = x + yi$ eine beliebige complexe Zahl:

$$f(z) = P + Qi$$

eine ganze rationale Function von z oder allgemeiner eine eindeutige Function, welche nur für unendliches z discontinuirlich wird, endlich $q(x, y) = 0$ die Gleichung einer geschlossenen, sonst beliebigen Linie, die wir A nennen, auf welcher aber $f(z)$ nicht verschwinden, also nicht $P = Q = 0$ sein soll.

Wenn man die Linie A in positiver Richtung vollständig durchschreitet und dabei die Punkte merkt, in welchen gleichzeitig $P = 0$ wird, und $\frac{P}{Q}$ sein Zeichen ändert, die Anzahl der Punkte, wo dies Zeichen vom positiven zum negativen übergeht mit a, die wo das Umgekehrte stattfindet, mit b bezeichnet, so ist $a - b$ doppelt so gross, als die Anzahl der von A umschlossenen Punkte, in welchen $f(z)$ verschwindet, also als die Anzahl der von A umschlossenen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$.

Vorausgesetzt ist hier nur, dass auf A selbst nicht $f(z) = 0$ wird. Wohl kann aber $f(z) = 0$ mehrfache Wurzeln innerhalb A haben. In diesem Falle wird dann eine $n$fache Wurzel als n einfache gerechnet.

Wir geben in vereinfachter Form einen Beweis dieses merkwürdigen Satzes, der von Liouville und Sturm herrührt. (*Journal des Mathématiques* von Liouville Band 2).

A) Wenn der ausgesprochene Satz für zwei Flächenräume gilt, die einen Theil der Begrenzung gemein haben, so gilt er auch für die Gesammtfläche, wenn man den gemeinschaftlichen Theil der Begrenzung weglässt.

Denn seien $ABCA$, $CBDC$ (Fig. 416) zwei solche Räume, im erstern Raume δ Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ vorhanden, im zweiten δ_1, möge auf der ersten Begrenzung a und b die oben gegebene Bedeutung haben, auf der andern a_1 und b_1, dann ist nach der Annahme:

$$a - b = 2\delta, \qquad a_1 - b_1 = 2\delta_1,$$

also:

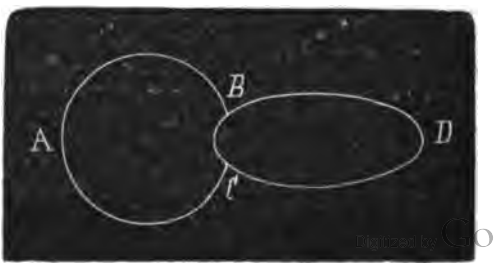
$$a + a' - (b - b_1) = 2(\delta + \delta_1).$$

Der Satz also gilt für die Gesammtbegrenzung. Da man aber beim positiven Umkreisen von $ABCA$ das Stück BC in der Richtung von BC, dagegen beim positiven Umkreisen von $CBDC$ dies Stück in der Richtung CB zurücklegt, so wird beim zweiten Wege $\frac{P}{Q}$ ebenso oft vom Negativen zum Positiven übergehen, als auf dem ersten vom Positiven zum Negativen und umgekehrt; dem B entsprechenden Theil von a wird also ein gleicher Theil von b_1 entsprechen, dem von a_1 ein gleicher von b, diese Theile heben sich, und somit kann das Stück BC ausser Acht bleiben.

Was für zwei Räume gilt, ist natürlich auch für beliebig viel gültig, da man beliebig zwei zu einem und diesen mit dem dritten u. s. w. vereinigen kann. Wir haben also bewiesen:

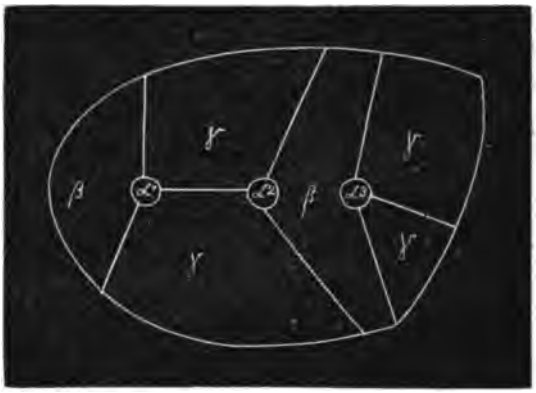
B) Wird ein Raum durch Zerschneiden in mehrere andere getheilt, gilt unser Satz dann für alle Theilräume, so gilt er auch für den Gesammtraum.

Fig. 416.



Digitized by Google

Fig. 417.



C) Den von A gegebenen Raum können wir nun auf folgende Weise theilen.

1) In beliebig kleine Räume, welche jede nur einen einer Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ entsprechenden Punkt $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ umgeben. Diese Räume denken wir uns der Einfachheit wegen von Kreisen mit abnehmenden Radien begrenzt, deren Mittelpunkte bezüglich $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ sind. Es ist dabei zu bemerken, dass diesen Punkten einfache oder mehrfache Wurzeln entsprechen können.

Da nun ausser diesen Räumen nie in demselben Punkte $P = Q = 0$ sein kann, so kann man den übrigen Raum zerlegen.

2) In Theile β, wo einschliesslich der Begrenzung nie $P = 0$ ist.

3) In Theile γ, wo einschliesslich der Begrenzung nie $Q = 0$ ist.

D) Wir beweisen jetzt den Satz für die Räume α, β und γ einzeln, womit er dann allgemein bewiesen ist.

Immer sei a die Anzahl der Punkte der Begrenzung, wo beim positiven Umkreisen $P = 0$ und $\frac{P}{Q}$ vom Positiven zum Negativen übergeht, b wo das Umgekehrte stattfinde, δ die im Theilraume enthaltene Anzahl der einfachen Wurzeln.

Für die Räume β ist offenbar, da P nicht gleich Null, $a = b = 0$ und auch $\delta = 0$, also jedenfalls $a - b = 2\delta$.

Für die Räume γ ist $\delta = 0$. $\frac{P}{Q}$ kann auf der Begrenzung nur sein Zeichen wechseln, wenn P verschwindet, da Q nicht gleich Null wird. Es muss also erst $\frac{P}{Q}$ etwa vom Positiven zum Negativen übergehen, indem P verschwindet, dann wieder vom Negativen zum Positiven u. s. w. Da man aber eine geschlossene Linie durchschreitet, muss man mit demselben Zeichen von $\frac{P}{Q}$ zum Anfangspunkte zurückkehren, also ebenso oft vom Positiven zum Negativen übergegangen sein, als umgekehrt. Es ist also $a = b$, also:

$$a - b = 2\delta = 0.$$

Was endlich die Flächenräume anbetrifft, die eine Wurzel enthalten, so möge in α eine der Allgemeinheit wegen $n$fache Wurzel stattfinden, dann ist bekanntlich:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots f^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

aber $f^{(n)}\alpha$ von Null verschieden. Man verlege nun nach α den Anfangspunkt der Coordinaten. Ist dann $s = x + yi$ ein Punkt der Begrenzung, x', y' die demselben entsprechenden auf α bezogene Coordinaten und $\alpha = \mu + \nu i$, so ist:

$$x = \mu + x', \qquad y = \nu + y'.$$

Da diese Begrenzung ein Kreis ist und α sein Mittelpunkt, so kann man setzen:

$$x = \mu + r\cos\vartheta,$$
$$y = \nu + r\sin\vartheta,$$
$$s = \alpha + re^{\vartheta i},$$

wo r der Radius, also constant ist. Auf der Begrenzung ist also:

$$f(z) = f(\alpha + re^{\vartheta i}).$$

Entwickelt man nach dem Taylor'schen Satz, und berücksichtigt, dass:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) \ldots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

ist, so erhält man:

Digitized by Google

$$f(z) = \frac{r^n e^{n\vartheta i}}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}\alpha + \ldots = P + Qi.$$

Wegen des abnehmenden r üben die folgenden Glieder keinen Einfluss. Sei nun:

$$f^{(n)}(\alpha) = \varrho e^{\tau i},$$

wo ϱ positiv, τ eine beliebige reelle Zahl ist, so ist:

$$P + Qi = \frac{r^n \varrho}{1 \cdot 2 \ldots n} e^{i(n\vartheta + \tau)} + \ldots$$

also

$$P = \lambda \cos(n\vartheta + \tau),$$
$$Q = \lambda \sin(n\vartheta + \tau),$$

wo λ gleich der constanten Grösse $\frac{r^n \varrho}{1 \cdot 2 \ldots n}$ gesetzt, die nachfolgenden Glieder aber vernachlässigt sind.

Sei $n\vartheta + \tau = \varphi$, so wird beim Umkreisen in positiver Richtung der Winkel ϑ von 0 bis 2π, also φ von τ bis $2n\pi + \tau$ wachsen. Da nun $P = \lambda \cos \varphi$ für $\varphi = (2s+1)\frac{\pi}{2}$ verschwindet, so wird dies zwischen τ und $2\pi + \tau$ zweimal, also zwischen τ und $2n\pi + \tau$ $2n$mal geschehen. Nun ist:

$$\frac{P}{Q} = \cot \varphi.$$

Es kommen hierbei die Werthe also nur in Betracht, wo zugleich P, d. h. $\cot \varphi$ verschwindet und das Zeichen wechselt, dies findet ebenfalls für

$$\varphi = (2s+1)\frac{\pi}{2}$$

statt, und zwar geht hier jedesmal die Cotangente vom Positiven zum Negativen über. Also ist:

$$a = 2n, \quad b = 0, \quad \delta = n,$$

also:

$$a - b = 2\delta,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

II. Eine Anwendung des Cauchyschen Satzes.

Aus diesem Satze lässt sich auf die einfachste und directeste Weise darthun, dass jede algebraische Gleichung $n$ten Grades $f(z) = 0$ auch n complexe Wurzeln hat.

Denken wir uns nämlich um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt einen Kreis mit zunehmendem Radius R gezogen, so ist für die Punkte der Peripherie:

$$x = R\cos\vartheta,$$
$$y = R\sin\vartheta,$$
$$z = Re^{\vartheta i},$$
$$f(z) = f(Re^{\vartheta i}).$$

Sei nun:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

so kann man sich für die Peripherie wegen des wachsenden R aufs erste Glied beschränken. Dann ist:

$$f(z) = a_0 R^n e^{n\vartheta i}.$$

Sei noch

$$a_0 = \varrho e^{\tau i}$$

so ist wie oben:

$$P = \varrho R^n \cos(n\vartheta + \tau)$$
$$Q = \varrho R^n \sin(n\vartheta + \tau)$$
$$\frac{P}{Q} = \cot(n\vartheta + \tau).$$

Dann kann man ganz wie oben beweisen, dass

$$a = 2n, \qquad b = 0$$

ist, also:

$$a - b = 2\delta = 2n$$
$$\delta = n.$$

Es befinden sich also in der Ebene n Punkte, wo $f(z)$ verschwindet, wenn man nämlich eine $p$fache Wurzel für p solcher Punkte rechnet.

III. Erweiterung des Cauchyschen Satzes.

Das in Abschnitt I. Gegebene würde für die Erweiterung des Sturmschen Satzes ausreichen. Indess ist es für andere Theile der Analysis wichtig, dem Cauchyschen Satze die ganze Allgemeinheit zu geben, deren er fähig ist. Derselbe ist nämlich mit einer leichten Modification auch für den Fall gültig, wo $f(z)$ eine eindeutige Function ist, welche für endliche Werthe für z auch unendlich werden kann.

Ist dann wieder A eine geschlossene Curve, in der $f(z)$ weder verschwindet noch unendlich wird, haben a und b die obige Bedeutung, ist ferner δ die Anzahl der innerhalb enthaltenen Punkte, wo $f(z)$ verschwindet, ε diejenigen, wo $\frac{1}{f(z)}$ verschwindet, also $f(z) = \infty$ wird, so ist:

$$a - b = 2(\delta - \varepsilon).$$

Digitized by Google

Wie oben wird eine $n$fache Wurzel der Gleichung $f(z)=0$ oder $\frac{1}{f(z)}=0$ für n Punkte gerechnet.

Der Beweis ist mit einem Zusatze wie in I. zu führen. Ausser den Gebieten α, β, γ kommen noch solche Gebiete ζ hinzu, wo $\frac{1}{f(z)}$ einmal verschwindet, aber nicht $f(z)=0$ wird. Da nämlich für $P=\infty$ oder $Q=\infty$ auch

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{P+Qi}=0$$

sein würde, so ist in den Gebieten α, β, γ dann das Unendlichwerden von P und Q ausgeschlossen, $s=0$. also die Beweisführung gilt für diese Gebiete noch.

In den Gebieten ζ ist dagegen $\delta=0$, die Richtigkeit unseres Satzes würde also bedingen, dass $a-b=-2n$ ist, wenn $\frac{1}{f(z)}$ in diesen Gebieten eine $n$fache Wurzel hat.

Dies wird wie oben gezeigt.

Wir umgeben den Punkt ζ wieder mit einem Kreise, dessen Radius r abnimmt. Es folgt dann wie oben Folgendes:

Ist

$$\frac{1}{f(z)}=P_1+Q_1 i,$$

a_1 die Anzahl der Punkte, wo P_1 verschwindet und $\frac{P_1}{Q_1}$ vom Positiven zum Negativen übergeht, b_1 die derjenigen Punkte, wo das Umgekehrte stattfindet, so ist ganz nach der obigen Beweisführung:

$$a_1-b_1=2n.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{P+Qi}=\frac{P-Qi}{P^2+Q^2},$$

also

$$P_1=\frac{P}{P^2+Q^2},$$

$$Q_1=\frac{-Q}{P^2+Q^2},$$

$$\frac{P_1}{Q_1}=-\frac{P}{Q}.$$

Da auf der Begrenzung nicht P oder P_1 unendlich werden soll, so ist für $P_1=0$ auch $P=0$ und umgekehrt, $\frac{P_1}{Q_1}$ ist aber negativ, wenn $\frac{P}{Q}$ positiv, geht also vom Negativen zum Positiven über, wenn mit $\frac{P}{Q}$ das Umgekehrte stattfindet, und hieraus folgt:

$$a_1=b, \qquad b_1=a$$

womit unser Satz erwiesen ist.

Das Uebrige gilt nämlich unverändert. — Zu bemerken ist noch, dass $f(z)$ auch eine mehrdeutige Function sein kann. — Man denkt sich dieselbe dann nach Riemanns Betrachtungsweise die Ebene mehrfach bedeckend (vergl. den Artikel: Quantität, imaginäre) und an den Stellen wo Werthe von $f(z)$ gleich werden mit Windungspunkten versehen. Dann ist $f(z)$ auf der Windungsfläche in der That eine eindeutige Function, und das Gesagte gilt mit der Maassgabe, dass jede Begrenzung eine wirklich geschlossene, nicht etwa bloss eine in sich zurückkehrende sein muss. Wenn daher $f(z)$ oder $\frac{1}{f(z)}$ in einem Windungspunkte verschwindet, und dieser von der $p$ten Ordnung ist, so ist der Grenzkreis um α oder ζ als ein p mal den Punkt umwindender zu betrachten. Sei in dem Punkte α etwa $f(z)=0$, so ist für die Begrenzung:

$$f(z)=f(\alpha+re^{\vartheta i})=ar^{\frac{s}{p}}e^{\frac{s}{p}\vartheta i}+\ldots,$$

wo s eine ganze Zahl ist die mit p keinen Factor gemein hat (vergl. den obigen Artikel), a eine Constante.

Ist $a=\varrho+e^{\tau i}$, so ist dann:

$$P=\varrho r^{\frac{s}{p}}\cos\left(\tau+\frac{s}{p}\vartheta\right)=\varrho r^{\frac{s}{p}}\cos\varphi$$

$$\frac{P}{P}=\cot\left(\tau+\frac{s}{p}\vartheta\right)=\cot\varphi.$$

Es wächst aber wegen der $p$fachen Umwindung ϑ von 0 bis $2p\pi$, also φ von τ bis $2s\pi$ und deshalb ist $\delta=s$. Die Wurzel ist dann als eine $s$fache zu betrachten.

(Dies rechtfertigt sich auch folgendermaassen. In der That wäre, da das Anfangeglied $ar^n e^{n\vartheta i}$ einer $n$fachen Wurzel entspricht, jede Wurzel vom Grade $\frac{s}{p}$. Da aber im Windungspunkt p Wurzeln sich vereinen, ist der Grad $\frac{s}{p}$. p oder s).

Es ist vielleicht hier auch am Platze, einen weniger elementaren aber directen Beweis des allgemeinen Cauchy'schen Satzes zu geben.

Denkt man sich den Ausdruck: $\int d \lg f(z)$ über die Curve A erstreckt, so ist derselbe bekanntlich gleich der Summe der Ausdrücke $\int d \lg f(z)$ auf geschlossene Curven bezogen, welche je eine Discontinuität von $\frac{d \lg f(z)}{dz}$ umgeben. Discontinuitäten aber treten nur ein für $f(z) = 0$ oder $\frac{1}{f(z)} = 0$.

Ist die Wurzel eine $n$fache (in dem obigen Sinne genommen, der sich auch auf dem Windungspunkte bezieht), so ist wie leicht zu sehen (vergl. den Artikel: Quantität, imaginäre)

$$\int d \lg f(z) = 2ni\sigma \text{ oder } = -2ni\sigma,$$

je nachdem

$$f(z) = 0 \text{ oder } \frac{1}{f(z)} = 0$$

ist, also die Summe der Theilintegrale:

$$2\pi i(\delta - \varepsilon)$$

Was nun das auf A bezogene Integral anbetrifft, so ist $\frac{d \lg f(z)}{ds}$ auf der Curve immer continuirlich, also der Werth desselben gleich dem Unterschiede der Werthe $\lg f(z)$ im End- und Anfangspunkte. Da diese Punkte aber zusammenfallen, so kann dieser Unterschied nur $2k\pi i$, und k eine beliebige ganze Zahl sein. Sei k z. B. positiv und setzen wir:

$$f(z) = \varrho e^{\sigma i}, \quad \lg f(z) = \lg \varrho + \sigma i,$$

möge σ beim Umkreisen der Curve A immer zunehmen, so wird offenbar:

$$P = \varrho \cos \sigma = \frac{P}{Q} = \cot \sigma,$$

und da σ von 0 bis $2k\pi$ zunimmt, $2k$ gleich der Anzahl der Werthe sein, wo P verschwindet, $\frac{P}{Q}$ vom Positiven zum Negativen übergeht, dann ist $k = a$, $b = 0$. Geht aber σ auch vom Negativen zum Positiven über, so ist, da die Stellen, wie dies geschieht, in Abzug kommen, $2k = a - b$, und dies ist offenbar noch der Fall, wenn k negativ ist, wo dann $a < b$ wird. Es ist aber nach dem Obigen:

$$2\pi i(\delta - \varepsilon) = 2k\pi i,$$
$$2k = a - b = 2(\delta - \varepsilon),$$

was zu beweisen war.

IV. Das Sturm'sche Verfahren bei imaginären Wurzeln.

Um nun zu erfahren, wie viel Wurzeln in einem gegebenen von A umschlossenen Raum vorhanden sind, nehmen wir wieder an, die algebraische Gleichung $f(z) = 0$ sei gegeben, dann ist also $(a - b) = 2\delta$, und es kommt darauf an, $a - b$ direct zu ermitteln. Wir thun dies unter der Bedingung, dass die Curve A, welche ja nicht continuirlich gekrümmt zu sein braucht, aus Theilen besteht, in welchen x und y als ganze rationale Functionen einer dritten Grösse u gegeben sind. Es ist für jeden solchen Theil auch P und Q als ganze Function von z gegeben.

Die Aufgabe beschränkt sich dann darauf, $a - b$ für einen solchen Theil, den wir B nennen, zu finden, die Summe aller dieser Theile ist dann gleich 2δ. Da über die Form der Begrenzung nichts festgesetzt ist, so lässt sich in Bezug auf die Begrenzung immer der obigen Bedingung genügen. Die Ermittlung von $a - b$ geschieht nun ganz nach dem Sturm'schen Verfahren.

„Man dividire $\frac{P}{Q}$, sei $-Q_1$ der Divisionsrest, ferner $-Q_2$ der von $\frac{Q}{Q_1}$ u. s. w., so kommt man endlich auf eine Constante $-Q_n$. da P und Q auf der Begrenzung nicht gleichzeitig verschwinden, also keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Seien nun α und β der Anfangs- und Endpunkt von B im Sinne einer positiven Bewegung, so ist $a - b$ gleich dem Ueberschusse der Zeichenwechsel der Reihe $P, Q, Q_1 \ldots Q_n$ in β gegen die in α".

Es ist hier zu bemerken, dass auch Q von höherer Dimension als P sein kann; in diesem Falle ist bei der Division von $\frac{P}{Q}$ natürlich P selbst als Rest, also $-Q_1 = P$ zu setzen.

Der Beweis ist ganz ähnlich wie in 1) zu führen. Wie dort wird dargethan, dass ein Zeichenwechsel von $Q, Q_1 \ldots$ keinen Einfluss übt. Was P anbetrifft, so können nicht gleichzeitig P und Q ihr Zeichen wechseln, also wenn $P = 0$ für $z = \varepsilon$ wird, so sind folgende Fälle möglich:

	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
$\varepsilon - \nu$	+	+	+	−	−	+	−	−
$\varepsilon + \nu$	−	+	−	−	+	+	+	−.

Im ersten und vierten Falle geht $\frac{P}{Q}$ vom Positiven zum Negativen über, es wird

Digitized by Google

also beim Uebergange von s, a um Eins vermehrt, zugleich stellt sich ein Zeichenwechsel ein, so dass in der That das Zunehmen der Zeichenwechsel die Vermehrung von $a - b$ angibt. Im zweiten und dritten Falle, geht $\frac{P}{Q}$ vom Negativen zum Positiven über, b wird um Eins vermehrt, also $a - b$ um Eins vermindert, zugleich nimmt die Reihe der Zeichenwechsel um Eins ab, so dass auch hier unser Satz richtig ist. Da nun eine Aenderung der Zeichenreihe nur beim Ueberschreiten des Punkts ε stattfindet, so ist derselbe vollständig bewiesen.

Will man mittels dieser Betrachtung wirklich die imaginären Wurzeln einer Gleichung finden, so thut man wohl als Begrenzung Rechtecke zu nehmen, deren Seiten den Axen parallel sind. Seien die Coordinaten der Eckpunkte desselben bezüglich:

$$x = l, \quad y = m \qquad x = l_1, \quad y = m,$$
$$x = l_1, \quad y = m_1 \qquad x = l, \quad y = m_1,$$

wo $l < l_1$, $m < m_1$ sein soll.

Die Begrenzung besteht dann aus vier Linien B, B_1, B_2, B_3. Sei in jeder derselben α der Anfangspunkt, β der Endpunkt. Dann ist:

Für B: $y = m$, in $\alpha: x = l$, in $\beta: x = l_1$
„ B_1: $x = l_1$, in $\alpha: y = m$, in $\beta: y = m_1$
„ B_2: $y = m_1$, in $\alpha: x = l_1$, in $\beta: x = l$
„ B_3: $x = l$, in: $\alpha: y = m_1$, in $\beta: y = m_1$

so dass auf jeder der vier Linien P und Q nur von einer Variable, in B und B_2 von x, in B_1 und B_3 von y abhängig sind.

Sollen sämmtliche Wurzeln einer Gleichung ermittelt werden, so thut man gut, erst die reellen zu finden nach der in 1) gegebenen Methode. Sind diese

$$z = \alpha_1, \; z = \alpha_2 \ldots z = \alpha_p,$$

so kann man $f(z)$ durch

$$(z - \alpha_1), \; (z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_p)$$

dividiren. Man hat dann eine Gleichung $q(z) = 0$, die keine reellen Wurzeln, also keine auf der Abscissenaxe enthält. Man sucht dann zunächst diejenigen, wo in $z = x + yi$, y positiv und dann die, wo y negativ ist. Die eine Seite des Rechtecks ist dann die Abscissenaxe.

Im erstern Falle ist zu setzen:

$$l = +\infty, \quad m = 0, \quad l_1 = -\infty, \quad m_1 = +\infty$$

und im letztern:

$$l = +\infty, \quad m = 0, \quad l_1 = -\infty, \quad m_1 = -\infty$$

Dann theilt man den Raum zunächst durch Linien der Axe der x parallel, und die Räume dieser Art in denen sich Wurzeln finden, durch Linien der Axe der y parallel. Die Wurzeln müssen in hinlänglich enge Grenzen eingeschlossen werden, um die Newton'sche Näherungsweise anwenden zu können.

Bei dem allgemeinen Sturmschen Verfahren ist allerdings nicht nöthig, dass die gegebene Gleichung nur einfache Wurzeln habe. Dennoch wird man natürlich wohlthun, vor Anwendung desselben die mehrfachen Wurzeln zu ermitteln und wegzuschaffen.

Uebrigens lassen sich auch leicht die rein imaginären Wurzeln bestimmen. Da hier $x = 0$ ist, so sind es die den beiden Gleichungen:

$$P(0, y) = 0, \qquad Q(0, y) = 0$$

gemeinschaftlichen, also in dem, beiden Gleichungen gemeinschaftlichen, Factor enthalten. Nach deren Entfernung kann man vier Räume nehmen, die bezüglich positiven x und y, positivem x und negativem y, positivem y und negativem x, negativem x und y entsprechen.

Subnormale (Geometrie).

Der Theil der Abscissenaxe, welcher von der Normale und Ordinate eines gegebenen Punktes einer Curve abgeschnitten wird. Der Ausdruck für die Subnormale ist:

$$S_n = y \frac{dy}{dx}.$$

Substitution (Algebra und Analysis).

Die Einführung eines neuen Werthes für eine veränderliche Grösse.

Substitution, lineare (Algebra).

Einleitung.

Die Theorie der linearen Substitution umfasst die Betrachtung derjenigen Ausdrücke, welche entstehen, wenn man in einen algebraischen Ausdruck vom beliebigen Grade und beliebig viel Variablen lineare Ausdrücke von neuen Variablen für die letzteren einsetzt. Ist der gegebene Ausdruck ersten Grades, so führen die Brtrachtungen auf die Theorie der Determinanten, während bei Ausdrücken höherer Ordnung gewisse Formen, die man nach Sylvester als Invarianten und Covarianten bezeichnet, von Wichtigkeit sind, weshalb man dieser ganzen Theorie der linearen Substitution auch den Namen Invariantentheorie gegeben hat. Dieser wichtige Theil der

Digitized by Google

höheren Algebra gehört ganz der neuesten Zeit an (etwa vom Jahre 1850), und sind in Bezug auf hier hingehörige Untersuchen besonders die Namen: Aronhold, Boole, Brioschi, Cayley, Hermite, Hesse, Salmon, Sylvester zu nennen.

Eine Uebersicht des Vorhandenen geben George Salmons: *Lessons introductory to the modern higher Algebra* (Deutsch von Wilhelm Fiedler). Auch ist besonders zu empfehlen eine Arbeit von Aronhold im 62. Bande von Crelles Journal: „Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie."

2) Allgemeine Theorie der Determinanten.

Der Ausdruck $a_1 b_2 - a_2 b_1$ den wir:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

schreiben, oder auch wenn kein Missverständniss zu fürchten ist: $(a_1\ b_2)$, heisst Determinante der vier Grössen. Er ist eine lineare Function von je zwei zusammengehörigen Elementen a_1 a_2 und hat die Fundamentaleigenschaft zu verschwinden, wenn man für a_1, a_2 auch b_1, b_2 setzt.

Wie von den vier Variablen a_1, a_2, b_1, b_2 lassen sich von beliebigen n^2 leicht Ausdrücke von ähnlichen Eigenschaften bilden, die ebenfalls Determinanten genannt werden.

Seien zunächst gegeben neun Grössen:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

so ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 c_3) = a_1 (b_2 c_3) + a_2 (b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2)$$

Durch den letzten Ausdruck ist die Determinante völlig definirt, da z. B. $(b_2 c_3) = b_2 c_3 - b_3 c_2$ ist. Die Determinante ist ebenfalls ein linearer Ausdruck von a_1 a_2 a_3, da jedem Gliede z. B. a_1 b_2 c_3 ein anderes $-a_2 b_1 c_3$ entspricht, oder a_3 b_2 c_1, so hat sie ebenfalls die Eigenschaft zu verschwinden, wenn man die a mit dem b oder c identificirt. Wegen der Symmetrie der Ausdrücke findet dies aber auch statt, wenn man die b mit den c identificirt.

Die Determinante von 16 Elementen ist definirt durch den Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = (a_1\, b_2\, c_3\, d_4) = a_1 (b_2\, c_3\, d_4) - a_2 (b_3\, c_4\, d_1) + a_3 (b_4\, c_1\, d_2) - a_4 (b_1\, c_2\, d_3).$$

Damit die Fundamentaleigenschaft stattfinde, dass zwei der Buchstaben a, b, c, d identificirt den Werth Null annehmen, müssen hier, wie leicht zu sehen, die Zeichen abwechselnd positiv, negativ sein.

Seien jetzt allgemein n^2 Elemente gegeben. Die Definition ist dann:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{vmatrix} = (a_1\, b_2\, c_3 \dots h_n) = a_1 (b_2\, c_3 \dots h_n) \pm a_2 (b_3\, c_4 \dots h_1) + a_3 (b_4\, c_5 \dots h_2) \dots \pm a_n (b_1\, c_2 \dots h_{n-1}).$$

Damit ist die Determinante unmittelbar auf die von $(n-1)^2$ Elementen zurückgeführt. Was die Vorzeichen anbetrifft, so sind alle positiv, wenn n ungrad, abwechselnd positiv und negativ, wenn n grade ist. Immer aber geben zwei der Buchstaben $a, b, c \dots h$ identificirt das Resultat Null. Führt man das angedeu-

tete recurrente Verfahren aus, so kommt man sogleich auf folgende Regel, die Determinante unmittelbar zu bilden.

Man schreibt zuerst das Product der in der Diagonale befindlichen Glieder:

$$a_1\, b_2\, c_3 \ldots k_n$$

und bildet die daraus entstehenden, wenn man mit den Indices 1, 2, . . . n alle möglichen Permutationen vornimmt. Das Zeichen jedes Gliedes ist so zu bestimmen, dass es positiv oder negativ wird, je nachdem es aus dem ersten durch eine grade oder ungrade Anzahl von Permutationen hervorgegangen ist.

Hiernach ist z. B. die Determinante von neun Elementen:

$$(a_1\, b_2\, c_3) = a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 + a_2\, b_3\, c_1 - a_2\, b_1\, c_3 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1.$$

Oft schreibt man alle Glieder einer Determinante mit demselben Buchstaben, dem man einen doppelten Index gibt.

$$(a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots a_{n,n}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots a_{2,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Die Horizontalreihen $a_{p,1}\, a_{p,2}$ wollen wir abgekürzt Reihen, die senkrechten dagegen $a_{1,p}\, a_{2,p} \ldots$ Columnen nennen.

Aus der Bildung der Determinante erhellt dann leicht der Satz:

I. Eine Determinante bleibt unverändert, wenn man die Reihen mit den Columnen vertauscht, d. h. die Horizontalreihen vertikal, die Vertikalreihen horizontal setzt.

Hieraus in Verbindung mit der Fundamentaleigenschaft ergibt sich noch:

II. Die Determinante verschwindet, wenn zwei Reihen oder zwei Columnen identisch sind.

Wenn man zwei Reihen mit einander vertauscht, also z. B. $a_{1,1}, a_{1,2} \ldots$ mit $a_{2,1}\, a_{2,2} \ldots$, so ist dies dasselbe als wenn zwei Indices permutirt werden, wodurch nach dem Bildungsgesetze ein Zeichenwechsel eintritt. Also:

III. Vertauscht man zwei Reihen oder Columnen, so ändert sich nur das Vorzeichen der Determinante.

Da von den Gliedern einer Reihe oder Columne in jedem Gliede der Determinante eins und nur eins als Factor erscheint, so ergibt sich zunächst selbstverständlich, dass die Determinante Null ist, wenn alle Glieder einer Reihe Null sind. Ferner:

IV. Die Multiplication jedes Gliedes einer Reihe oder Columne mit derselben Grösse α bewirkt, dass die ganze Determinante mit α multiplicirt ist.

V. Haben die entsprechenden Glieder zweier Reihen oder Columnen gleiches Verhältniss,

$$\frac{a_{p,1}}{a_{q,1}} = \frac{a_{p,2}}{a_{q,2}} \ldots,$$

so ist die Determinante gleich Null.

Denn durch Multiplication mit dem Verhältnisse wird die eine Reihe der andern gleich.

VI. Sind die Glieder einer Reihe oder Columne Summen von je p Gliedern, so zerfällt die Determinante in die Summe von p anderen, deren jeder je ein Glied einer solchen entspricht.

Dies ist selbstverständlich, da die Summen ja die einzelnen Glieder der Determinante multipliciren. Es ist sonach z. B.:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & a_2+\alpha_2 & \dots & a_n+\alpha_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{vmatrix}$$

Schliesslich erwähnen wir noch des symbolischen Ausdrucks für die Determinanten; man kann nämlich setzen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\dots(a-g)(a-k)(b-c)\dots(b-g)(b-k) \dots (g-k).$$

Der Ausdruck rechts hat die Bedeutung, dass man nach seiner Entwickelung nach Potenzen von $a, b, c \dots$ die Exponenten sämmtlich mit Indices vertauschen, also z. B. für a^p schreiben soll a_p. Die Uebereinstimmung des Resultats leuchtet dann augenblicklich ein.

3) Unterdeterminanten. — Beziehung der Determinante zur Auflösung der linearen Gleichungen. — Multiplicationstheorem.

Die Auflösung linearer Gleichungen erhält durch die Anwendung der Determinanten eine wichtige symbolische Form, von der jedoch zu bemerken ist, dass sie sich selten zur numerischen Rechnung eignet. Zuvörderst ist jedoch noch etwas über die Gestalt der Determinanten zu sagen. Nach der Definition war:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n}) = a_{1,1}(a_{2,2}\, a_{3,3} \dots a_{n,n}) \pm a_{1,2}(a_{2,3} \dots a_{n,1}) + a_{1,3}(a_{2,4}\, a_{3,5} \dots a_{n,2}) \pm \dots\dots\dots \pm a_{1,n}(a_{2,1}\, a_{3,2} \dots a_{n,n-1})$$

wo die Permutationen immer den zweiten Indices gelten. Die mit $a_{1,1}\, a_{1,2} \dots$ multiplicirten Glieder sind offenbar wieder Determinanten aber von $(n-1)^2$ Elementen, sie werden Unterdeterminanten oder Minoren genannt. Unerheblich ist dabei das doppelte Vorzeichen, da im Falle dasselbe minus ist, es durch eine Permutation positiv werden kann.

Setzen wir nun die Unterdeterminanten bezüglich gleich $A_{1,1}\, A_{1,2} \dots A_{1,n}$, die Hauptdeterminante gleich Δ, so ist:

$$\Delta = a_{1,1}\, A_{1,1} + a_{1,2}\, A_{1,2} \dots + a_{1,n}\, A_{1,n}.$$

Eben so kann man aber wegen der Symmetrie sich die Determinante Δ in Unterdeterminanten multiplicirt mit den Gliedern einer beliebigen Reihe $a_{p,1}\, a_{p,2} \dots a_{p,n}$ denken. Seien diese Unterdeterminanten $A_{p,1}\, A_{p,2} \dots A_{p,n}$, so ist also auch:

$$\Delta = a_{p,1}\, A_{p,1} + a_{p,2}\, A_{p,2} \dots a_{p,n}\, A_{p,n}$$

Digitized by Google

oder auch:

$$\triangle = a_{1p} A_{1p} + a_{2p} A_{2p} + \ldots + a_{np} A_{np}$$

und offenbar sind die A von $a_{p1}, a_{p2} \ldots a_{pn}$ frei. Man erhält also auch durch Differenziiren:

$$\frac{\partial \triangle}{\partial a_{pq}} = A_{pq},$$

und dies ist der bequemste Ausdruck für die Unterdeterminante, sonach auch:

1) $$\triangle = a_{p1} \frac{\partial \triangle}{\partial a_{p1}} + a_{p2} \frac{\partial \triangle}{\partial a_{p2}} + \ldots + a_{pn} \frac{\partial \triangle}{\partial a_{pn}}.$$

Identificirt man die Glieder $a_{p1}\ a_{p2} \ldots a_{pn}$ mit denen einer andern Reihe $a_{q1}\ a_{q2} \ldots a_{qn}$ so haben wir gesehen, dass die Determinante verschwindet. Es ist also immer:

2) $$a_{q1} \frac{\partial \triangle}{\partial a_{p1}} + a_{q2} \frac{\partial \triangle}{\partial a_{p2}} + \ldots + a_{qn} \frac{\partial \triangle}{\partial a_{pn}} = 0,$$

wenn p ungleich q ist.

Sei nun gegeben das System von linearen Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n = b_1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{n2} x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n \end{array}$$

so kann man mit Anwendung der beiden letzten Formeln leicht eine beliebige Unbekannte x_p finden.

Sei wieder

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und multiplicire man die Gleichungen nach der Reihe mit:

$$\frac{\partial \triangle}{\partial a_{p1}}, \frac{\partial \triangle}{\partial a_{p2}} \ldots \frac{\partial \triangle}{\partial a_{pn}}$$

addire dies dann sämmtlich, so würden wegen Formel 2) die Coefficienten aller Unbekannten bis auf den von x_p verschwinden, dieser Coefficient aber gleich $\triangle$ sein. Man hat also:

$$\triangle x_p = b_1 \frac{\partial \triangle}{\partial a_{p1}} + b_2 \frac{\partial \triangle}{\partial a_{p2}} + \ldots + b_n \frac{\partial \triangle}{\partial a_{pn}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist auch eine Determinante, offenbar diejenige, welche aus $\triangle$ hervorgeht, wenn man darin $a_{p1}, a_{p2} \ldots a_{pn}$ bezüglich mit $b_1, b_2 \ldots b_n$ vertauscht.

Digitized by Google

Setzen wir dieselbe gleich Γ, so ist also:

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p-1\,1} & a_{p-1\,2} & \dots & a_{p-1\,n} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_{p+1\,1} & a_{p+1\,2} & \dots & a_{p+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$x_p = \frac{\Gamma}{\triangle}.$$

Es kann somit auch die Determinante $\triangle$ definirt werden: als der den Werthen der Unbekannten $x_1, x_2 \dots x_n$ gemeinschaftliche Nenner.

Der Werth von x_p ist immer ein ganz bestimmter, wenn $\triangle$ nicht Null ist. Da nun immer dann x_p nicht gefunden werden kann, wenn von den n Gleichungen eine oder mehrere eine identische Folge der übrigen sind, oder mit ihnen in Widerspruch steht, so ergibt sich:

Die Determinante $\triangle$ verschwindet immer, wenn eine Gleichung des Systems eine Folge der übrigen ist oder mit ihnen in Widerspruch steht.

Uebrigens ist im ersten Falle auch $\Gamma = 0$, weil sonst sich $x_p = \infty$ ergeben würde, was nicht der Fall ist. Im zweiten Falle kann dies eintreten.

Wenn alle b gleich Null, also die n Gleichungen homogen sind, so kann bekanntlich auch nicht x_p gefunden werden, wohl aber können die Unbekannten alle eliminirt werden, und da die Gleichung $\triangle = 0$ dieselben nicht enthält, so ist dies eben das Eliminationsresultat. Also:

Sind n homogene lineare Gleichungen gegeben, so ist das Resultat der Elimination gegeben, wenn man die Determinante der Coefficienten gleich Null setzt.

Seien nun wieder n Gleichungen gegeben:

A)
$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + \dots + a_{n1}\,x_n &= b_1 \\ a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{n2}\,x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{1n}\,x_1 + a_{2n}\,x_2 + \dots + a_{nn}\,x_n &= b_n \end{aligned}$$

und mache man in denselben die linearen Substitutionen:

B)
$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}\,u_1 + \alpha_{12}\,u_2 + \dots + \alpha_{1n}\,u_n \\ x^2 &= \alpha_{21}\,u_1 + \alpha_{22}\,u_2 + \dots + \alpha_{2n}\,u_n \\ &\vdots \\ x_1 &= \alpha_{n1}\,u_1 + \alpha_{n2}\,u_2 + \dots + \alpha_{nn}\,u_n \end{aligned}$$

Digitized by Google

so lassen sich die u auf zwei Arten berechnen. — Sei Δ die Determinante der Coefficienten der ersten, Δ_1 die der zweiten Gleichungen, dann ergibt sich aus dem ersten Systeme:

$$x_1 = \frac{\gamma_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\gamma_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{\gamma_n}{\Delta},$$

wo $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ nach dem Obigen gewisse in Determinanten Formen darzustellende Grössen sind.

Aus dem zweiten Systeme aber ergibt sich:

$$u_p = \frac{k_{p1} x_1 + k_{p2} x_2 + \ldots + k_{pn} x_n}{\Delta_1}.$$

Die k sind hier gewisse Unterdeterminanten, setzt man für die x die Werthe, so kommt sonach:

$$u_p = \frac{\lambda_p}{\Delta \Delta_1},$$

wo λ_p eine ganze rationale Function der α und a ist.

Die Elimination lässt sich aber auch so ausführen: man substituirt die Werthe der x aus den zweiten Gleichungen in die ersten. Dann kommt:

$$\begin{aligned}
c_{11} u_1 + c_{21} u_2 + \ldots + c_{n1} u_n &= b_1 \\
c_{12} u_1 + c_{22} u_2 + \ldots + c_{n2} u_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad & \vdots \\
c_{1n} u_1 + c_{2n} u_2 + \ldots + c_{nn} u_n &= b_n,
\end{aligned}$$

wo zu setzen ist:

C)
$$\begin{aligned}
c_{1p} &= a_{1p} \alpha_{11} + a_{2p} \alpha_{21} + \ldots + a_{np} \alpha_{n1} \\
c_{2p} &= a_{1p} \alpha_{12} + a_{2p} \alpha_{22} + \ldots + a_{np} \alpha_{n2} \\
\vdots \qquad\quad & \vdots \qquad\quad \vdots \\
c_{np} &= a_{1p} \alpha_{1n} + a_{2p} \alpha_{2n} + \ldots + a_{np} \alpha_{nn};
\end{aligned}$$

aus den vorletzten Gleichungen aber folgt:

$$u_p = \frac{k_p}{D},$$

wo D die Determinante der Coefficienten c, k_p eine ganze rationale Function der c und b ist. Aus den beiden Werthen von u_p folgt nun, dass die Nenner $\Delta\ \Delta_1$ und D sich nur durch ganze rationale Factoren unterscheiden können. Dies ist aber nicht möglich, wenn die Anfangsglieder der Entwickelung beider Grössen übereinstimmen, und wie leicht zu sehen, ist dies der Fall. Beide nämlich sind gleich:

$$a_{11}\ \alpha_{11}\ a_{22}\ \alpha_{22} \cdots a_{nn}\ \alpha_{nn}.$$

Es ist also:

$$\Delta \Delta_1 = D.$$

Dieser Satz heisst Multiplications-Satz. Er spricht sich folgendermaassen aus: Das Product zweier Determinanten ist wieder eine solche.

Google

Die Glieder letzterer entstehen aus denen beider Factoren, indem man die Summen der Producte nimmt, welche aus den Gliedern irgend einer Reihe der ersten und einer der zweiten gebildet werden.

Aus den Sätzen IV. und VI. des zweiten Abschnitts lässt sich dieses Resultat leicht verificiren.

Betrachte man nämlich z. B. für neun Variablen die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Da jedes Element aus drei Gliedern besteht, so lassen sich aus jedem drei, also im ganzen 27 Determinanten bilden nach VI. des vorigen Abschnitts; von diesen verschwinden alle, worin zwei Reihen sich nur durch einen Factor unterscheiden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & a_1\alpha_2, & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1, & a_2\alpha_2, & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1, & a_3\alpha_2, & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}$$

und es bleiben nur Ausdrücke übrig, deren je zwei die Form haben:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & b_1\beta_2, & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1, & b_2\beta_2, & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1, & b_3\beta_2, & c_3\gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1\alpha_1, & c_1\gamma_2, & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1, & c_2\gamma_2, & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1, & c_3\gamma_2, & b_3\beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} (a_1\beta_2\gamma_3 - a_1\gamma_2\beta_3)$$

Nach dem Herausrücken eines aus $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1 \ldots$ zusammengesetzten Factors bleibt in allen Theilen die Determinante dieselbe. Diese Factoren aber bilden, wie leicht zu sehen, die Determinante $(a_1\ b_2\ c_3)$, so dass der Werth der zuerst gegebenen: $(a_1\ b_2\ c_3)\ (\alpha_1\ \beta_2\ \gamma_3)$ ist, und da dasselbe Verfahren für n^2 Variablen gilt, so ist hiermit unser Satz bewiesen.

Es lässt sich demselben auch eine Erweiterung geben.

Es mögen wieder die Gleichungen C) stattfinden, die Anzahl der α und a aber nicht einem Quadrate gleich sein, und betrachten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Es lässt sich nämlich dieselbe noch immer als Eliminations-Determinante der Gleichungen A und B betrachten, ganz wie oben gezeigt wurde, wenn nur die Anzahl der x grösser als die der u ist. Sei z. B. die der erstern $n+p$, die der letztern n, die Zahl der Gleichungen A aber n, was natürlich die Elimination nicht hindert. Wendet man nun auf dieselbe das zuletzt eingeschlagene Verfahren an, so sieht man augenblicklich, dass man zwar nicht das Product zweier Determinanten, wohl aber die Summe der Producte von je zwei entsprechenden zu n^2 Elementen erhält, die sich aus je n Reihen der a, bezüglich der α bilden lassen. Es ist also:

$$(c_{11}\ c_{22} \cdots c_{nn}) = (a_{11}\ a_{22} \cdots a_{nn})\ (\alpha_{11}\ \alpha_{22} \cdots \alpha_{nn}) + (a_{12}\ a_{23} \cdots a_{n1})\ (\alpha_{23}\ \alpha_{23} \cdots \alpha_{n1}) + \ldots$$

Sei nun die Zahl der x und der Gleichungen kleiner als die der u, die der ersteren $n-p$, die der letzteren n. Setzt man die u dann aus B in A ein, so sind p dieser Gleichungen Folgen der anderen, und also die Eliminationsdeterminante Null. Dies bestätigt auch die Productensumme, die sich aus

Digitized by Google

$$(c_{1\,1}\ c_{2\,2}\ \ldots\ c_{n\,n})$$

bilden lässt, da, wie leicht zu sehen, in jedem Gliede zwei Reihen vorkommen, die sich nur durch Factoren unterscheiden.

Diese Betrachtungen können als das erweiterte Multiplicationstheorem bezeichnet werden.

Aus dem Vorigen folgt auch sogleich. Wenn man in n gegebene lineare Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ A), also $b_1, b_2 \ldots b_n$ eine lineare Substitution B) macht, so ist die Determinante der transformirten Ausdrücke gleich dem Producte der Determinanten der Systeme A) und B). Eine solche Substitution wird orthogonal genannt, wenn sie die Bedingung erfüllt:

D) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

Der Name kommt daher, weil diese Bedingung bei drei Variablen der Verwandlung eines orthogonalen Coordinatensystems in ein anderes entspricht.

Setzt man die Werthe der x aus B) in C) ein, so kommt:

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = {} & (\alpha_{1\,1} u_1 + \alpha_{1\,2} u_2 + \ldots + \alpha_{1\,n} u_n)^2 \\ & + (\alpha_{2\,1} u_1 + \alpha_{2\,2} u_2 + \ldots + \alpha_{2\,n} u_n)^2 + \ldots\ldots \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + (\alpha_{n\,1} u_1 + \alpha_{n\,2} u_2 + \ldots + \alpha_{n\,n} u_n)^2. \end{aligned}$$

Entwickelt man die rechte Seite der Gleichung, und vergleicht die Coefficienten der u auf beiden Seiten, so ergibt sich:

E) $$\alpha_{1\,p}^2 + \alpha_{2\,p}^2 + \ldots + \alpha_{n\,p}^2 = 1$$

$$\alpha_{1\,p}\alpha_{1\,q} + \alpha_{2\,p}\alpha_{2\,q} + \ldots + \alpha_{n\,p}\alpha_{n\,q} + \ldots = 0,$$

wo q ungleich p ist.

Setzt man nun in den Gleichungen C):

$$\alpha_{p,\,q} = \alpha_{p,\,q}$$

so wird:

$$\Delta = \Delta_1$$

und $c_{p\,q}$ bezüglich gleich Eins oder Null, je nachdem q gleich p oder von p verschieden ist. Man hat aber:

$$\Delta^2 = D = \begin{vmatrix} c_{1\,1} & c_{2\,1} & \ldots & c_{n\,1} \\ c_{1\,2} & c_{2\,2} & \ldots & c_{n\,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1\,n} & c_{2\,n} & \ldots & c_{n\,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Ein Ausdruck, der offenbar gleich Eins ist. Also:

$$\Delta^2 = 1 \qquad \Delta = \pm 1$$

d. h.:

Die Determinante einer orthogonalen Substitution ist entweder $+1$ oder -1,

oder:

Die Determinante eines Systems unterscheidet sich von der eines daraus durch eine orthogonale Substitution gebildeten Systems entweder gar nicht oder nur durchs Vorzeichen.

Digitized by Google

Offenbar folgt aus dem Vorigen auch, dass das Product von beliebig viel Determinanten wieder eine solche ist; dies gilt also auch für die $n$te Potenz einer solchen, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

4) Von den Unterdeterminanten höherer Ordnung und den reciproken Determinanten.

In den Gleichungen 1) und 2) des vorigen Abschnitts:

$$1)\qquad \Delta = a_{p1}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{p1}} + a_{p2}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{p2}} + \ldots + a_{pn}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{pn}}$$

$$2)\qquad 0 = a_{q1}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{p1}} + a_{q2}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{p2}} + \ldots + a_{qn}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{pn}}$$

(statt a_{rs} kann man auch in 1) und 2) a_{sr} schreiben) sind die Eigenschaften der Unterdeterminanten enthalten, da eine solche: $\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ps}}$ übrigens von

$$a_{p1}, a_{p2} \ldots a_{pn}$$

frei ist, so erfüllt sie auch die Gleichungen:

$$3)\qquad \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}\,\partial a_{pt}} = 0, \quad \frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{sp}\,\partial a_{tp}} = 0.$$

Die letzte Gleichung findet darum statt, weil man die Columnen und Reihen vertauschen, d. h. statt der ersten die zweiten Indices betrachten kann.

Der Ausdruck $\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}\,\partial a_{qt}}$, heisst nun Unterdeterminante zweiter Ordnung; da $\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ps}}$ selbst eine Determinante ist, so finden die der Gleichung 1) und 2) entsprechenden Relationen statt:

$$4)\qquad \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ps}} = a_{q1}\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}\,\partial a_{q1}} + a_{q2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}\,\partial a_{q2}} + \ldots + a_{qn}\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}\,\partial a_{qn}}$$

$$5)\qquad 0 = a_{r1}\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}\,\partial a_{q1}} + a_{r2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}\,\partial a_{q2}} + \ldots + a_{rn}\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{ps}\,\partial a_{qn}},$$

wo p und q, r und q von einander verschieden sind.

Die Unterdeterminanten erster Ordnung haben eine einfache Beziehung zur Auflösung der linearen homogenen Gleichungen.

Vergleicht man nämlich das System:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

mit den Gleichungen 2) so ergibt sich:

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \frac{\partial\Delta}{\partial a_{p1}} : \frac{\partial\Delta}{\partial a_{p2}} : \ldots : \frac{\partial\Delta}{\partial a_{pn}},$$

wo p ganz beliebig ist.

Setzen wir jetzt der Kürze wegen:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{pq}} = A_{pq},$$

Digitized by Google

so kann man aus diesen Grössen ebenfalls eine Determinante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

bilden, welche man die Reciproke der gegebenen:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nennt, während die Systeme a_{pq} und A_{pq} adjungirt genannt werden. Es ist nun nach dem Multiplicationssatze:

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Die c sind durch die Gleichungen C) des vorigen Abschnittes bestimmt, wo statt a_{rs} immer A_{rs} zu setzen ist. — Es folgt aber dann aus 1) und 2) dieses Abschnittes: $c_{pp} = \Delta$, $c_{pq} = 0$, also:

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \Delta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Delta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^n$$

$$\Delta' = \Delta^{n-1}.$$

D. h.:

Die Reciproke einer Determinante von n^2 Elementen ist ihre $n-1$ste Potenz.

Es gibt aber auch eine einfache Beziehung zwischen den Gliedern der gegebenen Determinante und den Unterdeterminanten der Reciproke.

Bezeichnen wir die letzteren mit $\alpha_{11}, \alpha_{12} \cdots \alpha_{nn}$, und gehen wir von den Gleichungen aus:

A)
$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \cdots + a_{n1} x_n &= b_1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{n2} x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

Digitized by Google

so erfolgt ihre Auflösung in der Gestalt:

B)
$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= A_{1\,1}\, b_1 + A_{1\,2}\, b_2 + \ldots + A_{1\,n}\, b_n \\
\Delta x_2 &= A_{2\,1}\, b_1 + A_{2\,2}\, b_2 + \ldots + A_{2\,n}\, b_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta x_n &= A_{n\,1}\, b_1 + A_{n\,2}\, b_2 + \ldots + A_{n\,n}\, b_n.
\end{aligned}$$

Löst man diese Gleichungen nach den b auf, so folgt, wenn man die Werthe α einführt:

$$\begin{aligned}
\Delta' b_1 &= \Delta\,(\alpha_{1\,1}\, x_1 + \alpha_{2\,1}\, x_2 + \ldots + \alpha_{n\,1}\, \alpha_n) \\
\Delta' b_2 &= \Delta\,(\alpha_{1\,2}\, x_1 + \alpha_{2\,2}\, x_2 + \ldots + \alpha_{n\,2}\, \alpha_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta' b_n &= \Delta\,(\alpha_{1\,n}\, x_1 + \alpha_{2\,n}\, x_2 + \ldots + \alpha_{n\,n}\, \alpha_n),
\end{aligned}$$

also, wenn man die Glieder dieser Gleichungen mit denen der ursprünglichen vergleicht, und $\Delta' = \Delta^{n-1}$ setzt:

6)
$$\Delta^{n-2} a_{p\,q} = \alpha_{p\,q}.$$

Die Sätze von den Unterdeterminanten lassen sich noch etwas erweitern. — Setzt man nämlich die aus Gleichung 4) gefundenen Werthe der Unterdeterminanten in Gleichung 1) ein, so kommt, in dem man 3) berücksichtigt:

7)
$$\begin{aligned}
\Delta = (a_{p\,1}\, a_{q\,2} - a_{p\,2}\, a_{q\,1}) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{p\,1}\, \partial a_{q\,2}} + (a_{p\,1}\, a_{q\,3} - a_{p\,3}\, a_{q\,1}) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{p\,1}\, \partial a_{q\,3}} \\
+ \ldots + [a_{p,(n-1)}\, a_{q\,n} - a_{p\,n}\, a_{q,(n-1)}] \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{p,(n-q)}\, \partial a_{q\,n}}.
\end{aligned}$$

Setzt man in den Gleichungen 2) r für q und berücksichtigt die Gleichungen 4) so kommt ferner:

8)
$$\begin{aligned}
(a_{r\,1}\, a_{q\,2} - a_{r\,2}\, a_{q\,1}) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{r\,1}\, \partial a_{q\,2}} + (a_{r\,1}\, a_{q\,3} - a_{r\,3}\, a_{q\,1}) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{r\,1}\, \partial a_{q\,3}} \\
+ \ldots + [a_{r,(n-1)}\, a_{q\,n} - a_{r\,n}\, a_{q,(n-1)}] \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{r,(n-1)}\, \partial a_{q\,n}} = 0.
\end{aligned}$$

Diese Beweisführung lässt sich auch für die Unterdeterminanten höherer Ordnung fortsetzen. Man sieht, dass die in der Gleichung 7) enthaltenen Factoren der Unterdeterminanten ebenfalls Determinanten-Form haben, und dies gilt noch, wenn die Unterdeterminanten höherer Ordnung sind, wie leicht zu sehen ist. — Man kann diese Factoren, als die den entsprechenden Unterdeterminanten complementären bezeichnen. Dann gilt aber folgender Satz:

Die Unterdeterminante $p$ter Ordnung der Reciproke ist gleich der complementären der entsprechenden Unterdeterminante der gegebenen Determinante, multiplicirt mit der $p-1$sten Potenz der letzteren.

Ist z. B. $p = 2$, so erhält man:

$$(A_{1\,1}\, A_{2\,2}) = \Delta\,(a_{3\,3}\, a_{4\,4} \ldots a_{n\,n}).$$

Dies folgt leicht aus den mit A) und B) bezeichneten Gleichungen. Die beiden ersten Gleichungen B) geben nämlich sogleich:

$$\begin{aligned}
\Delta\,(A_{2\,2} - A_{1\,1}) = (A_{1\,1}\, A_{2\,2})\, b_1 + (A_{1\,3}\, A_{2\,2})\, b_3 + (A_{1\,4}\, A_{2\,2})\, b_4 \\
+ \ldots + (A_{1\,n}\, A_{2\,2})\, b_n.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Eliminirt man nun aus den Gleichungen A) aber ohne die zweite zu berücksichtigen: $x_3, x_4 \ldots x_n$ so kommt:

$$(a_{11}\, a_{33}\, a_{44} \ldots a_{nn})x_1 + (a_{21}\, a_{33} \ldots a_{44}\, a_{nn})x_2$$
$$= (a_{33}\, a_{44} \ldots a_{nn})b_1 - (a_{34}\, a_{45} \ldots a_{n1})b_2$$
$$+ (a_{35}\, a_{46} \ldots a_{n2})b_4 + \ldots$$

und durch Vergleich mit der vorstehenden Gleichung, wenn man die Werthe von A_{22} und A_{11} berücksichtigt:

$$(A_{11}\, A_{22}) = \Delta(a_{33}\, a_{44} \ldots a_{nn}) \ldots$$

Für $p = 1$ lässt sich diese Formel auch schreiben:

9) $$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{pq}}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{rs}} - \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ps}}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{rq}} = \Delta\frac{\partial^2\Delta}{\partial a_{pq}\,\partial a_{rs}} \ldots$$

Wie leicht zu sehen, lässt sich dieser Beweis leicht auf die Unterdeterminante höherer Ordnung ausdehnen.

Ist die gegebene Determinante gleich Eins, so ist dies auch mit der Reciproke der Fall, dann stimmen also die Unterdeterminanten der letzteren mit den complementären der ersteren überein und umgekehrt.

Ist $\Delta = 0$, so ist auch $\Delta' = 0$. Es gibt dann aber die Gleichung 9):

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{pq}} : \frac{\partial\Delta}{\partial a_{rq}} = \frac{\partial\Delta}{\partial a_{ps}} : \frac{\partial\Delta}{\partial a_{rs}}.$$

D. h.:

Ist die Determinante gleich Null, so findet zwischen den entsprechenden Elementen verschiedener Reihen der Reciproke Proportionalität statt.

Noch gilt für die Reciproken folgender Satz:

Das Quadrat der Reciproke ist mit der Reciproke des Quadrats der gegebenen Determinante von Glied zu Glied identisch.

Es ist nämlich, wenn Δ wieder die gegebene Determinante, Δ' die Reciproke ist, nach dem Multiplicationssatze:

$$(\Delta^1)^2 = \Delta^{2(n-1)} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{nn} \end{vmatrix}$$

wo die Gleichungen C des vorigen Abschnittes geben:

$$B_{pq} = A_{1p}\, A_{1q} + A_{2p}\, A_{2q} + \ldots + A_{np}\, A_{nq}$$

Eben so ist:

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \ldots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \ldots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \ldots & E_{nn} \end{vmatrix}$$

$$E_{pq} = a_{1p}\, a_{1q} + a_{2p}\, a_{2q} + \ldots + a_{np}\, a_{nq}$$

Digitized by Google

Seien $b_{11}, b_{12} \ldots b_{nn}$ die Glieder der Reciproke von Δ^2, also:

$$b_{pq} = \frac{\partial(\Delta^2)}{\partial E_{pq}}.$$

so ist:

$$(\Delta^2)' = \Delta^{2(n-1)} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$\frac{\partial(\Delta^2)'}{\partial b_{bq}} = (\Delta^2)^{n-2} E_{pq}.$$

Es soll nun sein $b_{pq} = B_{pq}$. In der That hat man nach den Gleichungen 1) und 2):

$$E_{1p}\ b_{1q} + E_{2p}\ b_{2q} + \ldots + E_{np}\ b_{nq} = 0$$
$$E_{1p}\ b_{1p} + E_{2p}\ b_{2p} + \ldots + E_{np}\ b_{np} = \Delta^2,$$

und wenn man den Werth von E_{pq} berücksichtigt, ergibt sich:

$$E_{1p}\ A_{1q} + E_{2p}\ A_{2q} + \ldots + E_{np}\ A_{nq} = \Delta\, a_{pq}.$$

Setzt man in den beiden vorletzten Gleichungen $p = 1, 2 \ldots n$, multiplicirt bezüglich mit $A_{11}, A_{12} \ldots A_{1n}$, dann mit $A_{21}, A_{22} \ldots A_{2n}$ u. s. w., addirt die Producte und berücksichtigt die letzte Gleichung, so ergibt sich:

$$\Delta A_{pq} = a_{1q}\ b_{1p} + a_{2q}\ b_{2p} + \ldots + a_{nq}\ b_{np},$$

wenn man hierin p mit $1, 2 \ldots n$ vertauscht, die Producte mit $A_{q1}, A_{q2} \ldots A_{qn}$ multiplicirt und addirt, so kommt dann:

$$\Delta b_{pq} = \Delta - (A_{1p}\ A_{1q} + A_{2p}\ A_{2q} + \ldots + A_{np}\ A_{nq}),$$

d. h. $b_{pq} = B_{pq}$, was zu beweisen war.

5) Symmetrische und symmetrale Determinanten.

Unter Diagonale einer Determinante soll immer die von links oben nach rechts untengehende, d. h. die Elemente $a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn}$ verstanden werden.

Ein Element irgend einer Reihe heisst dem einer Colonne conjugirt, wenn beide in Bezug auf die Diagonale

$$a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn}$$

symmetrische Stellung haben, also a_{pq} ist conjugirt a_{qp}.

Eine Determinante heisst symmetrisch, wenn jede zwei conjugirten Glieder gleich sind, also wenn $a_{pq} = a_{qp}$ ist.

Ist die Summe dieser Glieder gleich 0, also:

$$a_{pq} = -a_{qp},$$

so nennt Cayley die Determinante eine *Determinante gauche*. Da sich im Deutschen kein Name dafür eingebürgert hat, wollen wir sie als symmetral bezeichnen. Aus der Bedingung für solche Determinanten folgt:

$$a_{pp} = 0,$$

indess kommt es auch vor, dass die Gleichung:

$$a_{pq} = -a_{qp}$$

nur gelten soll, wenn p ungleich q ist; eine solche Determinante soll uneigentlich symmetral heissen.

Die symmetrischen und symmetralen

Determinanten theilen diese Eigenschaft, wie leicht zu sehen, mit gewissen Unterdeterminanten, nämlich denen von der Form:

$$(a_{1\,1}\ a_{2\,2}\cdots a_{p-s\,p-s}\ a_{p+1\,p+1}\cdots a_{n\,n}),$$

deren erstes Glied also durch die Diagonale gebildet wird. Diese bezeichnet man oft als Haupt-Unterdeterminante.

Da ferner bei den symmetralen Determinanten, bei Vertauschung der Colonnen mit den Reihen jedes Glied sein Zeichen ändert, und somit die Determinate selbst ein anderes Vorzeichen erhält, wenn die Anzahl ihrer Glieder ungrade ist, bei grader Anzahl aber dasselbe behält, so folgt hieraus, da eine solche Vertauschung die Determinante nicht ändern darf:

Eine symmetrale Determinante von ungrader Gliederzahl ist immer gleich Null.

Dasselbe gilt natürlich für alle Haupt-Unterdeterminanten, je nachdem die Gliederzahl der letztern grade oder ungrade ist.

Symmetrische Determinanten haben, wie leicht zu sehen, auch symmetrische Reciproken. Ebenso zeigt sich, dass die Reciproke einer symmetralen Determinante dann auch symmetral, wenn die Gliederzahl grade ist.

Ist die Gliederzahl ungrade, so ist die ursprüngliche Determinante und nach dem im vorigen Abschnitte Gezeigten auch die Reciproke gleich Null. Die letztere hat dann symmetrische Form.

Die Sätze über die Gestalt der Unterdeterminanten als Differenzialquotienten sind für symmetrische und symmetrale Determinanten zu modificiren, da hier jedes Element $a_{p\,q}$ zweimal vorkommt.

Sei $\left(\frac{\partial\triangle}{\partial a_{p\,q}}\right)$ der Differenzialquotient nach beiden $a_{p\,q}$, dann ist:

$$\left(\frac{\partial\triangle}{\partial a_{p\,q}}\right) = \frac{\partial\triangle}{\partial a_{p\,q}} + \frac{\partial\triangle}{\partial a_{q\,p}} = A_{p\,q} + A_{q\,p},$$

für symmetrische Determinanten also, wo $A_{p\,q} = A_{q\,p}$:

$$\left(\frac{\partial\triangle}{\partial a_{p\,q}}\right) = 2A_{p\,q}, \qquad \left(\frac{\partial\triangle}{\partial a_{p\,p}}\right) = A_{p\,p}.$$

Dagegen ist für symmetrale Determinanten von gradem Grade:

$$A_{p\,q} = -A_{q\,p},$$

(da $A_{p\,q}$, $A_{q\,p}$ Glieder der Reciproke sind), also:

$$\left(\frac{\partial\triangle}{\partial a_{p\,q}}\right) = 0,$$

bei ungradem Grade, wo $A_{p\,q} = A_{q\,p}$ ist:

$$\left(\frac{\partial\triangle}{\partial a_{p\,q}}\right) = 2A_{p\,q}.$$

Da bei ungrader Gliederzahl der symmetralen Determinante dieselbe verschwindet, so sind nach einem im vorigen Abschnitte bewiesenen Satze die entsprechenden Glieder verschiedener Reihen der Reciproke proportional, also:

$$\frac{A_{p\,q}}{A_{p\,p}} = \frac{A_{r\,q}}{A_{r\,p}}, \qquad \frac{A_{p\,q}}{A_{q\,q}} = \frac{A_{p\,r}}{A_{q\,r}}.$$

Da aber die Reciproke symmetrisch ist, so erhält man durch Multiplication beider Gleichungen:

$$\frac{(A_{p\,q})^2}{A_{p\,p}\ A_{q\,q}} = 1.$$

1) $$A_{p\,q} = \sqrt{A_{p\,p}\ A_{q\,q}}$$

oder auch:

$$\frac{A_{p\,q}}{A_{p\,r}} = \sqrt{\frac{A_{q\,q}}{A_{r\,r}}}.$$

Jedes Glied der Reciproke einer symmetralen Determinante von ungrader Gliederanzahl ist gleich der mittleren Proportionale der beiden Glieder der Diagonale, welche mit dem gegebenen in einem Index übereinstimmen.

Seien jetzt $a_{1\,1}\cdots a_{n\,n}$ wieder die Glieder einer beliebigen Determinante, $A_{1\,1}, A_{1\,2}\cdots A_{n\,n}$ die Unterdeterminanten, $B_{p\,q}$ die $a_{p\,q}$ entsprechende Unterdeterminante der Determinante $A_{r\,s}$, so lässt sich leicht die Gleichung beweisen:

1) $$\triangle = a_{r\,s}\ A_{r\,s} - \sum_{p\,q} a_{p\,p}\ a_{q\,s}\ B_{p\,q},$$

wo

$$q = 1, 2\ldots r-1, r+1\ldots n$$
$$p = 1, 2\ldots s-1, s+1\ldots n$$

zu setzen ist. Denn offenbar kommt ein Glied $a_{r\,s}$ vor, welches mit der entsprechenden Unterdeterminante $A_{r\,s}$ multiplicirt ist.

Digitized by Google

In jedem der übrigen Glieder befinden sich zwei Factoren a_{rp} und a_{qs}, die einer Reihe und einer Columne die in a_{rs} zusammentreffen, entnommen sind. Mit diesem Product ist multiplicirt eine Unterdeterminante zweiter Ordnung, die der mit $a_{rs}\ a_{qp}$ multiplicirten entgegengesetzt gleich ist, (dies Product geht nämlich aus $a_{rp}\ a_{qs}$ durch eine Permutation hervor) oder was dasselbe ist, der mit a_{qp} multiplicirten in A_{rs}, diese aber ist gleich B_{pq}.

Für $s = r$ hat man nun, wenn sich B_{pq} auf A_{rr} bezieht:

2) $$\Delta = a_{rr} A_{rr} - \Sigma a_{rp} a_{qr} B_{pq} + pq.$$

Seien nun $a_{11}, a_{12} \ldots a_{nn}$ Glieder einer symmetralen Determinante von grader Gliederzahl, so bilden

$$A_{11}\ A_{12} \ldots$$

auch eine symmetrale Determinante, und die Reciproke der symmetralen Determinante A_{rr}, welche von ungrader Gliederzahl ist:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1\,n-1} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ B_{n-1\,1} & B_{n-2\,2} & \ldots & B_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$$

ist also symmetrisch gleich Null, und die Glieder erfüllen die Gleichung:

$$B_{pq} = \sqrt{B_{pp}\ B_{qq}}.$$

Somit ist also, da $a_{rs} = -a_{sr}$, $a_{rr} = 0$ ist:

$$\Delta = \sum_{pq} a_{rp}\ a_{rq}\ \sqrt{B_{pp}\ B_{qq}} = \sum_{p} a_{rp} \sqrt{B_{pp}} \sum_{q} a_{rq} \sqrt{B_{qq}},$$

d. h.:

2) $$\Delta = \left(\sum_{p} a_{rp} \sqrt{B_{pp}}\right)^2;$$

d. h.:

Eine symmetrale Determinante von grader Gliederzahl ist das Quadrat einer ganzen rationalen Function der Coefficienten.

Hieraus folgt sogleich:

$$\sqrt{\Delta} = \sum_{p} a_{rp} \sqrt{B_{pp}},$$

aber B_{pp} ist selbst eine symmetrale Determinante von grader, nämlich $n-2$ter Ordnung, sie kann also ähnlich wie Δ ausgedrückt werden. Indem man so fortfährt, kommt man schliesslich auf Determinanten von zwei Gliedern der Haupt-Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1m} \\ -a_{1m} & 0 \end{vmatrix} = a_{1m}^2$$

d. h.:

Eine symmetrale Determinante von grader Gliederzahl ist das Quadrat einer ganzen rationalen Function der Glieder.

Es besteht dann $\sqrt{\Delta}$ aus $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)$ Gliedern, die Producte von n Elementen sind, und verschiedene Indices haben.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - eb + cd)^2.$$

Digitized by Google

Dem letzten Satze lässt sich aber auch eine Ausdehnung auf solche Determinanten geben, welche die Bedingung $a_{pq} = -a_{qp}$ nur erfüllen, wenn q ungleich p ist, wo aber die Glieder $a_{1,1}\ a_{2,2} \ldots$ alle gleich sind.

Sei Δ zunächst eine beliebige Determinante, D diejenige, welche daraus entsteht, wenn man die Diagonalglieder sämmtlich mit Null vertauscht, D_s die dem Gliede $a_{s,s}$ entsprechende, $D_{s,t}$ die $a_{s,s}\ a_{s,t}$ entsprechende Unterdeterminante, u. s. w. so dass z. B. $D_{s,t,u}$ also eine Unterdeterminante dritter Ordnung ist, dann ist:

$$\Delta = D + \sum_r a_{r,r} D_r + \sum_{r,s} a_{r,s} a_{s,s} D_{r,s} + \sum_{r,s,t} a_{r,r} a_{s,s} a_{s,t} D_{r,s,t} + \ldots + a_{1,1}\ a_{2,2} \ldots a_{n,n}$$

Denn die Glieder von Δ, welche kein Glied der Diagonale enthalten, sind mit D identisch, die, welche ein Glied derselben enthalten, sind mit D_r, die zwei Glieder enthalten, mit $D_{r,s}$ u. s. w., multiplicirt.

Sei nun

$$a_{pq} = -a_{qp}, \qquad a_{pp} = x,$$

so werden von den Determinanten $D, D_r, D_{r,s} \ldots$ diejenigen, deren Gliedersahl ungrade ist, verschwinden, die, bei denen sie grade ist, symmetral sein. Aus diesem Grunde erhält man, wenn man die Glieder von Δ in umgekehrter Ordnung schreibt:

$$\Delta = x^n + x^{n-2} \Sigma D_2 + x^{n-4} \Sigma D_4 + \ldots,$$

wo ΣD_k die Summe der Unterdeterminanten mit k^2 Gliedern bezeichnen, und alle Determinanten in die Summe aufgenommen werden, deren Indicesreihen die Combinationen zu k aus der Reihe $1, 2 \ldots n$ ergeben.

Da nun $D_{2,s}$ jedenfalls ein Quadrat ist, so folgt:

Die bezeichnete Determinante ist eine ganze rationale Function des Hauptelements, welche nur grade oder ungrade Exponenten enthält. Die Coefficienten der Entwicklung aber sind Quadratsummen.

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & b & c \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix} = x^4 + (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)x^2 + (af-be-cd)^2.$$

6) Ueber die Resultanten.

Wenn aus einer Anzahl Gleichungen die Unbekannten sämmtlich eliminirt werden, so heisst die linke Seite der Eliminationsgleichung, (also der Ausdruck, welcher verschwindet) Resultante des Systems.

Die Anzahl der Unbekannten ist im Allgemeinen $n-1$, wenn die der Gleichungen n ist.

Bei homogenen Gleichungen ist sie gleich n.

Jedes System kann in eine von homogenen Gleichungen verwandelt werden, wenn man die Unbekannten x, y, z ... vertauscht mit $\frac{x'}{u}, \frac{y'}{u}, \frac{z'}{u} \ldots$ und mit der höchsten Potenz von u multiplicirt.

Homogene Gleichungen dagegen werden in solche mit einer Unbekannten weniger verwandelt durch Division mit der höchsten Potenz der einen davon.

Die Auffindung der Resultante kann auf verschiedene Weise geschehen. Für weitere Entwickelungen, wenn auch nicht für numerische Berechnung, empfiehlt sich namentlich die Anwendung der symmetrischen Functionen.

Digitized by Google

Seien zunächst gegeben zwei Gleichungen:

$$\varphi_{(x)} = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

$$\psi_{(x)} = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0.$$

Sei zunächst $a_0 = 1$ und $b_0 = 1$.

Seien die Wurzeln der ersten Gleichung

$$x_1, x_2 \ldots x_m.$$

Setzt man einen dieser Werthe x_s in die zweite Gleichung ein, so kommt

$$\psi_{(x_s)} = 0,$$

es verschwindet also auch das Product:

$$\psi_{(x_1)} \psi_{(x_2)} \cdots \psi_{(x_m)}.$$

Dies ist eine symmetrische Function der Wurzeln der ersten Gleichung, mithin eine ganze rationale Function der Coefficienten derselben, von x frei, und somit die Resultante.

Sind $x^{(1)}, x^{(2)} \ldots x^{(n)}$ die Wurzeln der zweiten Gleichung, so ergibt sich für die Resultante auch die Form:

$$q[x^{(1)}] \; q[x^{(2)}] \ldots . \; q[x^{(n)}].$$

Beide stimmen bis höchstens aufs Vorzeichen überein. Denn die erste lässt sich schreiben:

$$\begin{array}{ccc} [x_1 - x^{(1)}] & [x_1 - x^{(2)}] & \ldots [x_1 - x^{(n)}] \\ [x_2 - x^{(1)}] & [x_2 - x^{(2)}] & \ldots [x_2 - x^{(n)}] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [x_m - x^{(1)}] & [x_m - x^{(2)}] & \ldots [x_m - x^{(n)}] \end{array}$$

und die zweite:

$$\begin{array}{ccc} [x^{(1)} - x_1] & [x^{(1)} - x_2] & \ldots [x^{(1)} - x_m] \\ [x^{(2)} - x_1] & [x^{(2)} - x_2] & \ldots [x^{(2)} - x_m] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [x^{(n)} - x_1] & [x^{(n)} - x_2] & \ldots [x^{(n)} - x_m]. \end{array}$$

Völlige Uebereinstimmung findet also statt, wenn wenigstens eine der Zahlen m und n grade ist.

Sind a_0 und b_0 beliebig, so bringt man die Gleichungen φ und ψ durch Division mit diesen Grössen auf die eben betrachtete Form, zum Schlusse wird dann durch Multipliciren mit der höchsten Potenz von a_0 und b_0 der Nenner weggeschafft. Es ist daher in diesem Falle die Resultante eine homogene Function der Coefficienten. Denn ehe sie von den Brüchen befreit wurde, enthielt sie nur die Ausdrücke:

$$\frac{a_1}{a_0}, \; \frac{a_2}{a_0} \ldots \; \frac{b_1}{b_0}, \; \frac{b_2}{b_0} \ldots$$

war also homogen vom Grade Null, durch Multiplication mit einer Grösse aber wird die Homogenität nicht aufgehoben.

Die Formen sind in diesem allgemeineren Falle:

$$a^p \psi(x_1) \; \psi(x_2) \ldots \psi(x_m)$$

$$= \pm b^q \varphi[x^{(1)}] \; \psi[x^{(2)}] \ldots \psi[x^{(n)}].$$

Die erstere Form zeigt, dass die Coefficienten von ψ in der $m$ten, die zweite, dass die von φ in der $n$ten Dimension enthalten sind, also:

Die Resultate zweier Gleichungen vom $m$ten und $n$ten Grade enthält die Coefficienten der ersten in der $n$ten, die der zweiten in der $m$ten Dimension. Ihre Dimension ist daher mn wenn man alle darin enthaltenen Grössen betrachtet.

Wird jede der Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x^{(1)}, x^{(2)} \ldots$ mit einem Faktor c multiplicirt, so wird offenbar die Resultante mit c^{mn} multiplicirt sein. Dieses Multipliciren der Wurzeln ist aber dasselbe, als wenn in φ multiplicirt wird a_1 mit c, a_2 mit $c^2 \ldots$; Gleiches gilt für ψ, d. h. wenn man in der Resultante für a_p, b_p bezüglich schreibt $a_p c^p$, $b_p c^p$, so ist dies dasselbe, als wenn die Resultante mit c^{mn} multiplicirt wird. Die beschriebene Substitution ist aber gleich einer Multication jedes Gliedes der Resultante mit einer Potenz von c, welche die Summe aller Indices des Gliedes zum Exponenten hat, also z. B. $a_p a_q b_r b_s$ mit $c^{p+q+r+s}$. Da nun dieser Exponent gleich mn ist, so folgt:

Die Summe der Indices jedes Gliedes der Resultante ist dieselbe und zwar gleich mn.

Uebrigens ist offenbar die Resultante der beiden Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ auch die der Gleichungen:

Digitized by Google

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 = 0$$

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0 = 0.$$

Seien jetzt zwei homogene Gleichungen vom $m$ten und $n$ten Grade mit drei Unbekannten gegeben:

$$ax^m + (\beta y + \gamma z) x^{m-1} + (\delta y^2 + \varepsilon yz + \zeta z^2) x^{m-2} + \ldots$$

$$a_1 x^n + (\beta_1 y + \gamma_1 z) x^{n-1} + (\delta_1 y^2 + \varepsilon_1 yz + \zeta_1 z^2) x^{n-2} + \ldots$$

Eliminirt man x, so hat man in der Resultante für die Summe der Indices jedes Gliedes $m\,n$; jedes dieser Glieder enthält aber y und z in der Dimension, welche der Stellung des Gliedes, d. h. dem Index entspricht, z. B.

$$a_1 = \beta y + \gamma_1 z$$

u. s. w.

Die Resultante ist also eine homogene Function von y und z vom Grade $m\,n$. Setzt man dieselbe gleich Null, so erhält man durch Auflösung $m\,n$ Werthe von $\frac{y}{z}$. Dasselbe findet statt, wenn man y eliminirt, man erhält dann $m\,n$ Werthe von $\frac{x}{z}$ aus den entsprechenden Resultanten. Also:

Die Zahl der Werth-Systeme $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, welchen die beiden Gleichungen genügen, ist gleich $m\,n$.

Für nicht homogene Gleichungen mit zwei Unbekannten ist $z = 1$ zu setzen.

Nehmen wir das Letztere an, so lassen sich auch die symmetrischen Functionen aus den Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_{m\,n}$, $y_1, y_2 \ldots y_{m\,n}$ rational bilden.

Dies ist an sich klar für diejenigen Functionen, welche nur $x_1, x_2 \ldots$ oder $y_1, y_2 \ldots$ enthalten, da diese sich unmittelbar aus den entsprechenden Resultantengleichungen ergeben.

Was aber die anbetrifft, die zugleich x und y enthalten, so verfahre man folgendermaassen. Wir setzen:

$$u = px + qy,$$

eliminiren mittels dieser Gleichung aus beiden gegebenen x, wodurch ihr Grad nicht verändert wird, und bilden durch Wegschaffen von y die Resultante, welche nach u vom $m\,n$ten Grade ist.

Es lassen sich daraus die symmetrischen Functionen von v, also auch die Potenzsummen darstellen. Also:

$$\Sigma v^t = (px_1 + qy_1)^t + (px_2 + qy_2)^t + \ldots$$

Beide Seiten der Gleichung enthalten $p\,q$, indem man nun die Coefficienten beliebiger Potenzen beider z. B. $p^r q^{t-r}$ vergleicht, ergibt sich der Werth von $\Sigma x_s^r y_s^{t-r}$ und eben so sämmtliche symmetrische Functionen.

Seien die gegebenen Gleichungen homogen in x, y, z, so lassen sich die homogenen Functionen von $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ in dieser Weise darstellen: nimmt man für $z_1, z_2 \ldots z_{m\,n}$ einen beliebigen Werth an, wie dies ja geschehen kann, so ergeben sich hieraus alle symmetrischen Functionen der drei Variablen.

Gehen wir jetzt zur Resultante von drei beliebigen Gleichungen mit zwei oder drei homogenen Gleichungen mit drei Unbekannten über. Seien dieselben:

$$\varphi(x, y) = 0,\ \varphi_1(x, y) = 0,\ \varphi_2(x, y) = 0,$$

bezüglich vom n, n_1, n_2ten Grade.

Seien $x_1\, x_2 \ldots x_{n,n_1}$, $y_1\, y_2 \ldots y_{n\,n_1}$ die Werthsysteme, welche den beiden ersten Gleichungen genügen, dann wird:

$$\varphi_2(x_1, y_1)\, \varphi_2(x_2, y_2) \ldots \varphi_2(x_{nn_1}, y_{nn_1})$$

verschwinden, und da darin nur symmetrische Functionen der Wurzeln vorhanden sind, so drücken sich die Wurzeln rational durch die Coefficienten von φ und φ_1 aus. Die Resultante hat drei Formen, je nachdem man in φ, φ_1 oder φ_2 einsetzt, sie enthält nach der letzten Form die Coefficienten von φ_2 im Grade nn_1, also die von φ_1 im Grade nn_1, von φ im Grade nn_1 und zwar sind die Coefficienten jeder der drei Gleichungen in homogener Form enthalten, wenn das Anfangsglied mit a_0 und nicht mit 1 multiplicirt gedacht wird.

Offenbar nämlich ist dann φ_2 homogen und von erster Ordnung, also die Resultante homogen und von nn_1ter Ordnung in Bezug auf die Coefficienten von n_2.

Wie bei der Resultante zweier Gleichungen lässt sich nun zeigen, dass wenn

Digitized by Google

man allen Gliedern, welche die Potenzen irgend einer Unbekannten z. B. x multipliciren, einem dem Exponenten derselben gleichen Index gibt, also dem Coefficienten von z^p den Index p, dass dann die Summe der Indices jedes Gliedes der Resultante $n\,n_1\,n_2$ beträgt. Ferner wenn drei homogene Gleichungen vom Grade n, n_1, n_2 mit vier Variablen x, y, z, u gegeben sind, dieselben durch n, n_1, n_2 Werthsysteme erfüllt werden. — Hieraus dann ergibt sich die Bildung der symmetrischen Functionen von $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$ womit man dann auf die Resultante von vier Gleichungen übergehen kann u. s. w.

Es folgt hieraus, dass die Resultante von p Gleichungen in Bezug auf die Coefficienten einer jeden homogen und von einem Grade ist, der durch das Produkt der Grade der übrigen $p-1$ Gleichungen angezeigt wird. Das Produkt der Grade aller zeigt die Indicessumme jedes Gliedes der Resultante an, wenn man jedem Factor der Potenzen einer Variable etwa von x^p den Index p gibt.

Die Theorie der Resultante gibt auch ein einfaches Mittel, die symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Wurzeln mehrerer Gleichungen leicht zu bilden.

Seien $n-1$ Gleichungen mit n Unbekannten gegeben.

Man fügt eine $n$te lineare Gleichung hinzu, $f=0$, eliminirt man dann $n-1$ Unbekannte, so ist die Resultante, welche noch eine Unbekannte ξ enthält:

$$f(x_1, y_1, z_1 \ldots),\ f(x_2, y_2, z_2 \ldots) \ldots f(x_s, y_s, z_s \ldots)$$

und die einzelnen Glieder mit der independenten Darstellung verglichen gibt die einfachen symmetrischen Functionen der x, y, z . . . als Coefficienten der gleichen Potenzen von ξ in beiden Darstellungen. Hieraus aber lassen sich alle symmetrischen Functionen bilden.

Ersetzt man nun f durch eine Gleichung F vom beliebigen Grade, so lässt sich, da die symmetrischen Functionen bekannt sind, die Resultante sogleich herstellen. Man kann hierbei von zwei Gleichungen, deren eine linear ist, ausgehen, diese letztere durch eine beliebige ersetzen, mit einer dritten linearen verbinden u. s. w., wodurch sich dann die Resultante von beliebig viel Gleichungen bestimmen lässt.

7) Von den gemeinschaftlichen Wurzeln mehrerer Gleichungen.

Das Verschwinden der Resultante ist die Bedingung, dass beide Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben. Bildet man aus n homogenen Gleichungen mit n Unbekannten, auf welche Form sich ja ein nicht homogenes System mit $n-1$ Unbekannten bringen lässt, die Resultante, und verschwindet diese, so lassen sich, die Verhältnisse der Unbekannten im Allgemeinen als rationale Functionen der Coefficienten darstellen. Es soll hier die entsprechende Form gefunden werden.

Seien gegeben die Gleichungen:

$$\varphi = 0,\quad \psi = 0,\quad \chi = 0$$

und φ von der Form:

$$\varphi = ax^m + bx^{m-1}y + cx^{m-2}z + \ldots$$

Sei $R(a, b, c \ldots)$ die Resultante dieser Gleichungen. Ersetzt man nun in φ die Coefficienten: a, b, c . . . bezüglich durch $a+\alpha$, $b+\beta$, $c+\gamma$ . . . so bleibt die Resultante unverändert, wenn die Vermehrungen φ ungeändert lassen, also die Bedingung erfüllen:

1) $$\alpha x^m + \beta x^{m-1}y + \gamma x^{m-2}z + \ldots$$

Nun hat die Resultante aber nach der Aenderung die Form:

$$R(a+\alpha,\ b+\beta,\ c+\gamma) \ldots = 0.$$

Setzen wir α, β, γ, die bis auf die Bedingung 1) beliebig sind, unendlich klein, so ergibt sich da $R(a, b, c \ldots) = 0$ ist, auch:

2) $$\frac{\partial R}{\partial a}\alpha + \frac{\partial R}{\partial b}\beta + \frac{\partial R}{\partial c}\gamma + \ldots = 0$$

also da die Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ . . . beliebig sind im Vergleich mit 1):

$$x : y : z \ldots = \frac{\partial R}{\partial a} : \frac{\partial R}{\partial b} : \frac{\partial R}{\partial c} \ldots$$

Da, wenn man eine beliebige Gleichung mit $n-1$ Unbekannten homogen macht, x, y, z . . . durch $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$ . . . ersetzt werden, so geben also diese Verhältnisse in diesem Falle die Unbekannten selbst.

Offenbar kann man statt a, b, c beliebige Glieder von φ nehmen, die im Verhältnisse $x : y : z$ . . . stehen, also enthalte φ die Glieder:

$$gx^p y^q + hx^{p-1}y^{q+1},$$

Digitized by Google

so ist auch:

$$x : y = \frac{\partial R}{\partial g} : \frac{\partial R}{\partial h}.$$

In Ausnahmefällen kann es vorkommen, dass es mehrere Werthsysteme von $x : y : z$ gibt, welche den Bedingungen genügen. Dann muss aber, da das Verhältniss kein eindeutiges bleiben darf:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial b} = \frac{\partial R}{\partial c} = \ldots = 0$$

sein. D. h.:

Haben die Gleichungen zwei oder mehrere gemeinschaftliche Wurzelsysteme, so müssen sämmtliche erste Differenzialquotienten der Resultante verschwinden.

Um in diesem Falle die gemeinschaftlichen Wurzelwerthe zu finden, bemerke man, dass man hat, da R und seine ersten Differenzialquotienten verschwinden:

$$R(a+\alpha,\ b+\beta \ldots .) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial b}\alpha\beta + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2}\beta^2 \ldots\right) = 0.$$

Da die Verhältnisse der α und β übereinstimmen, so kann man sie bis auf je zwei verschwinden lassen, es muss dann also z. B. die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial b}\alpha\beta + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2}\beta^2 = 0$$

mit Gleichung 2), d. h.:

$$\alpha x^m + \beta x^{m-1} y = 0$$

übereinstimmen, daraus erhält man, wenn man α und β eliminirt:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a^2}y^2 - 2\frac{\partial^2 R}{\partial a\,\partial b}xy + \frac{\partial^2 R}{\partial b^2}x^2 = 0,$$

eine Gleichung, welche zwei Systeme x und y ergibt. In gleicher Weise folgen die übrigen Unbekannten.

Sollen mehr als zwei Werthsysteme stattfinden, so müssen also auch alle zweiten Differenzialquotienten von R verschwinden, und zur Bestimmung der Unbekannten ergibt sich eine Gleichung dritter Ordnung. Also allgemein:

Wenn n Werthsysteme die Gleichungen verificiren, so muss die Resultante und alle ihre n Differenzialquotienten bis zur $(n-1)$ten Ordnung verschwinden, die $n$te Ordnung aber nicht, und aus diesen ergeben sich Gleichungen $n$ten Grades zur Bestimmung der Systeme.

8) Andere Lösungen des Eliminationsproblems.

Für theoretische Untersuchungen ist die Eliminationsmethode mittels symmetrischer Functionen die beste. Bei wirklicher Berechnung führen jedoch andere Methoden schneller zum Ziele.

Wir betrachten zunächst zwei Gleichungen.

Seien dieselben Gleichungen zunächst von gleichem Grade:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0.$$

Man multiplicirt die erste Gleichung mit b_0, die zweite mit a_0 und subtrahirt, ebenso die erste mit b_n, die zweite mit a_n und subtrahirt. Die letztere Differenz kann dann durch x getheilt werden, man hat also zwei Gleichungen $(n-1)$ten Grades mit dem man ebenso verfährt u. s. f., so dass man schliesslich zwei Gleichungen ersten Grades hat, aus denen man x eliminirt. Von den zuletzt genannten zwei Gleichungen gibt übrigens eine jede x selbst als Function der Coefficienten.

Sind die Gleichungen von verschiedenem Grade:

$$a_0 x^{n+p} + a_1 x^{n+p-1} + \ldots + a_{n+p} = 0$$

$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0,$$

so multiplicirt man die erste mit b_0, die zweite mit $a_0 x^p$ und subtrahirt, man hat dann eine Gleichung vom Grade $n+p-1$

$$(a_0 b) x^{n+p-1} + (a_1 b_1) x^{n+p-2} + \ldots + a_{n+p} = 0.$$

Diese wird mit b_0 und die zweite Gleichung mit $(a_0 b) x^{p-1}$ multiplicirt, und subtrahirt, wodurch eine vom Grade $n+p-2$ entsteht; so fortfahrend bringt man die erste Gleichung auf den Grad n und hat sie dann mit der zweiten in der obigen Weise zu behandeln.

Diese Methode gibt aber das Resultat mit nicht dazugehörigen Factoren belastet, gibt also nicht eigentlich die Resultante. Von diesem Uebelstand sind die folgenden Methoden frei.

Nach Sylvester verfährt man folgendermaassen.

Seien die Gleichungen:

Digitized by Google

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$
$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0.$$

Man multiplicirt die erste nach der Reihe mit

$$x,\ x^2 \ldots x^{n-1}$$

die zweite mit

$$x,\ x^2 \ldots x^{m-1}.$$

Man hat dann ein System von $m+n$ Gleichungen, worin in linearer Form vorkommen

$$x^0,\ x,\ x^2 \ldots x^{m+n-1}.$$

Diese $m+n$ Grössen kann man als unabhängige Grössen betrachten und eliminiren, man erhält dann die Resultante in Determinantenform.

Berechnet man aus $m+n-1$ der Gleichungen x, eliminirt man

$$x^2,\ x^3 \ldots x^{m+n-1},$$

so hat man x als Function der Coefficienten.

Cayley verfährt folgendermaassen.

Seien

$$q(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0$$

die Gleichungen, haben sie eine gemeinschaftliche Wurzel x_1, so muss die Gleichung:

$$q + \lambda\psi = 0$$

unabhängig vom Werth von λ durch dieselbe erfüllt werden.

Nun ist:

$$\lambda = \frac{q(x)}{\psi(x)} = \frac{q(x_1)}{\psi(x_1)},$$

also:

$$q(x)\ \psi(x_1) - q(x_1)\ \psi(x) = 0,$$

ein Ausdruck, der jedenfalls durch $x - x_1$ getheilt werden kann. Geschieht dies und setzt man dann die Factoren der Potenzen von x einzeln gleich Null, so hat man hinreichend viel Gleichungen, um die Potenzen von x_1 als unabhängige Grössen zu eliminiren. Z. B.:

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$
$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0.$$

$$(a_0 x^2 + a_1 x + a_2)\ (b_0 x_1^2 + b_1 x_1 + b_2) - (a_0 x_1^2 + a_1 x_1 + a_2)\ (b_0 x^2 + b_1 x + b_2)$$

durch $x - x_1$ dividirt gibt:

$$[(a_0 b_1) x + (a_0 b_2)]\, x_1 + (a_0 b_2) x + (a_1 b_2) = 0,$$

also wenn man die Coefficienten von x und x^0 einzeln verschwinden lässt:

$$\begin{vmatrix} (a_0\, b_1) & (a_0\, b_2) \\ (a_0\, b_2) & (a_1\, b_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Sind drei Gleichungen mit zwei Unbekannten gegeben, so kann man aus je zweien auf eine der angeführten Arten x, und aus den zwei so entstehenden y eliminiren.

In gleicher Weise setzt sich dies Verfahren für eine beliebige Anzahl von Gleichungen fort. Dies Verfahren gibt aber nicht immer die Resultante frei von fremden Factoren.

9) Die Functionaldeterminante und die Hesse'sche Determinante.

Seien gegeben n Functionen

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

von n Variablen

$$x_1\ x_2 \ldots x_n$$

so nennt man die aus den n^2 partiellen Differenzialquotienten derselben gebildete Determinante mit Jakobi: „Functional-Determinante". Bezeichnen wir dieselbe mit $\Delta_{f(x)}$ und setzen wir:

$$\frac{\partial f_t}{\partial x_s} = f_{s\,t},$$

so ist also:

$$\Delta_{f(x)} = (f_{1\,1}\ f_{2\,2} \ldots f_{n\,n})$$

$$= \begin{vmatrix} f_{1\,1} & f_{1\,2} \ldots f_{1\,n} \\ f_{2\,1} & f_{2\,2} \ldots f_{2\,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \\ f_{n\,1} & f_{n\,2} \ldots f_{n\,n} \end{vmatrix}$$

Sind die Functionen f verbunden durch irgend eine Relation

$$\varphi(f_1, f_2 \ldots f_n) = 0,$$

so hat man:

Digitized by Google

$$\frac{\partial\varphi}{\partial f_1} f_{1\,1} + \frac{\partial\varphi}{\partial f_2} f_{1\,2} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial f_n} f_{1\,n} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial f_1} f_{2\,1} + \frac{\partial\varphi}{\partial f_2} f_{2\,2} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial f_n} f_{2\,n} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial f_1} f_{n\,1} + \frac{\partial\varphi}{\partial f_2} f_{n\,2} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial f_n} f_{n\,n} = 0$$

und deshalb durch Elimination der Grössen $\frac{\partial\varphi}{\partial f_p}$:

$$\Delta_{f(x).} = 0.$$

Umgekehrt: Verschwindet die Functional-Determinante, so findet zwischen den f eine Relation statt.

Denn ist letzteres nicht der Fall, so muss es möglich sein, irgend eine der Variablen x_1 durch die f auszudrücken, so dass man hat:

$$x_1 = \psi(f_1\ f_2 \ldots f_n).$$

Hieraus ergibt sich durch Differenziiren:

$$1 = \frac{\partial\psi}{\partial f_1} f_{1\,1} + \frac{\partial\psi}{\partial f_2} f_{1\,2} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial f_n} f_{1\,n}$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial f_1} f_{2\,1} + \frac{\partial\psi}{\partial f_2} f_{2\,2} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial f_n} f_{2\,n}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial f_1} f_{n\,1} + \frac{\partial\psi}{\partial f_2} f_{n\,2} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial f_n} f_{n\,n},$$

und die Differenzialquotienten $\frac{\partial\psi}{\partial f_s}$ erhalten hiernach Ausdrücke, deren gemeinschaftlicher Nenner $\Delta_{f(x)}$ ist. Verschwindet derselbe, so ist es also unmöglich, x_1 in der angedeuteten Weise darzustellen, und es findet eine Relation statt, oder eines der f ist einer Constante gleich.

Die Functional-Determinante kann auch auf ein System linearer Gleichungen bezogen werden. Es ist nämlich:

$$df_p = f_{1\,p}\,dx_1 + f_{2\,p}\,dx_2 + \ldots + f_{n\,p}\,dx_n.$$

Dies ist ein System von n Gleichungen aus denen man $dx_1 \ldots dx_n$ bestimmen kann. Der gemeinschaftliche Nenner ist dann $\Delta_{f(x)}$.

Seien jetzt

$$f_1, f_2 \ldots f_n$$

zunächst Functionen von

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

diese aber selbst Functionen von

$$x_1, x_2 \ldots x_n;$$

es ist dann $\Delta_{f(y)} + \Delta_{f(x)}$ die Functional-Determinante der f, bezüglich als Function der y und x gedacht, $\Delta y(x)$ die der y. Man hat dann:

Digitized by Google

$$df_p = \frac{\partial f_p}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f_p}{\partial y_2} dy_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} dy_n$$

und

$$dy_q = \frac{\partial y_q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_q}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y_q}{\partial x_n} dx_n.$$

Nach dem in Abschnitt 3) Gesagten kann man aus diesen n Gleichungen die dy eliminiren und die Eliminations-Determinante wird:

1) $$\triangle_{f(x)} = \triangle_{f(y)} \cdot \triangle_{y(x)}.$$

Sind aber die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ abhängig von $n+p$ Variablen

$$y_1, y_2 \ldots y_{n+p}$$

diese selbst aber nur von n Grössen

$$x_1, x_2 \ldots x_n,$$

so ergibt sich aus den Betrachtungen des erweiterten Multiplicationstheorems:

2) $$\triangle_{f(x)} = \Sigma \triangle_{f(y)} \triangle_{y(x)}.$$

Ist die Zahl der y $n-p$, die der x n, so finden zwischen den f Beziehungen statt, die Determinante $\triangle_{f(x)}$ verschwindet.

Finden endlich n Gleichungen statt:

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0 \ \ldots \ \varphi_n = 0,$$

welche auf der linken Seite sowohl die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ als auch in evoluter Form die Variablen x enthalten; so hat man Gleichungen von der Form:

$$\frac{-\partial \varphi_s}{\partial x_f} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_f} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_f} + \ldots + \frac{\partial \varphi_s}{\partial f_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_f}$$

und da die Form den Gleichungen C) des Abschnitts 3) entspricht, so ergibt sich:

3) $$\triangle_{\varphi(f)} \triangle_{f(x)} = (-1)^n \triangle_{\varphi(x)},$$

wo unter $\triangle_{\varphi(f)}$ die Determinante

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial f_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial f_2} \ldots \frac{\partial \varphi_n}{\partial f_n} \right\}$$

bezeichnet ist. Sind die x selbst als Functionen der f betrachtet, so hat man ebenso:

$$\triangle_{\varphi(x)} \triangle_{x(f)} = (-1)^n \triangle_{\varphi(f)},$$

also durch Multiplication beider Gleichungen:

4) $$\triangle_{f(x)} \triangle_{x(f)} = 1.$$

Die Formeln 1), 2), 3), 4) sind denen über Differenzialquotienten analog, lassen also in gewisser Weise die Functional-Determinanten als Erweiterung derselben erscheinen.

Bei Gleichungen $f = 0$ bezeichnen wir die Functional-Determinante der f als die der Gleichungen selbst.

Von den letzteren gilt nun namentlich folgender Satz:

I. Wird eine Anzahl von n homogenen Gleichungen durch ein System von Variablen befriedigt, so verschwindet auch die Functional-Determinante dieser Gleichungen, und sind die Gleichungen von gleichem Grade auch die Differenzialquotienten der Determinante in Bezug auf jede Veränderliche.

Digitized by Google

Denn seien gegeben z. B. die homogenen Gleichungen $u, v, w \ldots$ mit drei Unbekannten x, y, z. Sei der Kürze wegen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b_1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = c_1$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = a_2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b_2, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = c_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

so ist nach dem bekannten Satze von homogenen Functionen:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = n_1 u$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = n_2 v$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = n_3 w,$$

wo $n_1, n_2, n_3 \ldots$ bezüglich die Grade von u, v, w sind; eliminirt man nun y und z, so kommt offenbar:

$$\triangle x = (a_1\, b_2\, c_3)\, x = A n_1 u + B n_2 v + C n_3 w,$$

wo $\triangle$ die Functional-Determinante darstellt. Verschwindet $u, v, w \ldots$, so muss letztere also auch verschwinden. Ist jetzt

$$n_1 = n_2 = n_3 = n,$$

so erhält man durch Differenziiren:

$$\triangle + x\frac{\partial \triangle}{\partial x} = nu\frac{\partial A}{\partial x} + nv\frac{\partial B}{\partial x} + nw\frac{\partial C}{\partial x} + n(a_1 A + a_2 B + a_3 C)$$
$$x\frac{\partial \triangle}{\partial y} = nu\frac{\partial A}{\partial y} + nv\frac{\partial B}{\partial y} + nw\frac{\partial C}{\partial y} + n(b_1 A + b_2 B + b_3 C)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

A, B, C sind aber die Unterdeterminanten, also:

$$a_1 A + a_2 B + a_3 C = \triangle$$
$$b_1 A + b_2 B + b_3 C = 0,$$

also da $\triangle, u, v, w$ verschwinden, so muss auch:

$$\frac{\partial \triangle}{\partial x} = \frac{\partial \triangle}{\partial y} = \frac{\partial \triangle}{\partial z} = 0$$

sein. Dieser Beweis gilt offenbar für beliebig viel Variablen.

Eben so lässt sich zeigen:

Wenn unter $n+1$ homogenen Gleichungen n von demselben Grade sind, so sind die partiellen Differenzialquotienten der Functional-Determinante den Differenzialquotienten der $(n+1)$ten Function, die nicht mit ihnen von gleichem Grade ist, proportional.

Denn sind im vorigen Beispiele, $n_2 = n_3 = n$, n_1 ungleich n, so ist, wenn man $\triangle = u = v = w$ gleich Null setzt:

$$x\frac{\partial \triangle}{\partial x} = n(a_1 A + a_2 B + a_3 C) + (n_1 - n) A a_1$$
$$x\frac{\partial \triangle}{\partial y} = n(b_1 A + b_2 B + b_3 C) + (n_1 - n) A b_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

und da die mit n multiplicirten Glieder verschwinden:

$$\frac{\partial \triangle}{\partial x} : \frac{\partial \triangle}{\partial y} : \ldots = a_1 : b_1 : \ldots$$

was zu beweisen war.

Digitized by Google

Hieraus lässt sich augenblicklich die Resultante dreier homogenen Gleichungen vom zweiten Grade in Determinantenform herstellen.

In der That ist ihre Functional-Determinante vom dritten, deren Differenzialquotienten vom zweiten Grade. Die letzteren bilden also ein neues System von drei Gleichungen, welche durch die Wurzeln der gegebenen befriedigt werden.

Eliminirt man also aus den sechs Gleichungen:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0$$

die sechs linearen Unbekannten:

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad xy, \quad xz, \quad yz,$$

so hat man die Resultante in Determinantenform.

Dies lässt sich noch auf drei Gleichungen vom dritten Grade anwenden.

Die Differenzialquotienten der Determinante sind vom fünften Grade.

Multiplicirt man nach der Sylvesterschen Methode die drei gegebenen bezüglich mit:

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad xy, \quad xz, \quad yz$$

so hat man 18, also mit den Differenzialquotienten zusammen 21, woraus sich x^5, x^4y . . . eliminiren lassen.

Einer weiteren Ausdehnung ist dies Verfahren jedoch nicht fähig. Indess hat Sylvester die Resultante dreier homogenen Gleichungen von gleich hohem Grade in Determinantenform gegeben.

Sei der Grad n, so multiplicirt man jede mit x^{n-2}, $x^{n-3}y$, $x^{n-3}z$ . . ., also mit den $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern einer Gleichung $n-2$ten Grades, so ergeben sich $\frac{3n(n-1)}{2}$ Gleichungen. Diese Gleichungen sind aber von $(2n-2)$ten Grade, und enthalten $n(2n-1)$ Glieder, um also die Potenzen als lineare Unbekannte betrachten zu können, bedarf man noch $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen.

Man zerlegt jede der drei Gleichungen nach der Form

$$Ax^\alpha + By^\beta + Cz^\gamma,$$

wo A, B, C noch Unbekannte enthalten, derart, dass $\alpha+\beta+\gamma = n+2$ ist.

Jede Zerlegung gibt eine entsprechende Determinante (A, B_1, C_2), welche gleich Null zu setzen ist.

Wie leicht zu sehen, lässt sich aber diese Zerlegung auf $\frac{n(n+1)}{2}$ Arten anstellen, und diese sind die fehlenden Gleichungen z. B. für $n=4$ bringt man die drei Gleichungen jede nach einander auf die Form:

$$Ax^4 + By + Cz,$$
$$A_1x^3 + B_1y^3 + C_1z,$$
$$A_2x^3 + B_2y^2 + C_2z^2.$$

Jede Zerlegung stellt drei Gleichungen vor, welche eine Determinante, geben, durch Vertauschen von x mit y und z gibt die erste 3, die zweite 6, die dritte nur ein System, die Anzahl ist also 10. In der That ist für $n=4$:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 10.$$

Sind die Grade der Gleichungen nicht gleich, so findet diese Methode zwar Anwendung, das Resultat enthält aber dann fremde Factoren. Wie diese wegzuschaffen sei, zeigt Cayley folgendermaassen.

Die Schwierigkeit liegt darin, dass man in diesem Falle nicht grade soviel Gleichungen als lineare Unbekannte erhält, wenn man mit x^n, $x^{n-1}y$ u. s. w. multiplicirt, und n angemessen nimmt, jedoch lässt sich n natürlich so wählen, dass die Anzahl der Gleichungen zu gross ist. Dies kommt auf folgende allgemeine Aufgabe zurück. Seien etwa $m+p$ Gleichungen mit m Unbekannten gegeben.

Je nach der Auswahl von m derselben erhält man ein Resultat, das, wie leicht zu sehen, höher als der Grad der Resultante ist, es findet also bei jeder Auswahl ein anderer, der Aufgabe fremder Factor, statt, der zu entfernen ist.

Sei z. B.

$$m = 3, \quad p = 1,$$

man hat dann vier Gleichungen:

$$s = 0, \quad t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0,$$

welche die Unbekannten x, y, z, die Potenzen und Produkte der gegebenen Variablen linear enthalten. Da sie aber nicht von einander unabhängig sind, so findet eine Beziehung (im Allgemeinen p) statt

$$A_1s + A_2t + A_3u + A_4v = 0.$$

Dann enthält die Eliminations-Determinante der drei Gleichungen s, t, u, A_4 als Factor, denn mit A_4 gleich Null, sind s, t, u durch eine lineare Beziehung verbunden, also ihre Determinante gleich Null.

Digitized by Google

Setzen wir jetzt:

$$s = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$
$$t = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so ist auch, da die Multiplication bezüglich mit A_1, A_2, A_3, A_4 alle Variablen verschwinden lässt:

$$A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + A_4 a_4 = 0$$
$$A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 b_4 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Ausserdem ist:

$$A_4 (a_1\ b_2\ c_4) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ A_4 a_4 & A_4 b_4 & A_4 c_4 \end{vmatrix}$$

Setzt man aber

$$A_4 a_4 = -(A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3)$$
$$A_4 b_4 = \text{u. s. w.},$$

so zerfällt diese Determinante in drei andere, wovon zwei identische Reihen enthalten, also Null geben; es ist schliesslich also:

$$A_4 (a_1\ b_2\ c_4) = -A_3 (a_1\ b_2\ c_3),$$

also die Quotienten:

$$\frac{(a_1\ b_2\ c_4)}{A_3} \quad \text{und} \quad \frac{(a_1\ b_2\ c_3)}{A_4}$$

sind ganze Functionen und unterscheiden sich nur durchs Vorzeichen.

Die Resultante wird also erhalten und zwar frei von zufälligen Factoren, wenn man irgend eine Eliminations-Determinante $(a_1\ b_2\ c_3)$ durch den nicht dazugehörigen Factor A dividirt.

Sei jetzt p grösser als 1, also etwa fünf Gleichungen s, t, u, v, w verbunden durch zwei Relationen:

$$A_1 s + A_2 t + A_3 u + A_4 v + A_5 w = 0$$
$$B_1 s + B_2 t + B_3 u + B_4 v + B_5 w = 0;$$

eliminirt man w so ergibt sich:

$$(A_1\ B_5)\, s + (A_2\ B_5)\, t + (A_3\ B_5)\, u + (A_4\ B_5)\, v = 0$$

und da für $(A_4\ B_5) = 0$ die Determinante $(a_1\ b_2\ c_3)$ verschwindet, so wird ganz wie oben gezeigt, abgesehen vom Vorzeichen:

$$\frac{(a_1\ b_2\ c_3)}{(A_4\ B_5)} = \frac{(a_1\ b_2\ c_4)}{(A_3\ B_5)}$$

u. s. w.

Diese Quotienten sind also ganze Functionen und geben die Resultante.

Es ist zu sehen, dass sich dies Verfahren auf beliebig viel Gleichungen anwendet. Das Schema der Rechnung ist folgendes. Man schreibt die Factoren jeder Gleichung zusammen, und vervollständigt das Schema zu einem Quadrate, durch Hinzufügung der Factoren der p Relationen. Also:

$$\begin{array}{llllll} s: & a_1 & b_1 & c_1 & A_1 & B_1 \\ t: & a_2 & b_2 & c_2 & A_2 & B_2 \\ u: & a_3 & b_3 & c_3 & A_3 & B_3 \\ v: & a_4 & b_4 & c_4 & A_4 & B_4 \\ v: & a_5 & b_5 & c_5 & A_5 & B_5. \end{array}$$

Die Resultante ist dann gleich der Determinante irgend welcher m Reihen der a, b, c, dividirt durch die der AB aus den übrigen p Reihen.

Um dies Verfahren auf drei Gleichungen von den Graden m, n, p anzuwenden, wird die erste mit

$$x^{n+p-2}, \quad x^{n+p-3} y \ \ldots$$

die zweite mit

$$x^{p+m-2}, \quad x^{p+m-3} y \ \ldots$$

die dritte mit

$$x^{m+n-2}, \quad x^{m+n-3} y \ \ldots$$

multiplicirt, die Anzahl der so erhaltenen Gleichungen ist dann:

$$\frac{(n+p)(n+p-1) + (n+p)(m+p-1) + (m+n)(m+n-1)}{2}$$

Eine solche Gleichung sei $U = 0$. Aber die Gliederanzahl aller zusammen ist, wenn man die Grössen x^α, y^β, z^γ als besondere Unbekannte betrachtet:

$$\frac{(m+n+p)(m+n+p-1)}{2},$$

also kleiner als die der Gleichungen.

Um nun die identischen Relationen zu bilden, geht man aus von den identischen Gleichungen:

$$uv = vu, \qquad vw = wv, \qquad wu = uw$$

Digitized by Google

und ersetzt z. B. in der ersten u links und v rechts durch ihre Werthe

$$ax^m + bx^{m-1}y + \ldots$$

Multiplicirt man dann mit

$$x^{p-2}, \quad x^{p-3}y + \ldots$$

und die zweite mit $x^{n-2} \ldots$, die dritte mit $x^{n-2} \ldots$, so hat man:

$$\frac{m(m-1)+n(n-1)+p(p-1)}{2}$$

identische Relationen, genau so viel, als die Anzahl der Gleichungen die der Unbekannten übertrifft; aus diesen werden die x^α, y^β, z^γ ganz durch die U eliminirt, und dann das eben gegebene Verfahren eingeschlagen.

Sind vier homogene Gleichungen mit vier Unbekannten gegeben, so würde man bei diesem Verfahren auf eine Anzahl $m+n$ Gleichungen mit m Unbekannten kommen, die durch $n+p$ Relationen verbunden sind, so dass zwischen den letzteren noch p Relationen stattfinden.

Dann sind auf dem vorigen Wege zuerst die p, dann die $n+p$ Relationen zu berücksichtigen. Man erhält die reducirte Resultante in Form einer Determinante, dividirt durch den Quotienten zweier andern u. s. w. Dies ist die einzig bekannte allgemeine Methode, die Resultante frei von fremden Factoren herzustellen.

In dem speciellen Falle von vier homogenen Gleichungen zweiten Grades aber ergibt sich eine sehr einfache directe Lösung.

Die Differenzialquotienten der Functional-Determinante, sind in Bezug auf die Unbekannte vom dritten Grade in Bezug auf die Coefficienten der Gleichungen vom vierten.

Multiplicirt man nun die gegebenen Gleichungen mit den Unbekannten x, y, z, u, so hat man 20 Gleichungen, aus denen sich die 20 Grössen x^3, $xy^2 \ldots$ eliminiren lassen, und die Resultante wird vom 32sten Grade, wie dies sein muss. — Die Theorie der Functional-Determinante gibt aber noch zu einer neuen Reihe von Betrachtungen Anlass.

Seien die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ selbst die partiellen Differenzialquotienten einer Function f, so ist:

$$f_{pq} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q},$$

also auch:

$$f_{pq} = f_{qp}.$$

In diesem Falle ist also die Functional-Determinante symmetrisch, kann definirt werden als die Determinante der zweiten Differenzialquotienten von f und wird Hesse'sche Determinante genannt.

Eine ihrer Haupteigenschaften ist folgende:

Findet eine lineare Transformation statt, also setzt man in der Function $f(x_{p1}, x_{p2} \ldots x_n)$:

$$x_p = a_{p1}y_1 + a_{p2}y_2 + \ldots + a_{pn}y_n$$

so unterscheidet sich die Hessesche Determinante der transformirten Function von der der gegebenen nur durch einen Factor, der gleich dem Quadrat der Determinante A der a ist.

Die letztere A wird gewöhnlich Transformationsmodul genannt.

Denn bezeichnen wir die beiden Hesseschen Determinanten bezüglich mit $H_{f(y)}$ und $H_{f(x)}$, so ist:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_q \partial y_p} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_q \partial x_1} a_{1p} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_q \partial x_2} a_{2p} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial y_q \partial x_n} a_{np},$$

also nach dem Multiplicationssatze:

$$H_{f(y)} = A\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial x_2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial x_n}\right)$$

aber ebenso:

$$\frac{\partial f}{\partial y_p} = \frac{\partial f}{\partial x_1} a_{1p} + \frac{\partial f}{\partial x_2} a_{2p} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} a_{np},$$

also:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_p \partial x_q} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_q} a_{1p} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_q} a_{np}$$

Digitized by Google

und deshalb:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial y_n \partial x_n}\right) = A\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}\right) = AH_{f(x)},$$

also, wie oben gesagt:

$$H_{f(y)} = A^2 H_{f(x)}.$$

Sei jetzt f eine homogene Function vom $m$ten Grade mit n Variablen, $f_1, f_2 \ldots f_n$ die Differenzialquotienten nach denselben also nach einem bekannten Satze:

$$mf = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n.$$

Die Functionen f_1, f_2 ... sind auch homogen, und vom Grade $m-1$, also:

$$(m-1) f_p = x_1 f_{p1} + x_2 f_{p2} + \ldots + x_n f_{pn}.$$

Denkt man sich x_1, x_2 ... x_n und $1-m$ als Unbekannte, wo dann die erste Gleichung wird:

$$\frac{mf}{m-1}(1-m) + x_1 f_1 + x_1 f_2 + \ldots + x_n f_n = 0,$$

so hat man $n+1$ Gleichungen mit $n+1$ Unbekannten, deren Eliminations-Determinate verschwindet, d. h.:

$$R = \begin{vmatrix} \frac{m}{m-1} f & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ & f_1 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & f_n & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Die linke Seite aber zerlegt sich in:

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1} f & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ 0 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

d. h.:

1) $$\frac{m}{m-1} fH - \sum_{pq} f_p f_q H_{pq} = 0.$$

H ist hier die Hesse'sche Determinante, und H_{pq} die Unterdeterminante derselben, welche mit f_{pq} multiplicirt ist.

Die Determinante R aber ist symmetrisch und gleich Null, dasselbe findet somit für ihre Reciproke r statt. Also:

$$r = \begin{vmatrix} H & F_1 & F_2 & \ldots & F_n \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

Digitized by Google

also:

$$F_{pq} = F_{qp}.$$

Nach einem im vierten Abschnitte gegebenen Satze lassen sich nun die Verhältnisse der Grössen $1-m, x_1, x_2 \ldots x_n$ durch die Grössen H und F ausdrücken nämlich:

$$\begin{aligned} 1-m : x_1 : x_2 : \ldots x_n &= F_p : F_{p1} : F_{p2} : \ldots F_{pn} \\ &= H : F_1 : F_2 \ldots F_n, \end{aligned}$$

also:

2) $$F_p = -\frac{x_p}{m-1} H \text{ und } F_{pq} = \frac{x_p x_q}{(m-1)^2} H.$$

Da die Glieder f_{pq} der Hesse'schen Determinante symmetrisch vom $(m-2)$ten Grade sind, so sind die Glieder ihrer Reciproke H_{pq} ebenfalls symmetrisch und von $(m-1)(m-2)$ten Grade.

Von diesen Eigenschaften lassen sich interessante geometrische Anwendungen machen.

Vertauscht man in der Gleichung einer ebenen Curve die Coordinaten x, y mit $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, so wird die Gleichung homogen. Sei dieselbe $f=0$, und vom $m$ten Grade, so lässt sich leicht zeigen, dass die Krümmung derselben den Ausdruck hat:

$$\frac{1}{(m-1)^2}(f_{11} f_2^2 f_3^3) = \frac{H}{(m-1)^2},$$

in den Wendepunkten ist nun $H=0$, und da H vom Grade $3(m-2)$ ist, sämmtliche Wendepunkte die beiden Gleichungen aber erfüllen:

$$f=0, \qquad H=0,$$

so gibt es deren $3m(m-2)$. Für die Fläche $m$ter Ordnung, deren Coordinaten $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$ und deren Gleichung $f=0$ ist, erhält man als Product der beiden Hauptkrümmungen:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{H}{(m-1)^2 (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2};$$

in den Wendepunkten also ist $H=0$, d. h. es wird zugleich eine Gleichung vom $4(m-2)$ten Grade erfüllt, und man hat deren $4m(m-2)$.

Man hat ferner die fundamentalen Gleichungen:

$$\begin{aligned} H &= H_{p1} f_{p1} + \ldots + H_{pn} f_{pn} \\ 0 &= H_{p1} f_{q1} + \ldots + H_{pn} f_{qn}, \end{aligned}$$

also, wenn die Hesse'sche Determinante verschwindet, gilt die letzte Gleichung, q möge gleich oder ungleich p sein. Man kann hieraus dann die Ausdrücke H_{pq} bestimmen. Nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, dass diese Ausdrücke einen gemeinschaftlichen Factor M vom μten Grade haben, dass ferner F vom $m$ten Grade sei, dann ist:

$$H_{p1} = a_1 M, \quad H_{p2} = a_2 M \ldots H_{pn} = a_n M$$

und die a sind ganze homogene Functionen vom Grade $(n-1)(m-2)-\mu$. Es ist dann:

$$a_1 f_{q1} + a_2 f_{q2} + \ldots + a_n f_{qn} = 0,$$

wir multipliciren dies System von n Gleichungen mit x_q, vertauschen q mit $1, 2 \ldots n$ und addiren alle Gleichungen. Dann folgt mit Berücksichtigung der Beziehung:

$$f_{1r} x_1 + f_{2r} x_2 + \ldots + f_{nr} x_n = (m-1) f_r$$

Google

die Identität:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n = 0$$

und durch Differenziiren:

A) $$\frac{\partial a_1}{\partial x_q} f_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n} f_n = 0.$$

Die Determinante dieses Systems verschwindet also auch, sie ist:

$$D = \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \right\} = 0.$$

Bezeichnet man die zu $\frac{\partial a_l}{\partial x_k}$ zugehörige Unterdeterminante derselben mit D_{lk}, so ist also:

B) $$D_{k1} \frac{\partial a_l}{\partial x_1} + D_{k2} \frac{\partial a_l}{\partial x_2} + \ldots + D_{kn} \frac{\partial a_l}{\partial x_n} = 0.$$

Aus dem Differenziiren der Gleichung:

$$a_1 f_{q1} + a_2 f_{q2} + \ldots + a_n f_{qn} = 0$$

entsteht aber, wenn man mit f_{pqr} die dritten Differenzialquotienten von f bezeichnet:

C) $$\frac{\partial a_1}{\partial x_l} f_{q1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_l} f_{q2} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x_l} f_{qn} = w_{ql},$$

wo

$$w_{ql} = -(a_1 f_{q1l} + a_2 f_{q2l} + \ldots + a_n f_{qnl})$$

gesetzt wurde. Diese Gleichung wird mit D_{kl} multiplicirt, für l gesetzt $1, 2 \ldots n$ und addirt, die linke Seite verschwindet dann, wegen der Gleichung B), also:

D) $$D_{k1} w_{q1} + D_{k2} w_{q2} + \ldots + D_{kn} w_{qn} = 0;$$

durch Vergleich der Systeme B) und D) ergibt sich dann:

E) $$\varrho \frac{\partial a_l}{\partial x_1} = w_{q1}, \quad \varrho \frac{\partial a_l}{\partial x_1} = w_{q2} \ldots \varrho \frac{\partial a_l}{\partial x_n} = w_{qn}.$$

Diese Gleichungen gelten immer mit Ausnahme des Falles, wo alle ersten Differenzialquotienten von a_l verschwinden, und es irgend ein q gibt, für das alle w_{ql} verschwinden.

Addirt man die Gleichungen C), nachdem sie bezüglich mit $x_1, x_2 \ldots x_n$ multiplicirt sind, und berücksichtigt, dass a_l homogen und vom Grade $(n-1)(m-2) - \mu$ ist:

$$[(n-1)(m-2) - \mu] \varrho a_l = w_{q1} x_1 + w_{q2} x_2 + \ldots + w_{qn} x_n,$$

aber wenn man für die w ihre Werthe setzt, so wird die rechte Seite wegen der Gleichungen A) und C) gleich Null, und da ϱ und a_l nicht verschwinden, ist:

$$(n-1)(m-2) = \mu,$$

d. h.:

Die Function M ist mit H_{pq} von gleichem Grade, die Ausdrücke $a_1, a_2 \ldots a_n$ also sämmtlich Constanten.

Wenn dann sämmtliche w verschwinden, so wird die Gleichung C):

Digitized by Google

Ca) $$\frac{\partial a_1}{\partial x_l} f_{q\,1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_l} f_{q\,2} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x_l} f_{q\,n} = 0$$

und diese in Gemeinschaft mit:

$$a_1 f_{q\,1} + a_2 f_{q\,2} + \ldots + a_n f_{q\,n} = 0$$

gibt:

$$pa_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_l}, \quad pa_2 = \frac{\partial a_2}{\partial x_l} \ldots pa_n = \frac{\partial a_n}{\partial x_l},$$

wo p eine Function der Variable ist. Durch Integration erhält man:

$$a_1 = C_1 e^{\int p dx_l}, \quad a_2 = C_2 e^{\int p dx_l}, \quad a_n = C_n e^{\int p dx_l}$$

$C_1, C_2 \ldots C_n$ müssen von x_l frei sein, also hätten die a den gemeinschaftlichen Factor $e^{\int p dx_l}$, und da dies der Voraussetzung widerspricht, muss $p = 0$ sein, es sind also auch in diesem Falle alle a Constanten.

Hieraus in Verbindung mit der Gleichung:

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n = 0$$

folgt der Satz:

Wenn die Hesse'sche Determinante einer homogenen Function vom Grade n identisch gleich Null ist, so gibt es n Constanten, welche mit den ersten Differenzialquotienten von f multiplicirt, die Summe Null geben.

Oder:

Das Verschwinden der Hesse'schen Determinante zeigt an, dass zwischen den ersten Differenzialquotienten von f eine lineare Relation stattfindet.

Diese Constanten a sind leicht zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$H_{p\,1} = a_1 M, \quad H_{p\,2} = a_2 M \ldots H_{p\,n} = a_n M,$$

wo M der grösste gemeinschaftliche Factor der H ist.

Setzt man nun:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 y_1 + a_{1\,2} y_2 + \ldots + a_{1\,n} y_n \\ x_2 &= a_2 y_1 + a_{2\,2} y_2 + \ldots + a_{2\,n} y_n \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n &= a_n y_1 + a_{n\,2} y_2 + \ldots + a_{n\,n} y_n \end{aligned}$$

wo y mit den fraglichen Constanten multiplicirt ist, so verschwindet y_1 aus f ganz, denn:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_1},$$

also wegen:

$$\frac{\partial x_p}{\partial y_1} = a_p, \quad \frac{\partial f}{\partial x_p} = f_p, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0,$$

womit unsere Behauptung dargethan ist. Also:

Digitized by Google

Verschwindet die Hesse'sche Determinante der Function f identisch, so kann letztere durch eine lineare Substitution auf eine Function mit einer Veränderlichen weniger reducirt werden.

Diese Bedingung ist nothwendig und ausreichend.

Wir wollen aber jetzt voraussetzen, dass in der Unterdeterminante H_{pq} verschwindet. Wegen der Gleichungen:

$$H_{p1} f_{q1} + H_{p2} f_{q2} + \ldots + H_{pn} f_{qn} = 0$$
$$H_{r1} f_{p1} + H_{r2} f_{p2} + \ldots + H_{rn} f_{pn} = 0$$

hat man in jedem Falle:

$$H_{p1} : H_{p2} : \ldots = H_{r1} : H_{r2} : \ldots$$

also ist $H_{pq} = 0$, so ist $H_{rq} = 0$ und daher auch, da:

$$H_{rq} = H_{qr} \text{ ist, } H_{rs} = 0.$$

Verschwinden identisch die Hesse'sche Determinanten und eine ihrer Unterdeterminanten, so verschwinden sämmtliche Unterdeterminanten.

Nun ist noch:

$$\frac{\partial H}{\partial x_l} = H_{11} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_l} + H_{12} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_l} + H_{nn} \frac{\partial f_{nn}}{\partial x_l},$$

also es verschwinden in diesem Falle auch die partiellen Differenzialquotienten der Hesse'schen Determinante nach den Veränderlichen, mithin auch die Hessesche Determinante der Hesse'schen Determinante, sie lässt sich auf eine Variable weniger reduciren. Also:

Wenn die Hesse'sche Determinante und eine Unterdeterminante identisch Null sind, so kann die Function durch lineare Substitution zwei Variablen weniger erhalten.

Leicht ergibt sich die geometrische Bedeutung dieser Betrachtungen. Verschwindet die Hesse'sche Determinante einer Curve oder Fläche identisch (homogene Coordinaten vorausgesetzt), so lassen die betreffenden Gleichungen sich durch lineare Transformantion, d. h. Coordinatenveränderung auf eine Variable weniger reduciren. Also bei einer Curve reducirt sich dieselbe auf ein Büschel grader Linien, bei einer Fläche auf eine Kegelfläche.

Ueberträgt man diese Betrachtungen auf Linniencoordinaten, (vgl. den Artikel: Reciprocität) so ergibt sich folgendes:

Verschwindet die Hesse'sche Determinante einer Gleichung in Linniencoordinaten, (wenn dieselbe vorher homogen gemacht ist), so hat man eine gradlinige Punktreihe.

Den Linniencoordinaten entsprechen Plancoordinaten im Raume. Verschwindet für solche die Hesse'sche Determinante, so reducirt sich die Fläche auf eine ebene Curve.

10) Ueber Discriminanten.

In dem Folgenden sollen nur homogene algebraische Ausdrücke betrachtet werden, die als „Formen" bezeichnet werden. Eine Form gleich Null gesetzt, gibt eine Gleichung. Die Formen sind nach ihrem Grade wie die Gleichungen quadratisch, cubisch . . ., je nach der Anzahl der Variablen, werden sie binär, ternär u. s. w. genannt.

Discriminante nennt man die Resultante der gleich Null gesetzten partiellen Differenzialquotienten einer Form.

Ist die Form vom $n$ten Grade und hat p Veränderliche, so ist nach dem Obigen die Discriminante vom Grade $p(n-1)^{p-1}$, nämlich die Veränderlichen jeder Gleichung die vom $(n-1)$ten Grade ist, kommen in einem Grade vor, der dem Product der Grade aller übrigen gleich ist, also vom Grade $(n-1)^{p-1}$ alle Veränderlichen, also im obigen Grade. Ebenso folgt aus Abschnitt 6), dass, wenn man der $k$ten Potenz irgend einer Veränderlichen x der Form f einen Coefficienten mit Index k gibt, die Summe der Indices jedes Gliedes der Discriminante $n(n-1)^{p-1}$ beträgt.

Digitized by Google

Denn es würde diese Indexsumme gleich dem Producte der Grade der Gleichungen, also $(n-1)^p$ sein, wenn die Indices mit den Potenzen von x in den Differenzialquotienten übereinstimmten, dies aber findet bei $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht, wohl aber bei den übrigen statt, bei $\frac{\partial f}{\partial x}$ ist nämlich der Index k wenn die Potenz $k-1$ ist. Daher wird die Zahl $(n-1)^p$ um so viel Einheiten vermehrt, als sich Coefficienten von $\frac{\partial f}{\partial x}$ in jedem Gliede der Resultante finden, und da deren soviel vorkommen als das Product der Grade der übrigen Gleichungen beträgt, also $(n-1)^{p-1}$, so hat man als Indexsumme:

$$(n-1)^p + (n-1)^{p-1} = n(n-1)^{p-1}.$$

Diese Indexsumme nennt man gewöhnlich „Gewicht der Discriminante," während $p(n-1)^{p-1}$ ihren Grad anzeigt.

Wenn eine binäre Form einen quadratischen Factor enthält, so verschwindet ihre Discriminante identisch. Denn sie ist Resultante zweier Gleichungen mit gemeinschaftlichem linearen Factor.

Hat eine ternäre Form die Gestalt:

$$X^2\varphi + XY\psi + Y^2\chi,$$

wo XY lineare Functionen sind, so enthält jedes Glied eines der Differenzialquotienten entweder X oder Y, dieselben gleich Null gesetzt, werden also verificirt, wenn man $X=0$, $Y=0$ nimmt. Aus diesem Grunde verschwindet auch hier die Discriminante.

Allgemein verschwindet die Discriminante einer Form $n$ter Ordnung, wenn die letztere als homogene Function zweiten Grades der linearen Grössen X_1, X_2 . . . X_n ausgedrückt werden kann.

Setzt man $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0$, so erhält man Werthe für die Variablen, welche singuläre Wurzeln der Form heissen.

Untersuchen wir jetzt die binäre Form:

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots$$

Wir wollen dieselbe mit dem Symbol:

$$(a_0, a_1 \ldots a_n)(x, y)^n$$

bezeichnen. Oft sind die Factoren a_0, a_1 zugleich mit den Binomialcoefficienten n, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ . . . multiplicirt. Dies soll in der Bezeichnung angedeutet werden durch einen Strich.

Das Symbol ist dann:

$$(a_0, a_1 \ldots a_n) \mid (x, y)^n.$$

Man hat dann der Homogenität wegen:

$$nf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Setzt man nun eine Wurzel y_1 von $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ in nf ein, so erhält man:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Das Product dieser Substitutionen für alle Wurzeln $y_1, y_2 \ldots$, gibt:

$$n^n f_1 f_2 \ldots = y_1 y_2 \ldots \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial y_1} \ldots = a_0 \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial y_2} \ldots$$

Die linke Seite ist aber die Resultante der Gleichungen f und $\frac{\partial f}{\partial x}$ (vom Zahlenfactor n^n abgesehen), die rechte die Discriminante multiplicirt mit a_0. Also:

Die Resultante von f und $\frac{\partial f}{\partial x}$ ist das $a_0$fache der Discriminante,

und ebenso:

Die Resultante von f und $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist das $a_n$fache der Discriminante

Seien jetzt die Wurzeln der Gleichung $f=0$: $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \ldots$, so ist:

$$f = (xy_1 - x_1 y)(xy_2 - x_2 y) \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y_1(xy_2 - x_2 y)(xy_3 - x_3 y) + \ldots + y_2(xy_1 - x_1 y)(xy_3 - x_3 y) + \ldots$$

Setzt man hierin $x = x_s$, $y = y_s$ so kommt:

Digitized by Google

$$y_s (x_s y_1 - x_1 y_s)(x_s y_2 - x_2 y_s) \ldots,$$

wo die Indices einer Klammer nicht beide s sind. Setzt man für s alle Werthe, und bildet das Product, so erhält man die Resultante von f und $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$y_1 y_2 \ldots (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 \ldots$$

und wenn man durch $a_0 = y_1 y_2 \ldots$ dividirt, die Discriminante. Dieselbe ist also:

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 (x_2 y_4 - x_3 y_2)^2 \ldots$$

oder, wenn man $y = 1$ denkt, wie dies hier geschehen soll, gleich dem Quadrate der Producte aller Wurzeldifferenzen.

Aus dem obigen Satze folgt, dass das Verschwinden der Discriminante eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f = 0$ anzeigt, denn sie hat eine solche mit ihrem Differenzialquotienten gemein.

Sei jetzt f das Product zweier andern Formen U und V. Das Product der Quadrate der Wurzeldifferenzen hat dann als Factor die Quadrate der Wurzeldifferenzen von u, diejenigen von v, und die Quadrate der Differenzen, je einer Wurzel von u und einer von v, die beiden ersten Producte sind die Discriminanten von u und v, das letztere ist aber, wie ersichtlich, das Quadrat der Resultante von u und v. Also:

Die Discriminante eines Productes ist gleich dem Producte ihrer Discriminanten, multiplicirt mit dem Quadrat der Resultante.

So z. B. ist, wenn eine Form linear gleich $x - \alpha$, die andere beliebig gleich $\varphi(x)$ ist, die Resultante offenbar $\varphi(\alpha)$, die Discriminante von $x - \alpha$ aber gleich Eins, da die Differenzialquotienten gleich Eins sind. Um also die Discriminante von $(x - \alpha)\varphi(x)$ zu finden, muss man $[\varphi(x)]^2$ mit der Discriminante von $\varphi(x)$ multipliciren.

Die Discriminante der Gleichung $(n-1)$ten Grades:

$$(a_0 a_1 \ldots a_{n-1})(xy)^{n-1}$$

möge ψ sein, es ist dann die Discriminante der Gleichung $n$ten Grades:

$$(a_0 a_1 \ldots a_n)(xy)^n$$

von der Form:

$$a_n \varphi + a_{n-1}^2 \psi.$$

Denn wenn man in der Form a_n gleich Null setzt, so verschwindet in der Discriminante selbst a_n. Die Form wird dann aber das Product von

$$(a_0 a_1 \ldots a_{n-1})(xy)^{n-1}$$

und von x. Aber die Discriminante ist nach dem Vorigen, da $\alpha = 0$

$$[\varphi(\alpha)]^2 = a_{n-1}^2$$

ist, $a_{n-1}^2 \psi$.

Da nun die Discriminante der allgemeinen Form $n$ten Grades für $a_n = 0$ diese Gestalt annimmt, so muss sie selbst die obige Gestalt haben. Aus der Symmetrie folgt aber, dass man ihr auch die Gestalt geben kann:

$$a_0 \varphi + a_1^2 \psi.$$

Wenn die Discriminante verschwindet, so sind die Differenzialquotienten der Discriminante nach $a_0, a_1 \ldots$ den entsprechenden Potenzen x^n, x^{n-1} der gleichen Wurzeln, in Bezug auf diese Grössen, oder was dasselbe ist den Differenzialquotienten der Form nach $a_0 . a_1 \ldots$ proportional. Denn sei:

$$U = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2}$$

und $x = \alpha$ eine der gleichen Wurzeln, so ist diese auch eine Wurzel der Form:

$$(a_0 + \lambda A_0) x^n + (a_1 + \lambda A_1) x^{n-1} + \ldots,$$

wenn man hat:

$$V = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots = 0.$$

Nun ist:

$$U + \lambda V = (x - \alpha)\,[\varphi(x) + \lambda \psi(x)].$$

Die Discriminante von $U + \lambda V$ ist nun nach dem Vorigen mit $[\varphi(\alpha) + \lambda \psi(\alpha)]^2$ multiplicirt, und da $\varphi(\alpha)$ verschwindet, ist sie durch λ^2 theilbar.

Sei nun D die Discriminante von U, so ist die von $U + \lambda V$ offenbar:

$$D + \lambda \left(A_0 \frac{\partial D}{\partial a_0} + A_1 \frac{\partial D}{\partial a_1} + \ldots \right) + \lambda^2 (\ldots),$$

also da $D = 0$, muss der Coefficient von λ auch Null sein. Da nun zwischen den A nur die beiden Relationen:

Digitized by Google

$$A_0 \frac{\partial D}{\partial a_0} + A_1 \frac{\partial D}{\partial a_1} + \ldots = 0$$

$$A_0 \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \ldots = 0$$

stattfinden, so ist:

$$\frac{\partial D}{\partial a_0} : \frac{\partial D}{\partial a_1} \ldots = \alpha^n : \alpha^{n-1} : \ldots$$

Das Verhältniss von zweien dieser Differenzialquotienten gibt also die gleichen Wurzeln. Diese Beziehung zwischen den Differenzialquotienten der Form und Discriminanten findet aber auch selbstverständlich statt, wenn man statt nach $a_0, a_1 \ldots$ nach beliebigen linearen Functionen dieser Coefficienten differenziirt.

Von dem obigen Satze soll jetzt noch ein Beweis gegeben werden, der für Formen mit beliebig viel Veränderlichen gültig bleibt. Setzen wir drei Veränderliche voraus.

Seien zunächst φ, ψ, χ gewisse Formen derselben, a, b, c Constanten, die in allen dreien enthalten sind. Wenn man denselben den unendlich kleinen Zuwachs α, β, γ gibt, so erhält die Resultante den Zuwachs:

$$\frac{\partial R}{\partial a} \alpha + \frac{\partial R}{\partial b} \beta + \ldots$$

und dieser verschwindet, wenn die Gleichungen gemeinschaftliche Wurzeln haben sollen. Die gemeinschaftlichen Wurzeln der so veränderten Gleichungen sind aber nicht dieselben, als die der alten, mögen die letzteren um ξ, η, ζ zugenommen haben, so ist also:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\zeta = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial b}\beta + \frac{\partial \psi}{\partial c}\gamma + \frac{\partial \psi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \psi}{\partial y}\eta + \frac{\partial \psi}{\partial z}\zeta = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \chi}{\partial b}\beta + \frac{\partial \chi}{\partial c}\gamma + \frac{\partial \chi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \chi}{\partial y}\eta + \frac{\partial \chi}{\partial z}\zeta = 0.$$

Man kann aber, da die Formen homogen sind, und nur die Verhältnisse $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ in Betracht kommen, z constant, also $\zeta = 0$ denken, dann erhält man durch Elimination von ξ und η eine Gleichung von der Gestalt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial a} & \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix} \alpha + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial b} & \frac{\partial \chi}{\partial x} & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix} \beta + \ldots = 0,$$

woraus sich ergibt, dass die Differenzialquotienten: $\frac{\partial R}{\partial a}, \frac{\partial R}{\partial b} \ldots$ den eben hingestellten Determinanten proportional sind.

In unserm Falle nun sind φ, ψ, χ die Differenzialquotienten derselben Form, mithin $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ und mithin werden die entsprechenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \chi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

proportional mit: $\frac{\partial D}{\partial a}, \frac{\partial D}{\partial b}$, wenn D die Discriminante ist; da nun aber für die gleichen Wurzeln x, y, z, $\varphi = \psi = 0$ wird, so hat man:

$$x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z} = n\varphi = 0$$

$$x\frac{\partial \psi}{\partial x} + y\frac{\partial \psi}{\partial y} + z\frac{\partial \psi}{\partial z} = n\psi = 0$$

$$x : y : z = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right).$$

Diese Gleichungen, deren rechte Seite die Unterdeterminanten der beiden obigen Determinanten sind, lehren, dass man das Verhältniss der letzteren schreiben kann:

$$x\frac{\partial \varphi}{\partial a} + y\frac{\partial \psi}{\partial a} + z\frac{\partial \chi}{\partial a} : x\frac{\partial \varphi}{\partial b} + y\frac{\partial \psi}{\partial b} + z\frac{\partial \chi}{\partial b}.$$

Da nun die Form f selbst gleich $x\varphi + y\psi + z\chi$ mit einer Constante multiplicirt ist, so erhält man für die singulären Wurzeln x, y, z die Proportionen:

$$\frac{\partial D}{\partial a} : \frac{\partial D}{\partial b} : \frac{\partial D}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial a} : \frac{\partial f}{\partial b} : \frac{\partial f}{\partial c}$$

wie angezeigt war.

Es lässt sich nun der oben für binäre Formen erwiesene Satz allgemein nachweisen.

Ist a der Coefficient der höchsten Potenz einer Veränderlichen, b, c, d die folgenden Coefficienten der nächst niederen Potenzen, so hat die Discriminante die Form:

$$a\vartheta + (\varphi\chi\psi)\,(b\,c\,d)^2,$$

z. B. wenn die Form ternär ist, so hat man:

$$a\vartheta + b^2\varphi + b\,c\,\psi + c^2\chi.$$

Denn sei f eine Form, deren Discriminante gleich Null ist, F eine andere, die nur durch die singulären Wurzeln der ersten verschwindet, dann ist, wenn man:

$$f = ax^n + bx^{n-1}y + \ldots$$

$$F = Ax^n + Bx^{n-1}y + \ldots$$

setzt, D die Discriminante von f nennt, und die Discriminante von $f + \lambda F$ bildet, das mit λ multiplicirte Glied derselben:

$$A\frac{\partial D}{\partial a} + B\frac{\partial D}{\partial b} + C\frac{\partial D}{\partial c} + \ldots$$

und wie so eben gezeigt:

$$\frac{\partial D}{\partial a}, \quad \frac{\partial D}{\partial b}, \quad \frac{\partial D}{\partial c}$$

proportional mit:

$$x^n, \quad x^{n-1}y, \quad x^{n-1}z \ldots$$

Es ist also der Coefficient von λ gleich

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + \ldots$$

und dieses gleich Null, da $x, y \ldots$ singuläre Wurzeln sind.

Setzt man nun $a = b = c$ gleich Null, so verschwindet die Discriminante von f, weil alle Differenzialquotienten für die singulären Wurzeln $y = 0$, $z = 0$ verschwinden. Damit dann auch F verschwinde, braucht nur $A = 0$ zu sein. Die Discriminante hat also eine derartige Form, dass wenn man $b + \lambda B$, $c + \lambda C$ für b und c setzt, und $a = b = c = 0$ nimmt, sie durch λ^3 theilbar wird, d. h. wenn man für b und c λB und λC einführt, und $a = 0$ setzt, so muss das Resultat durch λ^3 theilbar sein, was nur bei der obigen Gestalt:

$$a\vartheta + b^2\varphi + bc\psi + c^2\chi$$

möglich ist.

11) Ueber Invarianten und Covarianten.

Schon früher haben wir, wenn eine Function von $x, y, z \ldots$ durch die lineare Substitution:

$$x = a_1u + b_1v + c_1w$$

$$y = a_2u + b_2v + c_2w$$

$$z = a_3u + b_3v + c_3w$$

die Determinante $(a_1b_2c_3)$ als Substitutionsmodul bezeichnet.

Hat man nun eine Gleichung oder ein System von Gleichungen und bildet sich aus deren Coefficienten eine Function A, welche die Eigenschaft hat, sich nur um einen Factor, der eine Potenz des Substitutionsmoduls ist, zu ändern, wenn man irgend eine lineare Substitution mit den

gegebenen Gleichungen vornimmt, und mit den neuen Coefficienten die A entsprechende Function bildet, so heisst A eine Invariante.

Nach dem Multiplicationstheorem ist also die Determinante eines Systems von linearen Gleichungen eine Invariante.

Man überzeugt sich auch sogleich, dass die Form:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

zur Invariante ihre Discriminante

$$ac - b^2$$

hat, und ebenso, dass dem System:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2$$

die Invariante

$$ac_1 + a_1c - 2bb_1$$

entspricht. In der That erscheinen beide Invarianten bei einer linearen Transformation der Formen mit dem Quadrate des Transformationsmoduls multiplicirt.

Wir schreiten jetzt zur Definition einer Covariante.

Aus einer gegebenen Form A wird eine andere B abgeleitet; die erstere geht durch lineare Transformation in eine andere A_1 über, und durch dieselbe Transformation B in B_1. Leitet man nun aus A_1 nach demselben Gesetze, wie B aus A entstand, die Form B' ab, und es unterscheidet sich B' von B_1 nur um einen Factor, der eine Potenz des Transformationsmodul ist, so heisst B eine Covariante von A.

Nach einem Satze, der im Abschnitt 9) bewiesen ist, ist die Hesse'sche Determinante einer Function eine Covariante derselben, denn sie reproducirt sich mit dem Quadrate des Transformationsmoduls multiplicirt, wenn man eine lineare Transformation mit f vornimmt.

Betrachten wir nun binäre Formen:

Jede Resultante oder Discriminante ist eine Invariante der entsprechenden Formen.

Denn ihr Verschwinden zeigt einen quadratischen Factor der Formen an. Ein solcher bleibt aber noch ein quadratischer Factor nach der Transformation, wird also die Discriminante oder Resultante des gegebenen Systems Null, so ist dies auch mit dem transformirten der Fall, erstere ist also in der letzteren als Factor enthalten.

Es lässt sich dieser Satz aber auch unmittelbar aus dem Ausdrucke der Resultante in den Wurzelwerthen ableiten. Dieselbe besteht nämlich aus Factoren von der Form

$$x_p y_q - x_q y_p.$$

Untersuchen wir zunächst den Factor

$$xy_1 - x_1y,$$

wo x_1, y_1 ein Wurzelwerth ist. Aus demselben wird durch lineare Transformation:

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y)y_1 - (\alpha_2 x + \beta_2 y)x_1 = xY_1 - yX_1,$$

wo gesetzt ist:

$$X_1 = -\beta_1 y_1 + \beta_2 x_1,$$
$$Y_1 = \alpha_1 y_1 - \alpha_2 x_1.$$

Bildet man aus den andern Wurzeln auf gleiche Art X_2, Y_2 ..., so erhält man sehr leicht:

$$X_1Y_2 - X_2Y_1 = (x_1y_2 - x_2y_1)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1),$$

also die Resultante oder Discriminante reproducirt sich multiplicirt mit

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^n.$$

n ist aber die Anzahl der Factoren, und $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ die Substitutions-Determinante.

Dieser Beweis zeigt aber auch, dass jede symmetrische Function der Wurzeln, welche aus Factoren von der Gestalt

$$x_1y_2 - x_2y_1$$

besteht, eine Invariante ist.

Eine nicht homogene Function einer Variable:

$$a_0u^n + a_1u^{n-1} + a_2u^{n-2} + \ldots$$

lässt sich, wie oft erwähnt, auf die Form einer homogenen bringen, wenn man setzt $u = \frac{x}{y}$ und mit y^n multiplicirt. Sind dann u_1, u_2 ... die Wurzeln der ersten, so ist:

$$u_s = \frac{x_s}{y_s}$$

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \ldots = a_0\left(\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_2}{y_2}\right) + \ldots$$

Digitized by Google

also:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots = \frac{a_0}{y_1 y_2 \ldots} (x y_1 - x_1 y)(x y_2 - x_2 y) \ldots$$

Da es nun auf die Verhältnisse $\frac{x_1}{y_1}$ . . . nur ankommt, kann man setzen:

$$a_0 = y_1 y_1 \ldots,$$

und dann ist:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \ldots = (x y_1 - x_1 y)(x y_2 - x_2 y) \ldots;$$

unter dieser Voraussetzung lässt sich der obige Satz auf nicht homogene Formen von einer Variable übertragen.

Jede symmetrische Function der Wurzeldifferenzen ist eine Invariante, wenn ihre Glieder jede Wurzel in der gleichen Anzahl von Malen enthalten.

Für eine biquadratische Form ist also z. B.:

$$\Sigma (u_1 - u_2)^2 (u_3 - u_4)^2$$

eine Invariante. In der That setzt man $u_s = \frac{x_s}{y_s}$ so kommt:

$$\frac{\Sigma (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 (x_3 y_4 - x_4 y_3)^2}{y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2}$$

und der Nenner ist gleich a_0^2.

Dagegen findet dies nicht bei einer Form vom sechsten Grade statt, da der Nenner $\frac{a_0^2}{y_5^2 y_6^2}$ sein würde.

Eben so lässt sich aber auch zeigen, dass jede symmetrische Function von Wurzeldifferenzen und von Differenzen der veränderlichen u und einer oder mehrerer Wurzelwerthe dann eine Covariante ist, wenn jede Wurzel in der nämlichen Potenz vorkommt, so z. B. für die cubische Form ist

$$\Sigma (u - u_1)^2 (u_2 - u_3)^2$$

eine Covariante.

Es sollen jetzt die Beziehungen zwischen den Differenzialquotienten einer gegebenen und der linear transformirten Form gefunden werden.

Seien

$$x = a_1 \xi + b_1 \eta, \qquad y = a_2 \xi + b_2 \eta,$$

so ergibt sich:

$$\xi = \frac{b_2 x - b_1 y}{M}, \qquad \eta = \frac{-a_2 x - a_1 y}{M}$$

wo

$$M = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Sei nun φ irgend eine Function von x, y, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

also, wenn man die Werthe von ξ und η berücksichtigt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{M}\left(b_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{M}\left(- b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)$$

Digitized by Google

Aus dieser Gestalt folgt, dass abgesehen vom Factor $\frac{1}{M}$, die Ausdrücke $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ und $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ entstehen, wie x und y aus ξ und η; man kann also, wenn eine Form $f(x, y)$ vom Grade n gegeben ist, und diese durch lineare Substitution übergeht in $F(\xi, \eta)$ ohne Weiteres setzen:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi = \frac{1}{M^n} F\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right)\varphi,$$

wenn man statt der Potenzen von x und y in f die entsprechenden höheren Differenzialquotienten, also z. B. für x^2 oder y^2 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, für xy $\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}$ substituirt und dann φ ergänzt, ebenso verfährt man mit F.

Offenbar nämlich ist der Mechanismus beim Uebergange von

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + b\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

zu

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left(a\frac{\partial}{\partial \xi} + b\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial \xi} + b\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\varphi$$

ganz derselbe, als wenn man von

$$x = \alpha\xi + \beta\eta$$

zu

$$x^2 = (\alpha\xi + \beta\eta)\,(\alpha\xi + \beta\eta)$$

übergeht. — Von den mittels dieses Verfahrens erhaltenen Ausdrücken sagt unsere Gleichung aus, dass sie Covarianten, im Falle, dass x und y selbst nicht darin vorkommen, Invarianten sind.

So z. B. erhält man, wenn

$$f = ax^2 + 2bxy + y^2$$

gesetzt wird, und

$$\varphi = a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2$$

ist

$$\left(a\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2b\frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x} + c\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi = ac_1 + a_1c - 2bb_1$$

und wenn $\varphi = f$ ist

$$2ac - 2b^2.$$

Diese Ausdrücke sind also Invarianten. Sie wurden schon oben als Beispiele gebraucht. Aus der Form:

$$b = (a\,b\,c\,d)\,\|\,(x\,y)^4$$

entspringt durch dies Verfahren die Invariante:

$$ac - 4bd + 3c^2,$$

wenn man $\varphi = f$ setzt.

Es lässt sich leicht erkennen, dass dies Verfahren zur Bildung von Invarianten, wenn nämlich $f = \varphi$ gesetzt wird, nur bei Gleichungen vom graden Grade anwendbar ist, bei ungradem verschwinden die so gebildeten Ausdrücke identisch.

Seien jetzt gegeben zwei Reihen von Variablen x, y, z, x_1, y_1, z_1, welche durch dieselbe lineare Substitution transformirt werden sollen, also:

$$x = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \qquad x_1 = \alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1 \text{ u. s. w.},$$

wird nun in irgend eine Form f gesetzt: für x, y, z bezüglich $x + \lambda x_1$, $y + \lambda y_1$, $z + \lambda z_1$, so ist in der Entwickelung der Coefficient von λ^p gleich:

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + z_1\frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right)^p f,$$

abgesehen von dem Factor $\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots p}$. Es lässt sich nun zeigen, dass dieser Ausdruck eine Covariante von f ist. In der That vollzieht man die linearen Substitutionen für $x, y, z, x_1 \ldots$:

Digitized by Google

$$x = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \qquad x_1 = \alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1 \text{ u. s. w.}$$

und setzt man in der Form f: $\xi + \lambda\xi_1$ für ξ, so gibt dies dasselbe Resultat als wenn man erst $x + \lambda x_1$ für x setzt, und dann die Substitution für x und x_1 vollzieht, denn es finden ja die Gleichungen:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \lambda(\alpha\xi_1 + \beta\eta_1 + \gamma\zeta_1) = \alpha(\xi + \lambda\xi_1) + \beta(\eta + \lambda\eta_1) + \gamma(\zeta + \lambda\zeta_1)$$

statt. Diese Identität der Formen aber gilt auch für die Coefficienten der einzelnen Potenzen von λ, was zu beweisen war.

Betrachtet man aber die Covariante:

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + z_1\frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right)^p f$$

als Function von $x_1, y_1, z_1 \ldots$ und $x, y \ldots$ als Constante, so ist jede Invariante derselben eine Covariante von f, als Function von $x, y \ldots$ betrachtet.

Um zunächst einen speciellen Fall zu nehmen, untersuchen wir die Covariante:

$$x_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2x_1y_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2},$$

welche sonach durch lineare Substitution für x, y, x_1, y_1 übergeht in:

$$\xi_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} + 2\xi_1\eta_1\frac{\partial^1 f}{\partial\xi\,\partial\eta} + \eta_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta^2}.$$

Transformiren wir aber nur x_1 und y_1 so erhält man:

$$a\xi_1^2 + 2b\xi_1\eta_1 + c\eta_1^2.$$

a, b, c sind hier solche Functionen von x, y, die durch lineare Substitution übergehen in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}$$

bei einer Transformation von x_1, y_1 allein erhält man aber, wie bereits im Anfange dieses Abschnitts angezeigt wurde:

$$ac - b^2 = \alpha_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right].$$

Geht man nun durch Substitution für x und y zu $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}, \frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}$ über, so erhält man links:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta},$$

also der Ausdruck rechts:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

ist ein solcher, der durch Substitution für x und y in den ganz entsprechenden der transformirten Function abgesehen vom Factor $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2$ übergeht, und somit eine Covariante von f. Allgemein gehe:

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^p f$$

durch Transformation von x_1, y_1 über in:

$$a\xi_1^n + nb\xi_1^{n-1}\eta_1 + \ldots,$$

so ist jede Invariante der ersten Form nach der Definition nur um einen Factor verändert, wenn man die Coefficienten mit a, b, c vertauscht. In dieser Invariante gehen nun a, b, c durch Substitution für x_1, y_1 über in:

$$\frac{\partial^n f}{\partial\xi^n}, \qquad \frac{\partial^n f}{\partial\xi^{n-1}\partial\eta} \ldots,$$

Digitized by Google

also ist jede Invariante der Form:

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+\ldots\right)^p f$$

eine solche Function der Differenzialquotienten von f, welche durch lineare Transformation in die gleiche Function der Differenzialquotienten der transformirten Function übergeht, und somit eine Covariante.

Die zuerst betrachtete Covariante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

ist identisch mit der Hesse'schen Determinante für $f(xy)$ . . .

Wir haben aber auch oben gesehen, dass man mittels der Gleichung:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi=\frac{1}{M^n}F\left(\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\varphi,$$

wenn man φ mit f identificirt, für jede binäre Form, deren Grad eine grade Zahl ist, eine Invariante ableiten kann, z. B. für den vierten Grad:

$$e-4bd+3c^2.$$

In Verbindung mit dem eben Gesagten lässt sich hieraus dann eine Covariante bilden, indem man:

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^4=f$$

$$a=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\quad b=\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y},\quad c=\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\,\partial y^2},\quad d=\frac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial y^3},\quad e=\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

u. s. w. setzt, und dies gilt für alle Grade, indem man statt 4 im Exponenten schreibt $2s$.

Wir wollen hierzu ein Beispiel rechnen. Sei die Form:

$$ax^3+3bx^2+3cxy^2+dy^3$$

auf die andere:

$$A\xi^3+D\eta^3$$

durch lineare Substitution zu bringen. Offenbar fällt dies Problem mit dem der Auflösung der Cubischen Gleichung zusammen. Bringt man nun unsere Form zuerst allgemein auf eine andere:

$$A\xi^3+3B\xi^2\eta+3C\xi\eta^2+D\eta^3$$

so ist die Hesse'sche Determinante, abgesehen von einem Zahlen-Factor:

$$(ax+by)(cx+dy)-(bx+cy)^2=(ac-b^2)x^2+(ad-bc)xy+(bd-c^2)y^2$$
$$=[(AC-B^2)\xi^2+(AD-BC)\xi\eta+(BD-C^2)\eta^2]G^2,$$

wo G der Substitutionsmodul ist.

Wenn B und C verschwinden sollen, ist die transformirte Covariante einfach gleich: $AD\xi\eta$, woraus man sogleich erkennt, dass für ξ und η die beiden Factoren zu wählen sind, in welche die Hesse'sche Determinante zerlegt werden kann, die Grössen A und D bestimmt man dann, wenn man die Factoren der gegebenen cubischen Gleichung mit $A\xi^3+D\eta^3$ vergleicht.

Beispiel. Sei die gegebene Form:

$$4x^3+9x^2+18x+17,$$

die Hesse'sche Determinante ist:

$$15x^2+50x+15,$$

welche sich zerlegt in die Factoren:

$$5(x+3)(3x+1).$$

Setzt man nun:

$$A(x+3)^3+D(3x+1)^3=4x^3+9x^2+18x+17$$

so ergibt sich:

Digitized by Google

$$A + 27D = 4 \qquad 27A + D = 17$$
$$728D = 91 \qquad 728A = 455$$
$$\frac{A}{D} = 5,$$

also die Form wird reducirt in:

$$5(x+3)^3 + (3x+1)^3.$$

Dieser Ausdruck gleich Null gesetzt, gibt die Auflösung der Gleichung.

Jede binäre Form von ungradem Grade $2n-1$ hat eine Covariante vom zweiten Grade sowohl in den Veränderlichen als in den Coefficienten.

Denn es ist:

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^{2n-2} f(x)$$

von einem graden Grade in $x_1 y_1$ und den Coefficienten. Bildet man nun, wie eben gezeigt wurde, die Invariante, so entspringt derselben die Covatiante wie oben.

Invarianten einer Covariante sind Invarianten der gegebenen Form.

Dies liegt in der Definition, denn bei der Substitution bleiben die Coefficienten der Invariante der Covariante, welche mit denen der gegebenen Form identisch sind, unverändert; (immer von einem Factor abgesehen).

$$(ac-b^2,\ 2ad-2bc,\ ae+2bd-3c^2,\ 2be-2cd,\ ce-d^2) \mid (xy)^4$$

und erhalten aus unserm Symbol die Invariante:

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Betrachten wir diese als Invariante der Form:

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^4 f$$

in Bezug auf $x_1, y_1 \ldots$, d. h.: Vertauschen wir $a, b, c \ldots$ mit den Factoren von $x_1, y_1 \ldots$, d. h. mit den entsprechenden vierten Differenzialquotienten von f, so kommt die Covariante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^4}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} - \ldots$$

für alle Formen f, deren Grad den vierten übersteigt.

Es ist hier der Ort, ein wichtiges Prinzip für die binären Formen zu entwickeln.

Setzt man voraus, dass x_1, y_1 immer mit x, y durch dieselbe Substitution geändert werden, so hat man

$$xy_1 - x_1 y$$

als Covariante jeder beliebigen Form, denn die lineare Substitution von x, y, x_1, y_1 verwandelt diesen Ausdruck:

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\xi\eta_1 - \xi_1\eta).$$

Sei nun J irgend eine Invariante der Form:

$$(a_0\ a_1\ a_2 \ldots) \mid (xy)^n$$

so lässt sich zeigen, dass:

Jede binäre Form von ungradem Grade hat eine Invariante vierten Grades.

Denn wie eben gezeigt hat sie eine Covariante zweiten Grades in den Variablen und Coefficienten, deren Discriminante also vom vierten Grade ist, und letztere ist, wie wir oben gesehen haben, eine Invariante.

Z. B. die Hesse'sche Determinante einer cubischen Form ist:

$$(ac-b^2)x^2 + (ad-bc)xy + (bd-c^2)y^2,$$

deren Discriminante:

$$(ac-b^2)(bd-c^2) - 4(ad-bc)^2$$

ist, also Invariante der gegebenen Form (sie ist zugleich deren Discriminante).

Die bis jetzt gegebenen Methoden lassen sich nun vereinigen. Nach der hier gegebenen Methode lassen sich Covarianten, aus diesen Invarianten durch das Symbol $f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$ und hieraus wieder Covarianten bilden.

Also z. B. für die biquadratische Form:

$$(abcde) \mid (xy)^4$$

ist das Symbol einer Invariante:

$$(abcde) \left| \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi, \right.$$

für φ nehmen wir nun die Hesse'sche Determinante der gegebenen Form, diese ist:

Digitized by Google

$$\left(yn\frac{\partial}{\partial a_0} - y^{n-1}x\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right)^p J$$

eine Covariante derselben ist.

Denn gehe $(a_0 a_1 \ldots)\,\|\,(xy)^n$ durch Substitution über in:

$$(A_0, A_1 \ldots)\,(\xi\eta)^n$$

so geht:

$$(a_0 a_1 \ldots)\,\|\,(xy)^n + \lambda(xy_1 - x_1 y)^n$$

über in:

$$(A_0 A_1 \ldots)\,\|\,(\xi\eta)^n + \lambda_1(\xi\eta_1 - \eta\xi_1)^n$$

λ_1 ist nur durch die Potenz des Transformationsmoduls von λ unterschieden, da das letzte Glied eine Covariante ist.

Nun gibt die Entwickelung vor der Transformation:

$$(a_0 + \lambda y_1^n)x^n + nx^{n-1}y\,(a_1 - \lambda y_1^{n-1}x_1) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2(a_2 + \lambda y_1^{n-2}x_1^2) + \ldots$$

Jede Invariante dieses Ausdrucks wird durch Transformation in eine gleiche Function der neuen Coefficienten verwandelt. — Diese Invariante kann aber aus der der ursprünglichen (nicht um $\lambda(xy_1 - yx_1)^n$ vermehrten) Form gebildeten Invariante J gebildet werden, indem man in letzterer a_0, a_1 ... vertauscht mit:

$$a_0 + \lambda y_1^n, \qquad a_1 - \lambda y_1^{n-1}x_1,$$

auf diese Weise ergibt sich:

$$J + \lambda\left(y_1^n\frac{\partial}{\partial a_0} - y_1^{n-1}x_1\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right)\zeta + \lambda^2\left(-y_1^n - y_1^{n-1}x_1\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right)^2\zeta + \ldots$$

In der transformirten Form treten nun die λ entsprechenden Potenzen von λ_1 auf, und durch Vergleichung der einzelnen Glieder ergibt sich, dass dieselben nur um Potenzen des Transformationsmoduls von den durch Transformation gebildeten verschieden sind, also wie behauptet Covarianten sind.

Diese Gattung von Covarianten wird auch als Evectanten bezeichnet.

So z. B. hatte $(abcd)\,\|\,(xy)^3$ die Invariante vom vierten Grade:

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd$$

(jede Function vom ungraden Grade hatte eine solche vom vierten Grade). Die entsprechende Evectante ist:

$$(a^2d + 2b^3 - 3abc,\ 3b^2c + 3abd - 6ac^2,\ 6b^2d - 3bc^2 - 3acd,\ 3bcd - 2c^3 - ad^2)\,(xy)^3.$$

Die Discriminante D einer binären Form war, wie oben gezeigt eine Invariante.

Hat nun die Form einen quadratischen Factor $(xy_1 - x_1y)^2$, so lässt sich zeigen, dass die erste Evectante:

$$\left(y^n\frac{\partial}{\partial a_0} - y^{n-1}x\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right)D$$

eine Potenz dieses Factors, also gleich $(xy_1 - x_1y)^m$ ist.

Denn setzt man $xy_1 - x_1y = \eta$, so verwandelt sich die Form in eine andere, welche von den beiden ersten Coefficienten $a_0 a_1$ frei ist. Jede Discriminante nimmt aber, wie gezeigt worden, die Gestalt an $a_0\varphi + a_1^2\psi$, also die Differenzialquotienten nach $a_2, a_3 \ldots$ sind von derselben Gestalt, und verschwinden folglich gleichzeitig mit a_0 und a_1 ebenso der Differenzialquotient nach a_1, welcher die Gestalt hat:

Digitized by Google

$$a_0\varphi' + 2a_1\psi + a_2{}^2\psi'$$

und nur der nach a_0 bleibt, die Evectante hat also nur das eine Glied:

$$\eta^n \frac{\partial D}{\partial a_0},$$

was zu beweisen war.

Wenn z. B. bei einer cubischen Form die Discriminante verschwindet, so ist die Evectante: der Cubus der singulären Wurzel, d. h.: $(xy_1 - x_1y)^3$. Sind mehr als zwei gleiche Wurzeln vorhanden, so verschwindet $\frac{\partial D}{\partial a_0}$ ebenfalls.

Dann ist die zweite Evectante:

$$\left(y^n \frac{\partial}{\partial a_0} - y^{n-1} \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right)^2 D$$

gleich

$$(xy_1 - x_1y)^n \ (xy_2 - x_2y)^n$$

so dass durch Ausziehung der $n$ten Wurzel der Evectante, und durch Auflösung einer quadratischen Gleichung beide Wurzeln gefunden werden können.

Viele der in diesem Abschnitte für binäre Formen ausgesagten Sätze lassen sich ohne Weiteres auf Formen von beliebiger Anzahl von Variablen übertragen. Es sollen also hier nur diejenigen Punkte erörtert werden, bei welchen eine solche Uebertragung nicht ohne Weiteres zulässig ist.

Es reicht hierbei die Betrachtung von drei Veränderlichen aus, da für mehr Veränderliche keine weiteren Modificationen eintreten.

Es soll zunächst die symbolische Form:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi,$$

welche, wie gezeigt, eine Covariante von f ist, verallgemeinert werden.

Wir setzten:

A)
$$\begin{aligned} x &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta, \\ y &= \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta \\ z &= \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta. \end{aligned}$$

Sei $M = (\alpha_1\beta_2\gamma_3)$, also der Substitutionsmodul, A_1, B_1 . . . die Unterdeterminanten von M, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} M\xi &= A_1x + A_2y + A_3z \\ M\eta &= B_1x + B_2y + B_3z \\ M\zeta &= C_1x + C_2y + C_3z. \end{aligned}$$

B)
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{M}\left(A_1\frac{\partial}{\partial\xi} + B_1\frac{\partial}{\partial\eta} + C_1\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{M}\left(A_2\frac{\partial}{\partial\xi} + B_2\frac{\partial}{\partial\eta} + C_2\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) \\ &\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ &\cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \end{aligned}$$

Betrachtet man nun einerseits x, y, z und andererseits $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ als zwei Reihen von Veränderlichen, die gleichseitig transformirt sind, so entsprechen den Coefficienten α, β . . . der ersten Transformation die Glieder der Reciproke von $(\alpha_1\beta_2\gamma_3)$, man kann also die beiden Substitutionen als reciprok bezeichnen.

Es soll jetzt vorausgesetzt werden, dass immer wenn x, y, z transformirt werden mit X, Y, Z die reciproke Transformation eintritt.

Dann bleibt der Ausdruck

$$xX + yY + zZ$$

durch Substitution nur mit M multiplicirt sonst unverändert. Denn in der transformirten Function sind die entsprechenden Glieder bezüglich multiplicirt mit:

$$\begin{aligned} A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 \\ B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + B_3\beta_3 \\ C_1\gamma_1 + C_2\gamma_2 + C_3\gamma_3 \end{aligned}$$

Ausdrücke, die mit M identisch sind, während alle Glieder Factoren von der Form:

$$B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_3\alpha_3 = 0$$

haben. (Der oben betrachtete Ausdruck $xy_1 - x_1y$ ist hier der specielle Fall für zwei Variablen.)

Jetzt stellen wir der Covariante gegenüber die Contravariante (zugeordnete Form) und bezeichnen als solche eine von X, Y, Z abgeleitete Form, welche ihre Beziehung zur ursprünglichen beibehält, wenn die beiderseitigen Veränderlichen reciproke Substitutionen erleiden.

(Geometrisch betrachtet ist die Reciproke einer Curve eine Contravariante ihrer Gleichung.) Nun zeigt sich ganz wie bei dem Symbol:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

dass aus jeder Contravariante ein invariantes Symbol hervor-

Digitized by Google

geht, wenn man X, Y, Z mit $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ vertauscht. Eben so kann x, y, z mit $\frac{\partial}{\partial X}$, $\frac{\partial}{\partial Y}$, $\frac{\partial}{\partial Z}$ vertauscht werden.

Aus demselben Grunde gibt die Substitution $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ für X, Y, Z eine Covariante von f.

Die Symbole B lassen sich nämlich auf zweierlei Art auffassen. Einerseits kann man, indem man sie in eine Form einsetzt, die Potenzen der Variablen x^2, y^2, x^2y durch die entsprechenden Differenzialquotienten $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}$ . . . $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2\,\partial y}$ andererseits aber auch durch die Potenzen von $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$ ersetzen; in beiden Fällen sind nämlich diese Ausdrücke, wie sie aus B) entstehen, wie leicht zu sehen, mit denselben aus A, B, C . . . gebildeten Coefficienten behaftet.

Beispiele. Der Gleichung eines Kegelschnittes entspricht die ternäre Form:

$$ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2by z + 2b_1zx + 2b_2xy,$$

deren reciprokem Kegelschnitte:

$$(a_1a_2 - b^2)X^2 + (a^2a - b_1^2)Y^2 + (aa_1 - b_2^2)Z^2 + 2(b_1b_2 - ab)YZ + 2(b_2b - a_1b_1)ZX + 2(bb_1 - a_2b_1)XY.$$

Da nun durch diese letzte Gleichung die Bedingung ausgesprochen ist, dass die Grade:

$$xX + yY + zZ = 0$$

den Kegelschnitt berührt, und diese letzte Form bei reciproker Substitution unverändert bleibt, so ist die Gleichung des zweiten Kegelschnittes eine Contravariante des ersten. Vertauscht man nun X, Y, Z mit $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, d. h. ersetzt man die Potenzen durch Differenzialquotienten und bezieht diese wieder auf die erste Gleichung:

$$ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + \ldots,$$

so erhält man eine Invariante einer ternären quadratischen Form, nämlich:

$$aa_1a_2 + 2bb_1b_2 - ab^2 - a_1b_1^2 - a_2b_2^2.$$

Bei binären Formen sei:

$$x = \alpha_1\xi + \beta_1\eta$$
$$y = \alpha_2\xi + \beta_2\eta,$$

also:

$$\xi = \frac{1}{M}(\beta^1x - \alpha^1y)$$
$$\eta = \frac{1}{M}(-\beta_1x + \alpha_1y).$$

Die Factoren von x und y in den letzten Gleichungen bilden die Unterdeterminanten von $(\alpha_1\beta_2)$, entsprechen also der reciproken Substitution, zugleich aber zeigen diese Gleichungen, dass wenn man x, y bezüglich mit y, $-x$ vertauscht die ursprüngliche Substitution stattgefunden hat. In diesem Falle also kann man setzen.

$$X = y, \quad Y = -x$$

(dies Resultat war uns schon bekannt).

Mit Hülfe des letzten Satzes kann man also z. B. aus der Form:

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

eine Covariante bilden, wenn man darin setzt:

$$y = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad -x = \frac{\partial f}{\partial y};$$

dies gibt:

$$a\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2b\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + c\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2.$$

Das Resultat führt indess auf f selbst zurück.

Jetzt lässt sich auch beweisen, dass die Functionaldeterminante von $f_1, f_2 \ldots$ eine Invariante dieser Ausdrücke sei, denn vollzieht man eine Substitution an x, y, z, so ersieht man wie oben gezeigt, dass diesem eine reciproke Substitution an

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y} \ldots$$

entspricht.

Die mit dem transformirten $\frac{\partial f}{\partial x}$ . . . gebildete Determinante ist aber nach dem Multiplicationssatze gleich der ursprünglichen in die reciproke Determinante $(A_1\ B_2\ \ldots)$, welche eine Potenz der ursprünglichen ist.

Es soll jetzt der Satz verallgemeinert werden, welcher aussagt, dass

$$\left(y^n\frac{\partial}{\partial a_0} - y^{n-1}\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right)^p\zeta$$

eine Covariante jeder Form ist, deren Invariante ζ ist.

Dieser lautet für mehrere Variablen: Ist ζ eine Invariante der Form:

$$f = a_0x^n + na_1x^{n-1}y + nb_1x^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{1.2}a_2x^{n-2}y^2 + \ldots,$$

so ist:

$$\left(X^n\frac{\partial}{\partial a_0} + X^{n-1}Y\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right)^p \zeta$$

eine Contravariante (Evectante) von f

Denn mögen:

$$a_0x^n + na_1x^{n-1}y + \ldots$$

durch Substitution übergehen in:

$$A_0\xi^n + nA_1\xi^{n-1}\eta + \ldots$$

so bleibt, wie wir gesehen haben:

$$xX + yY + zZ$$

ungeändert. Es ist also:

$$a_0x^n + na_1x^{n-1}y + \ldots + \lambda(xX + yY + zZ)^n = A_0\xi^n + nA_1\xi^{n-1}\eta + \ldots + \lambda_1(\xi\Xi + \eta H + \zeta Z)^n,$$

wenn Ξ, H, Z die neuen Variablen der reciproken Substitution für X, Y, Z sind.

Jede Invariante der linken Seiten der Gleichung wird also in eine gleiche Function derer der anderen Seite transformirt. Eine solche wird aber für

$$a_0x^n + \ldots + \lambda(xX + \ldots)^n$$

gebildet, indem man in einer Invariante J der ursprünglichen Form $a_0x^n + \ldots$ setzt:

$$a_0 + \lambda X^n \text{ für } a_0,$$
$$a_1 + \lambda X^{n-1}Y \text{ für } a_1$$
$$b_1 + \lambda X^{n-1}Z \text{ für } b_1$$

u. s. w.

Die Invariante ist also:

$$J + \lambda\left(X^n\frac{\partial}{\partial a_0} + \ldots\right)J + \ldots$$

Die Coefficienten der Potenzen von λ sind bis auf den gewöhnlichen Factor den Coefficienten von λ_1 gleich. Die letzteren gehen aber aus den andern durch die reciproke Substitution hervor und daher sind diese Coefficienten Contravarianten von f.

So z. B. folgt aus der Discriminante einer quadratisch ternären Form:

$$D = aa_1a_2 + 2bb_1b_2 - ab^2 - a_1b_1^2 - a_2b_2^2,$$

die Evectante:

$$X^2\frac{\partial D}{\partial a} + Y^2\frac{\partial D}{\partial a_1} + XY\frac{\partial D}{\partial b_2} + \ldots$$

d. h.:

$$(a_1a_2 - b^2)X^2 + (a_2a - b_1^2)Y^2 + \ldots$$

wie schon gezeigt, die Gleichung der Reciprokalcurve.

Der letzte von den Evectanten binärer Formen hier gegebene Satz betraf die singulären Wurzeln. Derselbe nimmt für ternäre Formen folgende Fassung an.

Verschwindet die Discriminante einer Form, so hat dieselbe eine Reihe singulärer Wurzeln $x_1, y_1, z_1 \ldots$ Die erste Evectante der Discriminante ist dann eine $n$te Potenz von $x_1X + y_1Y + z_1Z$.

In diesem Falle kann nämlich die Form so transformirt werden, dass die neuen Coefficienten von x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-1}z \ldots$ verschwinden, ganz wie bei binären Formen.

Da dann nämlich für $z = 0$, die Function einen quadratischen Factor erhält, und ebenso für $y = 0$, so kann man sie auf die beiden Formen bringen:

$$(xy_1 - yx_1)^2\varphi + z\psi,$$
$$(xz_1 - zx_1)^2\varphi_1 + y\psi_1.$$

Macht man nun die Substitution:

$$x = x,\quad y = xz_1 - zx_1,\quad z = xy_1 - yx_1,$$

so lehrt die erstere Form, dass kein mit x^n und kein mit $x^{n-1}y$, die letztere, dass kein mit $x^{n-1}z$ multiplicirtes Glied existirt, es ist also

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0.$$

Nun könnte die Discriminante ganz allgemein auf die Gestalt gebracht werden:

$$a_0\varrho + a_1^2\varphi + a_1b_1\psi + b_1^2\chi$$

und man sieht, dass für a_0, a_1, $b_1 = 0$ alle Differenzialquotienten ausser $\frac{\partial D}{\partial a_0}$ verschwinden. Das erste Glied der Evectante ist dann $Xn\frac{\partial D}{\partial a_0}$, nun geht das neue X aus dem alten durch reciproke Transformation hervor. Die der Substitution:

$$x = x,\quad y = xy_1 - zx_1,\quad z = xz_1 - zx_1$$

entsprechende Determinante aber ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ y_1 & -x_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

und die Glieder der Reciproke, welche 1, 0, 0 entsprechen, bezüglich:

$$x_1^2, \quad x_1y_1, \quad x_1z_1,$$

also ist abgesehen von den gemeinschaftlichen Factor x_1, X^n zu ersetzen durch:

$$(x_1X + y_1Y + z_1Z)^n$$

was zu beweisen war.

Sind zwei singuläre Wurzeln vorhanden, so verschwinden alle ersten Differenziale, und dann ist die zweite Evectante eine Potenz von

$$(x_1X + y_1Y + z_1Z), (x_2X + y_2Y + z_2Z).$$

12) Differenzialgleichungen für die Invarianten.

Unter dem Gewicht einer abgeleiteten Form verstehen wir wie oben die Indexsumme jedes Gliedes.

Es lässt sich nun zeigen, dass das Gewicht jedes Gliedes der Covariante einer binären Form constant und gleich $\frac{1}{2}n\nu$ ist, wenn n der Grad der Form, ν der der Invariante ist.

Die ursprüngliche Form ist:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots,$$

so dass der Index mit der Potenz von y übereinstimmt, in die er multiplicirt ist.

Vertauschen wir nun y mit cy, so ist dies eine lineare Substitution, welche die Invariante mit einer Potenz von c multiplicirt wieder herstellt c^m, andererseits gilt dieser Substitution gleich eine Multiplication jedes Coefficienten mit derjenigen Potenz von c, die seinem Index entspricht. Es ist also die Summe der Indices jedes Gliedes der Invariante gleich m, also constant. Um m zu berechnen, bemerken wir, dass wenn man x und y vertauscht, dies ebenfalls eine lineare Substitution mit Modul -1 ist, welche also nur das Zeichen der Invariante ändert, andererseits wird hierbei jeder Coefficient a_s durch a_{n-s} ersetzt. Sind also s_1, s_2 die Indices eines Gliedes der Invariante, so ist:

$$s_1 + s_2 + \ldots = n - s_1 + n - s_2 + \ldots$$
$$= n\nu - s_1 - s_2 + \ldots$$

wenn ν der Grad der Invariante ist, also:

$$s_1 + s_2 + \ldots = \frac{n\nu}{2}$$

wie vorausgesagt wurde.

Es können also n und ν nicht beide ungrade sein.

Dies Gesetz gestattet, sogleich die Buchstabenfactoren irgend einer Invariante zu bilden, abgesehen von den Zahlencoefficienten.

Z. B. Für eine cubische Form ist das Gewicht der Invariante vierter Ordnung gleich 6, die einzelnen Glieder also:

$$a_0^2a_3^2, \quad a_0a_1a_2a_3, \quad a_1^2a_2^2,$$
$$a_0a_2^3, \quad a_1^3a_3.$$

Die Anzahl der Glieder ist gleich der Anzahl der Arten, auf welche $\frac{1}{2}n\nu$ in eine Summe von ν Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2 . . . n zerlegt werden kann.

Aehnliche Betrachtungen sind jetzt für die Covarianten anzustellen.

Wird in der Form y mit ϱy vertauscht, so ist jeder Coefficient in der Covariante mit einer dem Index entsprechenden Potenz von ϱ multiplicirt, vertauscht man andererseits in der Covariante y mit ϱy, so dürfen sich beide Resultate immer nur um eine Potenz von ϱ unterscheiden. Diese zweite Aenderung ist aber von demselben Erfolge, als wenn man in der ursprünglichen Covariante gleichzeitig die Coefficienten mit der dem Index entsprechenden Potenz von ϱ multiplicirt, und zugleich y durch ϱ dividirt oder was dasselbe ist x mit ϱ multiplicirt.

Ist also ein Glied der Covariante:

$$a_{s1}\ a_{s2} \ldots x^\mu y^p$$

so ist:

$$\varrho^{s_1+s_2+\ldots+\mu} = \varrho^{m_1},$$

also $s_1 + s_2 + \ldots + \mu$ constant.

Vertauschen wir dann x mit y so wird wie oben:

$$s_1 + s_2 + \ldots + \mu = n_1 - \mu + n - s_1$$
$$+ n - s_2 + \ldots$$

Wenn n_1 der Grad der Covariante in Bezug auf ihre Veränderliche ist, mithin, wenn ν der Grad derselben in Bezug auf die Coefficienten ist:

$$s_1 + s_2 + \ldots + \mu = \tfrac{1}{2}(n_1 + n\nu).$$

Dies ist das Gewicht der Covariante, wenn man mit diesem Namen die Summe der Indices eines Gliedes, vermehrt um den Exponenten, welchen x in diesem Gliede hat, bezeichnet.

Das Gewicht der in Bezug auf Veränderliche und Coefficienten quadratischen Covariante einer cubischen Form ist somit:

$$\tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4,$$

Digitized by Google

das mit x^2 multiplicirte Glied hat dann die Indexsumme 2. Es besteht also aus den Theilen:

$$a_0 a_2 \text{ und } a_1^2,$$

das mit xy multiplicirte hat die Indexsumme 3, also man hat entsprechend:

$$a_1 a_2 \text{ und } a_0 a_3$$

und in y^2 ist multiplicirt:

$$a_1 a_2 \text{ und } a_2^2$$

Es bleibt nun noch übrig, die Coefficienten zu bestimmen.

Jede Invariante genügt gewissen Differenzialgleichungen.

Sei gegeben die Form:

$$(a_0, a_1, a_2 \ldots) \mid (xy)^n.$$

Vertauschen wir x mit $x + \lambda y$, so ist der Modul:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

also die Invariante unverändert, die neue Form aber ist:

$$(a_0, a_1 + \lambda a_0, a_2 + 2\lambda a_1 + \lambda^2 a_0 + \ldots) \mid (xy)^n$$

wie sich durch Berechnung ergibt.

In der Invariante ζ, welche dadurch die Gestalt annimmt:

$$\zeta + \lambda \left(a_0 \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \zeta}{\partial a_2} + \ldots \right)$$

muss die Zunahme verschwinden. Es ist also:

$$1) \qquad a_0 \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \zeta}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial \zeta}{\partial a_3} + \ldots + n^2 a_{n-1} \frac{\partial \zeta}{\partial a_n} = 0.$$

Dies ist die gesuchte Differenzialgleichung. Macht man aber die Substitution $y + \mu x$ für y, so kommt in derselben Weise.

$$2) \qquad n a_1 \frac{\partial \zeta}{\partial a_0} + (n-1) a_2 \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} + (n-2) a_3 \frac{\partial \zeta}{\partial a_2} + \ldots = 0.$$

Wenn die Form ohne Differenzialquotienten geschrieben ist, so werden, wie sogleich ersichtlich, diese Gleichungen:

$$1a) \qquad n a_0 \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{\partial \zeta}{\partial a_2} + (n-2) a_2 \frac{\partial \zeta}{\partial a_3} + \ldots = 0$$

$$2a) \qquad a_1 \frac{\partial \zeta}{\partial a_0} + 2a_2 \frac{\partial \zeta}{\partial a_1} + 3a_3 \frac{\partial \zeta}{\partial a_2} + \ldots = 0.$$

Es sind diese beide Gleichungen aber auch ausreichende Bedingung dafür, dass ein Ausdruck ζ eine Invariante sei.

Zunächst ist klar, dass er eine solche ist, wenn auch die mit λ^2, $\lambda^3 \ldots$, μ^2, $\mu^3 \ldots$ multiplicirten Zunahmen von ζ verschwinden, denn da man die Substitutionen nach einander aufstellen kann, so vertreten die hier gegebenen $x + \lambda y$ für x, $y + \mu x$ für y alle möglichen. Dass nun, wenn unsere Gleichung stattfinden, auch die andern Coefficienten zu finden sind, kann man folgendermaassen darthun.

Der Coefficient von λ^2 kann geschrieben werden:

$$a_0 \frac{\partial \zeta}{\partial a_2} + 3a_1 \frac{\partial \zeta}{\partial a_3} + 6a_2 \frac{\partial \zeta}{\partial a_4} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots \right)^2 \zeta.$$

In dem Symbol, welches das zweite Glied bildet, sind die explicite stehenden a_0, $a_1 \ldots$ nicht zu differenziiren. Wenn man aber das Symbol so versteht, als fände das letztere doch statt, so kommen noch die im ersten Gliede enthaltenen Glieder hinzu, und man kann also für die Summe schreiben, wenn a_0, $a_1 \ldots$ explicite und implicite differenziirt wird:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots \right)^2 \zeta.$$

Dieser Ausdruck aber verschwindet wegen Gleichung 1). Gleiches findet mit den andern Gliedern statt.

Die Gleichungen 1) und 2) definiren also die Invariante. Es reicht indess schon eine hin, wenn man berücksichtigt, dass bei der Vertauschung von a_s mit

Digitized by Google

a_{n-s} die Function ζ unverändert bleiben muss, was immer stattfindet, wenn man das Gewicht $\frac{n\nu}{2}$ berücksichtigt.

Hiernach lassen sich Invarianten berechnen.

Beispiele. Die Invariante vierter Ordnung der cubischen Form war:

$$Aa_0a_3^2 + Ba_0a_1a_2a_3 + Ca_1^2a_3 + Da_0a_2^2 + Ea_1^2a_2^2$$

Die Zahlen-Coefficienten A, B, C . . . sind zu bestimmen, jedoch kann $A = 1$ sein. — Die Gleichung:

$$a_0\frac{\partial\zeta}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial\zeta}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial\zeta}{\partial a_3} = 0$$

gibt:

$$(B+6)a_0^2a_2a_3 + (3C+2B)a_0a_1^2a_3 + (2E+6D+3B)a_0a_1a_2^2 + (4E+3C)a_1^2a_2 = 0,$$

also wenn man die Coefficienten gleich Null setzt:

$$B = -6, \quad C = 4, \quad D = 4, \quad E = -3.$$

Die Invariante dritter Ordnung für die biquadratische Form ist, da das Gewicht 6 wird:

$$a_0a_2a_4 + Ba_1^2a_4 + Ca_0a_3^2 + Da_1a_3a_3 + Ea_2^3$$

und wie oben folgt:

$$B = -1, \quad D = 2, \quad E = -1, \quad C = -1.$$

Sei endlich die Discriminante von $(a_0a_1a_2 \ldots)(xy)^n$ zu bilden, und zwar nach Potenzen von a_0 geordnet.

Nach einem Satze des Abschnitts 10) hat dieselbe die Form:

$$a_0U + a_1^2V,$$

wo V die Discriminante von:

$$(a_1a_2 \ldots)(xy)^{n-1}$$

ist, man kann also dafür setzen:

$$a_1^2V + a_0\alpha + a_0^2\beta + \ldots$$

wo V, α, β von a_0 frei sind.

Bildet man nun:

$$a_1\frac{\partial}{\partial a_0} + 2a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots = 0,$$

so ist der von a_0 unabhängige Theil:

$$0 = a_1\alpha + 4a_1a_2V + a_1^2\left(2a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + 3a_3\frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots\right)V,$$

nun ist, da V selbst eine Discriminante:

$$\left(a_2\frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_3\frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots\right)V = 0,$$

also:

$$\alpha = -4a_2V + a_1\left(a_2\frac{\partial}{\partial a_2} + 2a_4\frac{\partial}{\partial a_3} + \ldots\right)V.$$

Aus dem Coefficienten von a_1 wird auf gleiche Weise β bestimmt.

Diese Betrachtungen führen Cayley auch zur Bestimmung der Anzahl der unabhängigen Invarianten einer binären Form. (Vergl. Cayley: *Second memoir upon Quantics. Philos. Transactions. Vol.* 146.)

Aber auch für eine Covariante gibt es gewisse Differenzialgleichungen.

Setzen wir in derselben $x + \lambda y$ für x, thun dies dann in der gegebenen Form und bilden die Covariante; das letztere ist, wie oben gezeigt, gleichbedeutend mit der Substitution:

$$a_1 + \lambda a_0 \text{ für } a_1, \quad a_2 + 2a_1\lambda + a_0\lambda^2 \text{ für } a_2 \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

Sei nun die Covariante:

$$c_0 x^{n_1} + n_1 c_1 x^{n_1-1} y + \frac{n_1(n_1-1)}{1 \cdot 2} c_2 x^{n_1-2} y^2 + \ldots$$

Die Substitution $x + \lambda y$ wird angestellt, wir nehmen jedoch nur das mit λ multiplicirte Glied. Dies ist:

$$n_1 c_0 x^{n_1-1} + n_1(n_1-1) c_1 x^{n_1-2} y + \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)}{1 \cdot 2} c_2 x^{n_1-3} y^2 + \ldots$$

Dagegen gibt die Substitution:

$$a_1 + \lambda a_0 \text{ für } a_1. \qquad a_2 + 2a_1\lambda \text{ für } a_2 \text{ u. s. w.}$$

das mit λ multiplicirte Glied:

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3}\right)\left(c_0 x^{n_1} + n_1 c_1 x^{n_1-1} y + \ldots\right)$$

Die erste Klammer ist das Symbol der an der zweiten zu vollziehenden Differenziirung. Der Vergleich beider, gleich zu setzender Ausdrücke, (da es auf einen Factor nicht ankommt) gibt nun:

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots\right) c_0 = 0$$

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right) c_1 = c_0$$

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right) c_2 = 2c_1$$

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + \ldots\right) c_3 = 3c_2.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Zahlen-Coefficienten der Covarianten.

Beispiel. Für die quadratische Covariante der cubischen Form war der Coefficient von x^2:

$$c_0 = a_0 a_2 + B a_1^2.$$

Die Operation

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} = 0$$

gibt:

$$B = -1$$

mit xy multiplicirt ist:

$$2c_1 = C a_0 a_3 + D a_1 a_2$$

es kommt wegen:

$$\left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots\right) c_1 = 0$$

$$D = -1, \qquad C = 1$$

und mit y^3 multiplicirt

$$C_2 = E a_1 a_3 + F a_2^2,$$

wo sich ergibt:

$$E = 1, \qquad F = 1.$$

Die Covariante ist:

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) xy + (a_1 a_3 - a_2^2) y^2.$$

Die hier gegebenen Resultate lassen sich noch anders ausdrücken.

Wenn an der Form:

$$(a_1 a_2 \ldots)(xy)^n$$

die Operation $y \frac{\partial}{\partial x}$ also an einer der Variablen vollzogen wird, so ist dies gleichbedeutend mit der Operation:

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \ldots = \Sigma s a_{s-1} \frac{\partial}{\partial a_s}$$

an den Coefficienten.

Digitized by Google

Man kann also dies durch die symbolische Gleichung:

$$y\frac{\partial}{\partial x}=\left[y\frac{\partial}{\partial x}\right],$$

ausdrücken, wenn $\left[y\frac{\partial}{\partial x}\right]$ das Symbol $\Sigma s a_{s-1}\frac{\partial}{\partial a_s}$ bedeutet. Diese Gleichung definirt die Covariante völlig. Ebenso werden die Invarianten durch die Gleichung:

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x}\right]=0$$

definirt. Denn für dieselben ist offenbar $y\frac{\partial}{\partial x}=0$. Diese Betrachtung lässt sich leicht auf Functionen mit beliebig viel Veränderlichen übertragen. Für solche ist:

$$y\frac{\partial}{\partial x}=\left[y\frac{\partial}{\partial x}\right],\qquad s\frac{\partial}{\partial x}=\left[s\frac{\partial}{\partial x}\right].$$

Die durch die Klammer angedeutete Operation ist in jedem Falle leicht zu finden, wenn man in der gegebenen Form x mit $x+\lambda y$ und dann mit $x+\lambda_1 s$ vertauscht. So z. B. ist für die ternäre quadratische Form:

$$(a\,a'\,a''\,b\,b'\,b'')\;|\;(x\,y\,z)^2$$

$$y\frac{\partial}{\partial x}=a\frac{\partial}{\partial b''}+b'\frac{\partial}{\partial b}+2b''\frac{\partial}{\partial a'}$$

$$s\frac{\partial}{\partial x}=a\frac{\partial}{\partial b'}+b''\frac{\partial}{\partial b}+2b'\frac{\partial}{\partial a''}.$$

Für die Invariante verschwinden diese Ausdrücke.

Schreibt man die Coefficienten mit mehrfachen Indices, und unterscheidet auch die Variablen durch Indices, so dass z. B. der Coefficient $a_{p\,q\,r}$ mit $x_1^p\,x_2^q\,x_3^r$ multiplicirt ist, dann nimmt z. B. jede ternäre quadratische Form die Gestalt an:

$$(a_{1\,1}\;a_{2\,2}\;a_{3\,3}\;a_{2\,3}\;a_{3\,1}\;a_{1\,2})\;|\;(x_1\,x_2\,x_3)^2$$

und dann ist:

$$x_2\frac{\partial}{\partial x_1}=a_{1\,1}\frac{\partial}{\partial a_{1\,2}}+a_{3\,1}\frac{\partial}{\partial a_{2\,3}}+2a_{1\,2}\frac{\partial}{\partial a_{2\,2}}$$

$$x_3\frac{\partial}{\partial x_1}=a_{1\,1}\frac{\partial}{\partial a_{3\,1}}+a_{1\,2}\frac{\partial}{\partial a_{2\,3}}+2a_{3\,1}\frac{\partial}{\partial a_{3\,3}}$$

Die zweite geht aus der ersten durch Vertauschung der Indices 2) und 3) hervor. Durch cyclisches Vorrücken der Indices ergeben sich aus diesen Gleichungen noch vier andere.

Für ternäre Formen dritten Grades:

$$(a_{1\,1\,1}\;a_{2\,2\,2}\;a_{3\,3\,3}\;a_{2\,2\,3}\;a_{3\,3\,1}\;a_{1\,1\,2}\;a_{2\,3\,3}\;a_{3\,1\,1}\;a_{1\,2\,2}\;a_{1\,2\,3})\;|\;(x_1\,x_2\,x_3)^3$$

ergibt sich ebenso:

$$x_2\frac{\partial}{\partial x_1}=a_{1\,1\,1}\frac{\partial}{\partial a_{1\,1\,2}}+a_{3\,3\,1}\frac{\partial}{\partial a_{2\,3\,3}}+a_{2\,3\,3}\frac{\partial}{\partial a_{1\,2\,3}}+2a_{1\,1\,2}\frac{\partial}{\partial a_{1\,2\,2}}$$
$$+2a_{1\,2\,3}\frac{\partial}{\partial a_{2\,2\,3}}+3a_{1\,2\,2}\frac{\partial}{\partial a_{2\,2\,2}}$$

und

$$x_3\frac{\partial}{\partial x_1}=a_{1\,1\,1}\frac{\partial}{\partial a_{1\,1\,3}}+a_{1\,2\,2}\frac{\partial}{\partial a_{2\,2\,3}}+a_{2\,2\,3}\frac{\partial}{\partial a_{1\,2\,3}}+2a_{1\,1\,3}\frac{\partial}{\partial a_{1\,3\,3}}$$
$$+2a_{1\,2\,3}\frac{\partial}{\partial a_{2\,3\,3}}+3a_{1\,3\,3}\frac{\partial}{\partial a_{3\,3\,3}}..$$

Digitized by Google

Vorrücken sämmtlicher Indices gibt die übrigen Gruppen.

Auch das Gewicht bleibt bei ternären u. s. w. Formen constant.

Werden sämmliche Veränderliche einer Invariante mit Binomialcoefficienten geschrieben, so ist die Summe der numerischen Coefficienten gleich Null.

In der That verschwindet eine solche, wenn die Buchstaben-Coefficienten gleich werden, wo dann die Form eine $n$te Potenz wird, also durch lineare Substitution die Gestalt $A_0 x^n$ annimmt.

Nun kann kein Glied der Invariante a_0^p sein, weil sonst ein anderes den Coefficienten a_s von y^n der Form ebenfalls der Symmetrie wegen in der $p$ten Potenz enthalten müsste, diese Glieder a_0^p und a_s^p aber ungleiches Gewicht hätten. Macht man nun, wie hier geschehen, alle Coefficienten ausser A_0 gleich Null, so verschwindet in der That die Invariante.

Diese Regel kann bei der Berechnung von Invarianten als Probe dienen.

13) Symbolische Berechnung von Invarianten und Covarianten. Reciprocitätsgesetz.

Werden x_1, y_1 und x_2, y_2 bezüglich denselben Substitutionen unterworfen, so war nach Abschnitt 11):

$$x_1 y_2 - x_2 y_1$$

eine Invariante.

Ausserdem, da denselben Substitutionen auch die Symbole:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial y_2}$$

unterworfen werden können, sind die Potenzen von:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}$$

Symbole für Covarianten.

Dies Symbol soll jetzt mit $\overline{12}$ bezeichnet werden.

Sind demnach U, V irgend welche binäre Formen, so erhält man Covarianten dieses Systems (bezüglich Invarianten), indem man die Veränderlichen der einen U mit dem Index 1, die der andern mit Index 2 versieht, und die Operation

$$\overline{12}^n = \frac{\partial^n}{\partial x_1^n}\frac{\partial^n}{\partial y_2^n} - n\frac{\partial^n}{\partial x_1^{n-1}\partial y_1}\frac{\partial^n}{\partial y_2^{n-1}\partial x_2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{\partial^n}{\partial x_1^{n-2}\partial y_1^2}\frac{\partial^n}{\partial y_2^{n-2}\partial x_2^2} - \ldots .$$

an dem Product UV vollzieht.

Nach dem Differenziiren sind die Index zu vernachlässigen. Man hat also:

$$\frac{\partial^n U}{\partial x^n}\frac{\partial^n V}{\partial y^n} - n\frac{\partial^n U}{\partial x_1^{n-1}\partial y}\frac{\partial^n V}{\partial y^{n-1}\partial x} + \ldots$$

Auch kann man U und V identisch nehmen, und hat dann die Covarianten von U.

So z. B. ist:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

eine Covariante.

Um die Covariante einer Form zu haben, bildet man die Covarianten eines Systems und identificirt dessen Glieder.

Dies soll immer bei dem Symbol $\overline{12}^n$ vorausgesetzt werden, wenn kein Buchstabe hinter demselben steht.

Da die Indices nachher unterdrückt werden, ist die Wahl derselben von keinem Einfluss. Nun ist offenbar:

$$(\overline{12} + \overline{21})\,U = 0,$$

also für ungrade n:

$$\overline{12}^n = 0.$$

Digitized by Google

Die Invarianten und Covarianten: $\overline{12}^2$, $\overline{12}^4$ u. s. w. sind schon in Abschnitt 11) entwickelt. Ferner ist:

$$\overline{12}^n (a_0\ a_1\ a_2\ \ldots) \mid (x\,y)^n = a_0\,a_n - n\,a_1\,a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,a_2\,a_{n-2} - \ldots$$

Der letzte Coefficient ist durch zwei zu dividiren, wie leicht aus dem Bildungsgesetz sich ergibt.

Diese Gesetze lassen sich auf eine beliebige Anzahl von Functionen ausdehnen. Seien dieselben U, V, W, so werden ihre Variablen mit den Indices $1, 2, 3 \ldots$ versehen, und mit dem Producte die Operationen, welche durch ein Product von einer beliebigen Anzahl der Symbole aus der Reihe:

$$\overline{12}^{n_1}\ \ \overline{23}^{n_2}\ \ \overline{34}^{n_3}\ \ \overline{41}^{n_4}$$

gegeben sind, vollzogen, wenn immer

$$\overline{ab} = \frac{\partial}{\partial x_a}\,\frac{\partial}{\partial y_b} - \frac{\partial}{\partial y_a}\,\frac{\partial}{\partial x_b}$$

ist. Man hat dann eine Covariante des Systems. Auch kann man schliesslich von den Formen U, V, W beliebige identisch setzen, oder auch alle.

Der Grad der abgeleiteten Function in den Coefficientn ist offenbar immer gleich der Anzahl der verschiedenen Ziffern in dem Symbol der abgeleiteten Form.

Denn sind alle Formen verschieden, so entbält die abgeleitete Form einen Coefficienten von jeder der Functionen $U, V, W \ldots$, und dies ist bei ihrer Identität noch richtig. Der Grad ist also gleich der Zahl der Factoren U_1, U_2, $U_3 \ldots$, welche mit den Ziffern in den Symbolen $\overline{12}$, $\overline{23} \ldots$ übereinstimmt, (wo also z. B. in $\overline{23}$, $\overline{31}$ 3 nur einmal gerechnet wird).

Was nun den Grad der Covariante als Function von x und y anbetrifft, so sei $U_1, U_2\, U_3 \ldots$ das Product der Formen. Sei U_1 vom Grade n_1, U_2 vom Grade $n_2 \ldots$, komme dann im Operationssymbol die Ziffer 1 α_1 mal, die Ziffer 2 α_2 mal vor u. s. w. (in der Potenz $\overline{12}^p$ 1 und 2 p mal gerechnet) dann erleidet U_s eine α_s malige Differenziation, ihr Grad wird also um so viel erniedrigt, und die Covariante ist vom Grade:

$$n_1 - \alpha_1 + n_2 - \alpha_2 + \ldots$$

Sind also alle U gleich vom Grade n und an Anzahl p, so ist der Grad der Covariante:

$$np - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots$$

oder:

$$np - 2r,$$

wenn das Symbol aus r Factoren $\overline{12} \ldots$ besteht. Für die Invariante muss sein, da die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ jede höchstens n betragen können:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = n.$$

Seien z. B. die Invarianten zu bestimmen, welche die Coefficienten im fünften Grade enthalten. Da nur drei Ziffern vorkommen, ist das Symbol:

$$\overline{12}^{\alpha} \cdot \overline{23}^{\beta} \cdot \overline{31}^{\gamma}.$$

Eins kommt hier z. B. $\alpha + \gamma$ mal vor, also ist, damit eine Invariante entstehe:

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \alpha = n$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{n}{2}.$$

Es darf also die gegebene Form keinen ungraden Grad haben. Ist sie vom Grade $2p$, so ist das Symbol der Invariante vom dritten Grade:

$$(\overline{12} \cdot \overline{23} \cdot \overline{31})^p.$$

Setzen wir.

$$\frac{\partial}{\partial x_s} = \alpha_s, \quad \frac{\partial}{\partial y_s} = \beta_s,$$

so ist also zu bilden das Product:

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha^2 \beta_1)^p$$
$$\cdot\ (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)^p$$
$$\cdot\ (\alpha_3 \beta_1 - \beta_3 \alpha_1)^p$$

Nach der Multiplication werden alle Indices weggelassen und für

$$\alpha^{2p-m}\,\beta^m$$

gesetzt:

$$\frac{\partial^{2p}\,U}{\partial x^{2p-m}\,\partial y^m}$$

Digitized by Google

was mit dem Coefficienten von $x^{2p-m}y^m$ in der gegebenen Form gleichbedeutend ist.

Für Invarianten vierter Ordnung erhält man, da vier Ziffern nöthig sind:

$$\overline{12}^{\alpha}\ \overline{23}^{\delta}\ \overline{34}^{\gamma}\ \overline{41}^{\delta}\ \overline{12}^{\alpha_1}\ \overline{24}^{\beta_1}$$

1 kommt z. B. $\alpha+\delta+\alpha_1$ mal vor; also:

$$\alpha+\delta+\alpha_1=\alpha+\beta+\beta_1=\beta+\gamma+\alpha_1$$
$$=\gamma+\delta+\beta_1=n,$$

hieraus ergibt sich:

$$\beta=\delta,\quad \alpha_1=\beta_1,\quad \alpha=\gamma.$$

Also das Symbol:

$$(\overline{12}\cdot\overline{34})^p\ (\overline{13}\cdot\overline{24})^q\ (\overline{14}\cdot\overline{23})^r$$
$$p+q+r=n.$$

Von diesen Zahlen kann eine Null sein.

Die Discriminante einer cubischen Form ist z. B.:

$$(\overline{12}\cdot\overline{34})^2\ (\overline{13}\cdot\overline{24}).$$

Aus diesen Prinzipien lässt sich leicht das von Hermite herrührende Reciprocitätsgesetz beweisen. Dasselbe lautet:

Die Anzahl der Invarianten $n$ten Grades einer binären Form vom $p$ten Grade ist gleich der Anzahl der Invarianten $p$ten Grades einer Form vom $n$ten Grade.

Nach einem im 11. Abschnitte gegebenen Satz, ist jede symmetrische Function der Wurzeldifferenzen eine Invariante, deren Glieder jede Wurzel eine gleiche Anzahl von Malen enthalten.

Man hat also für Invarianten erstens das Symbol:

$$\overline{12}^a\ \overline{23}^b\ \overline{34}^c\ \ldots$$

Ist dies eine Invariante $p$ten Grades einer Form $n$ten Grades, so kommt jede Ziffer p mal vor und ist $n$fach im Symbole enthalten.

Es ist aber nach dem Obigen eine Invarianten-Darstellung auch

$$\Sigma(x_1-x_2)^a\ (x_1-x_3)^b\ (x_3-x_4)^c\ \ldots,$$

sie ergibt sich aus dem Symbol durch Vertauschen der Zahlen mit Wurzeldifferenzen der Form.

Diese Invariante gehört dann zu einer Form $p$ten Grades, da nach der Voraussetzung p Wurzeln vorhanden sind (soviel als Indices) und ist vom Grade n in den Coefficienten.

Denn es ist bewiesen, dass bei der Invariante $n$ten Grades jede Ziffer des Symboles n mal vorkommt, und aus diesem Grunde kommt jede Wurzel der Differenz einmal im $n$ten Grade vor und in keinem höheren.

Nun ist aber bekanntlich der Grad einer symmetrischen Function der Wurzeln einer Gleichung in den Coefficienten gleich der höchsten darin vorkommenden Potenz einer Wurzel.

Somit ist unser Satz bewiesen.

Die quadratische Form hat z. B. nur eine unabhängige Invariante $(\alpha_1-\alpha_2)^2$, jede andere nimmt die Form $(\alpha_1-\alpha_2)^{2m}$ an. Somit haben wir nur Formen von gradem Grade und deren Form ist:

$$\overline{12}^{2m}.$$

Die Invarianten der cubischen Formen haben die Gestalt der Discriminante

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2\ (\alpha_2-\alpha_3)^2\ (\alpha_3-\alpha_1)^2,$$

oder der Potenzen davon; der Grad der Discriminante ist also 4. Es haben also nur Formen vom Grade $4m$ cubische Invarianten, und deren Form ist:

$$(\overline{12}\cdot\overline{23}\cdot\overline{31})^{2m}.$$

Das Hermite'sche Gesetz gilt auch für Covarianten.

Denn wenn in dem Symbole:

$$\overline{12}^{\alpha}\ \overline{23}^{\beta}\ \overline{34}^{\gamma}$$

p Ziffern vorkommen, 1 im Grade a, 2 im Grade b, u. s. w., so ist der Grad der Covariante:

$$n-a+n-b+\ldots$$

wenn die gegebene Form den Grad n hat. Dem entspricht nun die symmetrische Function:

$$\Sigma(x_1-x_2)^a\ (x_2-x_3)^\beta\ (x_3-x_4)^\gamma$$
$$(x-x_1)^{n-a}\ (x-x_2)^{n-b}+\ldots;$$

sie ist, wie in Abschnitt 11) gezeigt, Covariante einer Form $p$ten Grades, x_1, x_2 ... sind die Wurzeln derselben, jede also kommt im Grade n vor, welches der Grad der Covariante ist.

Die Veränderlichen aber kommen im Grade

$$n-a+n-b+\ldots$$

wie bei der ursprünglichen Covariante vor.

Die einzigen Covarianten einer quadratischen Form sind die Producte der Potenzen derselben mit denen der Discriminanten, also:

$$(x_1-x_2)^{2p}\ (x-x_1)^q\ (x-x_2)^q$$

ihre Grade in den Coefficienten $2p+q$ in den Veränderlichen $2q$, also:

Digitized by Google

Jede Form vom Grade $2p+q$ hat eine Covariante zweiten Grades in den Coefficienten, $2q$ten Grades in den Veränderlichen, also ihr Symbol ist:

$$\overline{12}^{2p}.$$

Diese Bezeichnung gibt aber auch zu Transformationen und Vergleichungen der verschiedenen Arten von Invarianten und Covarianten Anlass.

Bezeichnet man nämlich das Symbol:

$$x\frac{\partial}{\partial x_1}+y\frac{\partial}{\partial y_1}$$

mit dem Zeichen D_1, so ist:

1) $$D_1\overline{23}+D_2\overline{31}+D_3\overline{12}=0.$$

Es verschwinden nämlich die Coefficienten von x und y einzeln, wie man sogleich verificiren kann.

Hieraus folgt:

$$D_1\overline{23}=D_2\overline{13}-D_3\overline{12},$$

oder ins Quadrat erhoben:

2) $$2D_2D_3\overline{12}\cdot\overline{13}=D_2^2\overline{13}^2+D_3^2\overline{12}^2-D_1^2\overline{23}^2$$

Hier sind U_1 U_2 U_3 im Allgemeinen verschieden. Wenn aber U_1 U_2 U_3 gleich werden, so sind die Indices nachher zu unterdrücken, dann werden die drei Glieder rechts gleich, also:

$$D_2^2\overline{12}^2=2D_2D_3\overline{12}\cdot\overline{13}.$$

Die mit D_a bezeichnete Operation auf eine homogene Function angewendet, behaftet dieselbe nur mit einem numerischen Factor, da

$$x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}=nU$$

ist. Dieser Factor auf der linken Seite ist $n(n-1)$, da zwei Differensiationen dieselbe Grösse U_2 treffen. Rechts treffen sie verschiedene Functionen, die wegen $\overline{12}$, $\overline{13}$ schon differenziirt sind, der Factor ist also $(n-1)^2$. Führt man also noch die Operationen $\overline{12}$ . . . aus, so kommt:

$$nU\left[\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\frac{\partial^2U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]=(n-1)\left[\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2U}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right].$$

Es zeigt sich hieraus auch, dass die Verminderung der Ziffern des Symbols, z. B. wenn, wie hier rechts $\overline{12}\cdot\overline{13}$, links $\overline{12}^2$ steht, darauf hindeutet, dass U ein Factor der abgeleiteten Form ist. Denn das Symbol $\overline{12}^2$ trifft U_3 gar nicht, so dass dasselbe als Factor erscheint.

Es lässt sich aber ganz allgemein nachweisen, dass für ungrades m

$$\overline{12}^m\cdot\overline{13}=q\,.\,\overline{12}^{m+1},$$

wo q ein numerischer Factor ist. Denn die Gleichung 1) gibt mit $\overline{12}^m$ multiplicirt:

$$D_1\overline{12}^m\overline{23}+D_2\overline{12}^m\cdot\overline{31}+D_3\overline{12}^{m+1}=0,$$

also:

$$D_3\overline{12}^{m+1}=2D_2\overline{12}^m\,.\,\overline{13}.$$

Endlich kann jedes Symbol so transformirt werden, dass die höchste Potenz irgend eines Factors $\overline{12}$ einen graden Exponenten hat. Denn die Vertauschung der Ziffern 1 und 2 ändert nichts in der Bedeutung des Symbols. Es ist also:

$$\overline{12}^{2m+1}\varphi_1=-\overline{12}^{2m+1}\varphi_2=\tfrac{1}{2}\overline{12}^{2m+1}(\varphi_1-\varphi_2),$$

wo φ_1, φ_2 auch Operationszeichen sind. Mit Hülfe der Gleichung 1) kann man aber $\varphi_1-\varphi_2$ immer so transformiren, dass es durch $\overline{12}$ theilbar ist. Dies wird ein Beispiel sogleich klar machen.

Es soll $\overline{12}^2\,\overline{12}^2\,\overline{14}$ so transformirt werden, dass $\overline{12}$ als Factor vorkommt. Es ist:

$$2D_2^2\overline{12}^2\,.\,\overline{13}^2\,.\,\overline{14}=2D_1^2\overline{21}^2\,.\,\overline{23}^2\,\overline{24}=\overline{12}^2(D_2^2\overline{13}^2\,\overline{14}-D_1^2\overline{23}^2\,\overline{24}).$$

In die Klammer setzen wir nun zu Folge des Satzes 1):

Digitized by Google

$$D_2\,\overline{13} - D_3\,\overline{12} \text{ für } D_1\,\overline{23}$$

und

$$D_2\,\overline{14} - D_4\,\overline{12} \text{ für } D_1\,\overline{24}$$

dann wird die Gleichung:

$$2D_2^{\,2}\,\overline{12}^{\,2}\,\overline{13}^{\,2}\,\overline{14} = \overline{12}^{\,4}(D_2^{\,2}D_4\,\overline{13}^{\,2} + D_3^{\,2}D_4\,\overline{12}^{\,2} + 2D_2^{\,2}D_3\,\overline{13}\,\overline{14} - D_2D_3^{\,2}\,\overline{12}\,\overline{14} - 2D_2D_3D_4\,\overline{12}\,\overline{13}.$$

Die rechte Seite ist also mit $\overline{12}^{\,4}$ multiplicirt.

Die Gleichung 2) gibt dann eine weitere Vereinfachnng in:

$$4D_2^{\,3}D_4\,\overline{12}^{\,3}\,\overline{13}^{\,2}\,\overline{14} = \overline{12}^{\,4}(6D_2^{\,2}D_4^{\,2}\,\overline{13}^{\,2}) - (D_2^{\,2}D_4^{\,2}\,\overline{12}^{\,2} - 2D_1^{\,2}D_2^{\,2}\,\overline{34}^{\,2}).$$

Zu den obigen Gleichungen kommt noch eine andere ebenfalls leicht zu verificirende hinzu:

3) $$\overline{12}\cdot\overline{34} + \overline{23}\cdot\overline{14} - \overline{13}\cdot\overline{24} = 0.$$

Durch die Gleichungen 1), 2), 3) kann man alle Symbole auf gewisse Normalformen bringen. Diese sind:

Für 2 Factoren: $H = \overline{12}^{\,2}$

Für 3 Factoren: $G = \overline{12}^{\,2}\,\overline{13}$

Für 4 Factoren: $J = \overline{12}^{\,4}$ oder $H^2 = \overline{12}^{\,2}\,\overline{34}^{\,2}$

Für 5 Factoren: $F = \overline{12}^{\,4}\,\overline{13}$ oder $GH = \overline{12}^{\,2}\,\overline{13}\,\overline{45}^{\,2}$

Für 6 Factoren: $K = \overline{12}^{\,6}$ oder $L = \overline{12}^{\,2}\,\overline{23}^{\,2}\,\overline{31}^{\,2}$ oder $H^3 = \overline{12}^{\,2}\,\overline{34}^{\,2}\,\overline{56}^{\,2}$

u. s. w., offenbar ist H die Hesse'sche Determinante.

Wie die Reduction in jedem Falle anzustellen ist, werden folgende Beispiele zeigen.

I. Es soll $\overline{12}\cdot\overline{13}\,\overline{14}$ umgewandelt werden.

Wenn die Gleichung 2) mit $\overline{14}$ multiplicirt wird, so verschwindet das letzte Glied rechts und die beiden andern werden gleich, also:

$$D_2D_3\,\overline{12}\cdot\overline{13}\cdot\overline{14} = D_2^{\,2}\,\overline{13}^{\,2}\cdot\overline{14},$$

d. h. wie oben:

$$(n-1)\,\overline{12}\,\overline{13}\,\overline{14} = nGU.$$

II. $\overline{12}\,\overline{13}\,\overline{14}$ stellt, wie leicht zu sehen, das Resultat der Substitution

$$\frac{\partial U}{\partial y} \text{ für } x, \quad -\frac{\partial U}{\partial x} \text{ für } y$$

in eine binäre cubische Form dar, oder was dasselbe ist, das Resultat dieser Substitution in den Ausdruck

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 U$$

irgend einer Form.

Das Resultat einer gleichen Substitution in irgend eine Form ist:

$$\overline{12}\,\overline{13}\,\overline{14}\,\overline{15}\ldots.$$

Allgemein kann jedes Symbol auf eine geschlossene Form reducirt werden, wenn man für jedes Paar einfacher Factoren $\overline{12}\,\overline{13}$ mit einer gemeinschaftlichen Ziffer, den Werth aus Gleichung 2) einsetzt, dann wird dies Paar von Factoren durch einen quadratischen ersetzt. So z. B. um $\overline{12}\cdot\overline{13}\cdot\overline{14}\cdot\overline{15}$ zu finden, multiplicirt man die Gleichungen:

$$2D_2D_3\,\overline{12}\cdot\overline{13} = D_3^{\,2}\,\overline{12}^{\,2} + D_2\,\overline{13}^{\,2} - D_1^{\,2}\,\overline{23}^{\,2}$$

$$2D_4D_5\,\overline{14}\cdot\overline{15} = D_5^{\,2}\,\overline{14}^{\,2} + D_4^{\,2}\,\overline{15}^{\,2} - D_1^{\,2}\,\overline{45}^{\,2}$$

mit einander. Rechts erscheinen dann nur quadratische Factoren.

Digitized by Google

Bei Formen wie $\overline{12}\ \overline{13}\ \overline{14}\ \overline{15}\ \ldots$ führt diese Rechnung immer auf eine Verminderung der Zifferzahl des Symbols, also auf einen Factor U.

III. $\overline{12}^2\ \overline{13}^2$ ist zu berechnen.

Die Formel:

$$D_1\overline{23} = D_2\,\overline{13} - D_3\,\overline{12}$$

wird zur vierten Potenz erhoben und die identischen Glieder vereinigt. Es ergibt sich:

$$6D_2^2 D_3^2\,\overline{12}^2\ \overline{13}^2 = 8D_2^3 D_3\,\overline{12}^3\ \overline{13} - D_2^4\,\overline{12}^4.$$

Schon früher fanden wir:

$$2D_2\,\overline{12}^3\ \overline{13} = D_2^4\,\overline{12}^4,$$

so dass $\overline{12}^3\ \overline{13}^2$ auch durch einen Zahlen-Factor sich von $\overline{12}^4$ unterscheidet.

Es kommt schliesslich:

$$2(n-2)\ (n-3)\ \overline{12}^3\ \overline{13}^2 = n(n-)JU.$$

Mittels dieser Methode kann die abgeleitete Form einer andern abgeleiteten Form gefunden werden.

Das nämliche Resultat wird offenbar erhalten, wenn wir in einer Function von $x_1, x_2, x_3 \ldots$ alle Indices unterdrücken und dann nach x differenziiren, oder wenn die Summe der Differenzialquotienten nach $x_1, x_2, x_3 \ldots$ gebildet, und dann die Indices entfernt werden.

Also das Differenziiren des Symbols: $\overline{12}^2\ \overline{13}^2 \ldots$ kann in Bezug auf x durch das Symbol:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \ldots.$$

angedeutet werden.

Beispiel 1. Hiernach soll z. B. die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Determinante gebildet werden.

Die Hesse'sche Determinante $\overline{12}^2$ wird gebildet, indem man die Operation $(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2$, wo ξ, η die entsprechenden Differenzialquotienten andeuten, an dem Product U_1U_2 vollzieht.

Um also die Hesse'sche Determinante von $\overline{12}^2$ zu bilden, ist die Operation $(\xi_1\eta_2^2 - \xi_2\eta_1)^2$ an $\overline{12}^2 \cdot \overline{34}^2$ zu vollziehen, wo zu setzen ist:

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}$$

Die Determinante der Determinante erhält durch Vollziehung dieser Operationen die Form:

$$(\overline{13} + \overline{14} + \overline{23} + \overline{24})^2\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2$$

oder:

$$4(\overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{34}^2) + 4(\overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}\ \overline{24}) + 8(\overline{13}\ \overline{14}\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2).$$

Beispiel 2. An dem Product der Operation $H = \overline{12}^4$, $L = \overline{12}^2\ \overline{23}^2\ \overline{31}^2$ und U selbst soll die Operation $L = \overline{12}^2\ \overline{23}^2\ \overline{31}^2$ vollzogen werden.

Da die Indices der verschiedenen Functionen zu unterscheiden sind, so ist in dem Product HLU zu schreiben:

$$L = \overline{34}^2\ \overline{45}^2\ \overline{53}^2$$

und an ihm die Operation:

$$(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2\ (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)^2\ (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)^2$$

zu vollziehen, wo zu setzen ist:

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \xi_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}$$

Schliesslich erhält man:

$$(\overline{13} + \overline{14} + \overline{15} + \overline{23} + \overline{24} + \overline{25})^2\ (\overline{36} + \overline{46} + \overline{56})^2\ (\overline{16} + \overline{26})^2\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{45}^2\ \overline{53}^2.$$

Digitized by Google

Aus dem eben für die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Determinante gegebenen Ausdruck lässt sich zeigen, dass dieselbe die Form:

$$JH + \lambda LU$$

annimmt. Zu dem Ende zeigt man, dass $\overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{34}^2$ u. s. w. sich auf diese Form bringen lässt.

Wir beweisen dies einzeln für die drei Glieder:

$$\overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{34}^2,\quad \overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}\ \overline{24} \text{ und } \overline{13}\ \overline{14}\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2.$$

Was das erste anbetrifft, so bildet man das Product von:

$$2D_2\ D_3\ \overline{12}\ \overline{13} = D_2^2\ \overline{12}^2 + D_3^2\ \overline{13}^2 - D_1^2\ \overline{23}^2$$
$$2D_2\ D_3\ \overline{24}\ \overline{34} = D_2^2\ \overline{24}^2 + D_3^2\ \overline{34}^2 - D_4^2\ \overline{23}^2$$

Dies gibt:

$$4D_2^2\ D_3^2\ \overline{12}\ \overline{13}\ \overline{24}\ \overline{34}\ \overline{14}^2 - 2D_2^4\ \overline{12}^2\ \overline{24}^2\ \overline{41}^2 + D_1^2\ D_4^2\ \overline{23}^4\ \overline{14}^2 - 2D_2^2\ D_4^2\ \overline{14}^2\ \overline{13}^2\ \overline{23}^2.$$

Die Gleichung 3) aber gibt:

$$2 \cdot \overline{14}^2\ (\overline{12}\ \overline{13}\ \overline{24}\ \overline{34}) = \overline{14}^2\ (\overline{12}^2\ \overline{34}^2 + \overline{13}^2\ \overline{24}^2 - \overline{14}^2\ \overline{23}^2),$$

also die linke Seite der vorletzten Gleichung wird:

$$4D_2^2\ D_3^2\ \overline{12}^2\ \overline{14}^2\ \overline{34}^2 - 2D_2^2\ D_3^2\ \overline{14}^4\ \overline{23}^2$$

und dadurch erhält man:

$$6D_2^2\ D_3^2\ \overline{12}^2\ \overline{14}^2\ \overline{34}^2 = 3D_2^2\ D_3^2\ \overline{14}^4\ \overline{23}^2 + 2D_2^4\ \overline{12}^2\ \overline{24}^2\ \overline{41}^2$$

oder:

$$6(n-2)\ (n-3)\ \overline{12}^2\ \overline{14}^2\ \overline{34}^2 = 3(n-2)\ (n-3)\ HJ + 2n\ (n-1)\ LU.$$

Dies ist die verlangte Form.

Für das zweite Glied bilden wir das Product:

$$\overline{12}^2$$
$$-2D_4\ D_1\ \overline{13}\ \overline{14} = D_1^2\ \overline{34}^2 + D_4^2\ \overline{13}^2 - D_3^2\ \overline{14}^2$$
$$2D_2\ D_3\ \overline{24}\ \overline{34} = D_2^2\ \overline{34}^2 + D_3^2\ \overline{24}^2 - D_4^2\ \overline{23}^2,$$

es ergibt sich:

$$-4D_1\ D_2\ D_3\ D_4\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}\ \overline{24} = D_1^2\ D_2^2\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2 + 2D_3^2\ D_4^2\ \overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{24}^2 - 2D_4^4\ \overline{12}^2\ \overline{23}^2\ \overline{31}^2$$

und wenn man den Werth von $\overline{12}^2\ \overline{13}^2\ \overline{24}^2$ einführt:

$$-12(n-3)^2\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}\ \overline{24} = 6(n-2)^2\ (n-3)\ JH - 4n\ (n-1)\ (n-2)\ LU.$$

Für das dritte Glied endlich setzen wir aus Gleichung 2) für $\overline{13}\ \overline{14}$ ein, dies gibt:

$$2D_3\ D_4\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}\ \overline{14} = 2D_4^2\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}^2 - D_1^2\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2$$

und wenn man für $\overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}^2$ einsetzt:

$$6(n-3)^2\ \overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}\ \overline{14} = 2n\ (n-1)\ LU.$$

Es sollen aber diese Betrachtungen jetzt auf Formen von mehr als zwei Variablen erweitert werden. Sind

$$x_1y_1z_1,\ x_2y_2z_2,\ x_3y_3z_3$$

Reihen von Veränderlichen, so ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

vermöge des Multiplicationstheorems eine Invariante; daraus kann gebildet werden das Symbol:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} \end{vmatrix}$$

welches mit $\overline{123}$ bezeichnet werden soll, und also Invarianten erzeugt.

Die Operationen:

$$\overline{123}^{\alpha} \quad \overline{124}^{\beta} \ldots$$

an einem Product:

$$U_1 U_2 U_3 \ldots$$

vollzogen, geben Invarianten und Covarianten. Sollen dieselben wie hier im Allgemeinen angenommen wird, auf eine Function gehen, so sind schliesslich die Indices zu unterdrücken.

Entwickelt man z. B. das Symbol $\overline{123}^2$ zunächst an einer ternären quadratischen Form mit den Coefficienten

$$aa', \; a'', \; 2b, \; 2b', \; 2b''$$

indem man für $U_1 U_2 U_3$ die Form setzt und die Coefficienten einer jeden unter diesen dreien durch Indices unterscheidet, also:

$$a_1, a'_1 \ldots a_2, a'_2 \ldots$$

Durch Unterdrückung der Indices folgt dann dafür:

$$aa'a'' + 2bb'b'' - ab'^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

Um aber das Symbol $\overline{123}^2$ für eine beliebige ternäre Form zu entwickeln, braucht man nur die Coefficienten

$$a, \; a' \ldots$$

mit den zweiten Differenzialquotienten:

$$a = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad b' = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \ldots$$

$$\ldots b = \frac{\partial^2 U}{\partial y \, \partial z} \ldots$$

zu vertauschen. Offenbar erhält man so die Hesse'sche Determinante.

Wie bei den binären Formen lässt sich jetzt zeigen, dass das Symbol:

$$\overline{123}^{2n+1}$$

bezogen auf eine Form immer verschwindet. Auch Functionen, welche durch reciproke Substitutionen transformirt werden, können auf diese Weise behandelt werden.

Werden $x, y, z \ldots$ durch eine beliebige, $\xi, \eta, \zeta \ldots$ durch die reciproke Substitution transformirt, welche wie im 11ten Abschnitte gezeigt ist, derjenigen gleich ist, welche $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ erleiden, und versteht man unter $\overline{\xi 12}$ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \eta & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} \\ \zeta & \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

so ist dieselbe ebenfalls ein invariantes Symbol, welches zu Contravarianten führt. Z. B. die Operation:

$$\xi \, \overline{12}^2$$

an zwei quadratischen Formen U_1, U_2 vollzogen, gibt, wenn man die Indices nachher unterdrückt:

$$\xi^2 (a'a'' - b^2) + \eta^2 (a''a - b'^2) + \zeta^2 (aa' - b''^2) + 2\eta\zeta (b'b'' - ab) + 2\zeta\xi (b''b - a'b') + 2\xi\eta (bb' - a''b'');$$

wird U als die Gleichung eines Kegelschnittes betrachtet, so ist dies die Gleichung des reciproken Kegelschnitts.

Concomitanten oder Zwischenformen nennt man Ausdrücke, welche xyz und $\xi\eta\zeta$ enthalten.

Dergleichen ergeben sich, wenn man in der Entwickelung einer Contravariante den Coefficienten von x^n mit $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ vertauscht. Z. B. die Operation $\xi \, \overline{12}^2$ unter dieser Voraussetzung auf eine Form vom dritten oder höheren Grade angewendet führt zu Zwischenformen.

Man sieht auch leicht, dass wenn man von einem Invariantensymbol $\overline{12}^n \overline{12}^p \ldots$ einer binären Form jedem Gliede ein ξ voransetzt: $\overline{\xi 12}^n \overline{\xi 34}^p$, die Contravariante einer ternären Form entsteht.

Auf diese Weise erhält man z. B. aus dem Symbol der Discriminante:

$$\overline{12}^2 \; \overline{34}^2 \; \overline{13} \; \overline{24}$$

die Gleichung der reciproken Polare

$$\overline{\xi 12}^2 \; \overline{\xi 34}^2 \; \overline{\xi 13} \; \overline{\xi 24}.$$

Im vorigen Abschnitte ist auch dargethan worden, wenn man bei der Contravariante:

$$\xi, \; \eta, \; \zeta \ldots \text{ mit } \frac{\partial}{\partial x}, \; \frac{\partial}{\partial y}, \; \frac{\partial}{\partial z}$$

Google

vertauscht, und die so geforderte Operation an einer beliebigen Form U vollzieht, eine Covariante entsteht.

Offenbar ist dies aber dasselbe als wenn man für ξ eine neue Ziffer setzt.

Umgekehrt bringt die Vertauschung einer bestimmten Ziffer mit ξ die Evectante hervor. Z. B. aus

$\overline{123}\ \overline{124}\ \overline{234}\ \overline{314}$ wird $\overline{123}\ \overline{\xi 12}\ \overline{\xi 23}\ \overline{\xi 31}$.

Für binäre Formen würde indessen z. B. aus $\overline{12}$ auf diese Weise entstehen:

$$\xi \frac{\partial}{\partial y} - \eta \frac{\partial}{\partial x},$$

oder da ξ und η durch dieselben Substitutionen wie $-y$ und x transformirt werden:

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

was das Resultat nur mit einem zu unterdrückenden Factor behaftet. Also:

Werden in einem Invarianten-Symbol einer binären Form alle Factoren, die eine bestimmte Ziffer enthalten, weggelassen, so ergibt sich die Evectante.

$\overline{12}^2\ \overline{34}^2\ \overline{13}\ \overline{24}$ gibt auf diese Weise z. B. $\overline{12}^2\ \overline{13}$.

Man kann aber auch für ξ, η, ζ in einer Contravariante $\frac{\partial U}{\partial \overline{x}}, \frac{\partial U}{\partial \overline{y}}, \frac{\partial U}{\partial \overline{z}}$ setzen, (also nicht wie oben die Operation $\frac{\partial}{\partial x} \cdots$ an U vollziehen, denn im letzteren Falle entspricht $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ dem Ausdrucke ξ^2 hier aber $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ man erhält dann eine Covariante, und ihr Symbol entsteht wenn man in jedem Factor des Symbols der Contravariante für ξ eine andere Zahl setzt, also:

$$\overline{\xi 34}^2$$

geht auf diese Weise über in:

$$\overline{134}\ \overline{234}.$$

Aber die durch D angedeutete Transformationsmethode gilt auch für ternäre u. s. w. Formen.

Setzt man wie dort:

$$x \frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial y_1} + z \frac{\partial}{\partial z_1} = D_1,$$

so ergibt sich ganz in derselben Weise:

4) $$D_1 \overline{234} - D_2 \overline{341} + D_3 \overline{412} = D_4 \overline{123}$$

5) $$\overline{123} \cdot \overline{145} + \overline{124}\ \overline{153} + \overline{125}\ \overline{134} = 0.$$

Ausserdem sei

$$P = x\xi + y\eta + z\zeta$$

dann ist noch:

6) $$P\overline{123} = D_1 \overline{\xi 23} + D_2 \overline{\xi 31} + D_3 \overline{\xi 12}$$

7) $$\overline{\xi 12}\ \overline{\xi 34} + \overline{\xi 23}\ \overline{\xi 14} + \overline{\xi 31}\ \overline{\xi 24} = 0.$$

Durch diese Gleichungen lässt sich z. B. eine Relation zwischen den biquadratischen Covarianten einer biquadratischen Form finden. Wenn der Ausdruck:

$$0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

zweimal quadrirt wird, so erhält man:

$$8\alpha\beta\gamma\delta = 2\Sigma\alpha^2\beta^2 - \Sigma\alpha^4$$

und dies auf Gleichung 4) angewendet, gibt:

$$8 D_1 D_2 D_3 D_4 \overline{123}\ \overline{124}\ \overline{234}\ \overline{314} = 4 D_4^4 \overline{123}^4 - 12 D_4^2 D_4^2 \overline{123}^2\ \overline{124}^2.$$

Dies ist unsere Relation.

Das Symbol der biquadratischen Invariante einer ternären cubischen Form ist:

$$\overline{123}\ \overline{124}\ \overline{234}\ \overline{314} = S.$$

Hieraus soll der Ausdruck für die Invariante sechsten Grades der cubischen Form gefunden werden, welche aus der Hesse'schen Covariante hervorgeht, wenn man die Operation S an ihr vollführt. Dies geschieht in ähnlicher Weise wie z. B. die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Determinanten gefunden wird.

In dem Symbol der Evectante:

$$\overline{123}\ \overline{\xi 12}\ \overline{\xi 23}\ \overline{\xi 31}$$

Digitized by Google

ist ξ die Substitution $\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{\partial}{\partial x_6}$ oder $4+5+6$ auszuführen und an $\overline{456}^2$ zu operiren.

Da hier die Differenziale von höherer als fünfter Ordnung zu unterdrücken sind, so ergibt sich:

$$T = \overline{123}\ \overline{412}\ \overline{523}\ \overline{631}\ \overline{456}^2.$$

Es kann jetzt die Covariante:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\ \partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \ldots,$$

wo U eine ternäre cubische Form, H ihre Hesse'sche Determinante ist, in die Form US gebracht werden, wo $S = \overline{123}\ \overline{124}\ \overline{234}\ \overline{314}$ ist. In $\xi\overline{12}^2$ wird nämlich für ξ die Substitution $4+5+6$ gemacht, und die Substitution an $\overline{456}^2$ vollzogen. Unterdrückt man dann alle Glieder, in denen der Grad einer Ziffer höher als 3 ist, so erhält man:

$$\overline{124}\ \overline{125}\ \overline{456}^2 \text{ oder } \overline{123}^2\ \overline{145}\ \overline{245}.$$

Nun multiplicirt man die Identitäten:

$$\overline{123}\ \overline{145} = \overline{124}\ \overline{135} - \overline{125}\ \overline{134}$$
$$\overline{123}\ \overline{244} = \overline{124}\ \overline{235} - \overline{125}\ \overline{234}$$

Dies gibt:

$$\overline{123}^2\ \overline{145}\ \overline{245} = 2(\overline{124}\ \overline{125}\ \overline{134}\ \overline{235}).$$

Die Gleichung

$$D_5\,\overline{145}\cdot\overline{245} = D_1\,\overline{235} + D_2\,\overline{315} + D_3\,\overline{125}$$

wird mit

$$\overline{124}\ \overline{134}\ \overline{235}$$

multiplicirt. So erhält man:

$$D_5\,\overline{123}\ \overline{124}\ \overline{134}\ \overline{235} = D_1\,\overline{124}\ \overline{234}\ \overline{235}^2 + 2D_3\,\overline{124}\ \overline{125}\ \overline{134}\ \overline{235},$$

oder da die beiden letzten Glieder identisch sind:

$$(n-1)\ \overline{123}\ \overline{124}\ \overline{134}\ \overline{235} = 2(n-1)\ \overline{123}^2\ \overline{145}\ \overline{245}.$$

Endlich multiplicirt man:

$$D_5\,\overline{234} = D_2\,\overline{345} + D_3\,\overline{425} + D_4\,\overline{235}$$

mit

$$\overline{123}\ \overline{124}\ \overline{134}.$$

Dies gibt:

$$D_5\,\overline{123}\ \overline{124}\ \overline{234}\ \overline{134} = 3D_4\,\overline{123}\ \overline{124}\ \overline{134}\ \overline{235},$$

d. h.:

$$nSU = 3(n-2)\ \overline{123}\ \overline{124}\ \overline{134}\ \overline{235},$$

also:

$$6(n-2)^2\ \overline{123}^2\ \overline{145}\ \overline{245} = n(n-1)SU$$

was zu beweisen war.

14) Von den canonischen Formen.

Da die Invarianten und Covarianten einer Form bei jeder linearen Substitutionen dieselben sind, so kommt es darauf an, die Form durch irgend eine Substitution auf ihre einfachste Gestalt zu bringen. Diese Form wird analog der einfachsten Gestalt des in den elliptischen Integralen vorkommenden biquadratischen Ausdrucks canonische Form genannt.

Ausnahme Fälle abgerechnet muss jede dem Grade und der Anzahl der Variablen nach gegebene Form auf eine solche reducirt werden können.

Ob eine solche wirklich allgemein ist, kann daher durch die Anzahl der darin möglichen Constanten ermittelt werden. So z. B. ist: $X_3 + Y_3$ die canonische Form einer binären cubischen Form, da eine solche vier Constanten enthält, und wenn man:

Digitized by Google

$$X = \alpha x + \beta y, \qquad Y = \gamma x + \delta y$$

setzt, so müssen ebenfalls vier in unsere Form eingehen.

Da eine ternäre cubische Form zehn Constanten enthält, so ist:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz$$

eine canonische Form dafür.

Die binäre quadratische Form enthält drei Constanten, also kann sie auf unendlich viel Arten auf die Form

$$x^2 + y^2$$

gebracht werden, weil darin vier Constanten eingehen. Ueberhaupt lässt sich aus diesem Grunde eine quadratische Form von beliebig viel Variablen auf unendlich viel Arten in eine Summe und Differenz von Quadraten verwandeln. Indess ist hierbei die Anzahl der positiven und der negativen Quadrate constant. — Denn liesse sich für eine Form etwa schreiben:

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = U^2 + V^2 + W^2,$$

so wäre auch:

$$X^2 + Y^2 = U^2 + V^2 + W^2 + Z^2.$$

Nun kann man durch lineare Substitution U, V, W in X, Y, Z ausdrücken; für $X = Y = 0$ käme dann:

$$\gamma^2 Z^2 + \gamma_1^2 Z^2 + \gamma_2^2 Z^2 + Z^2 = 0$$

was unmöglich ist. Man sieht, wie diese Beweisführung für beliebig viel Variablen gilt.

Jede binäre Form vom Grade $2n-1$ lässt sich auf eine Summe von n Potenzen vom Grade $2n-1$ bringen.

Denn die Anzahl der Constanten einer solchen Form ist gleich $2n$, und soviel gehen in die Potenzsumme ebenfalls ein.

Dies Verfahren selbst lässt sich folgendermaassen ableiten. Sei

$$1) \qquad (a\ b\ c\ d\ \ldots) \mid (x\ y)^{2n-1} = u^{2n-1} + v^{2n-1} + \ldots$$

die gegebene Form.

Entwickelt man nun die Determinante:

$$2) \qquad \begin{vmatrix} ax+by, & bx+cy, & cx+dy \ \ldots \\ bx+cy, & cx+dy, & dx+ey \ \ldots \\ cx+dy, & dx+ey, & ex+fy \ \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

so erhält man eine homogene Function $n$ten Grades, die also in n Factoren zerfällt. Es wird behauptet, dass $u, v, w \ldots$ diese Factoren sind.

Denn setzt man

$$u = lx + my, \qquad v = l_1 x + m_1 y, \qquad w = l_2 x + m_2 y$$

in Gleichung 1) und differenziirt $2n-2$mal nach x, so kommt:

$$ax + by = l^{2n-2} u + l_1^{2n-2} v + \ldots$$
$$bx + cy = l^{2n-3} m u + l_1^{2n-3} m_1 v + \ldots$$

Die Determinante 2) hat also auch den Werth:

$$\begin{vmatrix} l^{2n-2} u + l_1^{2n-2} v + \ldots, & l^{2n-3} m u + l_1^{2n-3} m_1 v + \ldots \\ l^{2n-3} m u + l_1^{2n-3} m_1 v + \ldots, & l^{2n-4} m^2 u + l_1^{2n-4} m_1^2 v + \ldots \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Hier sind die Coefficienten z. B. von u proportional mit

$$l^{n-1}, \quad l^{n-2} m, \quad l^{n-3} m^2 \ldots$$

Zerlegt man nun die Determinante in Partial-Determinanten, die aus den einzelnen Gliedern der ersteren gebildet sind, so unterscheiden sich in allen die zweimal u, oder $v \ldots$ enthaltenden zwei Reihen nur um einen Factor, verschwinden also. Es bleibt somit nur die mit dem Product $u\ v\ w \ldots$ multiplicirte Deter-

Digitized by Google

minante übrig. Wenn man also die Determinante 2) in n lineare Factoren zerlegt, so können diese nur durch constante Coefficienten sich von u, v, w ... unterscheiden, man kann also setzen:

$$(a\ b\ c\ \ldots)\,|\,(xy)^{2n-1} = A(x+\lambda y)^{2n-1} + B(x+\mu y)^{2n-1} + C(x+\nu y)^{2n-1} + \ldots$$

λ, μ, ν ... ergeben sich, wenn man die Determinante 2) gleich Null setzt, A, B, C ... durch Coefficienten-Vergleichung auf beiden Seiten.

Die Determinante 2) offenbar, eine Covariante der Form, wird wegen ihres Gebrauchs „Canonisante" genannt. Sie kann aber auch auf die Gestalt gebracht werden:

$$\begin{vmatrix} y^n, & -y^{n-1}x & \ldots & -x^n \\ a & b & c \ldots & k \\ b & c & d \ldots & i \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix}$$

Dies lässt sich so beweisen: Multiplicirt man diese letztere Determinante mit:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \end{vmatrix}$$

so kommt:

$$\begin{vmatrix} y^n & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & ax+by & bx+cy & cx+dy & \ldots \\ 0 & bx+cy & cx+dy & dx+ey & \ldots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

Durch Division mit y^n erhält man daraus die Form 2).

Sei jetzt die Form vom graden Grade $2n$. Sie enthält $2n+1$ Constanten. Auf eine Summe von n Potenzen ist sie also im Allgemeinen nicht zu bringen, und bei $n+1$ Potenzen hat man eine Constante mehr, also geschieht diese Reduction auf unendlich viel Arten. Suchen wir jetzt die Bedingung, unter welcher eine Reduction auf eine Summe von n Grössen von der $2n$ten Potenz möglich ist. Sei z. B. die Form vom vierten Grade. Soll diese die Form u^4+v^4 annehmen, so setzt man:

$$u = lx + my, \qquad v = l_1 x + m_1 y$$

und bildet von der ursprünglichen und der reducirten Form alle vierten Differenzialquotienten:

$$a = l^4 + l_1{}^4, \qquad b = l^3 m - l_1{}^3 m_1.$$

Bildet man aus den Gliedern rechts die Determinante, so zerfällt diese in Theil-Determinanten mit proportionalen Reihen, verschwindet also. Die Bedingung ist also:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0$$

und allgemein für eine Form $2n$ten Grades:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \dots \\ b & c & d & \dots \\ c & d & e & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Anzahl der Reihen $n+1$ ist.

Ist die Bedingung nicht erfüllt, so nimmt die Form vierten Grades jedenfalls die Gestalt an:

$$u^4 + v^4 + 6\lambda u^2 v^2.$$

Um die Reduction auszuführen, setzen wir:

$$w = (A\,B\,C)\,(x\,y)^2.$$

Vollzieht man dann die Operation:

$$(A\,B\,C)\left(\frac{\partial}{\partial y}, \quad -\frac{\partial}{\partial x}\right)^2,$$

welche eine Covariante gibt, auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung:

$$(a\,b\,c\,d\,e)\,|\,(x\,y)^4 = u^4 + v^4 + 6\lambda^2 u^2 v^2,$$

so verschwinden u^4 und v^4 und für das letzte Glied erhält man:

$$12\lambda' uv, \text{ wo } \lambda' = 2\lambda(4AC - B^2);$$

durch Vergleichung der Coefficienten folgt dann:

$$\lambda' A = Ac - 2Bb + Ca$$
$$\lambda' B = Ad - 2Bc + Cb$$
$$\lambda' C = Ae - 2Bd + Cc.$$

Durch Elimination von ABC ergibt sich zur Bestimmung von λ' die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c - \lambda' \\ b, & c + \tfrac{1}{2}\lambda', & d \\ c - \lambda', & d, & e \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$\lambda'^2 - \lambda'(ac - 4bd + 3c^2) - 3(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3) = 0.$$

Die Coefficienten sind Invarianten. Jeder Werth von λ' gibt die entsprechenden von A, B, C. Man kann also, und dies ist der wesentliche Unterschied der Form vom Grade $2n$ von denen vom Grade $2n-1$ auf drei verschiedene Weisen die Reduction bewerkstelligen.

Für die allgemeine Form vom Grade $2n$:

$$(a_0\ a_1\ a_2\ \dots)\,|\,(x, y)^{2n}$$

könnte man die canonische Form:

$$u^{2n} + v^{2n} + w^{2n} + \dots + \lambda u^2 v^2 w^2 \dots$$

wählen. Die Ausführung ist jedoch nur für $n = 2$ und $n = 4$ gelungen.

Dagegen lässt sich die eben angewandte Methode ausdehnen auf die Form:

$$u^{2n} + v^{2n} + w^{2n} + \dots + \lambda V w v w \dots$$

wenn man setzt:

$$u\,v\,w = (A_0\ A_1\ A_2\ \dots)\,(x\,y)^n$$

und V eine Covariante dieser letzteren Form ist, von solcher Art, dass das Symbol:

$$(A_0\ A_1\ \dots)\left(\frac{\partial}{\partial y}, \quad -\frac{\partial}{\partial x}\right)^n$$

vollzogen an dem Product $Vwvw$ ein Resultat gibt, welches uvw proportional ist. Ist nämlich eine solche Covariante vorhanden, so erhalten wir ganz wie oben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_0 a_n &- n A_1 a_{n+1} + n_2 A_2 a_{n+2} - \dots = \lambda A_0 \\ A_0 a_{n-1} &- n A_1 a_n + n_2 A_2 a_{n+1} - \dots = \lambda A_1 \\ &\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ &\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \\ &\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdot \end{aligned}$$

wo $n_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ ist. Durch Elimination von A_0, A_1 ... ergibt sich hieraus:

$$\begin{vmatrix} a_n - \lambda, & a_{n+1}, & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ a_{n-1}, & n_n + \frac{1}{n}\lambda, & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n - \frac{1 \cdot 2}{n(n-1)}\lambda & \dots & a_{2n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_0, & a_1, & a_2 & \dots & a_n \mp \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Digitized by Google

woraus sich λ und die Coefficienten $A_0, A_1 \ldots$ ergeben. — Für die binäre Form vom sechsten Grade ist, wenn man:

$$u\,v\,w = (A_0\,A_1\,A_2\,A_3) \mid (x\,y)^3$$

setzt, für V die Evectante der Discriminante dieser Form zu nehmen, nämlich:

$$(A_0^2 A_3 + 2A_1^2 - 3A_0A_1A_2,\quad 3A_1^2A_2 + 3A_0A_1A_3 - 6A_0^2A_3,$$
$$6A_1^2A_3 - 3A_1A_2^2 - 3A_0A_2A_3,\quad 3A_1A_2A_3 - 2A_2^3 - A_0A_3^2)\,(x\,y)^3.$$

Es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass die Operation:

$$(A_0\,A_1\,A_2\,A_3) \mid \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)^3$$

an dem Producte dieser cubischen Form uvw und ihrer zuletzt geschriebenen cubischen Covariante vollzogen, ein Resultat proportional der ersteren gibt. Denn vertauscht man dieselbe mit der canonischen Form, was die Invariante nicht ändert, also mit

$$x^3 + y^3,$$

so ist:

$$A_0 = A_3 = 1, \qquad A_1 = A_2 = 0.$$

Die Covariante aber ist dann:

$$x^3 - y^3.$$

Die Operation:

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

ist also an $x^6 - y^6$ zu vollziehen, was $x^3 - y^3$ gibt.

In diesem Falle wird λ bestimmt aus der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - \lambda \\ a_1 & a_2 & a_3 + \frac{1}{3}\lambda & a_4 \\ a_2 & a_3 - \frac{1}{3}\lambda & a_4 & a_5 \\ a_3 + \lambda & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix} = 0,$$

welche entwickelt nur grade Potenzen von λ enthält. — Wird dann wie vorhin u, v, w auf die Form $x^3 + y^3$ gebracht, und in die drei Factoren:

$$x + y, \qquad x + \varepsilon y, \qquad x + \varepsilon^2 y$$

zerlegt, wo ε eine dritte Wurzel von Eins ist, so ist der canonische Ausdruck der binären Form sechsten Grades:

$$A(x+y)^6 + B(x+\varepsilon y)^6 + C(x+\varepsilon^2 y)^6 + D(x^6 - y^6).$$

Es lässt sich aber auch leicht zeigen, dass die Factoren der cubischen Invariante:

$$u - v, \qquad v - w, \qquad w - u$$

sind, wenn u, v, w die Factoren der cubischen Form selbst sind, und aus diesem Grunde ist die canonische Form auch:

$$u^6 + v^6 + w^6 + \lambda\,u\,v\,w\,(u-v)\,(v-w)\,(w-u).$$

Bei einer Form achten Grades ist die canonische:

$$u^8 + v^8 + w^8 + z^8 + \lambda u^2v^2w^2z^2,$$

wie man sieht, wenn man das Operations-Symbol ganz wie bei der Form sechsten Grades bildet und an u^2, v^2, w^2, z^2 operirt.

Es fehlt bis jetzt noch die Untersuchung der Formen höheren Grades, wenn derselbe $2n$ ist, so wie die ganze Untersuchung für ternäre Formen:

Für eine cubische ternäre Form ergibt sich:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz,$$

für eine quaternäre findet Sylvester:

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + v^3.$$

Digitized by Google

15) Besondere Untersuchung binärer Formen.

Es sollen hier diejenigen Invarianten und Covarianten binärer Formen, die am häufigsten vorkommen, behandelt werden.

I. Eine quadratische Form:

$$(abc) \mid (xy)^2$$

hat nur eine unabhängige Invariante, die Discriminante.

$$ac - b^2,$$

alle anderen sind Potenzen davon. Dies ist schon im 11ten Abschnitte gezeigt worden. Die Form gibt, geometrisch betrachtet, wenn man $y = 1$ setzt, zwei Punkte in der Axe der x, das Verschwinden der Discriminante bedeutet das Zusammenfallen der Punkte.

II Seien jetzt zwei quadratische Formen gegeben:

$$(abc) \mid (xy)^2 \text{ und } (a'b'c') \mid (xy)^2.$$

Sie haben eine Invariante:

$$\overline{12}^2 = ac' + a'c - 2bb'.$$

Verschwindet sie, so sind die vier den Formen entsprechenden Punkte harmonisch.

Contravariante ist:

$$\overline{12} = \begin{vmatrix} ax + by, & bx + cy \\ a'x + b'y, & b'x + c'y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x^2, & xy, & -y^2 \\ c, & b, & a \\ c', & b', & a' \end{vmatrix}$$

Es ist dies die Functional-Determinante. Verschwindet sie, so findet Involution statt. — Die Resultante ist:

$$(ac' - a'c)^2 + 4(ba' - b'a)\ (bc' - b'c)$$

Boole bringt sie auf die Form:

$$(ac' + a'c - 2bb')^2 - 4(ac - b^2)\ (a'c' - b'^2),$$

wo alle drei Theile Invarianten sind. Dies findet man, wenn man von:

$$(abc) \mid (xy)^2 + \lambda\,(a'b'c')\ (xy)^2$$

die Discriminante bildet. Sie ist:

$$(a + \lambda a')\ (c + \lambda c') - (b + \lambda b')^2$$

und diese nach Potenzen von λ ordnet, und wieder die Discriminante nimmt.

III Die cubische Form:

$$(abcd) \mid (xy)^3$$

hat als Invariante nur die Discriminante:

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 3b^2c^2 - 6abcd.$$

Die Hesse'sche Determinante ist:

$$\overline{12}^2 = (ac + b^2)\,x^2 + (ad - bc)\,xy \mid (bd - c^2)\,y^2.$$

Sie hat mit der Form die Discriminante gemein.

Sind x_1, x_2, x_3 Wurzeln der gegebenen Form, so fanden wir für die Hessesche Determinante noch:

$$\Sigma\,(x - x_2)^2\ (x_2 - x_3)^2.$$

Es findet aber auch eine cubische Covariante statt, es ist dies die Evectante der Discriminante:

$$\overline{12}^2\ \overline{13} = (a^2d + 2b^3 - 3abc)\,x^3 + 3(b^2c + abd - 2ac^2)\,x^2y + 3(2b^2d - bc^2 - acd)\,xy^2 + (3bcd - ad^2 - 2c^3)\,y^3.$$

Ihre geometrische Bedeutung ist folgende:

„Wenn für jedes der drei durch die Form dargestellten Elemente das conjugirt harmonische in Bezug auf die beiden andern bestimmt wird, so sind diese drei durch die cubische Covariante gegeben.

Digitized by Google

In der vereinfachten Gestalt:

$$xy(x+y),$$

wo

$$a=d=0, \qquad b=c=1$$

ist, erhält man nämlich $x-y$ als Factor der Covariante, und hieraus folgt unser Satz allgemein, da die harmonische Relation nicht durch lineare Transformation gestört wird.

Als Function der Wurzeln ergibt sich die cubische Covariante.

$$[(2x_1-x_2-x_3)x+(2x_2x_3-x_1x_2-x_1x_3)y]$$
$$[(2x_2-x_3-x_1)x+(2x_3x_1-x_2x_3-x_2x_1)y]$$
$$[(2x_3-x_1-x_2)x+(2x_1x_2-x_3x_1-x_3x_2)y]$$

denn die Theorie der harmonischen Theilung gibt bei vier Elementen:

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3$$

die Relation:

$$\frac{2}{x_1-x}=\frac{1}{x_1-x_2}+\frac{1}{x_1-x_3},$$

also:

$$(2x_1-x_2-x_3)x=x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3.$$

Es lässt sich aber diese Form auch durch Benutzung der symmetrischen Functionen der Wurzeln finden.

Wendet man die canonische Form:

$$U=ax^3+dy^3$$

an, so erhält man für die Discriminante:

$$D=a^2d^2,$$

für die Hesse'sche Determinante:

$$H=adxy$$

und für die cubische Covariante:

$$C=ad(ax^3-dy^3).$$

Leicht zeigt man, dass die Discriminante von C gleich $D^3=a^6d^6$ ist, auch lässt sich leicht die von Cayley herrührende Gleichung verificiren:

$$C^2-DU^3=-4H^3.$$

Mit Hülfe derselben kann man die linearen Factoren von U finden, also die cubischen Gleichungen auflösen. Denn es ist hiernach:

$$C^2-DW^2$$

ein vollkommener Cubus, somit auch jeder seiner Factoren:

$$C+U\sqrt{Z}, \qquad C-U\sqrt{Z}.$$

In der That sind deren canonische Formen:

$$2a^2dx^3, \qquad 2ad^2y^3.$$

Nun ist:

$$a^{\frac{1}{3}}x+d^{\frac{1}{3}}y$$

ein Factor der canonischen Form, also muss der der allgemeinen Form durch:

$$(U\sqrt{D}+C)^{\frac{1}{3}}+(U\sqrt{D}-C)^{\frac{1}{3}}$$

gegeben sein, eine lineare Function, die gleichzeitig mit U verschwindet.

Setzt man z. B.

$$U=4x^3+9x^2+18x+17,$$

so kommt:

$$D=1600, \qquad C=110x^3-90x^2y-630xy^2-670y^3$$
$$U\sqrt{D}+C=10(3x+y)^3, \qquad U\sqrt{D}-C=50(x+3y)^3$$

also die linearen Factoren der Form haben die Gestalt:

$$3x+y+(x+3y)\sqrt[3]{5}.$$

Digitized by Google

IV. Für die Form vierten Grades:

$$(abcde) \mid (xy)^4$$

fanden wir die beiden Invarianten:

$$S = ae - 4bd + 3c^2$$
$$T = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.$$

Nimmt man die canonische Form:

$$x^4 + 6mx^2y^2 + y^4,$$

so werden dieselben:

$$S = 1 + 3m^2, \qquad T = m(1 - m^2).$$

Führt man die Wurzeln ein, so ist:

$$S = \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2$$
$$T = \Sigma (x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)$$
$$= [(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)]$$
$$\cdot [(x_1 - x_3)(x_4 - x_2) - (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)]$$
$$\cdot [(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) - (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)].$$

Daraus ergibt sich, dass wenn T verschwindet, die Elemente x_1, x_2, x_3, x monisch sind.

Ist M der Modul der Transformation, so geht über:

$$S \text{ in } M^4 S', \qquad T \text{ in } M^6 T',$$

also das Verhältniss:

$$\frac{S^3}{T^2}$$

ist absolut unveränderlich. Sylvester hat gezeigt, dass jede andere Invarian rationale Function dieser beiden ist.

Die Discriminante z. B. ist:

$$D = [(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1)(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)]^2 = S^3 -$$

und für die canonische Form:

$$D = (1 - 9m^2)^2.$$

Die Hesse'sche Determinante der biquadratischen Form ist:

$$(ac - b^2)x^4 + 2(ad - bc)x^3y + (ae + 2bd - 3c^2)x^2y^2 + 2(be - cd)xy^3 + (ce -$$

für die canonische Form:

$$m(x^4 + y^4) + (1 - 3m^2)x^2y^2.$$

Mit Hülfe der Werthe von S und T lässt sich die Form selbst lei ihre canonische Form bringen. Denn wegen:

$$S = 1 + 3m^2, \qquad T = m(1 - m^2)$$

ist:

A) $$4m^3 - mS + T = 0,$$

eine Gleichung, welche m gibt. — Aus den Werthen:

$$x^4 + y^4 + 6mx^2y^2 = U$$
$$m(x^4 + y^4) + (1 - 3m^2)x^2y^2 = V$$

folgt dann für die Veränderlichen der canonischen Form selbst:

B) $$x^2y^2 = \frac{H - mU}{1 - 9m^2},$$

Gleichungen, welche x und y geben.

Es schliesst sich hier sehr gut die Cayley'sche Auflösung der Gl vierten Grades an.

Sind m_1, m_2, m_3 die Wurzeln der Gleichung A), so müssen wegen Ausdrücke:

$$H - m_1U, \qquad H - m_2U, \qquad H - m_3U$$

vollständige Quadrate sein, deren Wurzeln vom zweiten Grade sind. Ab auch der Ausdruck:

Digitized by Google

C) $(m_2 - m_3)(H - m_1 U)^{\frac{1}{2}} + (m_3 - m_1)(H - m_2 U)^{\frac{1}{2}} + (m_1 - m_2)(H - m_3 U)^{\frac{1}{2}}$

ein vollständiges Quadrat eines der linearen Factoren der gegebenen Form. Denn dieser Ausdruck verschwindet identisch für $U = 0$, enthält also einen Factor von U. Ferner hat die cubische Gleichung:

$$4z^3 - z(1 + 3m^2) + m - m^3 = 0,$$

welche mit A) übereinstimmt, die Wurzeln:

$$m_1 = m, \quad m_2 = -\frac{m+1}{2}, \quad m_3 = -\frac{m-1}{2},$$

also:

$$H - m_1 U = (1 - 9m^2) x^2 y^2$$

$$H - m_2 U = \frac{3m+1}{2} (x^2 + y^2)^2$$

$$H - m_3 U = \frac{3m-1}{2} (x^2 - y^2)^2$$

Damit nun eine Grösse:

$$\alpha (x^2 + y^2) + \beta (x^2 - y^2) + \gamma xy$$

ein Quadrat sei, ist die Bedingung:

$$\gamma^2 = 4(\alpha^2 - \beta^2)$$

zu erfüllen, welche sich sehr leicht hier verificiren lässt.

Die Wurzel der Gleichung C) gibt also die linearen Factoren der biquadratischen Form.

Es gibt aber noch eine Covariante der biquadratischen Form, welche in den Coefficienten vom dritten, in den Veränderlichen vom sechsten Grade ist. Sie hat die Form:

$$\overline{12}^2 \, \overline{13}$$

und ist die cubische Covariante der ersten Emanante der Form.

Entwickelt ist sie von der Form:

$$C = (a^2 d - 3abc + 2b^3) x^6 + (a^2 e + 2abd - 9ac^2 + 6b^2 c) x^5 y + (5abe - 15acd + 10b^2 d) x^4 y^2 + (10b^2 e - 10ad^2) x^3 y^3 + (15bce - 5ade - 10bd^2) x^2 y^4 + (9c^2 e - ae^2 - 2bde - 6cd^2) xy^5 + (3cde - be^2 - 2d^2) y^6,$$

für die canonische Form ist sie:

$$(1 - 9m^2)(x^4 - y^4) xy.$$

Die biquadratische Form besitzt nicht wie die cubische eine quadratische Covariante, denn m ist die Wurzel einer cubischen Gleichung; die canonische Form wird also auf dreierlei Art bestimmt, die Bestimmung ihrer Factoren geschieht also aus einer Gleichung sechsten Grades, und dies ist eben die Covariante C.

Die geometrische Bedeutung dieser Betrachtung ist folgende:

Die vier linearen Factoren einer biquadratischen Form bestimmen vier Elemente, die auf dreierlei Weise als ein involutorisches System zu betrachten sind, je nachdem das eine A zu B, C oder D conjugirt ist. Die Doppel-Elemente dieser drei Systeme bestimmt die Covariante C.

Wenn man die canonische Form von C mit den Ausdrücken:

$$H - m_1 U, \quad H - m_2 U, \quad H - m_3 U$$

vergleicht, so zeigt sich, dass C^2 mit

$$(H - m_1 U)(H - m_2 U)(H - m_3 U)$$

proportional ist, also nach der Gleichung A), welche m gibt, proportional zu

$$4H^3 - SHU^2 + TU^3.$$

Bildet man die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Determinante, so erhält man nach der Methode des Abschnitts 13):

$$x^4 + y^4 + 6m' x^2 y^2$$

Digitized by Google

sie hat also die Form:

$$U + \lambda H.$$

Um λ zu finden, geht man von der canonischen Form aus:

$$H = m(x^4 + y^4) + (1 - 3m^2)\, x^2y^2.$$

Die Hesse'sche Covariante hiervon ist also:

$$H_1 = 2m(1 - 3m^2)\,(x^4 + y^4) - (1 - 18m^2 + 9m^4)\, x^2y^2.$$

Setzt man:

$$\frac{(1 - 3m^2)\, U - 6mH}{1 - 9m^2} \text{ für } x^4 + y^4, \qquad \frac{H - mU}{1 - 9m^2} \text{ für } x^2y^2,$$

so ergibt sich:

$$H_1 = 3TU - SH.$$

Ebenso lässt sich zeigen, dass die Hessesche Determinante von H_1 und jede andere Covariante vierter Ordnung die Form:

$$U + \lambda H$$

hat, wo λ sich leicht in S und T bestimmen lässt. So ist die Discriminante der ersten Emanante von der vierten Ordung und gleich

V. $$SH - TU.$$

Sind α, β, γ, δ die dritten Differenzialquotienten einer beliebigen Form, so ist immer:

$$\alpha^2\delta^2 + 4\alpha\gamma^3 + 4\delta\beta^3 - 3\beta^2\gamma^2 - 6\alpha\beta\gamma\delta$$

eine Covariante derselben. Sind dann a, b, c, d, e . . . die vierten Differenzialquotienten, so hat man bekanntlich:

$$(n - 3)\,\alpha = ax + by \ . \ . \ .$$

und kann sie als Function von a, b . . . darstellen. Die Form des Resultats muss aber natürlich, wie bei der biquadratischen Form sein. Daher hat diese Covariante die Gestalt:

$$SH + \lambda TU,$$

wo S und T aus den Grössen in IV. entstehen, wenn man die Coefficienten aber durch die vierten Differenzialquotienten von U ersetzt. Diese Gestalt nimmt also auch die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Determinante an, wie schon in Abschnitt 13) dargethan war.

VI. Der binären Form fünften Grades gibt Sylvester die canonische Form:

$$ax^5 + by^5 + cz^5,$$

wo

$$x + y + z = 0$$

ist. Sie besitzt fundamentale Invarianten vom vierten, achten und zwölften Grade. Sie sind in der canonischen Form:

$$A = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2abc\,(a + b + c)$$
$$B = a^2b^2c^2\,(ab + bc + ca)$$
$$C = a^4b^4c^4.$$

Die Discriminante D ergibt sich:

$$D = A^3 + 128B^2.$$

Hieraus lassen sich unzählige Invarianten von der Ordnung $4m$ bilden, nämlich als rationale Functionen von A, B, C. Eine davon ist:

$$A(AC - B^2)^2 + 8B^2C - 72ABC^2 - 432C^3.$$

Hermite hat gezeigt, dass dieselbe — sie ist vom Grade 36 — ein vollständiges Quadrat ist; somit ist ihre Wurzel eine Invariante vom Grade 18, die erste entdeckte, welche nicht den Grad $4m$ hat.

Sie unterscheidet sich von den übrigen auch dadurch, dass bei einer Transformation der Modul derselben hier im ungraden, bei den übrigen im graden Grade erscheint.

Hermite hat auch eine andere canonische Form eingeführt.

Da jede binäre Form vom Grade $2n - 1$ eine quadratische Covariante hat und eine cubische Form durch Zerlegung derselben in ihre linearen Factoren auf die canonische Form gebracht wird, so lag es nahe, hier etwas Aehnliches zu versuchen. Die quadratische Covariante für die Form fünften Grades

$$(a_0a_1a_2a_3a_4a_5) \mid (xy)^5$$

ist:

$$(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)\,x^2 + (a_0a_5 - 3a_1a_4 + 2a_2a_3)\,xy + (a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2)\,y^2 = \Sigma(x_1 - x_2)^2\,(x_3 - x_4)^2\,(x - x_5y)^2.$$

Hermite bestimmt nun eine neue canonische Form, indem er setzt:

$$a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 = 0,$$
$$a_1a_5 - 4a_2a_4 + 3a_3^2 = 0,$$

so dass die Covariante gleich xy ist.

Digitized by Google

Nun wird, wie dies gestattet ist, x und y durch $\frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{\partial}{\partial x}$ ersetzt; man erhält also das Symbol:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y}$$

und bestimmt dadurch eine Covariante vom ersten Grade, die für die neue canonische Form gibt:

$$a_2 x + a^2 y.$$

Die Hesse'sche Determinante ist vom sechsten Grade in den Veränderlichen, vom zweiten in den Coefficienten. Ihre Gestalt ist:

$$\Sigma\,[(x_1 - x_2)\ (x - x_3 y)\ (x - x_4 y)\ (x - x_5 y)]^2 = (a_0 a_2 - a_1^2)\, x^6 + 3(a_0 a_3 - a_1 a_2)\, x^5 y + 3(a_0 a_4 + a_1 a_3 - 2a_2^2)\, x^4 y^2 + (a_0 a^5 + 7 a_1 a_4 - 8 a_2 a_3)\, x^3 y^3 + 3(a_1 a_5 + a_2 a_4 - 2 a_3^2)\, x^2 y^4 + 3(a_2 a_5 - a_3 a_4)\, x y^5 + (a_3 a_4 - a_4^2)\, y^6.$$

Untersuchungen und entwickelte Darstellungen für Invarianten und Covarianten von Formen sechsten bis neunten auch zwölften Grades enthält Cayley: *Second memoir upon Quantics. Philos. transactions Vol.* 146, *p.* 123 *seq.*

16) Besondere Untersuchung ternärer Formen und solcher von mehr als drei Variablen.

I. Die ternäre quadratische Form:

$$(aa'a''b'b'')\ \|\ (xyz)^2$$

hat nur eine Invariante, ihre Discriminante oder Hesse'sche Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

Verschwindet sie, so zerfällt der durch die Form vorgestellte Kegelschnitt in zwei grade Linien.

Die Evectante derselben ist die einzige Contravariante der Form. Sie ist:

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' & \xi \\ b'' & a' & b & \eta \\ b' & b & a'' & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}$$

Hieraus lassen sich entsprechende Entwickelungen für die Formen höherer Grade ableiten, wenn man unter $aa'a''$ die zweiten Differenzialquotienten versteht. Die erstere Determinante bleibt dann die Hesse'sche, die zweite aber ist eine Zwischenform.

Die canonische Form:

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

kann auf unendlich viel Arten gebildet werden. Die geometrische Bedeutung ist die eines sich selbst conjugirten Dreiecks, dessen Ecken x, y, z sind, d. h. eines solchen, wo die Ecken die Pole ihrer Gegenseiten in Bezug auf den Kegelschnitt sind.

II. Seien jetzt S und S_1 zwei quadratische ternäre Formen, S bezeichnen wir wie vorhin, bei S_1 geben wir den Buchstaben a_1, a'_1 . . . Indices unten.

Bildet man die Discriminante von

$$kS + S_1,$$

so sind die Coefficienten der Potenzen von k Invarianten des Ssytems. Setzt man:

$$kS + S_1 = k^3 \Delta + k^2 \vartheta + k \vartheta_1 + \Delta_1,$$

so sind Δ, Δ_1 die Discriminanten der Formen, und

Digitized by Google

$$\vartheta = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial a} + a'_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + a''_1 \frac{\partial}{\partial a''} + b_1 \frac{\partial}{\partial b} + b'_1 \frac{\partial}{\partial b'_1} + b''_1 \frac{\partial}{\partial b''}\right) \Delta$$

$$\vartheta_1 = \left(a \frac{\partial}{\partial a_1} + a' \frac{\partial}{\partial a'_1} + \ldots .\right) \Delta_1$$

oder entwickelt:

$$\vartheta = a_1 (a'a'' - b^2) + a'_1 (a''a - b'^2) + a''_1 (aa' - b''^2) + 2b_1 (b'b'' - ab) + 2b'_1 (b''b - a'b') + 2b''_1 (bb'' - a''b'')$$

und für ϑ_1 der entsprechende Ausdruck, der erhalten wird, wenn man die S_1 und S entsprechenden Coefficienten verwechselt.

Als Function dieser Invarianten kann man alle bleibenden Eigenschaften zweier Kegelschnitte ausdrücken. Die Berührung derselben wird ausgedrückt, wenn man die Discriminante der Form:

$$\Delta u^2 + \vartheta u^2 v + \vartheta_1 uv^2 + \Delta_1 v^2$$

verschwinden lässt. Die Gleichung

$$\vartheta = 0$$

drückt aus, dass der zweite Kegelschnitt durch die Ecken eines in Bezug auf den ersten sich selbst conjugirten Dreiecks geht. Denn dann kann die Gleichung des ersten auf die Form:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

die des zweiten auf

$$2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

gebracht werden, und es wird:

$$a = a' = a'' = 0,$$

also:

$$\vartheta = b_1 (b'b'' - ab) + b'_1 (b''b - a'b') + b''_1 (bb' - a''b''),$$

also gleich Null, wenn

$$b = b' = b''$$

ist, und da ϑ eine Invariante ist, so bleibt diese Eigenschaft bei linearer Substitution erhalten.

Sei jetzt gefragt, unter welcher Bedingung es ein Dreieck gibt, das dem einen Kegelschnitt um-, dem anderen eingeschrieben ist. Sind dann:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

bezüglich die Gleichung der Seiten des Dreiecks (in Trilinear-Coordinaten), so nehmen die Gleichungen der Kegelschnitte durch Transformation die Form an:

$$2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0$$

und die Relationen zwischen den Invarianten sind bleibend. Diese Invarianten aber sind:

$$\Delta = 2bb'b'', \quad \Delta_1 = -4, \quad \vartheta = -(b + b' + b'')^2, \quad \vartheta_1 = 4(b + b' + b''),$$

also findet die Relation

$$\vartheta_1^2 = 4\vartheta\Delta_1$$

statt, und dies ist die gesuchte Bedingung.

Es könnte ein Zweifel entstehen, ob die hinzukommenden Factoren, welche Potenzen des Moduls sind, diese Relationen nicht stören, da sie im Allgemeinen doch verschiedene Potenzen sein können. Dies findet aber hier nicht statt, weil die Relation homogen ist.

Betrachten wir jetzt die Covarianten und Contravarianten des Systems. Sind

$$\Sigma = 0, \quad \Sigma_1 = 0$$

die Reciprokalcurven (Formen) von

$$S = 0, \quad S_1 = 0,$$

so ist die Reciprokalcurve von

$$S + kS_1 = 0$$

auszudrücken durch:

$$\Sigma + k\varphi + k^2\Sigma_1 = 0,$$

wo

Digitized by Google

$$\varphi = (aa''_1 + a''a'_1 - 2bb_1)\xi^2 + (a''a_1 + aa''_1 - 2b'b'_1)\eta^2 + (aa'_1 + a'a_1 - 2b''b''_1)\zeta^2 + 2(bb''_1 + b''b_1 - ab'_1 - a'b_1)\eta\zeta + 2(b'b_1 + bb'_1 - a'b''_1 - a''b'_1)\zeta\xi + 2(b''b'_1 + b'b''_1 - a''b_1 - ab''_1)\xi\eta.$$

$\varphi = 0$ drückt die Bedingung aus, unter welcher die Linie:

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0$$

von den gegebenen Kegelschnitten harmonisch geschnitten wird.

Die Gleichung:

$$\varphi^2 = 4\,\Sigma\Sigma_1$$

drückt dagegen aus, dass dieselbe Grade durch einen der vier Durchschnittspunkte beider Kegelschnitte geht.

Werden in φ für a, a', a'' . . . die entsprechenden Coefficienten der reciproken Kegelschnitte substituirt und ξ, η, ζ durch x, y, z ersetzt, so ist:

$$F = 0$$

die Gleichung eines zu den gegebenen covarianten Kegelschnitts, welcher den Ort der Punkte bildet, welchen harmonische Tangentenbüschel der gegebenen Kegelschnitte entsprechen.

Die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte ist also:

$$F^2 = 4\,\Delta\Delta_1 SS_1.$$

Alle zu den gegebenen covarianten Kegelschnitte können durch S, S_1, F ausgedrückt werden. Z. B. substituirt man:

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} \text{ für } \xi, \eta, \zeta \ldots$$

in eine beliebige Contravariante, so erhält man eine Covariante.

Thun wir dies für die Reciprokalcurve von S_1. Wir nehmen die canonischen Formen:

$$S = ax^2 + a'y^2 + a''z^2$$
$$S_1 = a_1x^2 + a'_1y^2 + a''_1z^2.$$

Hier sind beide auf dasjenige fundamentale Dreieck bezogen, dessen Seiten in Bezug auf beide Kegelschnitte dieselbe Polare haben, dann ist:

$$\Sigma = a'a''\xi^2 + a''a\eta^2 + aa'\zeta^2$$
$$\Sigma_1 = a'_1a''_1\xi^2 + a''_1a_1\eta^2 + a_1a'_1\zeta^2$$
$$\varphi = (a'a''_1 + a''a'_1)\xi^2 + (a''a_1 + aa''_1)\eta^2 + (aa'_1 + a'a_1)\zeta^2$$
$$F = aa_1(a'a''_1 + a''a'_1)x^2 + a'a'_1(a''a_1 + aa''_1)y^2 + a''a''_1(aa'_1 + a'a_1)z^2$$
$$\Delta = aa'a''$$
$$\Delta_1 = a_1a'_1a''_1$$
$$\vartheta = a_1a'a'' + a'_1a''a + a''_1aa'$$
$$\vartheta_1 = aa'_1a''_1 + a'a''_1a_1 + a''a_1a'_1.$$

Durch Substitution von

$$ax,\ a'y,\ a''z \text{ für } \xi,\ \eta,\ \zeta$$

in Σ_1 erhält man dann

$$a'_1a''_1a^2x^2 + a''_1a'^2y^2 + a_1a'_1a''^2z^2 = \vartheta_1 S - F.$$

Theoreme wie diese lassen sich von Kegelschnitten natürlich auf beliebige algebraische Curven übertragen, wenn die Coefficienten durch die zweiten Differenzialquotienten ersetzt werden. Δ und Δ_1 verwandeln sich dann in die Hesseschen Determinanten der Curven, ϑ, ϑ_1 sind andere Covarianten.

Z. B. aus der Covariante:

$$\varphi = \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \ldots$$

worin wir die ersten Differenzialquotienten durch die zweiten mittels des Satzes von den homogenen Functionen ausdrücken, bildet man:

$$(n-1)^2\psi = n(n-1)\vartheta_1 U - F.$$

Ist also ψ_1 die Covariante die aus ψ durch Vertauschung von U und U_1 entsteht, so ist:

$$(n-1)^2\psi_1 = n_1(n_1-1)\vartheta U_1 - F$$

und hieraus ergibt sich:

$$(n-1)^2\psi - (n_1-1)^2\psi_1 = n(n-1)\vartheta_1 U - n_1(n_1-1)\vartheta U_1.$$

II. Jetzt seien drei Formen zweiten Grades gegeben

$$S,\ S_1,\ S_2.$$

Wir bilden die Discriminante von

$$\lambda S + \mu S_1 + \nu S_2.$$

Ihre Gleichung ist in λ, μ, ν vom dritten Grade, und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ, μ, ν sind Invarianten. So ist der von λ, μ, ν gleich

$$\overline{123}^2;$$

sind die Formen identisch, so ist dies die Discriminante.

Von Covarianten sind zu merken die harmonischen Kegelschnitte F, und die Functional-Determinante:

$$\overline{123}.$$

In ihr erscheint ein Punkt, welcher allen drei Kegelschnitten gemein ist, als Doppelpunkt (vergl. Abschnitt 9).

Die Functional-Determinante ist also ein Kegelschnitt und eine grade Linie,

Digitized by Google

wenn S, S_1, S_2 zwei Punkte gemein haben. Für drei Kreise ist sie z. B. aus der unendlich entfernten Graden und dem Orthogonalkreis zusammengesetzt.

Es gibt aber auch eine Contravariante vom dritten Grade:

$$\overline{\xi 12}.\ \overline{\xi 23}.\ \overline{\xi 31}.$$

Ihr Verschwinden drückt die Bedingung aus, dass die Grade:

$$x\xi + y\eta + z\zeta$$

mit den drei Kegelschnitten ein System involutorischer Punkte bestimmt.

Es lässt sich auch leicht die Gleichung dritten Grades bilden, welche die drei Graden gibt, die in Bezug auf zwei Kegelschnitte gleiche Pole haben. Denn nimmt man sie zu Seiten des Fundamental-Dreiecks, so sind die Gleichungen der Kegelschnitte:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 = 0$$

und der harmonische Kegelschnitt ist:

$$F = a_1x^2 + a'_1y^2 + a''_1z^2 = 0.$$

Die Functional-Determinante dieser drei Formen ist proportional mit

$$xyz.$$

Also die drei Seiten des einzigen in Bezug auf zwei Kegelschnitte S, S_1 sich selbst conjugirten Dreiecks sind durch die Functional-Determinante von S, S_1, F bestimmt.

Um a, a', a'' zu bestimmen, bemerke man, dass sich ergibt:

$$\Delta = 1, \quad \Delta = aa'a''.$$
$$\vartheta = a + a' + a'',$$
$$\vartheta_1 = aa' + a'a'' + a''a,$$

a, a', a'' sind also die Wurzeln der Gleichung:

$$\Delta\lambda^3 - \vartheta\lambda^2 + \vartheta_1\lambda - \Delta_1 = 0.$$

Das Problem ist dasselbe, wie das der Transformation einer Fläche zweiten Grades zu ihren Hauptebenen. Denn beim Uebergange von einem orthogonalen Axensystem zu einem andern bleibt

$$x^2 + y^2 + z^2$$

unverändert. Ist also:

$$(aa'a''bb'b''') \mid (xyz)^2 = U$$

die Gruppe der Glieder zweiten Grades in der Gleichung der Fläche, so sollen die beiden ternären Formen:

$$x^2 + y^2 + z^2 \text{ und } U$$

in die andere

$$x^2 + y^2 + z^2 \text{ und } Ax^2 + A'y^2 + A''z^2$$

umgewandelt werden.

Die drei Hauptebenen werden bestimmt durch die Functional-Determinante dieser beiden Formen und ihre harmonische Covariante F. Die Coefficienten A, A', A'' ergeben sich wie oben aus den Invarianten.

Für F kann man die reciproke Polare von U in Bezug auf

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

nehmen, also:

$$V = (a'a'' - b^2,\ a''a - b'^2,\ aa' - b''^2,\ b'b'' - ab,\ b''b - a'b',\ bb' - a''b'') \mid (xyz)^2.$$

Dann sind die drei Hauptebenen bestimmt durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

IV. Für die cubische ternäre Form ist die canonische Gestalt:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6mxyz.$$

Die Hesse'sche Determinante derselben:

$$H = \overline{123}^2 = m^3(x^3 + y^3 + z^3) - (1 + 2m^3)xyz$$

ist die einzige unabhängige Covariante vom dritten Grade. Alle andern nehmen die Form an:

$$U + \lambda H = (x^3 + y^3 + z^3) + 6m_1xyz.$$

Im Allgemeinen bedeutet die Hesse'sche Determinante einer Curve geometrisch den Ort der Punkte, deren in Bezug auf die Curve genommener Polarkegelschnitt ein Paar von graden Linien ist.

Ist die Curve dritter Ordnung, so gehört der Durchschnittspunkt dieser graden der durch die Hesse'sche Determinante gegebenen Covariantencurve an.

Digitized by Google

Auch hat die cubische Form eine Zwischenform. Ihre Gestalt für die canonische Form ist:

$$\overline{\xi 12}^2 = (yz - m^2x^2)\,\xi^2 + (zx - m^2y^2)\,\eta^2 + (xy - m^2z^2)\,\zeta^2 + 2(m^2yz - mx^2)\,\eta\zeta + 2(m^2zx - my^2)\,\zeta\xi + 2(m^2xy - mz^2)\,\xi\eta.$$

Die fundamentalen Invarianten der ternären cubischen Form fand Aronhold, nämlich zuerst eine Invariante vierter Ordnung:

$$S = \overline{123}\ \overline{124}\ \overline{234}\ \overline{314}.$$

Dies Symbol ist nämlich symmetrisch in Bezug auf die Ziffern 1, 2, 3, 4 und bei Vertauschung derselben ändert sich das Zeichen nicht. Da es ausserdem jede Ziffer dreimal enthält, muss es bei cubischen Formen eine Invariante geben. Für die canonische Form ist:

$$S = -m(1 - m^3)$$

und für die Form:

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + 6mxyz$$

$$S = -m(abc - m^3).$$

Die Evectante von S ist:

$$\xi^3 \frac{\partial S}{\partial a}_{1,1,1} + \ldots.$$

selbstverständlich eine Contravariante der gegebenen Form. Sie ist für die canonische Form:

$$m(\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3) + (1 - 4m^3)\,\xi\eta\zeta.$$

Cayley gibt ihr eine dreifache geometrische Deutung.

a) Ihr Verschwinden zeigt an, dass die Grade:

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0$$

diejenige ist, welche irgend einen Punkt der Hesse'schen Determinantencurve mit ihrem correspondirenden Punkte verbindet, d. h. mit dem Durchschnittspunkte der beiden Graden, welche die canonische Polare dieses Punktes bilden, d. h. sie ist die Tangentialgleichung der von der Verbindungslinie correspondirender Punkte der Hesse'schen (Determinanten)-Curve umhüllten Curve.

b) Es wird dadurch auch angezeigt, dass die Linie

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0$$

eine der Graden ist, in welche der Polarkegelschnitt eines Punktes der Hesse'schen Curve zerfällt, d. h. diese Linie umhüllt dieselbe Curve, wie jene Verbindungslinien entsprechender Punkte der Hesse'schen Curve.

c) Die Grade

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0$$

gibt mit den drei einem beliebigen Punkte in Bezug auf die Curve dritter Ordnung entsprechenden Polarkegelschnitten ein System involutorischer Punkte.

Uebrigens ist die zweite Evectante von S:

$$\left(\xi^3 \frac{\partial}{\partial a} + \ldots.\right)^2 S$$

identisch gleich Null.

Macht man in der ersten Evectante die Substitutionen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{ für } \xi \text{ u. s. w.},$$

so entstehen Invarianten. Auf die Form selbst angewendet, gibt dies Symbol wieder S, wendet man es auf die Hesse'sche Determinante an, so kommt eine neue Invariante von der sechsten Ordnung. Sie ist für die canonische Form:

$$T = 1 - 20m^3 - 8m^6.$$

Näheres über dieselben gibt Aronhold: Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen, und Cayley *Philos. Transactions. Vol.* 146, *p.* 641.

Jede Invariante unserer Form ist nun eine rationale Function von S und T. Z. B. die Discriminante, welche eine Invariante des zwölften Grades ist, hat die Form:

$$T^2 - 64S^3,$$

für die canonische Form:

$$-(1 + 8m^3)^3.$$

Die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Determinante, welche, wie wir gesehen haben, die Form hat:

$$\lambda U + \mu H$$

Digitized by Google

und zugleich von der neunten Ordnung in den Coefficienten ist, so dass λ von der achten, μ von der sechsten sein muss, gibt nach Bestimmung der numerischen Factoren

$$4S^3U - TH.$$

Aus der Zwischenform

$$\overline{\xi 12^2}$$

gibt die Substitution $\frac{\partial}{\partial x}$ für ξ u. s. w., an der Hesse'schen Determinante ausgeführt eine Covariante

$$\varphi = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \ldots$$

welche in den Veränderlichen vom dritten Grade ist, also die Form hat:

$$\lambda U + \mu H.$$

Sie ist vom achten Grade in den Coefficienten, also λ vom vierten, μ vom zweiten Grade.

Es besitzt aber die ternäre cubische Form keine Invariante vom zweiten Grade, also $\mu = 0$, und die Covariante ist:

$$S\,U.$$

Die beiden ersten Evectanten von T geben zwei Contravarianten. Die erste:

$$\xi^3\frac{\partial T}{\partial a} + \ldots.$$

ist dritter Ordnung, ihre Gestalt für die canonische Form ist:

$$(1 - 10m^3)\,(\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3) - 6m^2\,(5 + 4m^3)\,\xi\eta\zeta.$$

Die zweite Evectante:

$$\left(\xi^3\frac{\partial}{\partial a} + \ldots.\right)^2 T$$

ist in den Veränderlichen vom sechsten, in den Coefficienten vom vierten Grade. Cayley hat ihre Identität mit der reciproken Polare der Curve nachgewiesen. Alle anderen Contravarianten und Zwischenformen sind Functionen der ersten Evectante von S und der zwei ersten von T.

Die Form U selbst und H, welches letztere die einzige unabhängige Covariante dritten Grades ist, haben in canonischer Form beide die Gestalt:

$$x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$$

also sind:

$$x^3 + y^3 + z^3 \text{ und } xyz$$

selbst Function von U und H. Um eine beliebige Covariante auszudrücken, bedarf man aber einer zweiten Covariante von der Form

$$x^2y^2 + z^2x^2 + y^2z^2.$$

Eine solche findet Cayley, indem er an der Contravariante:

$$\overline{\xi 12^2}$$

die Substitutionen:

$$\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \text{ für } \xi, \eta, \zeta$$

macht. Man erhält:

$$\vartheta = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \ldots$$

sie ist vom achten Grade in den Coefficienten, vom sechsten in den Veränderlichen, und hat die Gestalt für die canonische Form:

$$\vartheta = (1 + 8m^3)^2\,(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3) - (2m^3 + m^6)\,U^2 + (2m - 5m^4)\,UH - 3m^2H^2.$$

Jede andere Covariante ist dann eine Function von UH und ϑ. Jedoch ist es nicht nöthig, dass dieser Ausdruck ein rationaler sei.

Zu bemerken ist noch die Zwischenform:

$$\overline{\xi 12^2}\ \overline{\xi 13}$$

die in den Coefficienten und den Veränderlichen vom dritten Grade ist. Die Invarianten S und T erhält übrigens Sylvester gleichzeitig und zwar durch Betrachtung einer besondern Invarianten-Klasse. — Ist eine Function homogen in x, y, z und auch in ξ, η, ζ, also in zwei Gruppen von Veränderlichen, entspricht dann das Symbol $\overline{123}$ wie immer den Grössen x, y, z, $\overline{123}'$ aber den Grössen ξ, η, ζ, so ist offenbar:

$$\overline{123}\ \overline{123}'$$

das Symbol einer Invariante oder Covariante in Bezug auf beide Gruppen. So z. B. gibt das Symbol für die Form:

$$ax\xi + a'y\eta + a''z\zeta + by\zeta + b_1z\eta + b'z\xi + b'_1x\zeta + b''_1y\xi$$

die Invariante:

$$aa'a'' + bb'b'' + b_1b'_1b''_1 - abb_1 - a'b'b'_1 - a''b''b''_1.$$

Für die ternäre cubische Form soll noch die Operation:

$$\overline{123}^2\ \overline{123}'^2$$

Digitized by Google

ausgeführt an der Summe von der Zwischenform:

$$\overline{\xi 12}^2\, U$$

und der Form:

$$\lambda (x\xi + y\eta + z\zeta)^2$$

ausgeführt werden. In der so entstehenden Function sind die Coefficienten der Potenzen von λ Invarianten der cubischen Form.

Für die canonische Form ist nun:

$$\overline{\xi 12}^2\, U + \lambda (x\xi + y\eta + z\zeta)^2$$
$$= (\lambda - m^2)(x^2\xi^2 + y^2\eta^2 + z^2\zeta^2)$$
$$+ 2(\lambda + m^2)(yz\eta\zeta + zx\eta\xi + xy\xi\eta)$$
$$+ (yz\xi^2 + zx\eta^2 + xy\zeta^2) - 2m(x^2\eta\zeta + y^2\zeta\xi + z^2\xi\eta)$$

und die Operation:

$$\overline{123}^2\, \overline{123'}^2$$

hieran vollzogen gibt:

$$12\lambda^2 - 12S\lambda + T.$$

V. Es sollen jetzt noch einige Betrachtungen an die Theorie von drei ternären quadratischen Formen angeknüpft werden, die sich auf die Resultante dieser Form beziehen. Die Resultanten sind nämlich nicht nur Invarianten in Bezug auf die Transformation der Variablen, sondern auf die Transformationen der Formen selbst, solche Invarianten werden zuweilen Combinanten genannt. Es weicht in der That, wie leicht zu sehen, die Resultante der drei Formen:

$$\lambda S + \mu S_1 + \nu S_2,$$
$$\lambda' S + \mu' S_1 + \nu' S_2,$$
$$\lambda'' S + \mu'' S_1 + \nu'' S_2$$

nur um einen constanten Factor von der Resultante der Formen:

$$S,\ S_1,\ S_2$$

ab. Nun sind die Coefficienten der Potenzen von λ, μ, ν in der Discriminante von

$$\lambda S + \mu S_1 + \nu S_2$$

wie schon früher gezeigt wurde, Invarianten. Betrachtet man aber λ, μ, ν als Veränderliche, so ist die Discriminante selbst eine cubische Form; bilden wir deren Invarianten, so sind diese von der oben bezeichneten Art, denn sie bleiben bei linearer Transformation von λ, μ, ν ebenfalls ungeändert.

Die Invariante S dieser cubischen Form ist in den Coefficienten jeder der gegebenen Formen vom vierten Grade, also nach Natur und Grad mit den Resultanten übereinstimmend. Es fragt sich, ob sie mit ihr identisch ist.

Geben wir zwei der ursprünglichen Formen die Gestalt:

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad ax^2 + a'y^2 + a''z^2$$

und vertauschen dieselben mit linearen Functionen von ihnen, wie dies ja nach dem Obigen geschehen kann. So z. B. kann man y und z eliminiren und erhält:

$$(a' - a)x^2 - (a'' - a')z^2$$
$$(a' - a)y^2 - (a - a'')z^2,$$

oder wenn man für x, y substituirt:

$$x\sqrt{\frac{a'' - a'}{a' - a}}, \qquad y\sqrt{\frac{a - a''}{a' - a}}$$
$$x^2 - z^2, \qquad y^2 - z^2.$$

Der dritten Gleichung kann man dann die Gestalt geben:

$$z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy.$$

Da nun die Auflösungen der beiden ersten Gleichungen sind:

$$x = \pm z, \qquad y = \pm z,$$

so erhält man durch Einsetzen in die dritte und Multiplication der Resultate sogleich die Resultante:

$$R = (1 + 2b + 2b' + 2b'')(1 - 2b + 2b' - 2b'')(1 + 2b - 2b' - 2b'')(1 - 2b - 2b' + 2b'') = 1 - 8(b^2 + b'^2 + b''^2) + 16(b^4 + b'^4 + b''^4 - 2b^2b'^2 - 2b^2b''^2 - 2b'^2b''^2) + 64bb'b''.$$

Die Discrimante von

$$\lambda S + \mu S_1 + \nu S_2$$

aber hat die Gestalt:

$$\nu^2(2bb'b'' - b''^2) + (b''^2 - b^2)\nu^2\lambda + (b'^2 - b'^2)\nu^2\mu - \lambda^2\mu - \lambda\mu^2 + \lambda\mu\nu.$$

Die Invariante S derselben, ergibt sich genau wie die obige Resultante, jedoch mit dem Unterschiede, dass das letzte Glied $48bb'b''$ statt $64bb'b''$ ist. Beide sind also nicht identisch.

Durch Elimination dieser letzten Glieder ergibt sich noch:

$$4S - 3R = [1 - 4(b^2 + b'^2 + b''^2)]^2.$$

VI. Es sind noch einige Bemerkungen über ternäre biquadratische Formen zu machen.

Jede Invariante hat den Grad $3m$; die vom dritten Grade $\overline{123}^4$ enthält Abschnitt 13), die vom sechsten Grade kann in Determinantenform hergestellt werden, wenn man aus den 6 zweiten Differenzial-

quotienten die Variablen eliminirt. Gibt man der Gleichung der reciproken Polare die Evectantenform:

$$\left(\xi^4 \frac{\partial}{\partial a} + \ldots .\right) J,$$

so ist J eine Invariante vom neunten Grade, die mit Hülfe der Gleichung der reciproken Polare ermittelt werden kann. Die Discriminante ist vom 27sten Grade, lässt sich aber als Function der einfacheren Invariante ausdrücken.

Zwei Contravarianten vom vierten und sechsten Grade sind in Abschnitt 13) gegeben. Aus den Invarianten ergeben sich andere durch Bildung der Evectante.

Unter den Covarianten ist die Hessesche vom sechsten Grade in den Veränderlichen, vom dritten Grade in den Coefficienten.

Als andere Covarianten sind zu merken: Die S und T der ersten Emanante, welche eine cubische Form ist, eine biquadratische Covariante vom vierten Grade in den Coefficienten, und eine vom sechsten Grade in den Veränderlichen und Coefficienten.

Andere biquadratische Covarianten erhält man aus der Contravariante einer der vorhererwähnten biquadratischen Contravarianten, oder wenn man die Covariante S von $U + \lambda S$ bildet; statt S kann auch eine der biquadratischen Covarianten genommen werden.

VII Es sollen für quadratische Formen hier schliesslich noch mehr als drei Veränderliche in Betracht gezogen werden. Wir setzen doppelte Indices an den Coefficienten voraus, so dass

$$x_p x_q \text{ mit } 2a_{p,q} \qquad x_p^2 \text{ mit } a_{p,p}$$

multiplicirt ist. Die einzige Invariante ist dann die Discriminante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (a_{11}\, a_{22}\, a_{33}) \ldots .$$

Die Evectante derselben lässt sich, wie schon früher gezeigt wurde, ebenfalls in Determinantenform schreiben, es treten zu der eben gegebenen nämlich die Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots$, die sich auf die reciproke Substitution beziehen, hinzu:

$$-\left(\xi_1^2 \frac{\partial}{\partial a_{11}} + \xi_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial a_{12}} + \ldots .\right) J = \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \cdots \\ \xi_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \cdots \\ \xi_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \cdots \\ \xi_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{44} \cdots \\ \xi_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \cdots \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

Diese Contravariante wird ein vollständiges Quadrat, wenn die Discriminante verschwindet; überhaupt ist die Evectante der Discriminante einer Form $n$ten Grades dann eine $n$te Potenz, wenn die Discriminante gleich Null ist. Der Beweis ist schon in Abschnitt 11) für ternäre Formen gegeben, und gilt allgemein.

In unserem Falle ist das Zeichen des Quadrates das des Coefficienten von ξ_1^2, also das entgegengesetzte der Determinante:

$$(a_{22}\, a_{33}\, a_{44} \ldots).$$

Dieser Satz gilt für alle symmetrischen Determinanten, er lautet in Bezug auf diese:

„Wenn die erste Unter-Determinante einer symmetrischen Determinante verschwindet, so haben die Determinanten selbst und ihre zweite Unter-Determinante ungleiche Vorzeichen."

Hier ist dies zunächst nur für solche Determinanten gezeigt, deren erstes Glied verschwindet, aber da die Entwickelung der Determinante, das Product des

ersten Elements mit der verschwindenden ersten Unter-Determinante als erstes Glied enthält, so ändert sich im allgemeinen Falle nichts.

Wie im 14ten Abschnitt kann man zeigen, dass eine quadratische Form von beliebig viel Veränderlichen auf unendlich viel Arten in eine Summe von Quadraten der Veränderlichen verwandelt werden kann, durch orthogonale Substitution aber nur auf eine Art. Hierbei ist die Aufgabe nämlich, die Formen:

$$U = (a_{1\,1}\ a_{1\,2} \ldots) \,|\, (x_1\ x_2\ x_3 \ldots)^2$$

und

$$V = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

gleichzeitig auf die Formen zu bringen:

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2$$

$$x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Die Ausführung geschieht wie für ternäre Formen.

Man bildet die Discriminante von

$$U + \lambda V.$$

Alle Coefficienten der Potenzen von λ sind dann Invarianten. Setzt man sie gleich Null, so erhält man durch Elimination eine Gleichung $n$ten Grades für λ, die von der Substitution unabhängig sind. Sie lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{1\,1}+\lambda, & a_{1\,2}, & a_{1\,3}, & \ldots \\ a_{2\,1}, & a_{2\,2}+\lambda, & a_{2\,3}, & \ldots \\ a_{3\,1}, & a_{3\,2}, & a_{3\,3}+\lambda, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \Delta;$$

für die transformirte Form verschwinden alle a ausser der Diagonale, man hat also:

$$(A_1 + \lambda)\ (A_2 + \lambda)\ (A_3 + \lambda) \ldots,$$

d. h. die $A_1, A_2, A_3 \ldots$ sind die Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ mit geändertem Vorzeichen. Es lässt sich nun zeigen, dass diese Wurzeln alle reell sind, und zwar durch ein dem Sturm'schen anologes Verfahren. Der Kern desselben ist nämlich die Betrachtung einer Reihe von Formen, wo das Verschwinden der einen bewirkt, dass die Vorhergehende und Nachfolgende nicht verschwinden, und entgegengesetzte Zeichen haben, die letzte Form aber constant ist. Dergleichen Formen sind hier, Δ ihre erste Unter-Determinante, die Unter-Determinante von dieser, u. s. w., schliesslich also die Constante Eins.

Nach dem eben für symmetrische Determinanten bewiesenen Satze findet dann beim Verschwinden einer Form für die beiden benachbarten in der That ein entgegengesetztes Zeichen statt.

Da nicht wie im Sturm'schen Satze die Zeichenwechsel von $-\infty$ und $+\infty$ immer zu oder immer abnehmen müssen, so folgt hieraus allerdings zunächst nur, dass die Differenz der Gesammtzahl der Zeichenwechsel bei $-\infty$ und bei $+\infty$, die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung nicht überschreitet. Da jedoch für $\lambda = \infty$ die höchste Potenz von λ, also die ganze Form positiv ist, dagegen für $\lambda = -\infty$ die Formen abwechselnd positiv und negativ sind, so finden n Zeichenwechsel statt, und da die Anzahl der Wurzeln gleich n ist, so müssen diese Alle reell sein.

Auch jede der Functionen, welche die der Sturm'schen analoge Reihe bilden, hat somit lauter reelle Wurzeln, was ganz wie hier dargethan wird.

Wieviel positive und negative Wurzeln darunter sind, d. h. wie viel positive und negative Quadrate der Veränderlichen in der transformirten sich vorfinden, lehrt also augenblicklich die Zeichenregel des Descartes.

Sehr leicht kann man nach dem Obigen auch zu einer gegebenen symmetrischen Determinante die quadratische Form bilden, von der sie die Discriminante ist.

Da die Discriminante einer beliebigen Form die Resultante der Differenzialquotienten ist, so kann man ihr immer die Form einer symmetrischen Determinante geben, aus ihr ergibt sich dann die zugehörige quadratische Form von $n-1$ Veränderlichen, welche Sylvester als Bezoutiante der Form bezeichnet.

Wir sind in diesem Artikel, Salmon: *„Lessons introductory to the modern higher Algebra"* gefolgt, und verweisen im Uebrigen auf diese an Resultaten

Digitized by Google

reiche Schrift. Sie ist deutsch erschienen unter dem Titel: „Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformation von Georg Salman. Deutsch bearbeitet von Dr. W. Fiedler. Leipzig Teubner 1863."

Daneben aber ist namentlich auf eine Abhandlung von Aronhold hinzuweisen: „Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. Crelle. Bd. 62", der ersten, welche die Grundzüge dieser Theorie in völlig consequenter und abgeschlossener Weise gibt.

In Bezug auf besondere Untersuchungen sind die Arbeiten von Aronhold, namentlich die Abhandlung im 55sten Bande von Crelles Journal, von Cayley und Sylvester in den *Philosophical Transactions* und Crelle's Journal, zu erwähnen. Mehrere Abhandlungen sind auch im Verlauf dieses Artikels citirt.

Subtangente (Geometrie).

Der Theil der Abscissenaxe, welcher von der Tangente und der Ordinate eines gegebenen Punkts einer Curve begrenzt wird. Der Ausdruck für die Subtangente ist:

$$St = y\,\frac{dx}{dy}.$$

Subtraction (Abziehen. Arithmetik).

Vergleiche den Artikel: Rest.

Summe (Arithmetik).

Eine Zahl, welche durch die Vereinigung zweier oder mehrerer anderen entsteht. Die Operation, vermittelst welcher Summen gebildet werden, heisst Addition, das Zeichen für dieselbe ist +, gelesen plus. Also z. B.:

$$a + b + c = e$$

e ist die Summe von a und b und c. Diese zu vereinigenden Zahlen werden Posten oder Glieder genannt. Der Hauptsatz für die Addition ist: „Beim Addiren können die Glieder in beliebiger Ordung genommen werden." Die gewöhnliche Methode der Addition decadischer ganzer Zahlen oder der Decimalbrüche beruht darauf, dass man die Glieder irgend einer decadischen Ordnung vereint, und von der Theilsumme diejenigen, welche Einheiten höherer Ordnung bilden, absondert, und mit denen der entsprechenden Ordnung verbindet. Wenn also die Glieder Decimalbrüche sind, so muss man dieselben so schreiben, dass Komma unter Komma steht. Z. B.:

44,92168
12,4153
999,26
1056,59698.

Für gewöhnliche Brüche, welche gleiche Nenner haben, gilt der Satz:

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\alpha} = \frac{a+b}{\alpha}.$$

(Vergl den Artikel: Quantität). Man addirt also die Zähler und lässt den Nenner unverändert. Brüche mit verschiedenem Nenner werden auf denselben (Generalnenner) gebracht und dann ebenso behandelt.

Negative Zahlen werden wie positive addirt, nur dass das Vorzeichen der Summen negativ ist.

Zwei Zahlen mit ungleichem Vorzeichen werden addirt, indem man den absoluten Werth der kleineren von dem der grösseren abzieht, und dem Rest das Vorzeichen der grösseren gibt (vergl. den Artikel: Quantität).

Haben mehrere Zahlen verschiedene Vorzeichen, so addirt man alle positiven und alle negativen und verfährt mit den Theilsummen wie eben.

Bei complexen Zahlen vereint man die reellen und die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Theile. Eine weitere Reduction findet nicht statt (vergl. den angeführten Artikel).

Supplement (Trigonometrie).

Derjenige Winkel oder Bogen, welcher einen gegebenen zu 180° ergänzt.

Supplementardreieck (Polardreieck, Sphärik).

Das sphärische Dreieck, dessen Eckpunkte die Pole derjenigen grössten Kreise sind, in welchen die Seiten eines gegebenen Dreiecks liegen. Der Begriff der Supplementardreiecke ist reciprok und der Hauptsatz über zwei solche lautet: „Die Seiten des einen ergänzen die Winkel des anderen zu 180 Grad."

Symbol (Analysis).

Unter Symbol und symbolischer Bezeichnung für irgend eine analytische Operation versteht man ganz allgemein eine Bezeichnung, die einem andern Gebiete der Analysis und Algebra entnommen ist, und die andeutet, dass man zunächst ohne Rücksicht auf den eigentlichen Sinn der geforderten Operation diejenige Rechnung ausführen, welche

Digitized by Google

lich dem erhaltenen Resultat seine eigentliche Bedeutung geben soll.

Bekanntlich bezeichnet man das $n$te Differenzial einer Function u nach x durch die Zeichen:

$$d_x^n u$$

Dasselbe stimmt mit der Bezeichnung der Potenz a^n überein, und ist insofern symbolisch, als man die von den Potenzen geltenden Sätze auf das erstere Zeichen übertragen kann.

Dem Satze:

$$a^n a^p = a^{n+p}$$

gemäss kann man sogleich bilden:

$$d_x^n d_x^p u = d_x^{n+p} u,$$

wo man nach Vollzug der Rechnung darauf Rücksicht nehmen muss, dass die linke Seite der Gleichung erst das $n$malige, dann das $p$malige Differenziiren einer Function verlangt; die rechte das $n+p$malige.

Wird die Summe beliebiger Differenziale nach x, y u. s. w. von u genommen, von dieser Summe dieselben Differenziale u. s. w. fort, im Ganzen s mal, so kann man diese Oporation bezeichnen durch das Symbol:

$$(d_x + d_y + d_z \ldots)^s u$$

und nach dem polynomischen Satz diesen Ausdruck entwickeln, wo sich dann ergibt:

$$d_x^s u + s d_x^{s-1} d_y u + s d_x^{s-1} d_z u + \ldots + a d_x^{s-2} d_y d_z u + \ldots$$

Schliesslich ist dann zu berücksichtigen, dass die Zeichen

$$d_x^\alpha d_y^\beta \ldots u$$

Differenzialzeichen sind.

Das Zeichen der Differenzialquotienten

$$\frac{d^n u}{dx^n}$$

eignet sich in dieser Form nicht zum symbolischen Rechnen.

Es wird aber dazu geeignet, wenn man es in die Form:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u$$

umändert, und kann man dann z. B.:

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n u$$

welches Zeichen bedeutet, dass man die Summe des a fachen Differenzialquotienten nach x und des b fachen nach y nehmen, mit dieser wieder in gleicher Weise operiren soll, nach dem binomischen Satze entwickeln; dann ergibt sich:

$$a^n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + n a^{n-1} b \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} + n_2 a^{n-2} b^2 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \ldots$$

wo die Bedeutung der einzelnen Glieder ersichtlich ist.

Eine andere symbolische Verwerthung des Zeichens ist die Form, welche man dem Taylor'schen Satze geben kann:

$$f(x+h) = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} f(x)$$

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l \ldots) + e^{h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z} + \ldots} f(x, y, z),$$

wo unter e^n die bekannte Reihe:

Digitized by Google

$$e^n = 1 + n + \frac{n^2}{1 \cdot 2} + \frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

verstanden ist, hiernach erhält man also:

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{h^2}{1 \cdot 2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \ldots$$

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l) = f(x,y,z) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x,\ y,\ z)$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z) + \ldots$$

wo mit den in den Klammern eingeschlossenen Grössen wie oben zu operiren ist.

Auch das Zeichen der Differenzenrechnung:

$$\triangle f(x) = f(x+h) - f(x)$$

findet leicht symbolische Verwerthung.

Bezeichnet z. B.

$$\triangle^n f(x)$$

die $n$te Differenz, und wird

$$f(x+h) = \vartheta f(x), \quad f(x+2h) = \vartheta^2 f(x), \quad \ldots f(x+nh) = \vartheta^n f(x)$$

getetzt, so hat man die symbolischen Formeln:

$$\triangle = (\vartheta - 1), \qquad \vartheta = 1 + \triangle,$$

aus denen sich, wenn man ϑ und $\triangle$ zunächst als Grössen auffasst, ergibt:

$$\triangle^n f(x) = (\vartheta - 1)^n f(x), \qquad \vartheta^n f(x) = (1 + \triangle)^n f(x)$$

d. h.:

$$\triangle^n f(x) = \vartheta^n f(x) - n\vartheta^{n-1} f(x) + n_2 \vartheta^{n-2} f(x) - \ldots \pm f(x)$$

$$\vartheta^n f(x) = f(x) + n\triangle f(x) + n_2 \triangle^2 f(x) \text{ u. s. w.,}$$

oder:

$$\triangle n f(x) = f(x+nh) - nf(x+\overbrace{n-1}h) + n_2 f(x+\overbrace{n-2}h) - \ldots$$
$$f(x+nh) = f(x) + n\triangle f(x) + n_2 \triangle^2 f(x) + \ldots.$$

Andere Symbole sind so aufzufassen, dass man die schliesslich sich ergebenden Exponenten mit Indices vertauschen soll.

Hat man z. B. eine beliebige Reihe:

$$\alpha a_s + \beta a_{s-1} + \ldots$$

und wird verlangt, dass in jedem Gliede der Index um p vermehrt, dann um q vermehrt, beide Resultate addirt, mit der Summe in gleicher Weise verfahren und dies $n$mal wiederholt werden, so kann man der Operation das Symbol geben:

$$(a^p + a^q)^n \ (\alpha a^s + \beta a^{s+1} + \ldots);$$

man erhält dann mit Anwendung des binomischen Satzes:

$$\alpha a^{np+s} + \ldots,$$

wo schliesslich die Exponenten mit Indices zu vertauschen sind. Also:

$$\alpha a_{np+s} + \ldots$$

Es lässt sich die Begründung der symbolischen Rechnung ganz allgemein mit wenigen Worten geben, und dies ist um so nöthiger, als sie nicht mehr, wie wohl früher, nur ab und zu Anwendung findet, sondern, namentlich in der Algebra der linearen Substitutionen bei jedem Schritte zur Verwendung kommt, also als eine wichtige fundamentale Betrachtungsweise angesehen werden muss. Dieselbe stützt sich auf folgende einfache Grundwahrheit.

Die Sätze der elementaren Algebra, d. h. solche, die allen Arten von Zahlen gemein sind, können ganz formell als Combinationen von Buchstaben und Zeichen, welche aus sehr wenigen, einmal bewiesenen fundamentalen Gleichungen hervorgehen, aufgefasst werden.

Digitized by Google

I. Die Additions-Sätze, nämlich in so weit sie ganze Zahlen, Brüche irrationale und imaginäre Zahlen betreffen, beschränken sich auf die Grundbeziehung, dass in dem Ausdrucke:

$$a+b+c+\ldots$$

die Buchstaben beliebig vertauscht werden können.

II. Die Subtraction, also die Einführung des Zeichens —, fügt eben nur die Wahrheit hinzu, dass zwei ungleiche Vorzeichen + — oder — + stets —, zwei gleiche + + oder — — aber + geben.

III. Die Klammer, welche als Zeichen zu betrachten ist, auf Addition und Subtraction angewandt, wird weggelassen, wenn man das vorstehende Zeichen mit jedem in ihr befindlichen combinirt, also:

$$a+(b-c)=a+b-c$$
$$a-(b-c)=a-b+c.$$

IV. Alle Sätze der Multiplication entstehen aus Combination der eben gegebenen Sätze mit den folgenden beiden: In dem Ausdrucke $abc\ldots$ ist die Ordnung der Buchstaben beliebig, und:

$$a(b\pm c\pm d)=ab\pm cb\pm db,$$

d. h. ein Glied vor der Klammer ist mit jedem in derselben zu combiniren.

Daraus gehen unter andern auch die Zeichenregel der Multiplication:

$$+a(-b)=-ab$$

und

$$(-a)(-b)=-(-ab)=--(ab)=ab$$

hervor.

Das Potenziren mit ganzen Exponenten kann dann als ein wiederholtes Multipliciren betrachtet werden, und sind somit die für dasselbe sich ergebenden Sätze nur Combination der hier hingestellten. Die negative und gebrochene Potenz findet ihre Begründung in der indirecten Definition:

$$a^{-p}a^{p}=1$$
$$\left(\frac{1}{a^{p}}\right)^{p}=a$$

und aus dieser in Verbindung mit I. und IV. folgen die in der Algebra diese Operationen betreffenden Sätze.

Endlich wird auch durch Einführung der negativen Potenz a^{-1} das Dividiren entbehrlich, und ist nur ein besonderer Fall der Potenzrechnung.

Es erhellt also, wenn für irgend welche Operationszeichen, die man ja auch durch Buchstaben ausdrückt, unter denen man aber keineswegs nur Grössen zu verstehen braucht, die Sätze I. bis IV. dargethan werden, alle Resultate der elementaren Algebra ohne Weiteres für dieselben anwendbar sind. Jedoch findet hier eine Beschränkung statt, von der sogleich die Rede sein soll.

Sind nun z. B f, f_1, f_2 gewisse Operationszeichen, welche andeuten, dass an einer Grösse u eine gewisse Operation, welcher Art sie auch sei, vorgenommen werden soll, welche schliesslich zu einer neuen Grösse $f(u)$ führt, so kann man unter $(f\pm f_1\pm f_2)u$ die Summe

$$f(u)\pm f_1(u)\pm f_2(u)$$

verstehen; die Zeichen + und — sind also ganz den in der Algebra gebrauchten identisch, und beziehen sich auf Grössen. Somit sind die Sätze I., II. und III. ohne Weiteres übertragbar. — Ganz anders ist dies aber mit den beiden Sätzen IV. Dem Zeichen

$$f,\ f_1(u)$$

kann kein dem Sinne nach der Multiplication gleichbedeutendes Verfahren zu Grunde liegen. Vielmehr ist der Sinn davon der, dass u zuerst der Operation f_1 unterworfen werden soll, die Grösse, die sich dann ergibt, soll dann der Operation f unterliegen. Die beiden Sätze IV. würden dann sein:

$$ff_1(u)=f_1f(u)$$

d. h.:

„Die Operationen geben dasselbe Resultat, wenn man sie in beliebiger Ordnung verrichtet, und:

$$f(f_1\pm f_2\pm f_3)u=ff_1(u)\pm ff_2(u)\pm ff_3(u),$$

oder wenn man:

$$f_1(u)=v,\quad f_2(u)=w,\quad f_3(u)=z$$

setzt:

$$f(u\pm v\pm w)=f(u)\pm f(v)\pm f(w)$$"

d. h.:

„Die Operation f an einer Summe oder Differenz vollstreckt, ist identisch der Summe oder Differenz der Grössen, welche sich ergeben, wenn jedes Glied die Operation f erleidet."

Nur wenn diese beiden letzteren Sätze richtig sind, darf ein der Algebra entnommenes symbolisches Verfahren eingeschlagen werden. Es ist aber klar, dass diese Sätze nicht allgemein gelten, z. B. nicht wenn f und f_1 beliebige Functionen von u andeuten.

Digitized by Google

Dagegen sind unsere beiden Sätze erfüllt, für das Zeichen:

$$\vartheta_x(u), \qquad \vartheta_y(u) \ldots$$

wo u eine Function von x und y ist, und ϑ_x bedeutet, dass man für x irgend eine Function von $f(x)$ von x allein, ϑ_y, dass man für y: $\varphi(y)$ setzen soll, in der That werden die Ausdrücke:

$$\vartheta_x\vartheta_y(u), \qquad \vartheta_y\vartheta_x(u)$$

ganz dasselbe bedeuten, denn es kommt hierbei auf die Ordnung der Substitution nicht an. Ebenso hat man offenbar:

$$\vartheta_x(u \pm v \pm w) = \vartheta_x u \pm \vartheta_x v \pm \vartheta_x w$$

und somit lassen sich die Regeln der Algebra nicht allein auf Ausdrücke wie:

$$(a\vartheta_x + b\vartheta_y)^n u,$$

sondern auch auf die Formen:

$$(a^p_\vartheta + b\vartheta_x^q + c\vartheta_x^r\vartheta_y^s + \ldots)^n u$$

anwenden.

Setzt man

$$f(x) = x + h,$$

so ist:

$$\vartheta_x u - u = \triangle(u),$$

wofür man symbolisch schreiben kann:

$$(\vartheta_x - 1)u = \triangle(u)$$

für unendlich kleines h ist noch:

$$du = (\vartheta_x - 1)u$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{\vartheta_x - 1}{h}\right)u.$$

Es fragt sich noch ob die Betrachtungen der Algebra ohne Weiteres Anwendung finden, wenn es sich um Reihen von unendlich viel Gliedern handelt. Dies ist z. B. bei der oben angeführten symbolischen Formel:

$$f(x+h) = e^{h\frac{d}{dx}}f(x)$$

der Fall. — Da es sich hier um eine unendliche Reihe handelt, so ist zu beachten, dass bei solchen eine blosse Combination von Buchstaben und Zeichen nicht mehr ausreichend ist, dass vielmehr auf die Bedeutung der Buchstaben eingegangen werden muss. In der That hat eine solche Reihe nur einen Sinn wenn sie convergirt, also die
haltenen Grössen gewisse
gungen erfüllen. Nun conv
die Reihe für e^x immer, we
Zahl vorstellt, keineswegs abe

$$h\frac{d}{dx}$$

bolische Reihe für e $f(x)$.
tere und alle unendlichen sy
Reihen gilt also die Beschrän
sie convergiren muss.

Eine zweite Frage ist die
dem Symbole auch negative I
geben kann? Da die Grösse
die Gleichung:

$$a^{-n}a^n = 1$$

definitiv ist, so wird die Defi
Symbols:

$$\vartheta_x^{-1}, \qquad \vartheta_x^{-n}$$

sein:

$$\vartheta_x^n\vartheta_x^{-n}(u) = u$$

$$\vartheta_x\vartheta_x^{-1}(u) = u,$$

d. h. $\vartheta_x^{-1}(u)$ zeigt eine Ope
welche durch die bereits bel
aufgehoben wird. Ist z. B.:

$$\vartheta_x f(x) = f(x+h)$$

so wird:

$$\vartheta_x^{-1}f(x) = f(x-h)$$

sein, denn

$$f(x-h+h) = f(x)$$

das Zeichen:

$$\triangle^{-1}f(x)$$

wird sein gleich:

$$f(x-h) + f(x-2h) + \ldots$$

denn wenn man auf diese
Operation $\triangle$ anwendet, so erh

$$f(x) + f(x-h) + \ldots +$$
$$-f(x-h) - \ldots -$$
$$= f(x).$$

In ähnlicher Weise könnte
Integrale:

$$\int f(x)\,dx$$

den Ausdruck:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}f(x)$$

Digitized by Google

Nutzen gewähren, und der Grund ist folgender:

Der Ausdruck $a^{-1} = \frac{1}{a}$ hat eine indirecte Definition, die oben angegeben, dass er mit a multiplicirt zur Einheit führt. Diese Definition erfordert zu ihrer Vollständigkeit den Nachweis, dass es für gegebenes a nur eine Grösse gibt, welche diese Bedingung erfüllt. Dieser Nachweis lässt sich für die Zahlenlehre führen, denn wenn a eine ganze Zahl ist, so ist $\frac{1}{a}$ ein der einzigen vorhandenen continuirlich auf einander folgenden Reihe der reellen Zahlengrössen entnommenes Glied. Ist aber in τ^{-1} der Buchstabe τ nur ein Operationszeichen, so kann es mehrere ja unendlich viel Operationen geben, welche τ aufheben.

So enthalten ja die Summen und Integrale schon eine willkürliche Constante. Man müsste also in jedem Falle wissen, welcher der Werthe von τ^{-1} eine der Algebra entnommene symbolische Gleichung erfüllt, und diese Betrachtung beschränkt die Rechnung mit negativen Exponenten und der symbolischen Rechnung sehr, ohne sie jedoch unrichtig zu machen.

Man könnte sogar den Symbolen gebrochene Exponenten geben, wenn man analog der Definition, der mit solchen versehenen Grössen:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$$

die Gleichung einführt:

$$\left(\tau^{\frac{1}{q}}\right)^q (u) = \tau(u),$$

d. h.: Das Operationszeichen $\tau^{\frac{1}{q}}$ bedeutet eine Operation, die q mal wiederholt der bekannten Operation τ gleichbedeutend ist. In gewissen Fällen ist diese Operation leicht zu finden.

Ist wieder:

$$\vartheta f(x) = f(x+h).$$

so ist offenbar:

$$\vartheta^{\frac{1}{q}} f(x) = f\left(x + \frac{h}{q}\right).$$

Aber hier ist es noch viel schwerer als bei negativen Exponenten, die Anchen $\tau^{\frac{1}{q}}$ bedeutet, festzustellen.

Die einzige Anwendung, welche dergleichen Symbole gefunden haben, scheinen die „Differenzialquotienten mit beliebigen Index" zu sein, welche Liouville in die Analysis eingeführt hat. Ihr Operationszeichen wird also sein:

$$\frac{\partial^{\frac{p}{q}} f(x)}{\partial x^{\frac{p}{q}}}.$$

Aber schon bei diesen zeigt sich, dass die in ihnen enthaltene Willkürlichkeit in einer Potenzreihe:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

von beliebig viel Gliedern und mit beliebig viel Coefficienten gehört. Allgemeinere Anwendung haben auch diese Operationszeichen bis jetzt nicht gefunden.

Die reiche Anwendbarkeit der Symbole erstreckt sich daher namentlich auf die ersten Operationen und ganze Potenzen. (Vergl. in Bezug hierauf den Artikel: Substitution — lineare.)

Symmetrie (Algebra).

Ein algebraischer Ausdruck heisst symmetrisch, wenn er sich nicht ändert durch Vertauschung der in ihm enthaltenen variablen Grössen, so z. B. ist der Ausdruck:

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + xz + yz) + c(x + y + z) + d$$

ein symmetrischer zweiten Grades in Bezug auf die drei Variablen x, y, z.

Eine Gleichung heisst symmetrisch, wenn man die darin enthaltenen Unbekannten vertauschen kann. Jeder symmetrische Ausdruck gleich Null gesetzt, gibt eine symmetrische Gleichung. Jedoch kann auch eine solche aus nicht symmetrischen Ausdrücken gebildet werden. Z. B.:

$$x^2 - y^2 = 0,$$

wofür man setzen kann:

$$y^2 - x^2 = 0.$$

Symmetrisch (Algebra), s. Symmetrie.

Symmetrisch (Geometrie).

Heissen Raumgebilde, die in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, wo die Anordnung derselben jedoch nicht

Digitized by Google

dieselbe, sondern die entgegengesetzte ist. Symmetrische Gebilde brauchen also nicht congruent zu sein. Befinden sie sich jedoch in der Ebene, so kann man durch Umwenden des einen Gebildes die Ordnung umkehren, und somit sind symmetrische ebene Gebilde auch immer congruent. Dasselbe gilt im Raum von denjenigen Gebilden, die sich selbst symmetrisch sind, so z. B. ein rechtwinkliges Prisma, welches sich immer so umwenden lässt, dass es sich selbst in seiner früheren Lage betrachtet, symmetrisch wird. Hieraus folgt, dass zwei rechtwinklige Prisma auch congruent sind.

Bei andern Raumgebilden ist dies jedoch nicht der Fall. Jedoch gilt in jedem Falle der Satz:

„Symmetrische Körper haben immer gleichen körperlichen Inhalt."

In der That kann man jedes von beiden durch unendlich viele einander parallele Ebenen in Stücke von gleicher unendlich kleiner Höhe theilen, von denen je zwei einander entsprechende der beiden Prismen auch symmetrische und daher congruente Grundflächen haben. Da sich nun die beiden Grenzflächen eines solchen Stücks nur um ein Verschwindendes unterscheiden, so kann man, indem von allen Punkten der unteren Grundfläche aus senkrechte Grade nach der oberen gezogen werden, ein rechtwinkliges Prisma bilden, welches nur unendlich wenig von dem Stücke, welches wir betrachten, abweicht, die entsprechenden Stücke der beiden Körper sind also congruent, und somit die ganzen Körper, da sie aus gleichviel congruenten Stücken bestehen.

An sich einleuchtend ist auch der Satz:

„Wenn zwei Gebilde a und b einen dritten c symmetrisch sind, so sind a und b congruent."

Symmetrische Determinante (Algebra).

Eine solche Determinante, in der, die in Bezug auf die Diagonale symmetrisch stehenden Glieder gleich sind. Schreibt man eine Determinante mit doppelten Indices:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

so ist die Definition einer symmetrischen durch die Gleichung:

$$a_{pq} = a_{qp}$$

gegeben.

Ueber die Eigenschaften dieser Determinanten vergl den Artikel: Substitution — lineare.

Symmetrische Functionen (Algebra).

(Vergl. den Artikel: Symmetrie.) Im Besonderen versteht man darunter die aus den Wurzeln einer algebraischen Gleichung gebildeten rational symmetrischen Ausdrücke: Von ihnen gilt der Satz:

Jede symmetrische Function der Wurzeln lässt sich rational durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken.

Für diejenigen symmetrischen Functionen, welche keine höheren Potenzen der Wurzeln enthalten, und die man auch wohl fundamental symmetrische nennt, ist dies leicht einzusehen. Denn seien:

$$x_1, x_2 \ldots x_n$$

die Wurzeln der Gleichung:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

so ist identisch:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

und wenn man die rechte Seite entwickelt, und die Coefficienten der gleichen Potenzen von x vergleicht:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -a_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= a_2 \\ x_1x_2x_3 + \ldots &= -a_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ x_1x_2x_3 \ldots x_n &= (-)^n a_n \end{aligned}$$

Digitized by Google

tionen sind also gleich den Coefficienten der Gleichung mit abwechselnden Vorzeichen. Man kann dieselben auch unter der Form schreiben:

$$\Sigma x_{p_1} x_{p_2} \ldots x_{p_s} = (-)^s a_s.$$

Die Summe geht auf alle Werthe von $p_1, p_2 \ldots p_s$ in der Reihe $1, 2 \ldots n$, welche Producte von nur verschiedenen Factoren geben.

Was nun die übrigen symmetrischen Functionen anbetrifft, so lässt sich bei dieselben zunächst, wenn sie gebrochen sind, Zähler und Nenner einzeln betrachten, man ist also auf ganze symmetrische Functionen zurückgeführt.

Was diese anbetrifft, so lassen sie sich in Summen von der Gestalt:

$$\Sigma x_{s_1}^{p_1}, x_{s_2}^{p_2} \ldots x_{s_t}^{p_t}$$

zerlegen, wo $p_1, p_2 \ldots p_s$ beliebige Zahlen sind, und das Summenzeichen auf alle Werthe von $s_1, s_2 \ldots s_t$ geht, welche Producte von verschiedenen Factoren bilden. Auf die Berechnung von Ausdrücke dieser Art kommt es also allein an.

Sei nun:

$$A = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4^2 x_1 + x_4^2 x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3^2 x_2 + x_2^2 x_4^2 x_3$$
$$+ x_1^2 x_3^2 x_2 + x_2^2 x_3^2 x_1 + x_3^2 x_4^2 x_2 + x_4^2 x_1^2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4^2 x_1.$$

Nun ist:

$$-bc = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4)(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4)$$
$$= A + 3(x_1^2 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2^2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4^2)$$
$$= A + 3 x_1 x_2 x_3 x_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = A + 3ad,$$

so dass sich ergibt:

$$A = -bc - 3ad.$$

Die Rechnung wird aber oft wesentlich erleichtert, wenn man die Potenzsumme der Wurzeln, welche ja symmetrische Functionen sind, bildet. Für diese gibt Newton folgende recurrenten Ausdrücke:

Sei

$$S_p = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p,$$

wo p eine ganze positive oder negative Zahl sein kann; so ist:

I. $$S_p + a_1 S_{p-1} + a_2 S_{p-2} + \ldots + a_{p-1} S_1 + p a_p = 0$$

in dieser Formel darf selbstverständlich p nicht grösser als n und nicht negativ sein. Es ergibt sich daraus:

$$S_1 + a_1 = 0$$
$$S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0$$
$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\Sigma x_{s_1}^{p_1-1}, x_{s_2}^{p_2-1} \ldots x_{s_t}^{p_t-1} = B.$$

Dann ist:

$$B \Sigma x_{s_2}, x_{s_2} \ldots x_{s_t} = A + C,$$

wo C eine symmetrische Function ist, oder vielmehr eine Summe von solchen ist, wo keiner der Exponenten grösser als in A ist jedenfalls aber einer darunter kleiner als in A, während allerdings die Anzahl der Factoren in den einzelnen Gliedern zunehmen kann, da man nun die obige Gleichung auch schreiben kann.

$$A = (-)^t B a_t - C.$$

B und C aber niedrigere Potenzen als A enthalten, so gelingt es schliesslich die symmetrischen Functionen auf solche zurückzuführen, worin alle Factoren der einzelnen Glieder den Exponenten Eins haben, dies sind also fundamentale, also unmittelbar durch die Coefficienten der Gleichung gegeben.

Betrachten wir z. B. die Gleichung vierten Grades:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

und die symmetrische Function:

Digitized by Google

betrachtet, dessen erstes Glied der gegebene ist, und wo die andern Glieder weniger Factoren enthalten. Dann lässt sich schliesslich das ganze auf eine Potenzsumme zurückführen. Z. B. in dem obigen Beispiele geht man aus von dem Ausdrucke:

$$S_2(x_1^3x_2 + x_2^3x_1 + x_1^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1^2x_4 + x_4^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2 + x_2^2x_4 + x_4^2x_2 + x_3^2x_4 + x_4^2x_3) = 2A + x_1^4x_2 + x_1^4x_3 + x_1^4x_4 + x_2^4x_1 + x_2^4x_3 + x_2^4x_4 + x_3^4x_1 + x_3^4x_2 + x_3^4x_4 + x_4^4x_1 + x_4^4x_2 + x_4^4x_3 + x_1^3x_2^2 + x_2^3x_1^2 + x_1^3x_3^2 + x_3^3x_1^2 + x_1^3x_4^2 + x_4^3x_1^2 + x_2^3x_3^2 + x_3^3x_2^2 + x_2^3x_4^2 + x_4^3x_2^2 + x_3^3x_4^2 + x_4^3x_3^2 = 2A + B + C,$$

wo B die Summe der zwölf auf $2A$ folgenden ersten und C die der zwölf letzten Glieder vorstellt. Ferner ist:

$$S_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + B,$$

d. h.:

$$S_4S_1 = S_5 + B$$

$$S_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4) = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + C$$

also:

$$S_3S_2 = S_5 + C.$$

Endlich, wenn man den mit S_2 multiplicirten Factor der Gleichung mit D bezeichnet:

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = S_3 + D$$

d. h.:

$$S_3 + D = S_1S_2,$$

also:

$$S_2(S_3 - S_1S_2) = 2A + S_4S_1 + S_3S_2 - 2S_5,$$

d. h.:

$$2A = 2S_5 - S_1S_4 - S_1(S_2)^2.$$

Setzt man für die Potenzsummen ihre Werthe, so wird man auf den obigen Ausdruck zurückgeführt.

Synodischer Monat (Astronomie).

Die Zeit zwischen zwei Neumonden oder zwei Vollmonden. Der synodische Monat ist länger als der siderische und der tropische, da die Sonne sich in demselben Sinne wie der Mond bewegt.

Die synodischen Monate sind nicht völlig gleich. Sie ändern sich periodisch und secular. Die seculare Aenderung ist eine abnehmende freilich höchst geringe Grösse. Die mittlere Länge des synodischen Monats beträgt:

29 Tage 12 Stunden 44 Min. 2,9 Sec.

Synthesis (allgemeine Grössenlehre).

Jedes Verfahren, welches zum Zweck hat, einem bereits ausgesprochenen Satz zu beweisen, im Gegensatz zum analytischen Verfahren, welches von gegebenen Voraussetzungen ausgehend, neue Sätze zu finden lehrt.

System (allgemeine Grössenlehre).

Jede einem bestimmten Prinzip folgende Anordnung. Z. B. Zahlensystem, die Anordnung der Zahlen nach Potenzen einer von ihnen.

System — der Krystalle (Krystallographie).

Ein von symmetrischen Flächen begrenztes Mineral heisst Krystall. Man schreibt ihren Ursprung einer Krystallisationskraft zu, welche durch die Molekule oder Atome, aus denen das Mineral besteht, bedingt ist, und beim Uebergang des Minerals von flüssigen in den festen Zustand in Thätigkeit tritt. Ist das Mineral hierbei frei, oder von einer nachgebenden Masse eingeschlossen so bildet sich das Krystall nach allen Seiten und heisst eingewachsen. Ist es aber von einer Seite von einer festen Masse begrenzt, so kann es sich nur nach der andern Seite hin ausbilden und heisst aufgewachsen.

Ein Krystallsystem lehrt die grosse Mannichfaltigkeit der in der Natur vorkommenden Krystalle nach gewissen Hauptgruppen ordnen.

Hauptprinzip ist hierbei die Annahme gewisser Richtungen in Bezug auf welche das Krystall, natürlich immer wenn man sich dasselbe vollständig ausgebildet

Digitized by Google

denkt, regelmässig begrenzt ist, diese heissen Axensysteme oder Axenkreuze.

Man unterscheidet gewöhnlich vier dergleichen Axensysteme. Die drei ersten bestehen aus drei auf einander senkrechten Axen, können also als Coordinaten-Axen betrachtet werden, nur bei dem vierten nimmt man vier Axen.

Demgemäss hat man auch vier Haupt-Krystallsysteme:

I. Das gleichaxige. Die Grenzflächen gruppiren sich symmetrisch um drei einander gleiche Axen.

Die Länge der Axen wird selbstverständlich zwischen Punkten, wo sie das Krystall schneiden, genommen. Dieses Krystallsystem heisst auch das regelmässige, auch gleichgliedrige. Die Gleichheit der Axen wird gewöhnlich durch den Ausdruck $a:a:a$ angegeben, wo a die Länge einer Axe anzeigen soll.

II. Das zwei und einaxige. Zwei Axen sind einander gleich, die dritte ungleich. Dem entspricht der Ausdruck $a:a:c$.

III. Das ungleichaxige. Die Axen sind alle ungleich $a:b:c$.

IV. Das drei und einaxige. Das Krystall gruppirt sich um drei in einer Ebene befindliche einander gleiche und gleichgeneigte und um eine vierte ungleiche auf den drei ersteren senkrechte Axe. Der Ausdruck dafür ist $a:a:a:c$.

Oft bezeichnet man auch als ein Krystallsystem jede Axenverbindung, die einem gewissen numerischen Verhältnisse entspricht. Das zweite, dritte und vierte Hauptsystem würde also aus unendlich viel dergleichen, und nur das erste aus einem System bestehen.

Der Durchschnittspunkt der Axen liegt immer im Mittelpunkte des Krystalles, die Symmetrie bedingt, dass die Axen ausgezeichnete Punkte, also Ecken, Kante, oder Flächenmittelpunkte treffen. Gleiche Axen müssen gleichwerthige Stellen der Begrenzung treffen.

Die einzelnen Krystalle theilt man gewöhnlich in Vollflächner und Halbflächner (homoedrische und hemiedrische Krystalle), von denen man sich die letzteren aus den ersteren derart entstanden denken kann, das gewisse Flächen wegfallen, und dafür andere, indem sie sich vergrössern, die vollständige Begrenzung wieder herstellen.

Man bezeichnet die einzelnen Körper eines Krystallsystems in einer auf die Axen bezügliche Weise, indem man sich eine Fläche derart verlängert denkt, dass sie alle Axen schneidet, wenn sie nicht gewissen davon parallel ist. Zu dem Zeichen für die Axenkreuze $a:a:a$ oder $a:b:c$ u. s. w. wird das Verhältniss der abgeschnittenen Stücke dann hinzugefügt, und das ganze mit Klammern umgeben. Das Zeichen $[a:xa:yb]$ würde also einem Körper des zwei und einaxigen Systems bedeuten, dessen Fläche bis zum Endpunkt der einen Axe geht, wo die beiden andern Axen aber um sie zu schneiden um ihr x und y faches bezüglich verlängert werden müssen.

Im Falle die Fläche etwa der zweiten Axe parallel ist, muss die Zahl $x = \infty$ gesetzt werden.

Die Halbflächner jedes Körpers werden bezeichnet, indem man vor oder nach der Klammer das Zeichen $\frac{1}{2}$ setzt. Vor der Klammer steht es gewöhnlich, wenn nur die abwechselnden Flächen verschwinden, im anderen Falle hinter derselben.

Wir gehen jetzt auf die einzelnen Körper der verschiedenen Systeme näher ein.

I. Zum gleichaxigen Systeme gehören folgende Vollflächner:

1) Das Octaeder (Achtflächner) von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt, die in zwölf Kanten und sechs vierkantigen Ecken zusammenstossen. Die Axen-Endpunkte treffen in die sechs Ecken. Bezeichnung:

$$[a:a:a].$$

2) Das Hexaeder (Würfel, Cubus) 6 Quadrate, 12 Kanten, 8 dreikantige Ecken. Die Axen-Endpunkte treffen die Mitte der Flächen.

$$[a:\infty a:\infty a].$$

Diese beiden Körper sind auch im stereometrischen Sinne regelmässig. Mit den fünf folgenden ist dies nicht der Fall.

3) Das Rhombendodecaeder (Granatoeder, Zwölfflach), 12 Rhomben, 24 Kanten, 6 vierkantige und 8 dreikantige Ecken. Die Axen-Endpunkte gehen durch die vierkantigen Ecken.

$$[a:a:\infty a].$$

4) Das Leucotoide (Vierundzwanzigflache), 24 Vierecke mit je 2 aneinanderstossenden gleichen Seiten, 24 grössere und 24 kleinere Kanten, 6 vierkantige, 8 dreikantige, 12 zwei und zweikantige Ecken. Die Axen gehen durch die vierkantigen Ecken.

$$[xa:xa:a] \text{ oder auch } [a.a:\frac{1}{x}a].$$

Gewöhnlich ist $x=2$ selten gleich 3 oder 5.

5) Die Pyramidenoctaeder (Dreimalachtflache), 24 gleichschenklige Drei-

Digitized by Google

ecke, 12 grössere 24 kleinere Kanten, 8 dreikantige, 6 vier und vierkantige Ecken, durch die letzteren gehen die Axen.

$$[a : a : xa].$$

x ist gewöhnlich gleich 2 oder 3 oder 4 u. s. w.

6) Die Pyramidenwürfel (Viermalsechsflache), 24 gleichschenklige Dreiecke 12 grössere und 24 kleinere Kanten, 8 drei und dreikantige, 6 vierkantige Ecken, durch die letzteren gehen die Axen.

$$[a : xa : \infty a]$$

x ist wieder 2 oder 3 oder 4 u. s. w.

7) Die Pyramidenoctaeder (Acht und Vierzigflache, gebrochene Leucitoide, Pyramidenoctaeder oder Pyramidenwürfel, auch Pyramidengranatoeder), 48 ungleichseitige Dreiecke, 24 grösseste, 24 mittlere, 24 kleinste Kanten, 12 zwei und zweikantige, 8 drei und dreikantige, 6 vier und vierkantige Ecken, durch die letzten gehen die Axen.

$$[a : xa : ya].$$

x und y sind ächte Brüche z. B.

$$x = \tfrac{1}{2}, \quad y = \tfrac{1}{3}.$$

Zu diesem System gehören aber auch folgende Halbflächner.

8) Das Tetraeder (Halbachtflach), entsteht aus dem Octaeder durch Verschwinden der abwechselnden Flächen. 4 gleichseitige Dreiecke, 6 Kanten, 4 dreikantige Ecken. Die Axen gehen durch die Kantenmitten.

$$\tfrac{1}{2}[a : a : a].$$

Auch dieser Körper ist im stereometrischen Sinne regelmässig.

9) Die Pyramidentetraeder (Halbvierundzwanzigflache), entstehen aus den Vierundzwanzigflachen durch Verschwinden der abwechselnden um die dreikantigen Ecken liegenden dreiflächigen Flächengruppen. 12 gleichschenklige Dreiecke, 6 grössere, 12 kleinere Kanten, 4 drei und dreikantige und 4 dreikantige Ecken. Die Axen gehen durch die Mitten der grösseren Kanten.

$$[a : a : \frac{1}{x}a]\,\tfrac{1}{2}.$$

10) Die Trapezoiddodekaeder (Halbdreimalachtflache), entstehen wie die vorigen aus den Dreimalachtflachen. 12 Vierecke mit je 2 zusammenstossenden gleichen Seiten, 12 grössere und 12 kleinere Kanten, 2 Gruppen von je 4 dreikantigen, und ausserdem 6 zwei und zweikantige Ecken, durch welche letzteren die Axen gehen.

$$[a : a : xa]\,\tfrac{1}{2}.$$

11) Die Pyritoide (Halbviermalsechsflache), entstehen aus den Viermalsechsflachen durch Ausdehnen einer Fläche und Verschwinden der drei sie begrenzenden 12 symmetrischen Fünfecke, 6 grössere, 24 kleinere Kanten, 12 zwei und einkantige und 8 dreikantige Ecken. Die Axen gehen durch die Mitten der grösseren Kanten.

$$[a : xa : \infty a]\,\tfrac{1}{2}.$$

12) Die gebrochenen Pyramidentetraeder (Halbsechsmalachtflach), entstehen aus den Achtundvierzigflachen, durch Verschwinden der abwechselnden um die drei und dreikantigen Ecken herumliegenden sechsflächigen Flächengruppen. 24 ungleichseitige Dreiecke, 12 grösseste, 12 mittlere, 12 kleinste Kanten, 2 Gruppen von je 4 drei und dreikantigen, ausserdem 6 zwei und zweikantige Ecken, durch welche die Axen gehen.

$$\tfrac{1}{2}[a : xa : ya].$$

13) Die gebrochene Pyritoide, (Halbachtmalsechsflach) entstehen aus den Achtundvierzigflachen durch Ausdehnen zweier in einer mittleren Kante zusammenstossenden Flächen und Verschwinden der drei in Kanten anstossenden jenen gleichwerthigen Flächenpaare. 24 unsymmetrische Vierecke, 12 grösste, 24 mittlere, und 12 kleinste Kanten, 12 zwei- und einkantige, 8 dreikantige, 6 zwei- und zweikantige Ecken, durch welche die Axen gehen.

$$[a : xa : ya]\,\tfrac{1}{2}.$$

Es kommen indess auch mehrere solcher einfachen Formen in Combinationen als Begrenzung vor. Zwei selbst drei u. s. w. einfache und combinatorische Körper können ferner zusammen in einer Stellung auftreten, wo ihre Axen parallel oder geneigt sind, während sie selbst symmetrisch gegen einander geordnet sind. Dergleichen Gebilde heissen Zwillinge, Drillinge u. s. w. Die hauptsächlichsten Zwillinge des gleichaxigen Systems sind:

a) Zwei Achtflache so gegen einander geneigt, dass je eine Fläche von ihnen auf einander gelegt sich decken. In derselben Stellung kommen auch zwei Sechsflache und zwei Zwölfflache vor. Oft sind sie in dieser Stellung auch durch einander gewachsen.

Digitized by Google

b) Zwei Halbachtflache so durcheinander gewachsen, dass ihre Axen parallel sind, ihre Kanten sich rechtwinklig kreuzen.

c) Zwei Halbviermalsechsflache ähnlich wie die vorigen durcheinander gewachsen.

II. Die zwei und einaxigen Systeme haben vermöge der zwei gleichen Axen vier gleichwerthige Stellen in der Begrenzung. Aus diesem Grunde heisst das System auch viergliedrig. Die Vollflächner sind:

1) Die viergliedrigen Achtflache erster Ordnung. 8 gleichschenklige Dreiecke, 2 vierkantige, 4 zwei und zweikantige Ecken, 8 und 4 Kanten. Die gleichen Axen gehen durch die zwei und zweikantigen, die dritte durch die vierkantigen Ecken.

$$[a : a : xc].$$

2) Die viergliedrigen Achtflache zweiter Ordnung von den vorigen nur durch die Lage der Axen unterschieden, die beiden gleichen Axen verbinden nämlich die vierkantigen Ecken mit der Mitte der Randkanten.

$$[a : \infty a : xc].$$

3) Die Sechzehnflache (Vierundvierkantner), 16 ungleichseitige Dreiecke, 2 vier und vierkantige, 2 Gruppen von je 4 zwei und zweikantigen Ecken und 3 Gruppen von je 8 Kanten. Die gleichen Axen treffen eine Gruppe von zwei und zweikantigen, die ungleichen die vier und vierkantigen Ecken.

$$\left[a : \frac{1}{x}a : \frac{1}{y}c\right].$$

Die Halbflächner sind:

4) Die Halbachtflache erster Ordnung (viergliedrige Tetraeder) entstehen aus ihren Vollkörpern wie das regelmässige Tetraeder aus dem seinen. 4 gleichschenklige Dreiecke, 4 zwei und zweikantige Ecken, 2 und 4 Kanten, durch deren Mitten die Axen gehen.

$$\tfrac{1}{2}[a : a : xc].$$

5) Die Halbachtflache zweiter Ordnung entstehen ebenso aus ihren Vollkörpern wie die vorigen. Die gleichen Axen gehen durch die Mittelpunkte der Flächen, die dritte durch die Mitten der gleichen Kanten.

$$\tfrac{1}{2}[a : \infty a : xc].$$

6) Die Halbsechzehnflache (gebrochne viergliedrige Tetraeder), entstehen aus den Sechzehnflachen, durch Ausdehnung zweier in einer Endkante zusammenstossenden Flächen und durch Ausfallen der angrenzenden Flächenpaare, mit welchen die in der ungleichen Axe gegenüberliegenden Paare sich schneiden, ferner durch Ausdehnung der den verschwindenden Paaren parallelen Flächen. 8 ungleichseitige Dreiecke, 2 zwei und zweikantige, 4 zwei, ein und einkantige Ecken, 4 und 4 und 4 Kanten.

$$\tfrac{1}{2}\left[a : \frac{1}{x}a : \frac{1}{y}c\right].$$

Aber bei diesem Systeme kommen noch Gebilde vor, die keinen Raum einschliessen, daher nur in Combinationen auftreten können. Diese sind:

7) Die Endfläche senkrecht auf der ungleichen Axe, kommt nur gepaart in der Begrenzung von Combinationen vor.

$$[\infty a : \infty a : c].$$

8) Die erste Säule. Ein vierseitiges Prisma mit quadratischem Querschnitt. Die gleichen Axen gehen durch die Kantenmittelpunkte.

$$[a : a : \infty c].$$

9) Die zweite Säule. Ebenfalls ein vierseitiges Prisma mit quadratischem Querschnitt. Die gleichen Axen gehen durch die Flächenmittelpunkte.

$$[a : \infty a : \infty c].$$

10) Die vier und vierkantigen Säulen. Die gleichen Axen gehen durch die Mittelpunkte der abwechselnden Kanten.

$$[a : xa : \infty c].$$

III. Die ungleichaxigen Systeme. Sie erhalten nur eine Art von gleichartigen Flächen begrenzter Körper, nämlich:

1) Die Rhombenoctaeder (zwei und zweigliedrige Achtflache). 8 ungleichseitige Dreiecke, 2 und 2 und 2 Ecken, 4 und 4 und 4 Kanten.

$$[a : b : c].$$

Der zugehörige Halbflächner ist:

2) Das zwei und zweigliedrige Tetraeder (Halbachtflach). 4 ungleichseitige Dreiecke, 2 und 2 und 2 Kanten, 2 und 2 ein und einkantige Ecken.

$$\tfrac{1}{2}[a : b : c].$$

Ausserdem kommen in den Combinationen aber auch Gebilde vor, die für sich den Raum nicht begrenzen.

3) Die zwei und zweigliedrige Säule (Rhombensäule).

4) Die Oblongsäule.

Digitized by Google

Diese Systeme haben wegen der ungleichen Axen immer nur je zwei gleichwerthige Stellen in der Begrenzung. Man nennt sie daher auch zwei und zweigliedrige Systeme. Nun kann, aber selbstverständlich nur bei Combinationen selbst in den Endpunkten einer Axe ein Gegensatz eintreten, d. h. die Symmetrie aufhören, das entsprechende System heisst dann zwei und eingliedrig, und wenn bei zwei Axen dieser Gegensatz vorkommt ein und eingliedrig. In der Bezeichnung weichen die Körper des zwei und einaxigen und ein und einaxigen Systeme nicht von der des zwei und zweiaxigen ab, da man eben nur diese Bezeichnung auf eine Fläche besieht, gibt man bei einen combinatorischen Körper das Zeichen für je eine Fläche der bezüglichen einfachen, so lehrt der Character des Systems schon, wie oft diese Flächen sich wiederholen.

Die Axen, wo sich ein Gegensatz findet, werden vorn mit a, b, hinten mit a', b' beseichnet, um die Länge der Fläche auszudrücken.

IV. Die drei und einaxigen Systeme haben wegen der drei gleichen horizontalen Axen (Quer-Axen), die sich unter Winkeln von 60 Grad schneiden, 6 gleichwerthige Stellen, das System heisst daher auch sechsgliedrig. Die ungleiche auf den andern senkrechte Axe wird Hauptaxe genannt. In der Bezeichnung für die Flächen, schreibt man den Axenwerth der Hauptaxe, die man mit c bezeichnet über die Werthe der anderen, also:

$$\overset{xc}{[a : ya : \infty a]}$$

Die Vollflächner sind:

1) Die Dihexaeder erster Ordnung, (Zweimalsechsflach) 12 gleichschenklige Dreiecke, von denen je sechs in einer Ecke zusammenstossen, 12 Endkanten, 6 Randkanten, 2 sechskantige, 6 zwei und zweikantige Ecken; durch diese 8 Ecken gehen die Axen.

$$\overset{xc}{[a : a : \infty a]}.$$

2) Die Dihexaeder zweiter Ordnung. Wie die vorigen, nur treffen die Quer-Axen die Mitten der Randkanten.

$$\overset{xc}{[a : \tfrac{1}{2}a : a]}$$

3) Die Zweimalzwölfflache (Sechs und Sechskantner). 24 ungleichseitige Dreiecke, 2 sechsundsechskantige Ecken, 6 und 6 zwei und zweikantige Randecken, 12 grössere und 12 kleinere Endkanten, 12 Randkanten. Die Hauptaxe geht durch die sechs und sechskantigen Ecken, die Quer-Achsen durch die abwechselnden Randecken.

$$\overset{xc}{\left[a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a\right]}.$$

Die Halbflächner entstehen immer durch Ausfallen der abwechselnden Flächen, also:

4) Die Rhombensechsflache erster Ordnung (Halbzweimalsechsflach, Rhomboeder). 6 Rhomben, 2 dreikantige Ecken, 6 zwei und einkantige Randecken, 6 End- und 6 Randkanten. Die Hauptaxe geht durch die dreikantigen Ecken, die Quer-Axen durch die Mitten der Randkanten.

$$\overset{xc}{\tfrac{1}{2}[a : a : \infty a]}.$$

5) Die Rhombensechsflache zweiter Ordnung. Wie die vorigen nur haben die Flächen die entgegengesetzte Lage in Bezug aufs Axenkreuz.

$$\overset{xc}{\tfrac{1}{2}[a : \tfrac{1}{2}a : a]}.$$

6) Die Halbzweimalzwölfflache (Drei und Dreikantner). 12 ungleichseitige Dreiecke, 2 drei und dreikantige Ecke, 6 zwei und ein und einkantige Randecken, 6 stumpfere, 6 schärfere End- und 6 Randkanten. Die Hauptaxe geht durch die drei und dreikantigen Ecken, die Quer-Axen durch die Mitten der Rankanten.

$$\overset{xc}{\tfrac{1}{2}\left[a : \frac{1}{y}a : \frac{1}{z}a\right]}.$$

Unvollständige Begrenzungstheile sind:

7) Die Endfläche senkrecht auf der Hauptaxe.

$$\overset{c}{[\infty a : \infty a : \infty a]}.$$

8) Die Säulenfläche parallel derselben, und zwar die erste Säule in der Mitte der Seitenkanten

$$\overset{\infty c}{[a : a : \infty a]}$$

die zweite Säule in der Mitte der Seitenflächen, welche von den Endpunkten der Quer-Achsen getroffen wird

$$\overset{\infty a}{[a : \tfrac{1}{2}a : a]}$$

endlich die sechs und sechskantigen Säulen, an denen die Mittelpunkte

Digitized by Google

der abwechselnden Seitenkanten durch die gleichen Quer-Axen getroffen werden.

$$\left[a : \frac{1}{x}\, a : \overset{\infty a}{\infty a}\right].$$

Der Zusammenhang der Gebilde eines Systems wird vermittelt durch die Betrachtung der Zonen.

Zonen-Axe heisst eine Linie, der gewisse Flächen in der Begrenzung parallel sind, der Inbegriff dieser Flächen wird Zone genannt.

Nimmt man im ungleichaxigen Systemen eine Krystall-Axe zur Zonen-Axe, so wird die Zone offenbar gebildet durch die Fläche des Hexaeders, des Zwölfflaches, der Viermalsechsflach. Kommen also in einer Combination diese Flächen vor, so schneiden sie sich unter parallelen Kanten. Achtflach, zwölfflach, vierundzwanzigflach, dreimalachtflach haben nun die Zeichen bezüglich:

$$[a : a : a] \quad [a : a : \infty a]$$

$$\left[a : a : \frac{1}{x}\, a\right] \quad [a : a : xa],$$

also alle zwei gleiche Axen, folglich haben sie eine Linie die von a nach a geht, gemein. Betrachtet man die letztere als Zonen-Axe, so hat man eine neue Zone. Die genannten Flächen schneiden sich, wenn sie in einer Combination vorkommen in parallelen Kanten, und die Durchschnittslinie ist der Achtflachkante parallel.

Z. B. die Zwölfflachfläche liegt nun in beiden betrachteten Zonen, sie ist also beiden Zonen-Axen parallel und also völlig bestimmt.

Bei den zwei und einaxigen Systeme kann man z B. von den vier Endkantenzonen und den zwei Randkantenzonen des Achtflaches erster Ordnung ausgehen. Die Randkantenzonen, deren Zonen-Achsen auf einander senkrecht stehen enthalten die Endfläche, die Flächen, der Achtflache erster Ordnung und die erste Säule. Letzte bestimmt eine neue, die horizontale Zone, deren Axe der ungleichen Axe parallel ist. In diese horizontale Zone fallen die erste Säule, die vier und vierkantigen Säulen und die zweite Säule. In den Endkantenzonen des Achtflachs liegt die Fläche eines Achtflaches zweiter Ordnung (des stumpfern), die einer Anzahl von Sechzehnflachen, die der zweiten Säule, und des Achtflachs erster Ordnung. Von einer dieser Formen ausgehend kommt man dann zu neuen Zonen.

Im ungleichaxigen Systeme hat man am Achtflache dreierlei Zonen, welche durch die dreierlei Kanten bestimmt sind.

Die Zonen der Randkanten werden Vertikalzonen genannt; in diesen fällt die Rhombensäule, und sie bestimmt eine neue, die Horizontalzone, in der viele zwei und zweigliedrige Säulen, als Grenzglied die Oblongsäule fallen. Die beiderlei Endkanten bestimmen zwei Zonenpaare. Treten in diesen Zonen Flächen auf, so erscheinen sie an jedem Ende zu zweien oder zu vieren.

Bei solchen die zu zweien erscheinen, nimmt man eine neue Zone. Die Zonen-Axenrichtung nennt man Diagonale solcher Fläche. Also die Diagonalzone dieser paarweis vorkommenden Flächen ist Nichts anderes als die Endkantenzone des Achtflaches.

Bei den gepaarten Flächen gibt es aber auch noch eine Vertikalzone, die mit der Endfläche und der Oblongsäule endet.

Bei den drei und einaxigen System ist der Zonen-Zusammenhang ähnlich wie im zwei und einachsigen.

Bei den in der Natur vorkommenden Krystallen bilden sich die Flächen aber ungleich aus, es geht daher die Symmetrie in der Flächenbildung verloren. Dagegen bleiben die Winkel, bis auf eine geringe Differenz, dieselben wie in den idealen Formen. Man kann also die Stellung eines Krystalls kaum anders als durch das Vergleichen seiner Winkel mit denen der idealen Formen ermitteln.

Zu den Winkelgrössen der letzteren gelangt man durch trigonometrische und stereometrische Betrachtungen. Zur Ermittelung der Winkel vorliegender Krystalle dient namentlich das Reflexionsgoniometer von Wollaston (vergl. den Artikel: Goniometer).

System — der Milchstrasse (Astronomie).

So wird oft der uns sichtbare Sternhimmel mit Ausnahme der Nebelflecke insofern genannt, als man in diesen Sternen ein regelmässig gestaltetes Ganze zu finden glaubt, oft auch in der Voraussetzung, dass diese Sterne regelmässige und geschlossene Bahnen beschreiben.

Als ähnliche Systeme werden dem System der Milchstrasse gewöhnlich dann eben die Nebelflecke, namentlich diejenigen, welche sich durch starke Fernröhre in einzelne Sterne auflösen lassen, gegenübet gestellt.

In Bezug hierauf ist bereits Mädler zu einer ganz bestimmten Hypothese gelangt, mit der wir uns hier mit einigen Worten prüfend beschäftigen wollen.

Ein System kann in der Astronomie als eine Reihe von Weltkörpern definirt werden, die einander so nahe und von den andern so getrennt sind, dass die letzteren auf alle Glieder des Systems fast gleichmässig einwirken, während diese Körper unter sich mannichfachen und durch den Einfluss des einen auf die andern bedingten Bewegungen unterworfen sind.

Das kleinste derartige System bildet z. B. ein Planet mit seinen Trabanten. Wir wollen ein solches als System erster Ordnung bezeichnen, und dasselbe in Bezug auf das hier Gesagte betrachten.

Die Erde und ihr Mond, der Jupiter mit seinen vier, der Saturn mit seinen acht Trabanten sind Systeme erster Ordnung. Alle Glieder eines solchen bewegen sich um die Sonne in derselben Zeit, gleich wie, wenn das System aus einem Körper bestände, während dieser Zeit aber beschreiben die Trabanten mehrere Mal ganz unabhängig von dieser gemeinschaftlichen Bewegung und bis auf kleinere Störungen auch ein Trabant von dem Andern ihre Bahnen um den Hauptkörper.

Die Eigenthümlichkeit der hier betrachteten Systeme, besteht nämlich darin, dass ein Glied, der Hauptplanet, die andern derart an Masse übertrifft, dass die letztern um ihn elliptische Bahnen beschreiben, während der erstere durch die Einwirkung der Trabanten seinen Ort fast gar nicht ändert.

Indess kann auch die Schaar der Asteroiden in gewissem Sinne als ein System erster Ordnung betrachtet werden. Insofern diese Körper sich in ungefähr gleicher Entfernung von der Sonne befinden, und in ihren Bewegungen fast gleiche Bahnen zurücklegen, obgleich ihre Entfernung von Mars und Jupiter nicht für alle ungefähr gleich ist. Hier ist aber kein solches bestimmendes Glied vorhanden, daher die Einwirkung dieser Körper auf einander lediglich in die Ordnung der Störungen zu bringen.

Auch kann ein System erster Ordnung aus einem einzigen Gliede bestehen, dies sind die mondlosen Planeten Merkur, Venus und Mars.

Als System zweiter Ordnung ist nun zu bezeichnen ein Fixstern mit seiner Planeten- und Cometenschaar.

Das einzige uns bekannte System ist das Sonnensystem. Es ist vollständig charakterisirt, wenn wir sagen, dass ein Glied die Sonne im Wesentlichen sich zu den andern verhalte, wie in den Systemen erster Ordnung der Hauptplanet zu seinen Trabanten, und dass die übrigen Glieder eben Systeme erster Ordnung sind.

Indess ist natürlich ein solches System denkbar, wo die einzelnen Glieder etwa von gleicher Masse sind, wo dann die Bewegung weit complicirter sein würde.

Systeme dritter Ordnung würden eine solche sein, deren Glieder Fixsterne, umgeben von ihren Planetenschaaren, sind.

Wenn gleich das Vorhandensein der letzteren nicht nachzuweisen ist, müssen dennoch die so zahlreichen vielfachen Sterne als dergleichen Systeme betrachtet werden.

Bei einigen derselben ist auch ein besonders an Masse vorwiegendes Glied vorhanden, und in diesem Falle kann man von einer elliptischen Bahn der übrigen um dasselbe reden.

Besteht das System nur aus zwei Gliedern von beliebiger Masse, so beschreibt bekanntlich jeder eine Ellipse um den als fest gedachten anderen, oder beide um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt. Also auch hier finden geschlossene Bahnen statt.

In vielen Fällen indess sind mehrere Glieder unter denen keins bedeutend vorwiegt, zu einem System vereint, und dann natürlich die Bewegung sehr complicirt.

Unser Planetensystem gehört bekanntlich keinem System dritter Ordnung an, oder wenn man will, das zugehörige System dieser Ordnung besteht aus einem einzigen Gliede.

Es liegt nun nahe zu fragen, ob es Systeme von noch höherer Ordnung gäbe, und diese Frage beantwortet sich eben darin, dass man Grund zu der Vermuthung hat, alle uns sichtbare Weltkörper, die Nebelflecke ausgenommen, bilden ein solches. Will man aber auch dies dahin gestellt sein lassen, so kann man jedenfalls richtig sagen, dass die auflösbaren Nebelflecke solche Systeme sind.

In der That hat man hier eine Schaar von oft unzählbar vielen Sternen, die uns als ein Gesammtbild erscheinen, also doch höchst wahrscheinlicher Weise von andern Sternen getrennt und einander — relativ genommen — so nahe sind, dass die oben gegebene Definition zutreffen muss.

Es fragt sich nun, welche Gründe man zu der Vermuthung hat, dass unser Sternenhimmel auch für einen andern Betrachtungspunkt als ein solcher Nebelfleck

erscheinen würde, d. h. ein denselben gleichartiges System bildet.

Es gibt wohl nur einen Grund hierfür, wenn man sich nicht auf blosse Analogien und Phantasien berufen will, dieser Grund ist aber ein so starker, dass man fast sagen könnte; dass durch ihn die Frage bereits im bejahenden Sinne entschieden sei. Er besteht einfach in dem Vorhandensein und der regelmässigen Gestalt eben der Milchstrasse.

In der That lässt sich eine Reihe scheinbar kleiner und ungemein dicht gelagerter Sterne, welche sich fast in einem grössten Kreise über den ganzen Himmel erstrecken, durch nur die Annahme erklären, dass alle diese Sterne sich in sehr grosser Entfernung von uns und alle sehr nahe einer Ebene befinden, von welcher unser Sonnensystem selbst nicht sehr weit entfernt ist. Diesen Verhältnissen entspricht es etwa, wenn wir dem ganzen System, wovon die Milchstrasse Glieder enthält, und zu deren Gliedern auch unser Sonnensystem gerechnet werden muss, etwa die Gestalt eines sehr flachen Ellipsoids einer Linse geben wollen, von deren Mittelpunkt nicht allzuentfernt unsere Sonne steht. Dadurch erklärt sich dann, dass die grösseren Sterne über den ganzen Himmel zerstreut und nicht dicht geschaart sind, denn alle Entfernungen von der Oberfläche der Linse nach deren Mittelpunkt sind am Rande sehr gross, nach der Mitte der Oberfläche zu aber nur klein, und in den Rand ist eben nur die Milchstrasse zu versetzen. Die durch die letztere bestimmte Ebene würde also für den Fixsternhimmel etwa die Bedeutung haben, welche die Ekliptik fürs Sonnensystem hat. Es ist selbst zu bemerken, dass sich hier noch, abgesehen von der hypothetischen Linsengestalt, eine gewisse Analogie findet, als die grosse Masse der kleinen Planeten — vielleicht viele Hundert — einem der Ekliptik entsprechenden grossen Kreis — freilich für unser unbewaffnetes Auge unsichtbar am Himmel bildet. Die übrigen Glieder des Sonnensystemes bestehen dann aus den acht übrigen Planeten, deren geringe Zahl nicht ins Gewicht fällt, ausserdem aber aus sehr vielen Cometen, welche den ganzen Himmel anfüllen. Dies beträfe die räumliche Lagerung des Fixsternhimmels, welche allerdings von einem entfernten Beobachtungspunkte aus die den Nebelflecken eigenthümliche Gestalt haben würde. Gehen wir jetzt aber auch auf die Bewegungsverhältnisse des Fixsternhimmels ein. Jedem Fixstern kommt bekanntlich eine sogenannte eigene, d. h. von der Bewegung der Erde um ihre Axe und um die Sonne unabhängige Bewegung zu. Diese Bewegung kann jedoch eine wahre oder eine scheinbare sein, eine wahre dann wenn sie wirklich von der Ortsverrückung des Fixsterns herrührt, eine scheinbare, wenn sie eben nur das Abbild einer Bewegung des Sonnensystems natürlich in entgegengesetzter Richtung darstellt.

Da aber die Fixsterne die allerverschiedenartigste eigne Bewegung nach Geschwindigkeit und Richtung haben, so kann die letztere Ursache wenigstens nicht die alleinige sein. Nichts desto weniger ist es doch höchst wahrscheinlich, dass wie den übrigen Fixsternen auch der Sonne eine eigene Bewegung zukomme. Dieselbe direct oder mit Gewissheit zu bestimmen, ist natürlich unmöglich. Jedoch lässt sich hier folgender hypothetische Weg finden.

Bei der ungeheuren Anzahl der Fixsterne lehren die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass man annehmen kann, jeder Bewegungs-Richtung entspreche eine entgegengesetzte derart, dass die Summe aller Bewegungen nach festen Axen zerlegt, für jede der Coordinatensummen Null gebe. Ist dies nun in der That scheinbar nicht der Fall, so kann man aus den sich ergebenden Coordinatensummen eine Bewegung zusammensetzen, welche muthmasslich eben nur scheinbar, d. h. eben die dem Sonnensystem zukommende in entgegengesetzter Richtung genommen ist.

Wilhelm Herrschel von dem diese Betrachtungen herrühren, hat auch die nöthige Rechnung angestellt und gefunden, dass die wahrscheinliche eigene Bewegung des Sonnensystems nach dem Sterne λ des Herkules gerichtet sei.

Struve und Argelander haben genauere Rechnung angestellt und gefunden, dass der Punkt wohin diese Bewegung führe 260 Grad Rectascension, 33½ Grad Declination habe.

Der Schluss, den Herrschel hieraus zieht, ist einfach der, dass sich in dieser Richtung ein Centrum befinde von so ungeheurer Masse, dass es vorwiegend die Sonne und jedenfalls auch die übrigen Fixsterne anziehe. Bei der so grossen Anzahl der Fixsterne ist es nun aber im höchsten Grade unwahrscheinlich, dass ein solches Centrum aus einem einzigen Sterne bestehe. Herrschel vermuthet daher eine Sternanhäufung. In der That sind zwei dergleichen in der Nähe des besagten Punktes gefunden, doch

sind begründete Zweifel aufgestellt, ob diese Anhäufungen wirklich eine derartige Einwirkung ausüben möchten.

Bewähren sich nun die Herrschel'schen Annahmen, so haben wir eine fernere Analogie mit den Systemen erster und zweiter Ordnung, nämlich ein Glied, welches dermaassen an Masse überwiegt, dass es fast allein auf die Bewegung der übrigen bestimmend einwirkt. Nur würde hier dieses Glied, welches in neuester Zeit gewöhnlich als Centralsonne bezeichnet wird aus einer ganzen Sternengruppe bestehen.

Wir gehen jetzt auf eine zweite, die Mädler'sche Hypothese ein, welcher seine Centralsonne an einer ganz andern Stelle als Herrschel sucht, und um sie zu finden ein ziemlich künstliches Schlussgebäude aufschichtet. Herrschel verlässt nämlich in einem Punkte die Analogie, auf welche das Planetensystem hinweist. Er lässt die Sonne unmittelbar auf die Centralgruppe fallen, was doch nur der Fall sein wird, wenn erstere keine ursprüngliche Bewegung, einen Anfangsstoss, der nach einem andern Punkte hingerichtet ist, haben sollte. Im letzteren Falle aber würde, immer den vorwiegenden Einfluss der Centralsonne vorausgesetzt, die Bewegung unseres Sonnensystems in einem Kegelschnitte um dieselbe stattfinden, also sich aus der Bewegungsrichtung der Sonne kein Schluss auf die Lage des Centralgestirns machen lassen.

Indem Mädler nun in der That von einem solchen Anfangsstosse ausgeht, sucht er auf andere Weise zu einer Centralsonne zu gelangen. Für ihn ist also die nach λ des Herkules gerichtete Bewegung des Sonnensystems der sehr kleine Theil eines Bogens der elliptischen oder anders geformte Sonnenbahn.

Bei der ungeheuren Anzahl der Fixsterne erklärt Mädler es aber für höchst unwahrscheinlich, dass ein dermassen an Masse und überwiegender Centralkörper vorkäme, dass er einen ähnlichen Einfluss wie die Sonne im Planetensystem ausüben sollte. Der Name Centralsonne, welchen er dennoch einem Sterne gibt, wird von ihm daher ander weitig zu begründen versucht.

Wie auch das Fixsternsystem beschaffen sei, so muss es einen Schwerpunkt haben. Finden nun bei den einzelnen Körpern keine andere Bewegungen statt als Anziehungen und Abstossungen, welche von andern Körpern desselben Systems herrühren, so muss nach allgemein mechanischen Regeln der Schwerpunkt in Ruhe sein. Diese Voraussetzung ist indess insofern nicht richtig, als den einzelnen Körpern ja Anfangsgeschwindigkeiten zukommen. Indess ist ja bereits angenommen, dass die Bewegungen der einzelnen Körper sich ausgleichen, und in diesem Falle müssen sie alle nach dem Schwerpunkte übertragen Null geben, (wenn man nämlich annimmt, dass auch die Massen sich derart ausgleichen, dass man sie bei der Uebertragung alle als gleich betrachten kann). Also auch bei dieser Annahme ist bei gewissen Voraussetzungen Unbeweglichkeit des Schwerpunktes anzunehmen. Dieser Schwerpunkt, oder vielmehr das in ihm befindliche Gestirn muss also keine andere eigene Bewegung, als die nach den obigen Betrachtungen im entgegengesetzten Sinne unserer Sonne zukommende haben. Durch diese Betrachtung bestimmt das fragliche Gestirn Mädler in der That. Eine grosse Anzahl von Beobachtungen zeigt ihm, dass am wenigsten von dieser Bewegung die Plejadengruppe abweiche, und zwar in dieser Gruppe selbst am wenigsten der Stern Maja (nämlich um 1°,1) dann Alcyone (2°,8). Jedoch beliebt es Mädler, Alcyone in den Schwerpunkt zu versetzen, und demgemäss als Centralsonne zu bezeichnen, und zwar wegen der grösseren Helligkeit, daher muthmaasslich grösseren Masse dieses Sterns.

Unter Centralsonne ist also hier zu verstehen das dem Schwerpunkt des Fixsternhimmels am nächsten befindliche Glied. Dagegen lässt sich indess Folgendes einwenden.

Der Schwerpunkt eines nicht festen Systems ist nichts Materielles, sondern ein bloss gedachter geometrischer Punkt.

Mit einer jedesmaligen Aenderung in der Anordnung der Massen des Systems ändert sich derselbe und man kann daher von seiner Bewegung, Geschwindigkeit u. s. w. sprechen, ohne an etwas Materielles zu denken. Diese Bewegung aber ist wohl von der derjenigen Körpers zu unterscheiden, welcher sich zufällig im Schwerpunkte befindet und wenn ersterer in Ruhe ist, braucht dies nicht mit letzterem der Fall zu sein, und umgekehrt. Nimmt man also auch mit Mädler an, dass Maja oder Alcyone sich in Ruhe befinde, so braucht sie noch nicht sich im ruhenden Schwerpunkte zu befinden, der in demselben befindliche Körper kann möglicher Weise eine grössere Geschwindigkeit haben. Um also Mädlers Annahme zu rechtfertigen, wären also noch neue Annahmen nöthig, etwa, dass sich die Körper im

Fixsternsystem symmetrisch um den Schwerpunkt schaaren. Dann würden ihre Einwirkungen auf den im letzteren befindlichen Körper sich vermöge ihrer Lage aufheben, und derselbe allerdings in Ruhe sein. Wäre diese Symmetrie nur annähernd vorhanden, so wäre anzunehmen, dass die Plejadengruppe zwar jetzt den Schwerpunkt nahe sei, sich aber allmälig wieder von derselben entfernen muss. Diese Umstände würden das Fixsternsystem dann sehr bedeutend vom Sonnensystem unterscheiden, da der Schwerpunkt des letzteren, wegen des grossen Ueberwiegens der Sonnenmasse, entweder im Sonnenkörper oder doch demselben sehr nahe sich zu jeder Zeit befinden muss. An ein solches Ueberwiegen der Alcyone über die Summe der Massen aller Fixsterne ist natürlich nicht zu denken, und wenn man auch alle Hypothesen zugeben wollte, so würde in der Plejadengruppe nur insofern sich eine Centralsonne befinden, als ein Fixstern wohl Sonne und der Schwerpunkt worin sie sich befindet allenfalls Centrum genannt werden darf.

Indess geht Mädler noch einen Schritt weiter. Zunächst ermittelt er durch eine mühevolle Rechnung und durch bemerkenswerthe Schlüsse, dass sich die Centralsonne in gewisser Beziehung umgekehrt in ihrer Einwirkung auf die Fixsterne verhalte wie unsere Sonne in der auf die Planeten. Da die Anziehungskraft eines Punktes abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt, so müssen die allein oder vorzugsweise von einem Centralkörper angezogenen Sterne einer desto grösseren Einwirkung unterliegen, je näher sie diesem Körper sind. Mädler folgt daraus, dass falls Alcyone eine solche Stellung am Fixsternhimmel einnähme, die ihr näheren Fixsterne auch eine stärkere (wahre) eigene Bewegung haben müssen als die entfernteren, ganz so wie dies in der That bei den Planeten der Fall ist. In der That legt Mercur in seiner Bahn um die Sonne täglich über 4 Grad zurück, die Erde nur 1 Grad, Jupiter 5 Minuten, Neptun 20 Secunden. Mädler bildet nun am Himmelsgewölbe Kreise, deren Centrum Alcyone ist, und sucht in jedem dieser Kreise die mittlere Geschwindigkeit aller darin befindlichen Fixsterne in Bezug auf ihre eigene Bewegung. Er findet nun das Gegentheil der obigen Erscheinung, diese Geschwindigkeit wird desto grösser, je mehr sich die Sterne von dem Centrum entfernen. Diese Erscheinung wird nun von Mädler auf folgende Weise dargestellt.

Ein Ellipsoid, welches aus homogenen ähnlichen ellipsoidischen Schichten besteht, besitzt bekanntlich die Eigenschaft, dass die ganze Schicht, welche ausserhalb eines im Ellipsoid befindlichen und von ihm nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen Punktes sich befindet, gar keine Anziehung ausübt, aus diesem Grunde wird die Anziehung desto grösser, je mehr der Punkt sich der Oberfläche nähert. Die ganze ungeheure Schaar der Fixsterne wird nun mit einer wenigstens Schichtweise continuirlichen Masse verglichen, und bei den einzelnen Schichten ellipsoidische Gestalt vorausgesetzt.

Freilich ist diese Annahme ganz besonders gewagt, da sie vollkommne Symmetrie erfordert Aber auch dies kann der Plejadengruppe keine besondere Bedeutung verschaffen. Der Rang einer Centralsonne kommt dem betreffenden Stern immer nur rein äusserlich in Bezug auf seine zufällige Stellung zu. Alcyone namentlich kann von ihrem grösseren Glanze gar keinen Vortheil ziehen, und muss den jetzt nur bescheidenen Rang einer Centralsonne wenigstens ihrer dunkleren Schwester Maja überlassen. Am wenigsen aber rechtfertigt sich, wenn Mädler sogar die Sterne und namentlich die Sonne Kreise oder Ellipsen um seinen Liebling beschreiben lässt, und für die Sonne sogar die Umlaufszeit berechnet. Selbst die Lage Alcyones im Schwerpunkt, besonders Ueberwiegen ihrer Masse, völlige oder sehr grosse Symmetrie sämmtlicher Gestirne zugegeben, Annahmen gegen die sich doch noch sehr viel einwenden lässt, ist noch kein Grund vorhanden, dass die Fixsterne geschlossene Bahnen um ihren Schwerpunkt beschreiben sollen. Ist dies ja nicht einmal von allen Körpern des Sonnensystems (Cometen), ausgemacht.

Alles in Allem erliegt die Mädler'sche Schlussfolge zu vielen Einwänden, und verdankt ihren Ursprung zu gewagten Schlüssen, um für Etwas anders als eine Ansicht für jetzt gelten zu können. In der That hat sie allgemeinere Anerkennung bei den bedeutendsten Astronomen auch nicht gefunden.

System – mechanisches (Dynamik).

Eine Vereinigung materieller Punkte, von deren Jedem Kräfte ausgehen, und auf die übrigen eine mechanische Einwirkung ausüben. Man unterscheidet die Systeme von den Körpern, um bei den

ersteren die Vorstellung einer continuirlichen Zusammenstellung auszuschliessen.

System — optisches (Optik).

1) Centrirte Systeme.

Unter der Bezeichnung optisches System verstehen wir eine Vereinigung von Medien, welche durch grade oder krumme Flächen von einander geschieden sind, und durch welche Lichtstrahlen im Wege der Brechung der Spiegelung hindurchgehen. Uebrigens ist die Spiegelung genau wie die Brechung zu behandeln, wenn man das Brechungs-Verhältniss

$$\frac{n}{n_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

so bestimmt, dass $n_1 = -n$, also $\beta = -\alpha$ ist, welches bekanntlich die Spiegelung gibt. Das einfachste optische System ist die Linse (vergl. den Artikel: Linse), also ein von zwei Kugelflächen begrenztes homogenes Medium, welches zwei andere von gleicher Brechungskraft (Luft und Luft) trennt. Die Bestimmung des Weges eines Strahles und des Bildes eines Gegenstandes, welcher durch solche Linse geht, geschieht gewöhnlich unter der vereinfachenden Annahme, dass die Strahlen nur einen kleinen Winkel mit der Centrale machen, und dass die Linse eine geringe Dicke habe. In diesem Falle lässt sich bekanntlich das Problem leicht geometrisch lösen, auf die Betrachtung, wenn man drei Punkte, denjenigen wo die Linse die Centrale schneidet, und diejenigen beiden nach welchen hin die von der einen oder der andern Seite der Linse kommenden der Axe parallelen Strahlen gebrochen werden (Brennpunkte), betrachtet.

Bei dieser Betrachtung ist jedoch eigentlich nur der Umstand wesentlich, dass die Dicke der Linse und der Winkel des Strahles mit der Centrale gering ist.

Im Uebrigen reicht die gewöhnliche Theorie noch hin, wenn die von der Linse getrennten Medien ungleiche Brechungskraft haben. Es haben dann eben nur beide Brennpunkte ungleiche Entfernung von der Linse. Auch brauchen die Begrenzungsflächen nicht grade Kugeln zu sein, es können beliebige Rotationsflächen sein, vorausgesetzt, dass sie durch Rotation der Erzeugungslinien um dieselbe Axe entstanden sind, in welchem Falle man, wie ersichtlich, diese Erzeugungslinie durch denjenigen Krümmungskreis, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt, ersetzen kann, wie dies sich aus der geringen Grösse des Winkels, welchen der Strahl mit der Axe macht, ergibt.

Die entsprechende Grenzfläche ist dann eine Kugel.

Auch braucht das Medium der Linse kein homogenes zu sein, es kann nämlich aus mehreren andern homogenen bestehen. Jedoch müssen in diesem Falle die Trennungsflächen ebenfalls Rotationsflächen sein, deren Axen alle zusammenfallen. Ein System, welches dieser letzteren Bedingung genügt, heisst centrirtes. Die Grenzflächen lassen sich bei einem solchen also alle durch Kugelflächen ersetzen, deren Mittelpunkte in einer Linie liegen.

Gauss hat aber sogar gezeigt, dass selbst die Bedingung der geringen Dicke des Systems nicht nöthig ist, nur sind in diesem Falle statt der drei oben genannten Punkte sechs Punkte zu betrachten, von denen jedoch zwei durch die vier andern bestimmt sind. Seine hierauf sich gründende Erweiterung der Linsentheorie ist nicht allein für die Theorie der optischen Gläser, sondern auch namentlich für den Bau des Auges, welches ein solches centrirtes System ist, von grosser Wichtigkeit, sie soll daher hier gegeben werden.

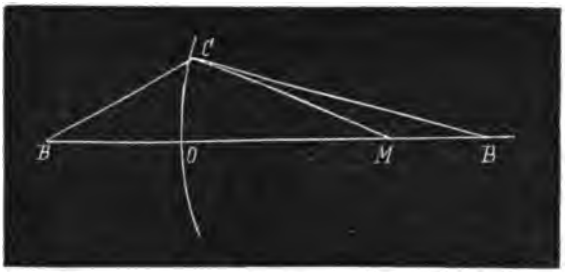
Wir denken uns also eine Anzahl von homogenen Mitteln, s. $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_s$, getrennt durch Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Axe, die wir aber nach dem Obigen durch Kugelflächen, deren Mittelpunkte in einer Linie (der Axe) liegen, ersetzen, seien $K, K_1, K_2 \ldots K_{s-1}$ diese Grenzflächen, $r, r_1, r_2 \ldots r_{s-1}$ ihre Radien, $n : n_1 : n_2 : \ldots : n_s$ die bezüglichen Brechungs-Verhältnisse.

Denkt man sich im ersten Medium von einem Punkte (Gegenstand) Strahlen unter kleinem Winkel mit einander ausgehen, so vereinigen sich diese Strahlen wieder nach ihrer Brechung im zweiten Medium in einem Punkte (erstes Bild), nach ihrer Brechung im dritten Medium abermals zu einem anderen zweiten Bilde u. s. w. Nur das Bild im letzten Medium kommt natürlich wirklich zur Erscheinung, die anderen würden entstehen, wenn die folgenden Medien wegfielen. Wir bezeichnen den Gegenstand und seine s Bilder bezüglich mit

$$B, B_1, B_2 \ldots B_s.$$

Betrachten wir zunächst nur zwei Medien. Denken wir uns durch den Gegenstand B und den Mittelpunkt der brechenden Fläche eine Linie, die hier

Fig. 418.



immer als Axe gedacht werden soll, gezogen.

Sei x die Entfernung des Gegenstandes von Punkt O, wo die Grenzfläche K die Axe schneidet (optischer Mittelpunkt), sei der Radius r der Kugel positiv gedacht, wenn sich B auf der convexen Seite von K befindet. Der in der Axe sich bewegende Strahl, welcher K senkrecht schneidet, wird nicht gebrochen, ein unter geringem Winkel mit der Axe von B ausgehender Strahl BC möge die letztere nach der Brechung in B_1 schneiden, es wird dann B_1 das Bild sein. Sei x_1 die Entfernung desselben von O. Wir denken x_1 positiv, wenn B_1 auf der andern Seite von K liegt als B. Sei ferner (Fig. 418) M der Mittelpunkt von K,

$$\text{Winkel } BCM = 2\text{R} - \alpha,$$

$$\text{Winkel } B_1CM = \alpha_1,$$

wenn α und α_1 bezüglich der Einfalls- und der Brechungswinkel sind,

$$BM = x + r, \quad B_1M = x_1 - r.$$

Auch kann man, wenn Winkel CBM und CB_1M, wie vorausgesetzt, nur klein sind, setzen:

$$CB = x, \quad CB_1 = x_1;$$

ist noch

$$CMO = \beta,$$

so hat man in Dreieck CBM:

$$\frac{x+r}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

und in Dreieck CB_1M:

$$\frac{x_1 - r}{x_1} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta},$$

also, da nach dem Brechungsgesetz:

$$\sin\alpha : \sin\alpha_1 = n_1 : n$$

ist, durch Division:

$$\frac{x+r}{x_1 - r} = \frac{xn_1}{x_1 n},$$

oder:

$$\frac{(n-n_1)}{r}xx_1 + nx_1 + n_1x = 0,$$

oder wenn man setzt:

$$\text{A)} \qquad \frac{nr}{n_1 - n} = b, \quad \frac{n_1 r}{n_1 - n} = c$$

$$1) \qquad bx_1 + cx = xx_1.$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$1a) \qquad \frac{b}{x} + \frac{c}{x_1} = 1,$$

oder:

$$1b) \qquad (b-x)\,(c-x_1) = bb_1.$$

Uebrigens geben die Gleichungen A) noch:

$$c - b = r, \quad \frac{b}{c} = \frac{n}{n_1}.$$

Die Grössen b und c haben eine optische Bedeutung. Verstehen wir nämlich unter ersten Brennpunkt denjenigen Punkt der Axe, der so beschaffen ist, dass die von ihm ausgehenden Strahlen nach der Brechung der Axe parallel werden, oder kürzer den Punkt der Axe, dessen Bild ins Unendliche fällt, unter zweiten Brennpunkt den Punkt der Axe, worin sich die derselben parallel eintretenden Strahlen nach der Brechung vereinen, kürzer das Bild eines unendlich weit entfernten Gegenstandes; so ist x die Entfernung des ersten Brennpunktes von O, wenn man $x_1 = \infty$ setzt, (dies gibt nach 1) $x = b$), x_1 die Entfernung des zweiten Brennpunktes, wenn man $x = \infty$ setzt, (dies gibt $x_1 = c$). Also b und c sind bezüglich die Entfernungen des ersten und zweiten Brennpunktes vom optischen Mittelpunkte, b im Sinne der positiven Gegenstände, c in dem der positiven Bilder gezählt. Diese Grössen b und c heissen erste und zweite Haupt-Brennweite.

Digitized by Google

Die Formel 1) ist aber einer sehr wichtigen Verallgemeinerung fähig. Zu dem Ende bemerken wir, dass in derselben Gegenstand und Bild auf den optischen Mittelpunkt als Anfangspunkt bezogen sind. Für denselben ist nun $x = 0$, also auch $x_1 = 0$. Der optische Mittelpunkt fällt also mit seinem Bilde zusammen.

Seien u, u_1 bezüglich die Entfernungen eines beliebigen Punktes der Axe, den wir uns fest denken und seines Bildes vom optischen Mittelpunkte, dann gibt 1b):

$$(b-u)\ (c-u_1) = bb_1.$$

Die Formel 1b) lässt sich aber schreiben:

$$(b-u-x+u)\ (c-u_1-x_1+u_1) = bc = (b-u)\ (c-u_1),$$

oder wenn wir setzen:

B) $$b-u=f, \quad c-u_1=\varphi,$$

und

$$x-u=v, \quad x_1-u_1=v_1$$

$$(f-v)\ (\varphi-v_1) = f\varphi,$$

eine Gleichung, der wir auch die Gestalt geben können:

2) $$fv_1 + f_1 v = f\varphi$$

2a) $$\frac{f}{v} + \frac{f_1}{v_1} = 1.$$

Hier sind v und v_1 die Entfernungen eines beliebigen Gegenstandes und Bildes von dem festen Gegenstande und Bilde, f und φ die Entfernungen der beiden Brennpunkte von dem festen Gegenstande und Bilde. Also, die Formel 1) bleibt unverändert, wenn wir Gegenstand und Bild statt auf den optischen Mittelpunkt auf einen beliebigen Gegenstand und sein Bild beziehen. Hierbei ist immer die Entfernung eines Gegenstandes vom festen positiv gedacht, wenn der erstere sich vor dem optischen Mittelpunkte von demselben entfernter als der letztere befindet, und die Entfernung des Bildes von dem festen, wenn ersteres sich hinter dem optischen Mittelpunkte entfernter als letzteres befindet. Bild und Gegenstand sind also in entgegengesetzter Richtung zu zählen.

Uebrigens gibt Gleichung B) noch:

C) $$f\varphi = bc = \frac{nn_1 r^2}{(n_1 - n)^2}.$$

Der zuletzt geschriebene Ausdruck ist wesentlich positiv, also: f und φ haben stets gleiche Vorzeichen.

Die Formel 2) ist nun einer Erweiterung für alle centrirten Systeme fähig, aus wieviel Medien dieselben auch bestehen.

Versteht man nämlich unter v wieder die Entfernung eines veränderlichen Punktes der Axe B von einem festen A, unter v_1, v_2 ... v_s bezüglich die Entfernung des ersten, zweiten u. s. w. Bildes von B von dem entsprechenden von A, indem v_p positiv gedacht wird, wenn die $p$ten Bilder von A und B vor der $s+1$ten brechenden Fläche, die wir mit A_s und B_s bezeichnen, das Bild von B aber derselben näher als das von A gedacht wird. Dann ergibt sich nach Analogie von Gleichung 2):

$$\frac{f}{v} + \frac{\varphi}{v_1} = 1, \qquad -\frac{f_1}{v_1} + \frac{\varphi_1}{v_2} = 1,$$

$$-\frac{f_2}{v_2} + \frac{\varphi_2}{v_3} = 1, \ \ldots \ -\frac{f_{s-1}}{v_{s-1}} + \frac{\varphi_{s-1}}{v_s} = 1.$$

Jede zwei auf einander folgenden Medien haben nämlich als System betrachtet je einen ersten und zweiten Brennpunkt, die Entfernung des ersten von A_p und des zweiten von A_{p+1} in dem aus dem $p$ten und $p+1$ten Medium gebildeten System wird bezüglich mit f_p und φ_p bezeichnet. Das Minuszeichen in den ersten Gliedern der Gleichungen kommt daher, dass wir bei Bildung der Gleichung 2) in Bezug auf v die entgegengesetzte Annahme wie hier bei v_s gemacht haben. Die Elimination der Grössen v_1, v_2 ... v_{s-1} kann nun leicht bewerkstelligt werden; es ergibt sich, wenn man die erste Gleichung mit f_1 die zweite mit φ multiplicirt und addirt:

$$\frac{ff_1}{v} + \frac{\varphi\varphi_1}{v_2} = f_1 + \varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit f_2, die dritte aber mit $\varphi\varphi_1$ und addirt, so kommt:

Digitized by Google

$$\frac{ff_1f_2}{v} + \frac{\varphi\varphi_1\varphi_2}{v_2} = f_1f_2 + \varphi f_2 + \varphi\varphi_1$$

u. s. w., also schliesslich:

$$\frac{f\,f_1\,f_2\,\cdots\,f_{s-1}}{v} + \frac{\varphi\,\varphi_1\,\varphi_2\,\cdots\,\varphi_{s-1}}{v_s} = K,$$

wo

$$K = f_1\,f_2\,\cdots\,f_{s+1} + \varphi\,f_2\,f_3\,\cdots\,f_{s-1} + \varphi\,\varphi_1\,f_3\,f_4\,\cdots\,f_{s-1} + \cdots + \varphi\,\varphi_1\,\varphi_2\,\cdots\,\varphi_{s-6}\;f_{s-1} + \varphi\,\varphi_1\,\varphi_2\,\cdots\,\varphi_{s-2}.$$

Man kann also auch schreiben:

3) $$\psi v' + \psi' v = vv'.$$

3a) $$\frac{\psi}{v} + \frac{\psi'}{v'} = 1.$$

3b) $$(\psi - v)\;(\psi' - v') = \psi\psi',$$

wo $v' = v_s$ sich immer auf das letzte Medium also auf das allein zur Entstehung kommende Bild ganz wie v auf den Gegenstand bezieht. Es ist hier:

D) $$\psi = \frac{f\,f_1\,\cdots\,f_{s-1}}{K}, \qquad \psi' = \frac{\varphi\,\varphi_1\,\cdots\,\varphi_{s-1}}{K}$$

und da f, φ, f_1, φ_1 u. s. w. bezüglich gleiche Vorzeichen haben, so ist dies auch mit ψ und ψ' der Fall.

Es ist aber auch die optische Bedeutung der Ausdrücke ψ und ψ' leicht ersichtlich.

Verstehen wir unter Bild jetzt immer das letzte Bild B_s, unter dem ersten Brennpunkt den Punkt der Axe im ersten Medium, dessen Bild ins Unendliche fällt, unter dem zweiten das Bild des an der Axe liegenden unendlich weit entfernten Punktes. In diesem Falle ist die Entfernung des ersten Brennpunktes vom festen Punkte A der Werth von v für $v' = \infty$, und die Entfernung des zweiten vom Bilde von A (A_s) der Werth von v' für $v = \infty$, und offenbar sind diese Grössen bezüglich gleich ψ und ψ'.

Es bleibt aber noch übrig, die Entfernung des letzten Bildes des festen oder eines beliebigen Punktes A, also A_s von der letzten brechenden Fläche zu bestimmen. Zu dem Ende sei wieder u die Entfernung des Gegenstandes A von der ersten brechenden Fläche, u' die des ersten Bildes von der zweiten Fläche, $u^{(2)}$ die des zweiten von der dritten u. s. w. Zählen wir diese Entfernungen als positiv, wenn das Bild sich vor der entsprechenden Fläche befindet. Sind ferner $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{s-1}$ die Entfernungen bezüglich jeder Fläche von der vorhergehenden, so ist in Gleichung 1) zu vertauschen x mit $u, -u', u^{(2)} \ldots$ aber x_1 mit $\beta_1 - u', \beta_2 - u^{(2)} \ldots$, auf diese Weise erhält man, wenn man analog der Gleichung A) setzt:

$$b_1 = \frac{n_1 r_1}{n_2 - n_1} \qquad c_1 = \frac{n_2 r_1}{n_2 - n_1}$$

$$b_2 = \frac{n_2 r_2}{n_3 - n_2} \qquad c_2 = \frac{n_3 r_2}{n_3 - n_2} \quad \text{u. s. w.}$$

$$(b - u)\;(c + u' - \beta_1) = bc$$

$$(b_1 - u')\;(c_1 + u^{(2)} - \beta_2) = b_1 c_1$$

$$[b_2 - u^{(2)}]\;(c_2 + u^{(3)} + \beta_2) = b_2 c_2$$

$$[b_{s-2} - u^{(s-2)}]\;[c_{s-2} + u^{(s-1)} - \beta_{s-1}) = b_{s-2}\;c_{s-2}$$

$$[b_{s-1} - u^{(s-1)}]\;[c_{s-1} + u^{(s)}] = b_{s-1}\;c_{s-1}.$$

Digitized by Google

Die Grösse β_{s-1} ist gleich Null gesetzt, da eine $s+1$te brechende Fläche nicht vorhanden ist, es sind also das vorletzte und das letzte Bild auf die letzte $s$te brechende Fläche bezogen.

Aus diesen Gleichungen lässt sich dann nach und nach $u^{(s)}$ aus u bestimmen, so dass die Entfernung des Bildes von der letzten brechenden Fläche gegeben ist (positiv, wenn es vor der Fläche liegt) wenn man die des Gegenstandes von der ersten kennt. Diese Elimination gibt:

E)
$$u' = \beta_1 - c + \frac{bc}{b-u},$$
$$u^{(2)} = \beta_2 - c_1 + \frac{b_1 c_1}{b_1 - u},$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$u^{(s-1)} = \beta_{s-1} - c_{s-2} + \frac{b_{s-2}\ c_{s-2}}{b_{s-2} - u^{(s-2)}}$$
$$u^{(s)} = -c_{s-1} + \frac{b_{s-1}\ c_{s-1}}{b_{s-1} - u^{(s-1)}}.$$

Man kann hiernach auch $u^{(s)}$ in die Form eines Kettenbruches bringen:

$$u^{(s)} = -c_{s-1} + \cfrac{b_{s-1}\ c_{s-1}}{b_{s-1} - \beta_{s-1} + c_{s-2} - \cfrac{b_{s-2}\ c_{s-2}}{b_{s-2} - \beta_{s-2} + c_{s-3} - \cfrac{b_{s-3}\ c_{s-3}}{b_{s-3} - \beta_{s-3} + c_{s-4} - \cfrac{\vdots}{b_1 - \beta_1 + c - \cfrac{bc}{b-u}}}}}}$$

Was die Grössen f_p und φ_p anbetrifft, so ist in Gleichung B) u bezüglich mit $u, u' \ldots u^{(s-1)}$, u_1 mit $\beta_1 - u'$, $\beta_2 - u^{(2)} \ldots \beta_{s-1} - u^{(s-1)}$, $-u^{(s)}$ zu vertauschen, also:

F)
$$f_p = b_p - u^{(p)}, \qquad \varphi_p = c_p - \beta_{p+1} + u^{(p+1)}$$
$$f_{s-1} = b_{s-1} - u^{(s-1)}, \quad \varphi_{s-1} = c_{s-1} + u^{(s)}.$$

Sind die brechenden Flächen einander so nahe, dass man alle Dicken $\beta_1, \beta_2 \ldots$ vernachlässigen kann, so hat man übrigens:

$$x_1 = -u^{(1)} - u^{(2)} \ldots - u^{(s)}$$

zu setzen, also direct:

$$\frac{n}{u} - \frac{n_1}{u'} = \frac{n_1 - n}{r},$$
$$\frac{n_1}{u'} - \frac{n_2}{u^{(2)}} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} \ldots \frac{n_{s-1}}{u^{(s-1)}} - \frac{n_s}{u^{(s)}} = \frac{n_s - n_{s-1}}{r_{s-1}}.$$

Digitized by Google

also durch Addition, wenn man $u_s = -u^{(s)}$ setzt, um Bild und Gegenstand wie oben in entgegengesetzter Richtung zu zählen:

$$\frac{n}{u} + \frac{n_s}{u_s} = N,$$

wo

$$N = \frac{n_1 - n}{r} + \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \ldots + \frac{n_s - n_{s-1}}{r_{s-1}}.$$

Da alle brechenden Flächen als zusammenfallend zu denken sind, so kann man hier wieder den Punkt, wo sie die Axe schneiden, als optischen Mittelpunkt betrachten, derselbe ist wie ersichtlich sein eigenes Bild. u und u_s sind die Entfernungen des Gegenstandes und Bildes von demselben. Setzt man:

$$\frac{n}{N} = B, \qquad \frac{n_s}{N} = B_s,$$

so ist auch:

G) $$\frac{B}{u} + \frac{B_s}{u_s} = 1.$$

B und B_s sind aber die Haupt-Brennweiten, ganz wie bei einer brechenden Fläche. Haben übrigens das erste und letzte Medium gleiche brechende Kraft, so ist:

$$n = n_s, \qquad B = B_s,$$

also

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{u_s} = \frac{1}{B}.$$

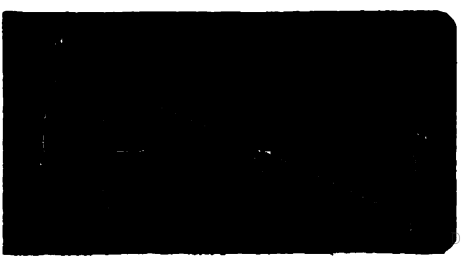
Die Brennweiten sind dann einander gleich. Es ist dies die gewöhnliche Linsenformel.

Wir wollen jetzt aber auch die Bilder von Gegenständen betrachten, welche nicht in der Axe liegen.

Setzen wir jetzt zunächst wieder eine brechende Fläche und zwei Medien voraus. Betrachten wir eine beliebige durch den Mittelpunkt gehende Linie MO (Fig. 419) als Axe eines centrirten Systems, welches durch Hinzufügung verschiedener anderen Medien entsteht.

Ist B irgend ein Gegenstand, B_1 sein Bild, C ein anderer nicht in der Axe gelegener Gegenstand, C_1 sein Bild, so liegt offenbar C_1 in der Linie MC und wenn $MB = MC$ ist, so muss auch $MB_1 = MC_1$ sein, wie oben gezeigt wurde. Betrachtet man also eine Reihe von M gleich weit entfernter Gegenstände, die somit eine Kugelschale mit Mittelpunkt M bilden, so werden ihre Bilder auch eine concentrische Kugelschale bilden. Wenn man aber nur wie hier immer Gegenstände betrachtet, die der Axe nahe liegen, so kann man an Stelle der beiden Kugelschalen Ebenen senkrecht auf der Axe annehmen. Wird nun das System

Fig. 419.



Digitized by Google

durch Hinzufügung anderer Medien zu einem centrirten vervollständigt, so ist jedes Bild Gegenstand für die nächste brechende Fläche. Betrachtet man also nur den Gegenstand und sein letztes Bild, so hat man den Satz: Liegt ein Gegenstand in einer auf der Axe senkrechten Ebene, so ist dies auch mit dem Bilde der Fall. Ist der Gegenstand ferner eine Linie, so ist das Bild derselben parallel. Selbstverständlich muss diese Bildebene durch das Bild des Punktes gehen, in welchem die Ebene des Gegenstandes die Axe schneidet.

Eine bezüglich durch den ersten oder zweiten Brennpunkt gehende Ebene heisst erste oder zweite Brennebene. Alle Gegenstände in der ersten Brennebene haben also ihre Bilder in der auf der Axe senkrechten Ebene, welche durch das Bild des ersten Brennpunktes gehen, welches jedoch in der Unendlichkeit sich befindet, d. h.: Alle Strahlen, welche von einem Punkte der ersten Brennebene kommen, werden nach der letzen Brechung unter einander parallel. (Man sieht leicht, dass dieser Schluss trotz der Betrachtung unendlich weit entfernter Bilder, welche der Kürze wegen gebraucht ist, völlig strenge ist.) Eben so zeigt sich, dass alle Strahlen, welche unter sich parallel eintreten, nach der letzten Brechung sich in einem Punkte der zweiten Brennebene vereinen.

Sei nun y die Entfernung eines Punktes, y_1 die seines Bildes von der Axe. Bei Annahme einer brechenden Fläche, kann man dann $BC = y$, $B_1C_1 = y_1$ setzen, und nach der Figur ist dann:

$$\frac{y_1}{y} = \frac{nx_1}{n_1 x} = \frac{n(u_1 + v_1)}{n_1(u+v)}.$$

Hier ist wie bei Gegenstand und Bild auch y_1 im entgegengesetzten Sinne wie y genommen (y_1 nach unten, wenn y nach oben von der Axe gerichtet ist), u, u_1 sind wie oben die Entfernungen eines festen Gegenstandes und seines Bildes vom optischen Mittelpunkte, v, v_1 die des betrachteten Gegenstandes und Bildes vom festen Gegenstande und Bilde.

Mittels der Gleichungen B) eliminiren wir u und u_1 und erhalten, da auch

$$\frac{n}{n_1} = \frac{b}{c}$$

ist,

$$\frac{y_1}{y} = \frac{b(c - \varphi + v_1)}{c(b - f + v)},$$

oder, wenn man nach Gleichung 2b) setzt:

$$f - v = \frac{f\varphi}{\varphi - v_1} = \frac{bc}{\varphi - v_1}$$

$$\frac{y_1}{y} = -\frac{b(c - \varphi + v_1)}{cb(c - \varphi + v_1)}(\varphi - v_1) = -\frac{\varphi - v_1}{c}.$$

Es ist aber auch wegen $fv_1 + \varphi v = vv_1$:

$$(\varphi - v_1)v = -fv_1,$$

also:

H) $$\frac{y_1}{y} = \frac{fv_1}{cv} = \frac{bv_1}{\varphi v};$$

ganz in derselben Weise erhält man:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{f_1 v_2}{c_1 v_1} = \frac{b_1 v_2}{\varphi_1 v_1},$$

$$\frac{y_2}{y_2} = \frac{f_2 v_2}{c_2 v_2} = \frac{b_2 v_2}{\varphi_2 v_2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{y_s}{y_{s-1}} = \frac{f_{s-1} v_s}{c_{s-1} v_{s-1}} = \frac{b_{s-1} v_s}{\varphi_{s-1} v_{s-1}},$$

also, wenn man für y_s, v_s wieder y', v' setzt:

4) $$\frac{y'}{y} = \frac{f f_1 f_2 \cdots f_{s-1} v'}{c c_1 c_2 \cdots c_{s-1} v} = \frac{b b_1 b_2 \cdots b_{s-1} v'}{\varphi \varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{s-1} v}$$

durch Multiplication beider Werthen von $\frac{y'}{y}$ erhält man dann:

$$\frac{y'}{y} = \frac{v'}{v}\sqrt{\frac{b b_1 \cdots b_{s-1} f f_1 \cdots f_{s-1}}{c c_1 \cdots c_{s-1} \varphi \varphi_1 \cdots \varphi_{s-1}}}$$

oder wegen Gleichungen D) mit Berücksichtigung, dass

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{n_1}, \quad \frac{b_1}{c_1} = \frac{n_1}{n_2} \cdots$$

5) $$\frac{y'}{y} = \frac{v'}{v}\sqrt{\frac{n\psi}{n'\psi'}} = \frac{\psi'}{v - \psi'}\sqrt{\frac{n\psi}{n'\psi'}}$$

wo der Gleichmässigkeit wegen auch n' für n_s geschrieben ist.

Was das Vorzeichen der Wurzel in 5) anbetrifft, so ist aus ψ ersichtlich, dass $\frac{y'}{y}$ immer dasselbe oder immer das entgegengesetzte Vorzeichen wie $\frac{v'}{v}$ hat, und zwar ist ersteres oder letzteres der Fall, je nach dem der Ausdruck:

Digitized by Google

$$\frac{b\,b_1 \cdots b_{s-1}}{\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}_1 \cdots \mathfrak{v}_{s-1}} = \frac{f\,f_1 \cdots f_{s-1}}{c\,c_1 \cdots c_{s-1}}$$

positiv oder negativ ist.

Aus 5) ergibt sich auch, dass wenn man durch irgend einen Punkt der Axe eine senkrechte Ebene legt, alle Bilder von Gegenständen in derselben, sich wie diese Gegenstände selbst verhalten. Uebrigens liegen dieselben, wie sogleich ersichtlich in einer auf der Axe senkrechten Ebene und sind den Gegenständen ähnlich.

Die Verhältnisszahl aber wechselt mit der Lage dieser Ebene.

Suchen wir jetzt den Punkt der Axe, für den die Bilder der hindurchgehenden auf der Axe senkrechten Ebene den entsprechenden Gegenständen congruent und gleich gerichtet sind. In diesem Falle ist also $\frac{y'}{y} = -1$ und Gleichung 5) gibt:

6) $$\mathfrak{v} = \psi - \psi' \sqrt{\frac{n\psi}{n_1\psi_1}}.$$

Was das Vorzeichen der Wurzel anbetrifft, so ist dasselbe immer durch den Werth von $(-1)^s \frac{f\,f_1 \cdots f_{s-1}}{c\,c_1 \cdots c_{s-1}}$ zu bestimmen. Uebrigens ist:

$$\psi'\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'(\mathfrak{v} - \psi)$$
$$\psi\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}(\mathfrak{v}' - \psi'),$$

also:

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{v}'^2} = \frac{\psi}{\psi'}\,\frac{\mathfrak{v}-\psi}{\mathfrak{v}'-\psi'},$$

wegen 5) aber:

$$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}'^2} = \frac{n\psi}{n'\psi'},$$

also:

6a) $$\frac{\mathfrak{v}-\psi}{\mathfrak{v}'-\psi'} = \frac{n}{n'}.$$

Der durch die Grösse $\mathfrak{v}$ in Gleichung 6) bestimmte Punkt heisst erster Hauptpunkt, die durch ihn gehende auf der Axe senkrechte Ebene erste Hauptebene, eben so heissen die durch $\mathfrak{v}'$ in 6a) bestimmte Punkt und Ebene bezüglich zweiter Hauptpunkt und zweite Hauptebene. Also:

Der zweite Hauptpunkt ist das Bild des ersten. Jeder Gegenstand in der ersten Hauptebene hat ein demselben congruentes und gleichgerichtetes Bild. Die Entfernung des ersten Hauptpunktes vom ersten Brennpunkt heisst erste, die vom zweiten Haupt- vom zweiten Brennpunkte zweite Haupt-Brennweite.

In Gleichung 3) kann man nun als den festen Punkt A und sein Bild A_s bezüglich den ersten und zweiten Hauptpunkt betrachten, es ist dann in 6a) $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' = 0$ zu setzen, also:

7) $$\frac{\psi}{\psi'} = \frac{n}{n'},$$

d. h.: Die Brennweiten verhalten sich wie die äussersten beiden Brechungskräfte. Sind also die beiden äussersten Medien von gleicher Brechungskraft, so sind die Haupt-Brennweiten gleich. (Beide sind, wie oben gezeigt, im entgegengesetzten Sinne von den Hauptpunkten zu nehmen).

Unter der Annahme, dass die Hauptpunkte für A und A_s genommen werden, gibt Gleichung 5) noch:

$$\frac{y'}{y} = \mp\frac{\mathfrak{v}'\psi}{\mathfrak{v}\psi'} = \mp\frac{\mathfrak{v}'n}{\mathfrak{v}n'}.$$

Was das Vorzeichen anbetrifft, so ist:

$$\frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}} = \frac{\psi'}{\mathfrak{v}-\psi},$$

also für den ersten Hauptpunkt selbst, wo $\mathfrak{v} = 0$ ist:

$$\frac{y'}{y} = \pm 1,$$

da nun $\frac{y'}{y} = -1$ ist, so ist das untere Zeichen zu nehmen:

5b) $$\frac{y'}{y} = \frac{\mathfrak{v}'\psi}{\mathfrak{v}\psi'} = \frac{\mathfrak{v}'n}{\mathfrak{v}n'} = \frac{\psi}{\mathfrak{v}-\psi}.$$

Ausser den beiden Brennpunkten und Hauptpunkten ist es aber gut noch zwei andere Punkte zu betrachten. Dieselben bezeichnet Helmholz als Knotenpunkte. Ihre Definition ist folgende:

Der zweite Knotenpunkt ist das Bild des ersten. Jeder Strahl aber der durch den ersten Knotenpunkt geht, nimmt nach der letzten Brechung seine ursprüngliche Richtung wieder an.

Um beide Knotenpunkte zu finden, betrachte man einen Strahl der durch den ersten Knotenpunkt K geht bis zu dem Punkte L, wo er die erste Hauptebene schneidet, der gebrochene Strahl wird dann parallel dem ursprünglichen durch den zweiten Knotenpunkt gehen, und die zweite Hauptebene in L_1 schneiden, sind H und H_1 die beiden Hauptpunkte, so sind dann offenbar die senkrechten HL und H_1L_1 gleich, und wie augenblicklich ersichtlich auch die graden HK und H_1K_1, also:

Digitized by Google

Der zweite Knotenpunkt liegt eben so weit und in demselben Sinne (vor oder hinter) vom zweiten Hauptpunkte entfernt, wie der erste Knotenpunkt vom ersten Hauptpunkte. Aber die Entfernung der Knotenpunkte ist gleich der der Hauptpunkte von einander.

Bezieht man also wieder die Formel 3) auf die beiden Hauptpunkte als feste Punkte A und A_s und nimmt für v und v' die beiden Entfernungen der Knotenpunkte von den Hauptpunkten, die wir mit k und k' bezeichnen wollen, so ist:

$$k' = -k$$

und also wegen 3):

8) $$\psi - \psi' = k, \quad \psi' - \psi = k'$$
$$\psi - k = \psi', \quad \psi' - k' = \psi,$$

d. h.: Der Abstand der ersten Knotenpunkte vom ersten Brennpunkte ist gleich der zweiten, der der zweiten Knoten- vom zweiten Brennpunkte gleich der ersten Brennweite.

Die Lage der Knotenpunkte ist also völlig bestimmt, wenn man die der Brenn- und Hauptpunkte hat. Ist übrigens das erste und das letzte Medium von gleicher Brechungskraft, so ist:

$$\psi = \psi', \qquad k = k' = 0,$$

d. h. in diesem Falle sind die Haupt- und Knotenpunkte identisch.

Unter Knotenebenen wollen wir noch die Ebenen, welche durch die Knotenpunkte gehen und auf der Axe senkrecht sind, verstehen. Die Grösse eines Bildes, dessen Gegenstand in der ersten Knotenebene liegt, gibt dann Formel 5b), wenn man $v' = -v$ setzt. Also:

5c) $$\frac{y'}{y} = -\frac{\psi}{\psi'} = -\frac{n}{n'}.$$

Bild und Gegenstand verhalten sich umgekehrt wie die Brennweiten, oder wie die äusseren Brechungskräfte, sind im Uebrigen gleich gerichtet.

Es ist bereits oben gezeigt, wie man das Bild eines beliebigen Punktes eines zusammengesetzten Systems findet; ist das Bild bekannt, so lehren die Formeln 6) und 8) die Haupt- und Knotenpunkte zu finden, vorausgesetzt dass man ψ und ψ' durch die Formel 3a) berechnet hat.

Indess ist es bequemer, hier ein recurrentes Verfahren einzuschlagen.

Wir lösen zu dem Ende die Aufgabe:

Es sind die Haupt- und Brennpunkte zweier Systeme gegeben, dieselben werden vereinigt, es sollen die betreffenden Punkte des zusammengesetzten Systems gefunden werden. Selbstverständlich ist hierbei anzunehmen, dass das letzte Medium des ersten und das erste des zweiten Systems zusammenfallen; ferner muss die Entfernung der Systeme festgesetzt sein. Wir bestimmen dieselbe durch die Entfernung t des zweiten Hauptpunktes des ersten, und des ersten Hauptpunktes des zweiten Systems.

Sind dann χ, χ' die Haupt-Brennweiten des zweiten, ψ, ψ' die des ersten Systems, u, u' die Entfernungen eines beliebigen Punktes und seines Bildes im ersten System von den betreffenden Hauptpunkten desselben, so ist die Entfernung dieses Bildes vom ersten Hauptpunkte des zweiten Systems $t - u'$, und die des zweiten Bildes vom zweiten Hauptpunkte dieses Systems sei v, dann haben wir:

$$\frac{\psi}{u} + \frac{\psi'}{u'} = 1, \quad \frac{\chi}{t - u'} + \frac{\chi'}{v} = 1.$$

Wird hier

$$u = \infty, \quad v = w'$$

gesetzt, so kommt:

$$\psi' = u',$$

also:

$$\chi w' + \chi'(t - \psi') = (t - \psi') w',$$

also:

$$w' = \frac{\chi'(t - \psi')}{t - \psi' - \chi}$$

und w' ist die Entfernung des zweiten Brennpunktes des vereinigten Systems vom zweiten Hauptpunkte des zweiten Systems.

Eben so erhält man, wenn man

$$v = \infty, \quad u = w$$

setzt:

$$w = \frac{\psi(t - \chi)}{t - \psi' - \chi}$$

für die Entfernung des ersten Brennpunktes des vereinigten vom ersten Hauptpunkte des ersten Systems. Somit sind die Lagen der Brennpunkte bestimmt.

Um die Hauptpunkte zu bestimmen, gehen wir von derjenigen auf der Axe senkrechten Ebene im mittleren (beiden Systemen gemeinschaftlichen) Medium aus, welche so beschaffen ist, dass in ihr befindliche Gegenstände in beiden Systemen gleiche und gleichgerichtete Bilder geben. Da nämlich Bild und Gegenstand sich immer vertauschen lassen, so sind die Orte dieser Bilder offenbar die beiden Hauptebenen des gemeinschaftlichen Systems.

Digitized by Google

Sei z die Grösse des Gegenstandes, y, y' die der beiden Bilder, so ist wegen Gleichung 5b):

$$\frac{z}{y} = \frac{u'\psi}{u\psi'}, \quad \frac{y'}{z} = \frac{v\chi}{(t-u')\chi'}$$

und da $y = y'$ zu setzen ist:

$$\frac{u\psi'}{u'\psi} = \frac{v\chi}{(t-u')\chi'},$$

also wenn man u und v mittels der Gleichungen:

$$(u'-\psi')u = \psi u'$$
$$(t-u'-\chi)v = \chi'(t-u')$$

eliminirt:

$$\frac{(t-u')\chi'}{u'\psi} = \frac{(u'-\psi')(t-u')\chi\chi'}{\psi\psi' u'(t-u'-\chi)}$$

oder:

$$\chi(u'-\psi') = \psi'(t-\chi-u'),$$

d. h.

$$\chi u' = \psi'(t-u'), \quad \frac{t-u'}{u'} = \frac{\chi}{\psi'},$$

woraus sich die Lage u' des Punktes ergibt, dessen Bilder die beiden Hauptpunkte sind.

Da jedoch dieser Punkt im letzen Medium des ersten Systems liegt, so ist er, um die hier gemachten Voraussetzungen zu definiren als das Bild des ersten Hauptpunktes des zusammengesesten Systems im ersten System und derjenige Punkt im zweiten System, dessen Bild der zweite Hauptpunkt des zusammengesetzten ist; u' und $t-u'$ sind die Entfernungen dieses Punktes vom zweiten Hauptpunkte des ersten und vom ersten des zweiten Systems. Diese Entfernungen verhalten sich also wie die zweite Brennweite des ersten und die erste des zweiten Systems; übrigens hat man:

$$u' = \frac{t\psi'}{\chi+\psi'}, \quad t-u' = \frac{t\chi}{\chi+\psi'}$$

und für die beiden Hauptpunkte selbst:

9) $$h = \frac{t\psi}{t-\chi-\psi'}, \quad h_1 = \frac{t\chi'}{t-\chi-\psi'},$$

wo h, h_1 die entsprechenden Werthe von u und v sind.

Um die beiden Hauptbrennweiten zu finden, hat man nur diese Ausdrücke bezüglich von w und w' abzuziehen; seien q, q' also die Hauptbrennweiten des zusammengesetzten Systems, so ergibt sich:

10) $$q = w - u = \frac{-\psi\chi}{t-\chi-\psi'}$$
$$q' = w' - v = \frac{-\psi'\chi'}{t-\chi-\psi'}.$$

Aus diesen Brennweiten ergeben sich noch wegen der Gleichungen 8) leicht die Knotenpunkte.

Ist nur eine Grenzfläche vorhanden, so kann man von den Gleichungen:

$$bx_1 + b_1 x = xx_1$$

ausgehen, wo x und x_1 die Entfernungen eines Gegenstandes und seines Bildes vom optischen Mittelpunkte sind.

Befindet sich ein Punkt nicht in der Axe, ist y seine Entfernung, y_1 die seines Bildes von derselben, so hatten wir Gleichung 4):

$$\frac{y_1}{y} = \frac{x_1 - r}{x_1 + r}$$

und für den optischen Mittelpunkt, wo

$$x = x_1 = 0, \quad y_1 = -y'$$

d. h.:

„Die beiden Hauptpunkte fallen in den optischen Mittelpunkt."

Für die beiden Brennweiten hatten wir:

$$\psi = b, \quad \psi_1 = \infty$$

und für die Entfernung der Knotenpunkte vom optischen Mittelpunkte wegen 8):

$$k = \psi - \psi' = b - c = -r, \quad k_1 = r,$$

zu genügen, da die Zählung vom optischen Mittelpunkt in entgegengesetzter Richtung für k und k_1 stattfindet, so fallen also beide Knotenpunkte zusammen, und in den Mittelpunkt der Kugelfläche.

Denken wir uns jetzt zwei Systeme mit je einer Grenzflächen, deren optische Mittelpunkte die Entfernung t von einander haben. Aus beiden entsteht ein zusammengesetztes System.

Bestimmen wir dessen Hauptbrenn- und Knotenpunkte:

$$\psi = b, \quad \psi' = c, \quad \chi = b_1, \quad \chi' = c_1.$$

Die Gleichungen 9) geben dann für die Hauptpunkte:

$$h = \frac{tb}{t-b_1-c}, \quad h_1 = \frac{tc_1}{t-b_1-c}$$

und für die Hauptbrennweiten wegen 10):

$$q = -\frac{bb_1}{t-b_1-c}, \quad q' = -\frac{cc_1}{t-b_1-c}.$$

Für die Entfernung der Knotenpunkte von den Hauptpunkten aber ist wegen 8):

$$k = -k' = \frac{cc_1 - bb_1}{t-b_1-c}.$$

Ist die Entfernung der Grenzflächen sehr gering, so kann man $t = 0$ setzen, und hat:

$$h = h_1 = 0,$$

Digitized by Google

d. h.: Beide Hauptpunkte fallen in den optischen Mittelpunkt, die Brennweiten sind dann:

$$q = \frac{b b_1}{b_1 + c}, \quad q' = \frac{c c_1}{b_1 + c}$$

und die Entfernung der Knotenpunkte:

$$k = -k' = -\frac{c c_1 - b b_1}{b_1 + c}.$$

Ist das erste und letzte Medium noch von gleicher Brechungskraft, so ist:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{n_1}, \quad \frac{b_1}{c_1} = \frac{n_1}{n},$$

also:

$$b b_1 = c c_1, \quad k = 0, \quad q = q'$$

Dies ist der Fall einer gewöhnlichen Linse.

Das Bild eines beliebigen Punktes wird dann bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{q}{u} + \frac{q'}{u'} = 1.$$

Was die zusammengesetzte Linse, d. h. eine solche anbetrifft, die aus mehreren Medien besteht, wo aber die Gesammt-Entfernung der brechenden Flächen noch als unendlich klein betrachtet werden kann, so ist für eine solche nach Formel G):

$$\frac{B}{u} + \frac{B_s}{u_s} = 1.$$

Die zuletzt gegebene Formel gilt also noch, wenn man qq' mit BB_s vertauscht und

$$B = \frac{n}{N}, \quad B_s = \frac{n_s}{N}$$

$$N = \frac{n_1 - n}{r} + \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \ldots + \frac{n_s - n_{s-1}}{r_{s-1}}$$

gesetzt wird. Ist das erste Medium mit dem letzten von gleicher Brechungskraft, so ist also $B = B_s$; u und u_s sind hier die Entfernungen vom optischen Mittelpunkte.

Betrachtet man jede brechende Fläche und die beiden sie begrenzenden Medien für sich und nimmt als festen Punkt und seine Bilder den optischen Mittelpunkt, so ist:

$$f_p = b_p, \quad q_p = c_p$$

und nach Formel 4)

$$\frac{y'}{y} = \frac{b\, b_1\, b_2 \ldots b_{s-1}}{c\, c_1\, c_2 \ldots c_{s-1}} \frac{v'}{v} = -\frac{n}{n'} \frac{v'}{v} = -\frac{n}{n'} \frac{\psi'}{v - \psi}$$

und da v für den optischen Mittelpunkt verschwindet:

$$\frac{\psi'}{\psi} = \frac{B_s}{B} = \frac{n'}{n}$$

ist:

$$\frac{y'}{y} = -1;$$

es ist also auch hier der optische Mittelpunkt der erste und zweite Hauptpunkt.

Ein Fernrohr kann aus zwei Linsen zusammengesetzt gedacht werden, deren Dicke unendlich klein ist. Das erste und letzte Medium jeder Linse (Luft) ist identisch, also die Brennweiten des Objectiv ψ und ψ' sind gleich, so wie die des Ocular χ und χ'. Beide sind auf die bezüglichen optischen Mittelpunkte bezogen. Ist f also die Länge des Fernrohrs, so gibt Gleichung 9) für den Abstand des ersten Hauptpunktes vom Objectiv h, und für den des zweiten h_1 vom Ocular:

$$h = \frac{f\psi}{f - \chi - \psi}, \quad h_1 = \frac{f\chi}{f - \chi - \psi}$$

der Abstand des zweiten vom Objectiv ist also:

$$h' = f + h_1 = \frac{s(f - \psi)}{f - \chi - \psi}.$$

Die beiden Hauptbrennweiten sind:

$$q = q' = -\frac{\psi\chi}{f - \chi - \psi}.$$

Da die äussersten Medien gleich sind, so fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen. Wenn übrigens die Brennweite des Oculars χ nur gering ist, so fallen die Brennpunkte sehr nahe den Hauptpunkten und der zweite Hauptpunkt nahe dem Ocular, wenn die Brennweite des Objectivs nicht nahe gleich der Länge des Rohrs ist. Wenn letzteres aber wie gewöhnlich der Fall ist, so hat man:

$$h \text{ nahe gleich } -\frac{f^2}{\chi},$$

also sehr gross, wenn χ sehr klein ist.

Setzen wir annähernd:

$$\psi = f - \delta, \quad \chi = \epsilon$$

Digitized by Google

wo δ und ε nur klein sind, so ist:

$$h = \frac{f(f-\delta)}{\delta-\varepsilon}$$

$$h_1 = \frac{f\varepsilon}{\delta-\varepsilon}$$

$$\varphi = \varphi' = -\frac{(f-\delta)\varepsilon}{\delta-\varepsilon}.$$

Die letzte Gleichung gibt mit Vernachlässigung von δ und ε:

$$\varphi = \varphi' = -h_1$$

d. h. der zweite Brennpunkt würde ins Ocular fallen. Diese Vernachlässigung ist aber darum nicht gerechtfertigt, weil beim Fernrohr $\delta-\varepsilon$ immer sehr klein gegen δ ist.

Es ist aber allgemein:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta-\varepsilon}$$

die Entfernung des zweiten Brennpunktes vom Ocular.

Sei nun irgend ein Punkt durch seine Coordinaten x, y, z gegeben, und seien x_1, y_1, z_1 die seines Bildes. Die Axe der x und x_1 ist die optische Axe, der Anfangspunkt der Coordinaten für das Bild aber das Bild des Anfangspunktes der Coordinaten für den Gegenstand, die Axen der y und z sind beliebig senkrecht auf der der x, die der y_1 und z_1 aber bezüglich denen der y und z parallel. Es gelten dann für x und x_1 die Gleichung 3) für y und y_1 ebenso für z und z_1 aber die Gleichung 5), also:

$$\psi x_1 + \psi' x = xx_1,$$

oder:

$$(\psi - x)\ (\psi' - x_1) = \psi\psi'$$

$$\frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \frac{\psi'}{x-\psi}\sqrt{\frac{n\psi}{n'\psi'}},$$

oder wenn die Hauptpunkte Anfangspunkte sind, nach 5 b):

$$\frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = \frac{\psi}{x-\psi}.$$

Sei jetzt irgend ein Strahl gegeben, durch seine Gleichungen auf das bezeichnete System bezogen:

$$\frac{\xi-x}{\alpha} = \frac{\eta-y}{\beta} = \frac{\zeta-z}{\gamma},$$

wo x, y, z irgend ein Punkt desselben ist. Sei dann die Gleichung des gebrochenen Strahles:

$$\frac{\xi_1-x_1}{\alpha_1} = \frac{\eta_1-y_1}{\beta_1} = \frac{\zeta_1-z_1}{\gamma_1},$$

wo $x_1y_1z_1$ das Bild von xyz ist, dann sind x_1, y_1, z_1 durch die obigen Gleichungen bestimmt. Betrachtet man nun irgend einen Punkt abc und sein Bild $a_1b_1c_1$ so haben diese Gleichungen auch für die letzteren Grössen statt, also:

$$(\psi - a)\ (\psi' - a_1) = \psi\psi',$$

oder auch:

$$(\psi - x - a + x)\ (\psi' - x_1 - a_1 + x_1) = \psi\psi'$$

also wenn man:

$$\frac{a-x}{\alpha} = \frac{b-y}{\beta} = \frac{c-z}{\gamma} = \varrho$$

$$\frac{a_1-x_1}{\alpha_1} = \frac{b_1-y_1}{\beta_1} = \frac{c_1-z_1}{\gamma_1} = \varrho_1$$

setzt:

$$\psi a_1 + \psi' a = aa_1,$$

oder

$$a_1 = \frac{\psi' a}{a-\psi}$$

ebenso

$$x_1 = \frac{\psi' x}{x-\psi};$$

a_1 und x_1 sind hiernach völlig bekannt.

Setzen wir noch:

$$\sqrt{\frac{n\psi}{n'\psi'}} = m,$$

wo also, im Falle die Hauptpunkte Anfangspunkte sind, $m = \frac{\psi}{\psi'}$ ist, so hat man:

$$\frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z} = x_1 m,$$

$$\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = a_1 m,$$

$$y_1 - b_1 = (x_1 y - a_1 b)\, m,$$

$$z_1 - c_1 = (xz_1 - a_1 c)\, m;$$

es war

$$b_1 - y_1 = \varrho_1\beta_1, \qquad c_1 - y_1 = \varrho_1\gamma_1$$

$$b - y = \varrho\beta, \qquad c - y = \varrho\gamma$$

also:

$$\frac{\varrho_1\beta_1}{m} = a_1\varrho\beta + y\,(a_1 - x_1)$$

$$\frac{\varrho_1\gamma_1}{m} = a_1\varrho\gamma + z\,(a_1 - x_1)$$

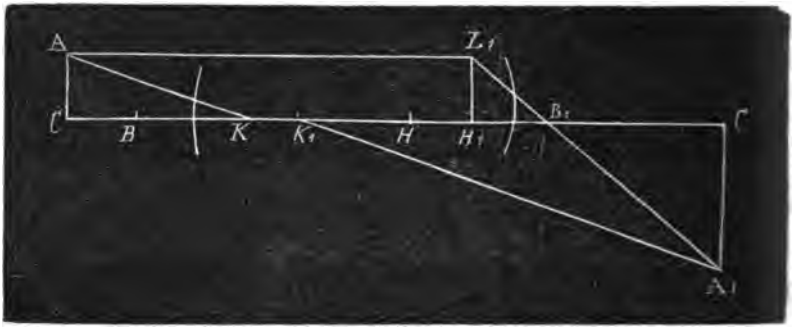
und auch

$$\frac{\varrho_1 a_1}{m} = \frac{a_1 - x_1}{m},$$

so dass die Gleichungen des gebrochenen Strahles völlig bestimmt sind.

Digitized by Google

Fig. 420.



Endlich lässt sich aber auch mittels der Brenn- und Hauptpunkte ein sehr bequemes graphisches Verfahren zur Construction des Weges eines gebrochenen Strahles, und des Bildes eines gegebenen Punktes finden.

Seien zu dem Ende auf der Axe eines beliebigen Systems angenommen die beiden Hauptpunkte H und H_1 und die Brennpunkte B und B_1. Sind dann K und K_1 die Knotenpunkte, so muss $BK = B_1H_1$, $B_1K_1 = BH$ gemacht werden, wodurch K und K_1 bestimmt sind.

Es soll nun zunächst das Bild irgend eines Gegenstandes A, der sich nicht in der Axe befindet, construirt werden.

Man ziehe von A aus einen Strahl parallel der Axe, derselbe geht nach der Brechung durch B_1, ausserdem durch Punkt L_1, wo die zweite Hauptebene den der Axe parallelen Strahl schneidet, denn schneidet ihn die erste Hauptebene in L, so muss H_1L_1, welche Linie das Bild von HL ist, derselben gleich und gleichgerichtet sein, also der gebrochene Strahl durch L_1 gehen, es ist also L_1B_1 der Weg des gebrochenen Strahles.

Ziehe man ferner Strahl AK, so geht der gebrochene K_1A_1 durch K_1 und ist AK parallel, das Bild von A. A_1 ist nun, wo sich L_1B_1 und K_1A_1 schneiden. Also:

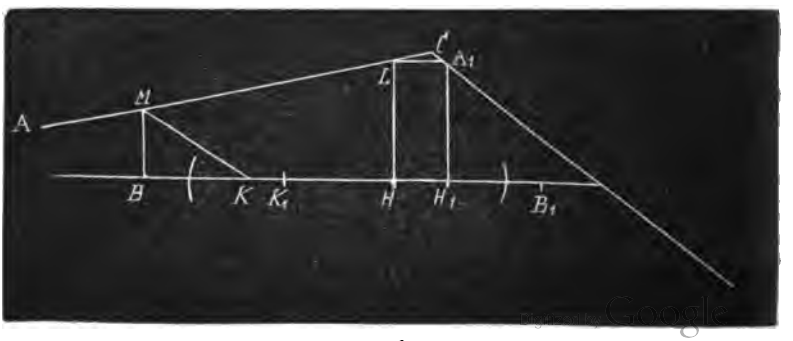
Ziehe AL_1 parallel der Axe, H_1L_1 senkrecht auf derselben, so dass AL_1 in L_1 geschnitten wird, ferner L_1B_1 und AK, A_1K_1 parallel AK, A_1 liegt dann in dem Schnittpunkte A_1 von L_1B_1 und A_1K_1.

Liegt aber der Punkt, dessen Bild man sucht, in der Axe selbst in C (Fig. 420), so ziehe CA in beliebiger Länge und senkrecht auf der Axe, construire nach dem obigen A_1, fälle Loth A_1C_1 auf die Axe, so ist C_1 das Bild von C.

Sei ferner ein Strahl AC (Fig. 421) gegeben, der nicht mit der Axe in einer Ebene zu liegen braucht, es soll der Weg des gebrochenen Stahles gefunden werden.

Zieht man HL senkrecht auf der Axe nach AC hin, so ist H_1L_1 gleich und parallel HL das Bild dieser Linie. Zieht man ferner BM ebenfalls senkrecht auf der Axe nach AL, so ist M ein Punkt der ersten Brennebene, alle durch M gehende Strahlen, also auch AC, werden also nach der Brechung parallel, also auch parallel MK, welcher Strahl nach der Brechung sich selbst parallel bleibt und

Fig. 421.



durch K_1 geht; da nun der gebrochene Strahl durch L_1 geht und MK parallel ist, so ist er somit völlig bestimmt. Also:

Ziehe HL und MB senkrecht auf der Axe nach AC hin, mache H_1L_1 gleich und parallel HL, ziehe MK und L_1C_1 dieser Linie parallel, so ist L_1C_1 der gebrochene Strahl.

Diese Construction ist nur dann nicht anwendbar, wenn AC der Axe parallel ist, dann geht aber der Strahl nach der Brechung durch B_1. Also man zieht wie oben BM und MK, und durch B_1 eine Linie parallel MK, welche der gebrochene Strahl ist.

2) Allgemeine optische Systeme.

Jetzt wollen wir uns ein ganz allgemeines System denken, d. h. eine beliebige Verbindung von Medien, durch irgend welche brechenden (also nach der obigen Bemerkung auch spiegelnde) Flächen begrenzt, ohne dass wir über die Lage und Art dieser Flächen, so wie über die Lichtstrahlen, welche hindurchgehen, etwas festsetzen.

Wir denken uns im ersten System jetzt ein Bündel Lichtstrahlen, und suchen die Lage derselben nach der ersten Brechung.

Seien x, y, z die laufenden Coordinaten irgend eines Strahles, ξ, η, ζ die der ersten brechenden Fläche. Seien u, v, w die Coordinaten irgend einer anderen Fläche, welche das Strahlenbündel schneidet, so sind die Gleichungen eines jeden Strahles vor der Brechung:

$$x - u = a(z - w), \quad y - v = b(z - w).$$

Um nun das Gesetz, welches die Lage der Strahlen bestimmt zu kennen, müssen a und b als Functionen von u und v bekannt sein, ebenso wie w, wegen der Gleichung der Fläche als Function von u und v gegeben ist.

Man kann aber dieser Gleichung auch die Gestalt geben:

$$x - \xi = a(z - \zeta), \quad y - \eta = b(z - \zeta),$$

wo ξ, η, ζ bestimmt sind durch die Gleichung der brechenden Fläche, und die beiden anderen:

$$u - \xi = a(w - \zeta), \quad v - \eta = b(w - \zeta).$$

Diese Gleichungen, welche nur u, v, ξ, η enthalten, geben u und v, also auch a und b als Functionen von ξ und η, wenn dieselben als Functionen von u und v bekannt sind.

Die Gleichungen für einen gebrochenen Strahl seien nun:

$$x - \xi = a'(z - \zeta), \quad y - \eta = b'(z - \zeta)$$

ξ, η, ζ sind dieselben Grössen wie für den ursprünglichen Strahl, da beide in der brechenden Fläche zusammentreffen.

Seien α, β, γ die Cosinus der Winkel des ursprünglichen und α', β', γ' die des gebrochenen Strahles, λ, μ, ν die der Normale an die brechende Fläche mit den Axen, so ist bekanntlich:

$$a = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad b = \frac{\beta}{\gamma},$$

$$a' = \frac{\alpha'}{\gamma'}, \quad b' = \frac{\beta'}{\gamma'},$$

$$\lambda = \frac{-\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}}{s}, \quad \mu = \frac{-\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}}{s}, \quad \nu = \frac{1}{s}$$

und

$$s = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2}.$$

Ist ε der Winkel des ursprünglichen, ε' der des gebrochenen Strahles mit der Normale an die brechende Fläche, so ist also:

$$\cos \varepsilon = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$
$$\cos \varepsilon' = \alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu$$
$$\sin \varepsilon^2 = 1 - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)^2.$$

Dieser Ausdruck lässt sich, wenn man das Quadrat berechnet, und

$$1 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$$

setzt, schreiben:

$$\sin \varepsilon^2 = \lambda^2(1 - \alpha^2) + \mu^2(1 - \beta^2) + \nu^2(1 - \gamma^2) - 2\alpha\beta\lambda\mu - 2\beta\gamma\mu\nu - 2\gamma\alpha\nu\lambda,$$

oder da man hat:

$$1 - \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad 1 - \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2, \quad 1 - \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\sin \varepsilon^2 = \lambda^2(\beta^2 + \gamma^2) + \mu^2(\gamma^2 + \alpha^2) + \nu^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta\lambda\mu - 2\beta\gamma\mu\nu - 2\gamma\alpha\nu\lambda,$$

woraus dann folgt:

1) $$\sin \varepsilon^2 = (\mu\alpha - \lambda\beta)^2 + (\nu\beta - \mu\gamma)^2 + (\lambda\gamma - \nu\alpha)^2$$

und in derselben Weise:

2) $$\sin \varepsilon'^2 = (\mu\alpha' - \lambda\beta')^2 + (\nu\beta' - \mu\gamma')^2 + (\lambda\gamma' - \nu\alpha')^2.$$

Sind nun N und N' die Brechungs-Vermögen der beiden ersten Medien, so ist:

3) $$N \sin \varepsilon = N' \sin \varepsilon',$$

Digitized by Google

wo für $\sin\varepsilon$ und $\sin\varepsilon'$ die obigen Werthe einzusetzen sind. Ausserdem aber liegt die Normale an die brechende Fläche mit dem ursprünglichen und dem gebrochenen Strahl in einer Ebene.

Seien l, m, n die Cosinus der Winkel, welche das Loth auf diese Ebene mit den Axen macht, so ist also:

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \quad l\alpha' + m\beta' + n\gamma' = 0, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0$$

und durch Elimination von l, m, n ergibt sich:

$$\gamma(\mu\alpha' - \lambda\beta') + \alpha(\nu\beta' - \mu\gamma') + \beta(\lambda\gamma' - \nu\alpha').$$

Ausserdem hat man identisch:

$$\nu(\mu\alpha' - \lambda\beta') + \lambda(\nu\beta' - \mu\gamma') + \mu(\lambda\gamma' - \nu\alpha')$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt, wenn man die Ausdrücke in den Klammern einzeln berechnet:

4)
$$\mu\alpha' - \lambda\beta' = S(\mu\alpha - \lambda\beta)$$
$$\nu\beta' - \mu\gamma' = S(\nu\beta - \mu\gamma)$$
$$\lambda\gamma' - \nu\alpha' = S(\lambda\gamma - \nu\alpha),$$

wo S noch zu bestimmen ist.

Die Gleichung 2) gibt hiernach, wenn man auch 1) berücksichtigt:

$$\sin\varepsilon'^2 = S^2 \sin\varepsilon^2,$$

also wegen Gleichung 3):

5)
$$N'S = N.$$

S ist also constant. Es könnte aber zunächst S das doppelte Vorzeichen haben. Um dasselbe zu bestimmen, nehmen wir jedoch an, das Einfallsloth sei die Axe der z, also $\lambda = \mu = 0$, und der einfallende Strahl befinde sich in der Ebene der yz, also $x = 0$, die Gleichungen 4) geben dann:

$$\beta' = S\beta.$$

β und β' sind aber die Sinus der Winkel, welche einfallender und gebrochener Strahl mit der Axe der z machen, also ist:

$$N'\beta' = N\beta$$

und folglich:

$$N'S = +N.$$

Die beiden ersten Gleichungen 4) können nun auch geschrieben werden:

$$\mu(N'\alpha' - N\alpha) = \lambda(N'\beta' - N\beta)$$
$$\nu(N'\beta' - N\beta) = \mu(N'\gamma' - N\gamma)$$

oder:

6)
$$N'\alpha' = T\lambda + N\alpha$$
$$N'\beta' = T\mu + N\beta$$
$$N'\gamma' = T\nu + N\gamma.$$

T ist noch zu bestimmen. Diese Grösse ergibt sich leicht, wenn man die Quadrate aller Gleichungen addirt:

$$N'^2 = T^2 + N^2 + 2NT(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu)$$

d. h.:

7)
$$N'^2 = T^2 + N^2 + 2NT\cos\varepsilon,$$

oder auch:

7a)
$$T = -N\cos\varepsilon + \sqrt{N'^2 - N^2\sin\varepsilon^2}.$$

Findet Spiegelung statt, so ist $N' = -N$, also:

7b)
$$T = -2N\cos\varepsilon.$$

In diesem Falle geben die Gleichungen 6):

$$\alpha' = 2\lambda\cos\varepsilon - \alpha, \quad \beta' = 2\mu\cos\varepsilon - \beta, \quad \gamma' = 2\nu\cos\varepsilon - \gamma.$$

Da $\sin\varepsilon$ bekannt ist, wenn man die Lage der ursprünglichen Strahlen kennt, so geben die Gleichungen 6) die Grössen α', β', γ', also auch α' und λ' in linter

Digitized by Google

bekannten Grössen, und somit ist die Gleichung des gebrochenen Strahles völlig bestimmt. Dies Verfahren ist nun in Bezug auf die zweite brechende Fläche zu wiederholen u. s. w.

Wir wollen jedoch aus der Form der Gleichungen 6) noch ein wichtiges Resultat ziehen.

Zu dem Ende wollen wir annehmen, die ursprünglichen Strahlen seien sämmtlich Normalen derselben Oberfläche. Als Coordinaten derselben kann man dann die Grössen u, v, w annehmen, welche bis dahin einer beliebigen Fläche angehörten und es ist dann bekanntlich:

8) $$a = -\frac{\partial w}{\partial u}, \qquad b = -\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Wir wollen aber diese Bedingung so ausdrücken, dass wir ξ und η als unabhängige Variablen betrachten. Es ist dann:

9) $$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

Wir hatten aber:

$$u - \xi = a(w - \zeta), \qquad v - \eta = b(w - \zeta),$$

also, wenn man diese Gleichungen nach ξ und η differenziirt:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 1 + \frac{\partial a}{\partial \xi}(w - \zeta) + a\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial b}{\partial \xi}(w - \zeta) + b\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial a}{\partial \eta}(w - \zeta) + a\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)$$
$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 1 + \frac{\partial b}{\partial \eta}(w - \zeta) + b\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right).$$

Diese Werthe setzen wir in Gleichung 9), ersetzen $\frac{\partial w}{\partial u}$ und $\frac{\partial w}{\partial v}$ durch $-a$ und $-b$, und schreiben das mit $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ bezüglich mit $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ multiplicirte Glied auf der linken Seite; es kommt dann:

$$(1 + a^2 + b^2)\frac{\partial w}{\partial \xi} = -a\left(1 + \frac{\partial a}{\partial \xi}(w - \zeta) - a\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right) - b\left(\frac{\partial b}{\partial \xi}(w - \zeta) - b\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)$$
$$(1 + a^2 + b^2)\frac{\partial w}{\partial \eta} = -a\left(\frac{\partial a}{\partial \eta}(w - \zeta) - a\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right) - b\left(1 + \frac{\partial b}{\partial \eta}(w - \zeta) - b\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right).$$

Setzt man:

$$1 + a^2 + b^2 = c^2,$$

so ergibt sich hieraus:

$$c^2\frac{\partial w}{\partial \xi} + cw\frac{\partial c}{\partial \xi} = -a + c\left(\zeta\frac{\partial c}{\partial \xi} + c\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$$
$$c^2\frac{\partial w}{\partial \eta} + cw\frac{\partial c}{\partial \eta} = -b + c\left(\zeta\frac{\partial c}{\partial \eta} + c\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

d. h.

$$-\frac{\partial c(w - \zeta)}{\partial \xi} = +\frac{a}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$$
$$-\frac{\partial c(w - \zeta)}{\partial \eta} = +\frac{b}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

In diesen Gleichungen lassen sich aber leicht statt a, b, c die Winkel α, β, γ einführen. Es ist nämlich:

Digitized by Google

$$\frac{\alpha}{\gamma} = a, \quad \frac{\beta}{\gamma} = b,$$

$$\sqrt{1+a^2+b^2} = \frac{1}{\gamma} = c,$$

also:

$$\frac{a}{c} = \alpha, \quad \frac{b}{c} = \beta. \quad \frac{1}{c} = \gamma,$$

10)
$$\frac{\partial \frac{\zeta - w}{\gamma}}{\partial \xi} = \alpha + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \frac{\zeta - w}{\gamma}}{\partial \eta} = \beta + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}.$$

Da w und also auch $\frac{\zeta - w}{\gamma}$ nur durch diese Gleichungen bestimmt, sonst beliebig ist, so sprechen dieselben nur aus, dass die Grössen

$$\alpha + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \quad \beta + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

die partiellen Differenzialquotienten irgend einer Function ξ und η sind. Also:

„Damit die Gleichungen:

$$\frac{x-\xi}{\alpha} = \frac{s-\zeta}{\gamma}, \quad \frac{y-\eta}{\beta} = \frac{z-\zeta}{\gamma},$$

wo ζ eine gegebene Function von ξ und y und $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ ist, für jeden Werth von ξ und η die Normalen an eine gegebene Fläche darstellen, ist die Bedingung nothwendig und ausreichend, dass die Grössen

$$\alpha + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \quad \beta + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$$

die partiellen Differenzialquotienten derselben Function bezüglich nach ξ und η sind."

Diese Bedingung kann man bekanntlich auch schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\alpha + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\beta + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)$$

d. h.:

11)
$$\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\frac{\partial \gamma}{\partial \eta} = \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\frac{\partial \gamma}{\partial \xi}.$$

Soll nun aber die Gleichung dieser Fläche dargestellt werden, so hat man wegen 10):

12)
$$\frac{\zeta - w}{\gamma} = \int (a d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta).$$

α, β, γ, so wie auch ζ müssen hier als Functionen von ξ und η gegeben sein. Also auch:

13)
$$\frac{u-\xi}{\alpha} = \frac{v-\eta}{\beta} = \frac{w-\zeta}{\gamma} = -\int (a d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta).$$

Diese Gleichungen geben u, v, w als Functionen von ξ und η. Eliminirt man aus allen dreien ξ und η, so hat man die Beziehung zwischen u, v und w, welches die Coordinaten der verlangten Fläche sind.

Es möchte vielleicht nicht unangemessen sein, diese wichtige Bedingung direct auf eine sehr einfache Art zu beweisen.

Denken wir uns auf der Fläche $\xi\eta\zeta$ eine beliebige Curvenstrecke S gezeichnet. Durch jeden Punkt derselben eine Normalfläche auf die Linienschaar gelegt, wie dies ja nothwendig muss geschehen können, wenn eine Normalfläche vorhanden ist, sei dann ds das Element der Curve, ϑ der Winkel desselben mit der graden Linie aus der Schaar, welche hindurchgeht, so ist offenbar $\cos\vartheta\, ds$ das Element derjenigen Normalen, welche durch einen Endpunkt von ds geht, bis zu derjenigen Normalfläche, die durch den andern Endpunkt von ds geht, und da alle zwischen zwei Normalflächen befindlichen Normalstücke bekanntlich gleich sind, so ist $\int \cos\vartheta\, ds$ ein beliebiges Normalstück zwischen den zwei Normalflächen, welche durch den Anfangs- und Endpunkt von s bestimmt sind. Dieses Integral aber ist somit nur von den Endpunkten der Curve S, vorausgesetzt, dass dieselbe auf der Fläche $\xi\eta\zeta$ liegt, abhängig, also:

$$\int \cos\vartheta\, ds = \int (a d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta)$$

ist vom Wege der Integration unabhängig. Offenbar ist aber das betrachtete Normalstück gleich $\frac{\xi - u}{\alpha}$, womit auch die Gleichungen 13) erwiesen sind.

Kehren wir jetzt zu den Gleichungen α', β', γ' zurück.

Indem wir die beiden letzten Gleichungen 4) durch ν dividiren, und wieder schreiben:

$$\frac{\lambda}{\nu} = -\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \quad \frac{\mu}{\nu} = -\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$$

so kommt:

$$\alpha' + \gamma' \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = S\left(\alpha + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)$$

$$\beta' + \gamma' \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = S\left(\beta + \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right).$$

Digitized by Google

Da nun $S = \frac{N}{N'}$ constant ist, so sieht man, dass, wenn die Ausdrücke in den Klammern rechts Differenzialquotienten einer Function sind, dies auch mit den Ausdrücken links der Fall sein muss. Also:

Wenn gewisse Strahlen Normalen einer Fläche sind, so sind sie auch nach der Brechung Normalen einer andern Fläche.

Diese Eigenschaft wird also bei beliebig vielen Brechungen und Spiegelungen beibehalten, vorausgesetzt, dass der hier ganz ausgeschlossene Fall der doppelten Brechung nicht stattfindet.

Namentlich findet dies auch statt wenn die Strahlen von einem Punkte ausgehen, in welchem Falle sie Normalen einer Kugel sind.

Sind übrigens u', v', w' die Coordinaten derjenigen Flächen, deren Normalen die gebrochenen Strahlen sind, so hat man:

$$\frac{u'-\xi}{\alpha'} = \frac{v'-\eta}{\beta'} = \frac{w'-\zeta}{\gamma'}$$

und wegen 10):

$$\partial\frac{\zeta-w'}{\gamma'} = \alpha' + \gamma'\frac{\partial\zeta}{\partial\xi},$$

also:

$$\partial\frac{\zeta-w'}{\gamma'} = S\,\partial\left(\frac{\zeta-w}{\gamma}\right),$$

$$\partial\frac{\zeta-w'}{\gamma'} = S\,\partial\left(\frac{\zeta-w}{\gamma}\right),$$

also:

$$\frac{w'-\zeta}{\gamma'} = \frac{w-\zeta}{\gamma}S + \text{const.}$$

also:

$$14)\quad \frac{u'-\zeta}{\alpha'} = \frac{v'-\eta}{\beta'} = \frac{w'-\zeta}{\gamma'} = S\frac{w-\zeta}{\gamma} + \text{const.}$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich ein Satz ableiten.

Legen wir durch irgend einen Punkt $\xi_0\eta_0\zeta_0$ der Fläche $\xi\eta\zeta$ auf die Schaar der ursprünglichen und auf die der gebrochenen Strahlen eine Normalfläche, und betrachten wir die Normalstücke, welche von irgend einem Punkt $\xi\eta\zeta$ der gedachten Fläche bezüglich bis zur ersten und zweiten Normalfläche gehen; sei das erste Normalstück gleich r, das letztere gleich r', so hat man:

$$r = \frac{\xi-u}{\alpha}, \quad r' = \frac{\xi-u'}{\alpha'},$$

also wegen Gleichungen 14):

$$r' = Sr + \text{const.}$$

Im Falle der Reflexion aber, wo $S = -1$ ist:

$$r' + r = \text{const.}$$

Auch dieser Satz lässt sich leicht direct beweisen.

Legen wir auf Fläche $\xi\eta\zeta$ durch $\xi_0\eta_0\zeta_0$ und $\xi\eta\zeta$ irgend eine Curve, und sei $d\sigma$ deren Element, so ist offenbar:

$$d\sigma\sin\varepsilon = dr$$

$$d\sigma\sin\varepsilon = dr',$$

also:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{dr}{dr'},$$

woraus

$$N_1 r - Nr = c,$$

oder:

$$r' - Sr = \text{const.}$$

Da vermöge der Gleichungen 6) α', β', γ' ausserdem aber w, ζ und γ in ξ und η gegeben sind, so ist dies auch mit w', v', w' der Fall. Man findet also durch Elimination w' als Function von u' und v'. Aus dem hier gegebenen Satze lassen sich übrigens wichtige Resultate ziehen.

Zu jeder Oberfläche gehören nämlich bekanntlich zwei Evolutenflächen, in welchen allein jede Normale von einer benachbarten geschnitten wird.

Diese Evolutenflächen der auf die gebrochenen Strahlen normalen Flächen sind, also die Vereinigungspunkte der einander unendlich nahen Strahlen, und jeder Punkt in ihnen ist also ein Bild des Punktes von dem die Strahlen ausgehen. Also:

„Strahlen, die von irgend einem Punkte ausgehen, haben zwei Reihen von Bildern, von denen jede eine Fläche bildet. Diese Flächen heissen caustische oder Brennflächen."

Vereinen sich in irgend einem Punkte einer solchen unendlich viel einander unendlich naher Normalen, so hat man ein Hauptbild. Ein solches ist z. B. das im vorigen Abschnitte allein betrachtete, von den Strahlen herrührende, welche mit der Axe unendlich kleine Winkel machen.

Es ist im Allgemeinen schwer, mittels der obigen Gleichungen die Fläche zu finden, auf welcher die gebrochenen Strahlen

normal sind. Viel einfacher löst sich die Aufgabe: aus den Flächen auf welche die einfallenden und die gebrochenen Strahlen normal sind, die der brechenden Fläche zu finden. Die Gleichungen 14) und 13) geben nämlich:

$$\frac{w'-\xi}{\alpha'}=\frac{v'-\eta}{\beta'}=\frac{w'-\zeta}{\gamma'}=S\frac{u-\zeta}{\alpha}+\text{const.}=S\frac{v-\eta}{\beta}+\text{const.}=S\frac{w-\zeta}{\gamma}+\text{const.}$$

Da α', β', γ', w' als Functionen von w', v' und α, β, γ, w als solche von u und v gegeben sind, so geben diese fünf Gleichungen nach der Elimination von u, v und w', v' die Beziehung zwischen ξ, η, ζ.

Stellen wir z. B. folgende Frage. Ein Strahlensystem berührt eine Kugel, (d. h. geht von einem Punkte, derselben aus). Wie muss die brechende Fläche beschaffen sein, damit die gebrochenen Strahlen wieder eine Kugel berühren, also sich in deren Mittelpunkt vereinen?

Sei

$$u^2+v^2+w^2=r^2$$

die Gleichung der einen,

$$(w'-a)^2+(v'-b)^2+(w'-c)^2=r'^2$$

die der andern Kugel, so ist:

$$\alpha=\frac{u}{r},\qquad \beta=\frac{v}{r},\qquad \gamma=\frac{w}{r}$$

$$\alpha'=\frac{w'-a}{r'},\qquad \beta'=\frac{v'-b}{r'},\qquad \gamma'=\frac{w'-c}{r'},$$

also:

$$\frac{u-\xi}{u}=\frac{v-\eta}{v},\qquad \frac{u-\xi}{u}=\frac{w-\zeta}{w},$$

oder:

$$\xi:\eta:\zeta=u:v:w,$$

also wenn wir setzen:

$$mu=\xi,\qquad mv=\eta,\qquad mw=\zeta,$$

so ergibt sich:

$$m^2r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

und eben so, wenn gesetzt wird:

$$n(w'-a)=\xi-a,\qquad n(v'-b)=\eta-b,\qquad n(w'-c)=\zeta-c,$$

$$n^2r'^2=(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2.$$

Die Gleichung:

$$\frac{w'-\xi}{\alpha'}=S\frac{u-\xi}{\alpha}+e,$$

wo e die Constante ist, gibt also:

$$r'(1-n)=Sr(1-m)+e$$

d. h.:

$$f=\sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2}-S\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

wo f die beliebige Constante $r'-Sr-e$ vorstellt.

Diese Gleichung nimmt auch die Form an:

$$[(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2-f^2-S^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)]^2=4f^2S^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2).$$

Die Gleichung ist im Allgemeinen von der vierten Ordnung, aber wenn man $f=0$ setzt, so kommt:

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2=S^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2),$$

also scheinbar die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung.

Setzt man hierin indess:

$$\xi=\xi'=\frac{a}{1-S},\qquad \eta=\eta'+\frac{b}{1-S},\qquad \zeta=\zeta'+\frac{c}{1-S},$$

Digitized by Google

d. h. verlegt man den Anfangspunkt nach einem durch das Brechungsverhältniss S bestimmten Punkt der Graden, welche die beiden Punkte verbindet, worin sich ursprüngliche und gebrochene Strahlen vereinen, so kommt:

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 0.$$

Die Fläche beschränkt sich also lediglich auf den betrachteten Punkt.

Nimmt man aber statt der brechenden eine spiegelnde Fläche, d. h. setzt man $S = -1$, so kommt in der allgemeinen Gleichung:

$$(f + \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})^2 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2,$$

oder:

$$(f^2 + 2a\xi + 2b\eta + 2c\zeta - a^2 - b^2 - c^2)^2 = 4f^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

also ebenfalls eine Fläche zweiter Ordnung.

Setzt man $f^2 - a^2 - b^2 - c^2 = g$, so kann dieselbe auch geschrieben werden:

$$(f^2 - a^2)\xi^2 + (f^2 - b^2)\eta^2 + (f^2 - c^2)\zeta^2 - g(a\xi + b\eta + c\xi) = \frac{g^2}{4}.$$

Ist g positiv, so ist:

$$f^2 - a^2 = g + b^2 + c^2, \qquad f^2 - b^2 = g + a^2 + c^2$$

u. s. w. Die Fläche also ein Ellipsoid.

Uebrigens lässt sich auch zeigen, dass dieselbe ein Rotationskörper sei. Denn nimmt man als Axe der x die Verbindungslinie der beiden Vereinigungspunkte der Strahlen, so ist $b = c = 0$, also:

$$(f^2 - a^2)\xi^2 - a(f^2 - a^2)\xi + f^2(\eta^2 + \zeta^2) = \frac{(f^2 - a^2)^2}{4}$$

bekanntlich die Gleichung eines solchen. Auch zeigt die Form der Gleichung an, dass die beiden Vereinigungspunkte die Brennpunkte sind.

Sollen die Strahlen aber der Rotationsaxe parallel reflectirt werden, so ist $a = \infty$ zu nehmen, was nicht möglich ist, wenn nicht auch $f^2 - a^2$ unendlich ist, das erste Glied links aber verschwindet, da es nur mit $f^2 - a^2$, das zweite aber mit $a(f^2 - a^2)$ multiplicirt ist. Damit die übrigen von gleicher Dimension seien, ist aber die Dimension von a und $f^2 - a^2$ als gleich zu nehmen.

Setzen wir also:

$$f^2 - a^2 = Ak, \qquad a = Bk,$$

wo k unendlich gross, A und B endlich sind, so ist:

$$f^2 = Ak + B^2k^2,$$

also hierin Ak zu vernachlässigen. Die Gleichung ist dann:

$$-AB\xi + B^2(\eta^2 + \zeta^2) = \frac{A^2}{4}.$$

Dies ist die Gleichung eines Rotationsparaboloids.

Ist aber S beliebig, so kann man immer noch $b = c = 0$ setzen, erhält also aus der allgemeinen Gleichung:

$$[(\xi - a)^2 - f^2 - S^2\xi^2 + (1 - S^2)(\eta^2 + \zeta^2)]^2 = 4f^2S^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Diese Gleichung ist ebenfalls nur von ξ und $\eta^2 + \zeta^2$ abhängig, es ist also ebenfalls eine Rotationsfläche.

Vertauschen wir noch $\eta^2 + \zeta^2$ mit η^2, so haben wir die Gleichung der Erzeugungscurve.

Nehmen wir wieder an, dass die gebrochenen Strahlen parallel der Rotationsaxe werden sollen, so ist $a = \infty$ zu nehmen, dasselbe muss mit f der Fall sein. Es verschwinden dann im ersten Gliede alle Grössen ausser $-2a\xi + a^2 - f^2$. Also:

$$(a^2 - f^2 - 2a\xi)^2 = 4f^2S^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

oder wenn man dieselben Bezeichnungen wie oben einführt:

$$(A - 2B\xi)^2 = 4B^2S^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

Digitized by Google

d. h.:

$$\frac{A^2}{4} = B^2(S^2-1)\xi^2 + AB\xi + B^2S^2(\eta+\zeta^2).$$

Die Gleichung stellt ein Rotations-Ellipsoid oder Hyperboloid dar, je nachdem S grösser oder kleiner als Eins ist.

Dieselbe Gleichung bestimmt auch diejenige Fläche, durch welche parallel der Rotationsaxe eintretende Strahlen nach einem Punkte hin gebrochen werden, wenn man nämlich S mit $\frac{1}{S}$ vertauscht, da hier die Brechungsvermögen sich vertauschen.

Tritt hierbei der Strahl aus dem dichteren Medium ins dünnere, so muss $\frac{1}{S}$ grösser als Eins sein, man hat also ein Hyperboloid. Diese Gestalt würde z. B. der hintern Fläche einer Linse zu geben sein, welche parallele Strahlen in einen Punkt vereinigen soll, wenn man die vordere Fläche eben und senkrecht auf der Richtung der Strahlen machte, wo dann von der letztern keine Brechung stattfindet. — Selbstverständlich ist aber hierdurch die Farbenzerstreuung nicht aufgehoben. Indessen könnte eine solche Linse möglicher Weise für Sonnenbeobachtungen einigen Nutzen gewähren, wenn man ein einfarbiges Objectiv nähme.

Um auch ein Beispiel der Bestimmung der auf den gebrochenen Strahlen normalen Fläche zu geben, denken wir uns die Strahlen von einem Punkte ausgehend, also indem wir denselben als Anfangspunkt der Coordinaten annehmen, wieder:

$$u^2+v^2+w^2=r^2, \qquad \frac{u}{r}=\alpha, \qquad \frac{v}{r}=\beta, \qquad \frac{w}{r}=\gamma.$$

die brechende Fläche aber eben und der Ebene yz parallel. Es ist dann ζ *constant*

$$\lambda=\mu=0, \qquad \nu=1,$$

also in den Gleichungen 6):

$$\alpha' = S\alpha, \qquad \beta' = S\beta,$$

woraus sogleich folgt:

$$\gamma'^2 = 1-S^2(\alpha^2+\beta^2) = 1-S^2+S^2\gamma^2;$$

hieraus folgt dann:

$$\alpha' = \frac{Su}{r}, \quad \beta' = \frac{Sv}{r}, \quad \gamma' = \sqrt{1-\frac{S^2}{r^2}(u^2+v^2)} = \sqrt{1-S^2+\frac{S^2}{r^2}w^2}.$$

Ganz wie im vorigen Beispiele ist auch:

$$mu=\xi, \qquad mv=\eta, \qquad mw=\zeta, \qquad r^2m^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

also:

$$\frac{w-\zeta}{\gamma} = r(1-m)$$

$$\frac{u'-\xi}{\alpha'} = \frac{mr(u'-\xi)}{S\xi}, \qquad \frac{v'-\eta}{\beta'} = \frac{mr(v'-\eta)}{S\eta}$$

$$\frac{w'-\zeta}{\gamma'} = \frac{w'-\zeta}{\sqrt{1-S^2+\frac{S^2}{r^2}\frac{\zeta^2}{m^2}}} = \frac{mr(w'-\zeta)}{\sqrt{(1-S^2)(\xi^2+\eta^2)+\zeta^2}}.$$

Setzen wir also $Sr + \text{const.} = eS$, so ergibt sich aus den Gleichungen 14):

$$m(u'-\xi) = S^2\xi(e-m), \qquad m(v'-\eta) = S^2\eta(e-m),$$

$$m(w'-\zeta) = S(e-m)\sqrt{(1-S^2)(\xi^2+\eta^2)+\zeta^2}.$$

Aus diesen drei Gleichungen ist ξ und η zu eliminiren, da ζ *constant ist.* Die beiden ersten geben:

$$\xi = \frac{mu'}{S^2e+(1-S^2)m}, \qquad \eta = \frac{mv'}{S^2e+(1-S^2)m}$$

Digitized by Google

Dies in die Gleichung

$$r^2m^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

gesetzt gibt:

$$r^2m^2\,[S^2e + (1-S^2)\,m]^2 = m^2\,(w'^2 + v'^2) + \zeta^2\,[S^2e + (1-S^2)\,m)^2$$

und für ξ und η in den Werth von $m(w' - \zeta)$ gesetzt:

$$m^2\,(w' - \zeta)^2\,[S^2e + (1-S^2)\,m]^2 = S^2\,(e-m)^2\,(f\,(1-S^2)\,m^2\,(u'^2 + v'^2) + [S^2e + (1-S^2)\,m]^2\,\zeta^2).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ist dann m zu eliminiren. Da die Gleichung nur von w' und $u'^2 + v'^2$ abhängt, so stellt sie eine Rotationsfläche dar.

Da übrigens e beliebig ist, so kann man um eine der normalen Flächen zu finden, auch $e = 0$ nehmen. Setzen wir dann noch:

$$a'^2 + v'^2 = x'^2 w' = y,$$

so ergibt sich aus der ersten Gleichung:

$$r^2m^2\,(1-S^2)^2 = x^2 + \zeta^2\,(1-S^2)^2,$$

und aus der letzteren:

$$(y-\zeta)^2\,(1-S^2)^2 = S^2\,(1-S^2)\,x^2 + S^2\,(1-S^2)\,\zeta^2$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(y-\zeta)^2 - \frac{S^2}{1-S^2}\,x^2 = \zeta^2 S^2.$$

Es ist dies die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem S grösser oder kleiner als Eins ist, d. h. je nachdem der Strahl aus dem dichtern oder dünnern Medien kommt.

Das Bild des Punktes bilden die Evolutenflächen. Diese bestehen bei einer Rotationsfläche bekanntlich in der Rotationsaxe und in der durch Rotation der Evolute der Erzeugungslinie um die Rotationsaxe entstandenen Fläche.

Wir haben also hier als Bilder: Eine Grade, und die durch Rotation einer Ellipsen- bezuglich Hyperbel-Evolvente um dieselbe entstandene Fläche.

Der Fall, wo die eintretenden Strahlen parallel sind, würde sich, wenn man die Axen verlegte, hieraus leicht ableiten lassen. Es ist aber an sich klar, dass die austretenden Strahlen wieder parallel, also auf einer Ebene senkrecht sind.

Der hier betrachtete allgemeinere Fall ist der der Brechnug durch ein Prisma, wenn der betrachtete Punkt sich unmittelbar auf der einen Fläche befindet. Auch der Weg der Lichtstrahlen, welche von einem Punkte innerhalb eines ruhenden Gewässers in die Luft treten, ist hierdurch bestimmt.

Sehr leicht lassen sich diese Betrachtungen auch auf brechende Linien in der Ebene anwenden, wenn die einfallenden Strahlen alle in derselben Ebene liegen. Es ist dann v, v' und η constant zu nehmen. Der Fall ist genau derselbe, als wenn die brechende Fläche und die Normalfläche der einfallenden Strahlen Cylinderflächen mit paralleler Seite sind.

Sind τ und τ' bezüglich die Winkel des einfallenden und der des gebrochenen Strahles, ϑ der der Normale an die brechende Fläche mit der Axe der z, so hat man:

$$\alpha = \sin\tau, \qquad \gamma = \cos\tau$$
$$\alpha' = \sin\tau', \qquad \gamma' = \cos\tau'$$
$$\lambda = \sin\vartheta, \qquad \nu = \cos\vartheta$$
$$\varepsilon = \tau - \vartheta, \qquad \varepsilon' = \tau' - \vartheta$$
$$S = \frac{N}{N'} = \frac{\sin(\tau' - \vartheta)}{\sin(\tau - \vartheta)}$$
$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{dw}{du}, \qquad \operatorname{tg}\tau' = -\frac{dw'}{du'}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta = -\frac{d\zeta}{d\xi}$$

und die Gleichung des einfallenden und gebrochenen Strahles bezüglich:

$$x - \xi = (z-\zeta)\operatorname{tg}\tau, \qquad x - \xi = (z-\zeta)\operatorname{tg}\tau',$$

woraus sich dann ergibt:

Digitized by Google

15) $$u - \xi = -(w - \zeta)\frac{dw}{du}.$$

16) $$u' - \xi = (w' - \zeta)\operatorname{tg} \tau'$$

τ' ist hier bestimmt durch die Gleichung:

17) $$\sin(\tau' - \vartheta) = S \sin(\tau - \vartheta)$$

Handelt es sich um die Bestimmung der auf den gebrochenen Strahl normalen Linie (Cylinder), so ist aus Gleichung 15) u zu bestimmen und die Gleichungen 14) oder:

18) $$\frac{u' - \xi}{\sin \tau'} = \frac{w' - \zeta}{\cos \tau'} = S\frac{u - \xi}{\sin \tau} + \text{const.} = S\frac{w - \zeta}{\cos \tau} + \text{const.}$$

in Gemeinschaft mit:

19) $$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{d\zeta}{d\xi}, \qquad \operatorname{tg} \tau = -\frac{dw}{du}$$

gestatten ξ, ζ, u, w zu eliminiren.

Gehen z. B. die Strahlen von einem Punkte aus, sind also auf einem Kreise normal, so ist, wenn man dessen Mittelpunkt zum Anfangspunkt nimmt und den Radius r nennt:

$$\sin \tau = \frac{u}{r}, \qquad \cos \tau = \frac{w}{r}$$

$$\xi = mu, \qquad \zeta = mw$$

$$m^2 r^2 = \xi^2 + \zeta^2,$$

und die Gleichungen 18) werden:

$$\frac{u' - \xi}{\sin \tau'} = \frac{w' - \zeta}{\cos \tau'} = rS(1 - m) + \text{const.} = rS(e - m),$$

wenn $rS + \text{const.} = rSe$ gesetzt wird.

Indess ist selbst in diesem einfachen Falle die völlige Entwickelung im Allgemeinen noch schwierig. Es verdient daher bei ebenen Curven in vielen Fällen eine andere Methode den Vorzug.

Bestimmen wir die Schaar der einfallenden und der gebrochenen Strahlen direct durch diejenigen Curven, in welchen sich die einander unendlich nahen berühren, nicht auf welchen sie normal sind, so dass die der gebrochenen Strahlen entsprechende Curve die Caustische Linie ist.

Sei l der Winkel, welchen irgend ein Strahl AB vor der Brechung, l' (Fig. 422) derjenige, welchen er nach der Brechung BD mit einer festen, der Linie OA parallelen Richtung macht, λ der Winkel, welchen die Tangente der brechenden Linie BC im Punkt B, wo der Strahl hindurchgeht, mit eben dieser Linie OA macht, seien ferner s, s' die Bogen der bezüglich die ursprünglichen und gebrochenen Strahlen berührenden Linien, σ der der brechenden Linie, von beliebigen Anfangspunkten gezählt, AC, CD benachbarte Strahlen, BE und BF Lothe bezüglich auf BC und DC. Setzen wir noch $BA = a$, $DB = a'$, so ist:

$$BE = aM, \qquad BF = -a'M',$$

$$\text{Winkel } BCE = 2\,\mathrm{R} - \lambda - l = \mathrm{R} - \varepsilon$$

$$\text{Winkel } BCF = \lambda + l' = \mathrm{R} - \varepsilon'$$

$$EC = da - ds, \qquad DC = da' - ds',$$

wo ε und ε' wieder der Einfalls- und Brechungswinkel sind. Nun ist:

$$BE = BC \sin BCE, \qquad EC = BC \cos BCE$$

$$BF = BC \sin BCF, \qquad FC = BC \cos BCF,$$

d. h.:

A) $$adl = \quad d\sigma \sin(\lambda + l) = \quad d\sigma \cos \varepsilon$$

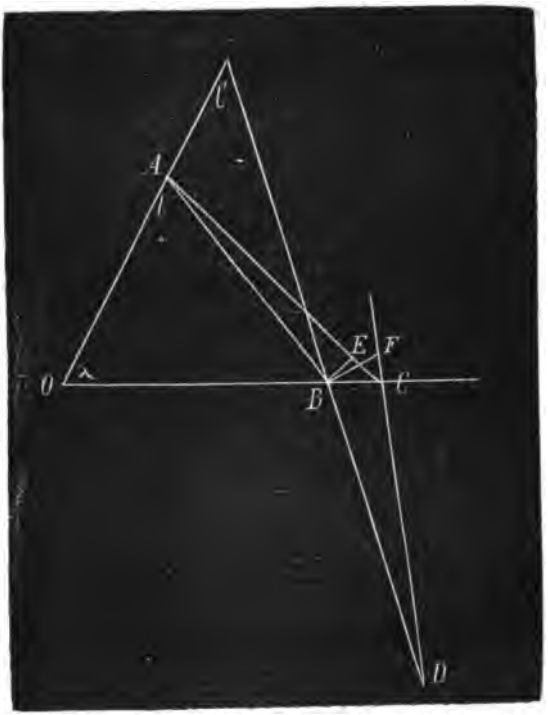
B) $$d(a - s) = -d\sigma \cos(\lambda + l) = \quad d\sigma \sin \varepsilon$$

C) $$a'dl' = -d\sigma \sin(\lambda + l') = -d\sigma \cos \varepsilon'$$

D) $$d(a' - s') = \quad d\sigma \cos(\lambda + l') = \quad d\sigma \sin \varepsilon'.$$

Digitized by Google

Fig. 422.



Die erste und vierte Gleichung gibt, da

$$\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = S$$

ist, auch:

$$\frac{d(a' - s')}{d(a - s)} = S$$

E) $$a' - s' = S(a - s) + \text{const.}$$

Die Constante ist gleich Null zu setzen, wenn man für $a = s$ auch $a' = s'$ setzt.

Auch gibt die Gleichung $\frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = S$ noch:

F) $$-\cos(\lambda + l') = S\cos(\lambda + l).$$

Im Falle der Spiegelung aber, wo $S = -1$, hat man, da l' nicht gleich l sein kann:

Fa) $$2\lambda + l + l' = 0.$$

Die Gleichung F) ersetzt eine der Gleichungen C) und D). Wird mittels E) noch a' aus C) eliminirt, so hat man:

G) $$[s' + S(a - s)]\, dl' = -d\sigma \sin(\lambda + l'),$$

oder im Falle der Spiegelung:

$$(s' + s - a)\ (2\,d\lambda + dl) = -d\sigma \sin(\lambda + l),$$

dies gibt wegen A):

$$(s' + s - a)\ (2\,d\lambda + dl) = -a\,dl,$$

d. h.:

Ga) $$2(s' + s - a)\,d\lambda + (s' + s)\,dl = 0.$$

Digitized by Google

Die Gleichungen A), B), F) und G) oder A), B), Fa) und Ga) im Falle der Spiegelung im Vereine mit den Beziehungen zwischen σ und λ, sowie zwischen s und l gestatten s, l, σ, λ a zu eliminiren, so dass eine Beziehung zwischen s' und l' bleibt, welche (vergl. den Artikel: Transformations-Coordinaten) die Gestalt der Curve bestimmt.

Gehen z. B. die Strahlen von einem Punkte aus, so ist $s = 0$, also im Falle der Spiegelung:

B) $$da = -d\sigma \cos(\lambda + l)$$

G) $$(s' - a)\,d\lambda + s'dl = 0,$$

Sind die einfallenden Strahlen parallel, so ist auch:

$$l = 0.$$

Dann verliert aber die Gleichung die Bedeutung, da die Länge a nicht von dem Vereinigungspunkt, der ins Unendliche fällt, sondern von einer beliebigen auf den Strahlen senkrechten Richtung auszuzählen ist. Es ist dann $CE = a$ zu setzen, also die Gleichung B) wird dann wieder:

$$da = -d\sigma \cos(\lambda + l).$$

Dagegen wird Gleichung E):

$$a' - s' = Sa$$

und deshalb wird C):

$$(Sa + s')\,dl' = -d\sigma \sin(\lambda + l') = d\sigma \sin(\lambda + l),$$

oder im Falle der Spiegelung:

$$(s' - a)\,dl' = d\sigma \sin(\lambda + l).$$

Die Rechnung wird besonders einfach, wenn zwischen den Winkeln eine lineare Relation:

$$l = \alpha\lambda + \beta$$

stattfindet. Setzen wir Spiegelung voraus, so gibt die Gleichung Fa):

$$l' = -(2 + \alpha)\lambda + \beta$$

und Ga):

$$2(s' + s - a) + \alpha(s' + s) = 0.$$

d. h.:

$$(2 + \alpha)(s' + s) = 2a.$$

Die Gleichungen A) und B) werden dann:

I) $$\alpha(2 + \alpha)(s' + s)\,d\lambda = 2 \sin[(1 + \alpha)\lambda - \beta]\,d\sigma$$

II) $$(2 + \alpha)\,ds' + \alpha ds = -2 \cos[(1 + \alpha)\lambda - \beta]\,d\sigma.$$

Es ist dann nur noch eine Beziehung zwischen s und l oder σ und λ anzunehmen.

Ist z. B. die reflectirende Fläche ein Kreis mit Radius r, so hat man:

$$\sigma = r\lambda$$

und somit aus Gleichung I):

$$\alpha(2 + \alpha)(s' + s) = 2r \sin[(1 + \alpha)\lambda - \beta)$$

und aus Gleichung II):

$$\frac{r(1 + \alpha)}{\alpha} \cos[(1 + \alpha)\lambda - \beta]\,d\lambda - ds = -r \cos[(1 + \alpha)\lambda - d]\,d\lambda,$$

oder:

$$ds = -\frac{r(1 + 2\alpha)}{\alpha} \cos[(1 + \alpha)\lambda - \beta]\,d\lambda$$

$$s = -\frac{r(1 + 2\alpha)}{\alpha(1 + \alpha)} \sin[(1 + \alpha)\lambda - \beta],$$

wo der Anfangswerth von s demgemäss zu bestimmen ist. Man hat also als Beziehung zwischen s und l:

III) $$s = -\frac{r(1 + 2\alpha)}{\alpha(1 + \alpha)} \sin\left(\frac{(1 + \alpha)l + \beta}{\alpha}\right).$$

Digitized by Google

Ferner ist:

$$s' = -s + \frac{2r}{\alpha(2+\alpha)} \sin[(1+\alpha)\lambda - \beta]$$

oder:

$$s' = \frac{r(4+7\alpha+2\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} \sin[(1+\alpha)\lambda - \beta],$$

d. h.

IV) $$s' = -\frac{r(4+7\alpha+2\alpha^2)}{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)} \sin\left(\frac{(1+\alpha)l' + \beta}{2+\alpha}\right).$$

Die Gleichungen 2) sind beide Epicycloiden oder Hypocycloiden, dies gibt den Satz:

„Wenn Strahlen, die eine cycloidische Linie berühren, auf einen Kreis fallen, so werden sie nach einer andern cycloidischen Fläche zurückgeworfen."

Damit beide Curven einander ähnlich seien, müsste man setzen:

$$2+\alpha = -\alpha, \qquad \alpha = -1.$$

Dies gibt jedoch für beide Curven kein Resultat, da der Nenner unendlich wird:

Setzt man aber direct $\alpha = -1$, so ist:

$$l = -\beta,$$

d. h. die Strahlen fallen parallel ein, man hat dann wegen B):

$$da = -d\sigma \cos(\lambda - \beta) = -rd\lambda \cos(\lambda - \beta)$$

$$a = -r \sin(\lambda - \beta) = r \sin\frac{l' + \beta}{2}.$$

Die Gleichung:

$$(s' - a)\, dl' = d\sigma \sin(\lambda + l')$$

gibt dann:

$$\left(s' - r \sin\frac{l'+\beta}{2}\right) dl' = r\frac{dl'}{2} \sin\frac{l'+\beta}{2}$$

d. h.

$$s' = \frac{3r}{2} \sin\frac{l'+\beta}{2},$$

also auch in diesem Falle ist die caustische Linie eine Hypocycloide. Es gibt aber auch einen Fall, wo die einfallenden Strahlen von einem Punkte ausgehen.

Ist nämlich $\alpha = -\frac{1}{2}$, so wird nach Gleichung III) $s = 0$, also in der That laufen die Strahlen in einen Punkt zusammen. Gleichung IV) gibt dann:

$$s' = \frac{8r}{3} \sin\frac{l' + 2\beta}{3}.$$

In diesem Falle ist übrigens:

$$l = -\frac{\lambda}{2} - \beta, \quad \lambda = -2(\beta + l')$$

und nach dem Satze, dass der Centriwinkel eines Kreises doppelt so gross als der Peripheriewinkel ist, ergibt sich hieraus, dass die einfallenden Strahlen von einem Punkte in der Peripherie der spiegelnden Linie ausgehen müssen. Also:

„Wenn Strahlen, die von einem Punkte aus auf einen Kreis fallen, in einer cycloidischen Curve wieder vereinigt werden sollen, so muss dieser Punkt in der Peripherie liegen."

Syzygien (Astronomie).

Diejenige Stellung der Planeten, wo sie sich mit der Sonne und der Erde in einer Graden, also entweder in Conjunction oder in Opposition befinden.

Beim Monde entsprechen die Syzygien also dem Neumonde und Vollmonde.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss.

R.

Rabatt (Praktisches Rechnen) 1.
Rad (Maschinenlehre) 4.
Rad 61.
Rad an der Welle (Radwelle) 61.
Radicand 61.
Radius 61.
Radius Vector 61.
Radius der Krümmung (Krümmungsradius) 61.
Radix 61.
Radlinie 61.
Radwelle 79.
Räderwerk 79.
Rammbär 79.
Ramme 79.
Rammklotz-Rammbär 84.
Rampe 84.
Raum 85.
Raumgrösse 86.
Raumlehre (Geometrie) 91.
Raumpendel 206
Rante (Rhombus) 219.
Reaction, Gegenwirkung (Mechanik) 219.
Reaction der Flüssigkeiten (Hydrodynamik) 220.
Reactionsrad 220.
Reactionsturbine 220.
Rechenknecht 220.
Rechenkunst 220.
Rechenmaschine 220.
Rechenprobe 221.
Rechnende Astronomie 223.
Rechtläufig (Astronomie) 223.
Reciprocität (Geometrie. Prinzip der Polarität oder des Dualismus) 223.
Reciprocitätsgesetz (Zahlenlehre) 225.
Reciproke Gleichung (Algebra) 226.
Reciproker Werth (umgekehrter Werth) 226.
Rectascension (Astronomie, auch grade Aufsteigung) 226.
Rectification der Curven (Geometrie) 226.
Reduction 237.
Reduction der Beobachtungen 238.
Reduction der Winkel auf den Horizont 238.
Reductionsrechnung (praktische Rechenkunst) 238.
Reflector 238.
Reflection, Zurückwerfung, Spiegelung (Optik) 238.
Refractor 239.
Refraction, Brechung (Optik) 239.
Regel-de-tri, Regula-de-tri (praktische Rechenkunst) 239.
Regenerator (Maschinenkunde) 241.
Regula cōci (Arithmetik) 241.
Regula falsi (Règles des fausses propositions) (Rechenkunst) 242.
Regulator 243.
Reibung (Friction, Mechanik) 243.
Reihe 260.
Relativ 336.
Rente (Praktisches Rechnen) 336.
Repartitionsrechnung (Gesellschaftsrechnung, praktisches Rechnen) 343.
Repartitionsinstrumente (Messkunst) 345.
Residuum (Analysis) 345.
Rest (Arithmetik) 345.
Resultante (Mittelkraft, Mechanik) 345.
Reversionspendel (Mechanik) 346.
Revolution, Umlauf (Astronomie) 346
Rheometer (Hydrometer, Hydrodynamik) 346.
Rhomboid (Geometrie) 346.
Rhombus (Geometrie) 346.
Riccatische Gleichung (Analysis) 346.
Riemenrad (Maschinenlehre) 346.
Ring (Geometrie) 346.
Röhrenbrücke (Wasserbaukunst) 347.
Röhrenleitung (Maschinenlehre) 347.
Röhrenventil 347.
Römerzinszahl (Chronologie) 347.
Rösselsprung 347.

Digitized by Google

Rolle (Maschinenlehre) 350.
Rollen oder Walzen (Cynematik) 354.
Rollenzug 354.
Rostpendel (praktische Mechanik) 354.
Rotation eines Körpers um eine feste Axe (Dynamik) 355.
Rotationsfläche (Geometrie) 381.
Rotationskörper 381.
Rotationszeit (Astronomie) 381.
Ruderrad 382.
Ruderschaufel 382.
Ruthe (Messkunst) 382.
Rudern (angewandte Hydraulik) 382.
Rükkehrpunkt, Spitze (Geometrie) 382.
Rückläufig (Astronomie) 382.
Rückläufige Reihe 382.
Rückschlägiges Wasserrad 382.

S.

Säculum (Chronologie) 383.
Säculare Störungen (Astronomie) 383.
Säule (Architektur) 383
Säulenweite 384.
Säulenzahl (Arithmetik) 384.
Saite (Akustik) 384.
Sammelglas (Optik) 384.
Sagitta, Pfeil (Trigonometrie) 384.
Satellit (Astronomie) 384.
Sattelrad (Maschinenlehre) 386.
Saturn (Astronomie) 386.
Saturnsmonde 387.
Saturnring 387.
Satz 388.
Saugheber (Hydrodynamik) 388.
Saughöhe 389.
Saugpumpe (Hydrodynamik) 389.
Saugröhre 400.
Saugschwungheber 400.
Saugstrahlpumpe 400.
Saugventil 400.
Saugventilator 400.
Scala 400.
Scenographie (Perspective) 400.
Schacht (Markscheidekunst) 400.
Schacht (Messkunst) 400.
Schachtruthe 400.
Schädlicher Raum 400.
Schaft 400.
Schall 400.
Schaltjahr 400.
Schaltmonat 400.
Schalttag 400.
Schatten (Optik) 400.
Schattenconstruction (beschreibende Geometrie und Perspective) 401.
Schattenriss (Zeichenkunst) 401.
Schattenzeiger (Gnomonik) 401.
Schaufel (Maschinenlehre) 401.
Schaufelrad 401.
Schaufelwerk (Hydraulik) 401.
Scheibenkunst (Hydraulik) 401.
Scheinbare Bewegung (Astronomie) 401.
Scheinbare Grösse (Optik) 401.
Scheinbarer Ort (Astronomie) 402.
Scheitel 402.
Scheitelkreise (Astronomie) 402.
Scheitellinie, Zenithlinie (Astronomie) 402.
Scheitelpunkt (Geometrie) 402.
Scheitelpunkt (Astronomie) 402.
Scheitrecht (Architectur) 402.
Schenkel (Geometrie) 402.
Schepel (Messkunst) 402.
Schieber, Schiebersteuerung, Schieberventil (Maschinenlehre) 402.
Schiebbock 402.
Schiebkarre (Maschinenlehre) 402.
Schief (Geometrie) 403.
Schiefe der Ekliptik (Astronomie) 403.
Schiefe Ebene (Mechanik) 403.
Schiefwinklig (Geometrie) 404.
Schiff (Hydraulik) 404.
Schlagwerk (Mechanik) 404.
Schleuse (Hydraulik) 404.
Schnecke (Maschinenlehre) 405.
Schneckenlinie (Geometrie) 405.
Schneckenrad (Hydraulik) 405.
Schnellwaage (Statik) 405.
Schnurrad (Maschinenlehre) 405.
Schöpfrad (Hydraulik) 405.
Scholium (allgemeine Mathematik) 406.
Schraube (Statik, Dynamik) 406.
Schraubengebläse 414.
Schraubenlinie (Geometrie) 414.
Schraubenrad (Maschinenlehre) 421.
Schraubenturbine 424.
Schubkraft 424.
Schubelasticität 424.
Schwere (Mechanik) 424.
Schwerebene (Statik und Geometrie) 431.
Schwerlinie (Statik und Geometrie) 431.
Schwerpunkt (Statik) 431.
Schwimmen (Hydrostatik) 442.
Schwingungen (Dynamik) 449.
Schwingungen der Luft 486.
Schwingungen des Aethers 498.
Schwingungsdauer 495.
Schwingungsebene 495.
Schwingungsweite 495.
Schwingungspunkt 495.
Schwungkraft (Centrifugalkraft, Dynamik) 495.
Schwungkugel-Regulator 497.
Schwungrad (Maschinenlehre) 497.
Schwungschaufel (Maschinenlehre) 502.
Scrupel (Messkunde) 502.
Secante (Geometrie) 502.
Secante (Trigonometrie) 502.
Sector (Geometrie) 502.
Secunde (Messkunst) 502.
Secundenpendel (Mechanik) 502.
Segel (Nautik und Dynamik) 502.
Segment (Geometrie) 502.

Digitized by Google

Segnersches Wasserrad (Hydraulik) 503.
Seh-Axe (Optik) 503.
Sehne (Geometrie) 503.
Seiger (Geometrie und Markscheidekunst) 503.
Seigerpunkt 503.
Seigerriss 503.
Seigerteufe 503.
Seil (Statik und Mechanik) 503.
Seilbahn (Mechanik) 504.
Seilcurve (Statik) 504.
Seilmaschinen (Statik) 508.
Seilpolygon (Statik) 508.
Seilreibung 510.
Seite (Geometrie) 510.
Seitenkraft (Componente, Statik) 510.
Seitwärtseinschneiden (Geodäsie) 510.
Semiparabola (Geometrie) 511.
Sexagesimalrechnung (Arithmetik) 511.
Sextant (Messkunst) 511.
Sicherheitsventil (Maschinenlehre) 511.
Sieden — Siedepunkt (Wärmelehre) 511.
Siderischer Monat (Chronologie und Astronomie) 511.
Siderischer Tag, Sterntag, (Chronologie und Astronomie) 511.
Siderisches Jahr (Chronologie und Astronomie) 511.
Simpsonsche Regel (Analysis und Geometrie 511.
Sinus (Trigonometrie) 513.
Sinusoide (Geometrie) 513.
Sinus versus, Quersinus (Trigonometrie) 513.
Situationskalkul (calculus situs) 513.
Skiagraphien 513.
Societätsrechnung (praktische Arithmetik) 513.
Sohle (Markscheidekunst) 513.
Solstitien, Sonnenwenden (Astronomie) 513.
Sommer (mathematische Geographie) 513.
Sonnencyclus (Chronologie) 513.
Sonnenfinsterniss (Astronomie) 514.
Sonnen- und Planetenrad (Maschinenlehre) 514.
Sonnentag (Chronologie 514.
Sonnenuhr (Chronologie und Gnomonik) 515.
Sonntagsbuchstabe (Chronologie) 516.
Spannkraft (Mechanik) 518.
Spannung (Mechanik) 518.
Sparren (Statik) 518.
Sparrenschub (Statik) 519.
Species (Arithmetik) 519.
Specifisches Gewicht (Statik und Physik) 519.
Specifische Wärme (Wärmelehre) 521.
Sperrklinke 521.
Sperrrad (Maschinenlehre) 521.
Sphärik (Geometrie) 523.
Sphärische Abweichung (Optik) 523.
Sphärisches Dreieck (Geometrie) 523.
Sphärische Trigonometrie 523.
Sphäroid (Geometrie) 523.
Spiegel (Optik) 523.
Spiegelfernrohr 523.
Spiegelsextant (Optik) 523.
Spiegeltelescop 524
Spindel (Maschinenlehre) 524.
Spirale (Geometrie) 524.
Spiralkorb (Maschinenlehre) 525.
Spiralpumpe (Maschinenlehre) 525.
Spiralrad (Maschinenlehre) 528.
Spirische Oberfläche (Geometrie) 530.
Spitze (Geometrie) 530.
Splint (Maschinenlehre) 530.
Sprengwerke (architektonische Statik) 530.
Springbrunnen (Mechanik) 530.
Spritze (Maschinenlehre) 530.
Sprossenrad (Maschinenlehre) 530.
Spröde (Mechanik) 530.
Stabilität (Mechanik) 530.
Stabilitätscoefficient (Statik) 533.
Staberad (Hydraulik) 533.
Stadium (Messkunst) 533.
Stampfer, Stempel (Maschinenlehre) 533.
Stampfwerk, Pochwerk (Maschinenlehre) 533.
Standlinie (Geodäsie) 533.
Stange (Maschinenlehre) 533.
Stange, gezahnte, Zahnstange (Maschinenlehre) 434
Stangenzirkel (Messkunst) 535.
Statik 535.
Statisches Moment (Mechanik) 571.
Stauung (Hydrodynamik) 571.
Steifigkeit (Statik) 571.
Sterbekasse (praktische Arithmetik) 573.
Sterblichkeits-Tafeln (praktische Arithmetik) 573.
Stereographische Projection 574.
Stereometrie 574.
Sternbedeckung (Astronomie) 574.
Sternfigur (Geometrie) 574.
Sternjahr (Astronomie) 574.
Sternkunde 574.
Sternrad (Hydraulik) 574.
Sterntag 574
Sternzeit (Chronolgie) 574.
Stetigkeit, Continuität (Analysis) 574.
Steuer (Hydraulik) 574.
Steuerung (Maschinenlehre) 574.
Stirnrad (Maschinenlehre) 574.
Störungen (Astronomie) 574.
Storchschnabel (Pantograph) 574.
Storchschnabel (Maschinenlehre) 574.
Storniren (kaufmännische Rechenkunst) 574.
Stoss (Dynamik) 574.
Strahl (Geometrie) 593.
Strahl (Optik, Wellenlehre) 593.
Straubrad (Maschinenlehre) 593.
Stübchen (Messkunst) 593.

Stützpunkt (Hypomochlion, Statik) 593.
Stufenrad (Maschinenlehre) 593.
Stunde (Chronologie und Astronomie) 593
Stunde (Markscheidekunst) 593.
Stundenkreis (Astronomie) 593.
Stundenwinkel (Astronomie) 593.
Sturmscher Satz (Algebra) 593.
Subnormale (Geometrie) 605.
Substitution (Algebra und Analysis) 605.
Substitution, lineare (Algebra) 605.
Subtangente (Geometrie) 685.
Subtraction, Abziehen (Arithmetik) 685.
Summe (Arithmetik) 685.
Supplement (Trigonometrie) 685.
Supplementardreieck, Polardreieck (Sphärik) 685.
Symbol (Analysis) 685.
Symmetrie (Algebra) 690.
Symmetrisch (Algebra) 690.
Symmetrisch (Geometrie) 690.
Symmetrische Determinante (Algebra) 691.
Symmetrische Functionen (Algebra) 691.
Synodischer Monat (Astronomie) 694.
Synthesis (allgemeine Grössenlehre) 694.
System (allgemeine Grössenlehre) 694.
System — der Krystalle (Krystallographie) 694.
System — der Milchstrasse (Astronomie) 699.
System — mechanisches (Dynamik) 703.
System — optisches (Optik) 704.
Syzygien (Astronomie) 729.

Druck von J. F. Starcke in Berlin.

Digitized by Google

Verbesserungen.

Seite 193 Zeile 8 von unten rechts ist nach dem Worte Beweis zunächst einzuschieben: Sei zunächst das Parallelepipedon bei A rechtwinklig.

Seite 194 Zeile 7 von oben links vor: „Hieraus folgt dann," ist einzuschieben: Ist das Parallepipedon schiefwinklig, so zerlegt man es durch eine Anzahl $ABCD$ paralleler Ebenen in kleinere Parallelepipeda. Wächst deren Anzahl ins Unendliche, so kann jedes, in dem man zwischen beiden Grundflächen von den Eckpunkten der unteren senkrechte Linien zieht durch ein rechtwinkliges ersetzt werden, dessen Unterschied von dem gegebenen mit dem Zunehmen der Anzahl verschwindet. Von jedem dieser Parallelepipeda *gilt* dann der obige Beweis.

Ausserdem ist im fünften Bande folgende Aenderung zu machen.

Seite 283 Zeile 15 links von unten lies:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{0}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{\varphi(x_0)}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x_1)}\int_{\varphi(y)}^{x_1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google